CENGAGE Learning™

Álgebra y Trigonometría

CON GEOMETRÍA ANALÍTICA



EARL W. SWOKOWSKI • JEFFERY A. COLE

13a. edición

ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

CON GEOMETRÍA ANALÍTICA

DÉCIMO TERCERA EDICIÓN

EARL W. SWOKOWSKI

JEFFERY A. COLE
Anoka-Ramsey Community College

Traducción:
Patricia Solorio Gómez

Revisión técnica:
Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional Interdisciplinaria
en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning™

Álgebra y trigonometría con geometría analítica,
Décimo tercera edición
Swokowski, Earl W./
Jeffery A. Cole

Director de producto y desarrollo Latinoamérica:
Daniel Oti Yvonnet

Director editorial y de producción Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Editor:
Sergio R. Cervantes González

Coordinadora de producción editorial:
Abril Vega Orozco

Editor de producción:
Timoteo Eliosa García

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Ilustrador:
Scientific Illustrators

Diseño de portada:
Roger Knox

Imagen de portada:
David J. Nightingale, Chromasia.com

Composición tipográfica:
Imagen Editorial

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 14 13 12 11

Traducido del libro:
Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, 13th ed.
Earl W. Swokowski/Jeffery A. Cole
Publicado en inglés por Brooks/Cole, Cengage Learning, © 2011
ISBN-13: 978-0-8400-6852-1
ISBN-10: 0-8400-6852-2

Datos para catalogación bibliográfica:
Swokowski, Earl W./Jeffery A. Cole
Álgebra y trigonometría con geometría analítica,
Décimo tercera edición
ISBN: 978-607-481-779-9

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

A LA MEMORIA DE EARL W. SWOKOWSKI

Contenido

Lista de temas sobre la calculadora graficadora

Hay muchos otros sitios en los que se usa calculadora graficadora. A continuación se muestra los que incluyen secuencias específicas de tecleo.

Prefacio

La décimo tercera edición de *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* incluye más de 650 nuevos ejercicios y 11 nuevos ejemplos, muchos de los cuales resultaron de sugerencias de usuarios y revisores de la undécima edición. Todos se han incorporado sin sacrificar la exactitud matemática que ha sido de capital importancia para el éxito de este texto.

Una nueva característica del texto son los exámenes de capítulo, que incluyen preguntas directas que son representativas de las interrogantes previas, así como cuestiones conceptuales únicas en estos exámenes.

La inclusión de ejemplos e insertos para calculadora graficadora, con secuencias específicas de tecleo y pantallas en color para la TI-83/4 Plus, ha dado valor agregado al texto para los estudiantes, en especial para quienes trabajan por primera vez con una calculadora graficadora. También da a profesores más flexibilidad en términos de la forma en que se aproximan a una solución. El diseño del texto hace que los insertos de tecnología se identifiquen fácilmente, y se citan en una tabla de contenido especial de tecnología para que se puedan buscar con más facilidad.

A continuación veremos un breve repaso de los capítulos, seguido por una breve descripción del curso de Álgebra Universitaria que imparto en el Anoka-Ramsey Community College y luego una lista de características generales del texto.

Repaso

CAPÍTULO 1 Este capítulo contiene un resumen de algunos temas de álgebra básica. El estudiante debe estar familiarizado con gran parte de este material, pero también es un desafío para él por los ejercicios que lo preparan para el cálculo. Se introducen y usan operaciones con calculadora graficadora para verificar operaciones algebraicas.

CAPÍTULO 2 Ecuaciones y desigualdades se resuelven algebraica y numéricamente en este capítulo con apoyo de tecnología; se resuelven gráficamente en capítulos subsiguientes. El estudiante ampliará sus conocimientos de estos temas; por ejemplo, ha trabajado con la fórmula cuadrática pero se le pedirá que la relacione con factorización y trabajo con coeficientes que no son números reales (vea ejemplos 10 y 11 de la sección 2.3).

CAPÍTULO 3 Funciones y gráficas en dos dimensiones se introducen en este capítulo. Se dan instrucciones específicas para calculadoras graficadora para casi todas las funciones básicas de gráficas, por ejemplo hallar ceros y puntos de intersección, así como algunos de los temas más difíciles, como es hallar un modelo de regresión y graficar una función definida por partes. Vea en el ejemplo 10 actualizado de la sección 3.5 una aplicación del tema (impuestos) que relaciona tablas, fórmulas y gráficas. La notación de flecha, previamente presentada en la sección 4.5, se ha trasladado a la sección 3.2 y se refiere más a menudo.

CAPÍTULO 4 Este capítulo inicia con una exposición de funciones polinomiales y alguna teoría de polinomios. En la sección 4.5 se da un tratamiento completo de funciones racionales, que es seguida por una sección sobre variaciones que incluye gráficas de funciones simples racionales y con polinomios.

CAPÍTULO 5 Las funciones inversas es el primer tema de análisis, seguido de varias secciones que se refieren a funciones exponenciales y logarítmicas. El modelado de una función exponencial recibe atención adicional en este capítulo (vea el ejemplo 4 de la sección 5.1).

CAPÍTULO 6 El primer tema de este capítulo se refiere a ángulos. A continuación, se introducen funciones trigonométricas usando un método de triángulo rectángulo y luego se definen en términos de un círculo unitario. Aparecen identidades trigonométricas básicas en todo el capítulo, que concluye con secciones sobre gráficas trigonométricas y problemas aplicados.

CAPÍTULO 7 Este capítulo contiene principalmente identidades trigonométricas, fórmulas y ecuaciones. La última sección contiene definiciones, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas inversas.

CAPÍTULO 8 La ley de los senos y la ley de los cosenos se usan para resolver triángulos oblicuos. A continuación se introducen y se usan vectores en aplicaciones. Las últimas dos secciones se relacionan con funciones trigonométricas y números complejos.

CAPÍTULO 9 Los sistemas de desigualdades y programación lineal siguen inmediatamente a la solución de sistemas por sustitución y eliminación. A continuación, se introducen matrices que se emplean para resolver sistemas. Este capítulo concluye con una exposición de determinantes y fracciones parciales.

CAPÍTULO 10 Este capítulo se inicia con una exposición de sucesiones y se ha incluido un importante apoyo tecnológico. Las fórmulas para el n-ésimo término de sucesiones aritméticas y geométricas se han generalizado para encontrar el n-ésimo término usando cualquier término, no sólo el primero. La inducción matemática y el teorema del binomio aparecen a continuación, seguidos por temas de conteo. La última sección es acerca de probabilidad e incluye temas como son las probabilidades y el valor esperado. Mi ejemplo favorito presenta un nuevo tipo de problema de probabilidad y la solución se puede aplicar a muchos problemas similares (vea el ejemplo 9 de la sección 10.8).

CAPÍTULO 11 Con secciones sobre la parábola, elipse e hipérbola se inicia este capítulo. Dos formas diferentes de representar funciones se dan en las siguientes secciones sobre ecuaciones paramétricas y coordenadas polares. Se han añadido cerca de 100 nuevos ejercicios.

Mi curso

En el Anoka-Ramsey Community College en Coon Rapids, Minnesota, Álgebra Universitaria I es un curso de tres créditos que se imparte en un semestre. Para estudiantes que tratan de tomar cálculo, este curso es seguido por un curso de cuatro créditos en un semestre, Álgebra Universitaria II y Trigonometría. Este curso también sirve como curso terminal de matemáticas para numerosos estudiantes.

Las secciones cubiertas en Álgebra Universitaria I son

3.1-3.7, 4.1, 4.5 (parte), 4.6, 5.1-5.6, 9.1-9.4, 10.1-10.3 y 10.5-10.8.

Los capítulos 1 y 2 se usan como material de repaso en algunas clases y las secciones restantes se imparten en el siguiente curso. Se requiere calculadora graficadora en algunas secciones y es opcional en otras.

Características

Una lista separada de temas para calculadora graficadora En las páginas ix y x, hay una lista de temas para calculadora graficadora para rápida consulta.

Ilustraciones Se dan breves demostraciones del uso de definiciones, leyes y teoremas en forma de ilustraciones.

Tablas Las tablas dan a estudiantes fácil acceso a resúmenes de propiedades, leyes, gráficas, relaciones y definiciones. Estas tablas contienen con frecuencia ilustraciones sencillas de los conceptos que se introducen.

Ejemplos Titulados para fácil referencia, todos los ejemplos dan soluciones detalladas a problemas semejantes a los que aparecen en conjuntos de ejercicios. Muchos ejemplos incluyen gráficas o tablas para ayudar al estudiante a entender procedimientos y soluciones.

Explicaciones paso a paso Para ayudar a estudiantes a seguirlos con más facilidad, muchas de las soluciones en ejemplos contienen explicaciones paso a paso.

Ejercicios de análisis Cada uno de los capítulos termina con varios ejercicios que son apropiados para comentarse en grupos pequeños. Estos ejercicios van de fáciles a difíciles y de teóricos a orientados a aplicaciones.

Demostraciones Las soluciones a algunos ejemplos se demuestran de manera explícita, para recordarles a estudiantes que deben comprobar que sus soluciones satisfagan las condiciones de los problemas.

Ejemplos para calculadora graficadora Siempre que es apropiado, ejemplos que requieren el uso de una calculadora graficadora se incluyen en el texto. Estos ejemplos están designados con un icono de calculadora (mostrado a la izquierda) e ilustrados con una figura reproducida de una pantalla de calculadora graficadora.

Insertos para calculadora graficadora Además de los ejemplos para calculadora graficadora, estos insertos se incluyen para destacar algunas de las opciones de calculadoras graficadoras y/o ilustrar su uso para realizar las operaciones bajo discusión. Vea, por ejemplo, "Uso del modo de sucesión de la TI-83/4" en la sección 10.1.

Ejercicios con calculadora graficadora En secciones apropiadas se incluyen ejercicios específicamente diseñados para ser resueltos con una calculadora graficadora. Estos ejercicios también están designados con un icono de calculadora (mostrado a la izquierda).

Aplicaciones Para aumentar el interés del estudiante y ayudarlo a relacionar los ejercicios con situaciones actuales de la vida real, se han titulado ejercicios

aplicados. Una mirada al Índice, en la parte final del libro, deja ver la amplia variedad de temas. Muchos profesores han indicado que las aplicaciones constituyen una de las mejores características del texto.

Ejercicios Los conjuntos de ejercicios empiezan con problemas de práctica de rutina y de manera gradual aumentan a problemas más difíciles. Un amplio número de ejercicios contienen gráficas y datos tabulados; otros, requieren que los estudiantes encuentren un modelo matemático para la información dada. Muchos de los nuevos ejercicios requieren que el estudiante entienda la relación conceptual de una ecuación y su gráfica.

Los problemas aplicados aparecen por lo general hacia el final de un conjunto de ejercicios, para que el estudiante adquiera confianza al trabajar con las nuevas ideas que se le han presentado, antes que trate problemas que requieren mayor análisis y síntesis de estas ideas. Los ejercicios de repaso del final de cada uno de los capítulos se pueden usar para prepararse para exámenes.

Exámenes de capítulo Esta es una característica nueva en la presente edición. Estos exámenes contienen preguntas que son representativas de los ejercicios en las secciones, así como preguntas conceptuales únicas. Espero que los profesores compartan sus preguntas favoritas del examen y, por favor, envíenmelas.

Directrices Las directrices se presentan en recuadros y enumeran los pasos en un procedimiento o técnica para ayudar al estudiante a resolver problemas en una forma sistemática.

Advertencias En todo el libro se ven avisos de atención para alertar a estudiantes sobre errores comunes.

Figuras Formando un paquete de figuras que no tiene igual, figuras y gráficas aquí han sido generadas en computadora para máxima precisión, usando para ello lo último en tecnología. Se emplean colores para distinguir entre partes diferentes de figuras. Por ejemplo, la gráfica de una función se puede mostrar en azul y la de una segunda función en rojo. Las leyendas son del mismo color que las partes de la figura que identifican.

Diseño del texto El texto ha sido diseñado para asegurar que todas las exposiciones sean fáciles de seguir y se han resaltado conceptos importantes. Se usa color en forma pedagógica para aclarar gráficas complejas y ayudar al estudiante a visualizar problemas aplicados. Quienes ya antes adoptaron este texto han confirmado que esto constituye un equilibrio muy atractivo en términos del uso del color.

Anexos Los anexos al final del texto contienen resúmenes muy útiles de álgebra, geometría y trigonometría.

Apéndices El Apéndice I, "Gráficas comunes y sus ecuaciones", es un resumen ilustrado de gráficas y ecuaciones que los estudiantes por lo general encuentran en matemáticas de precálculo. El Apéndice II, "Un resumen de transformaciones de gráficas," es una sinopsis ilustrativa de las transformaciones básicas de gráficas que se examinan en el texto: desplazamiento, estiramiento, compresión y reflexión. El Apéndice III, "Gráficas de funciones trigonométricas y sus inversas," contiene gráficas, dominios e imágenes de las seis funciones trigonométricas y sus inversas. El Apéndice IV, "Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales en una circunferencia unita-

ria," es una referencia a página entera para los ángulos más comunes en una circunferencia unitaria, valiosa para estudiantes que están tratando de aprender los valores de funciones trigonométricas básicas.

Sección de respuestas La sección de respuestas al final del texto da respuestas para casi todos los ejercicios de número impar, así como respuestas para todos los ejercicios de repaso del capítulo. Dedicamos un considerable esfuerzo para hacer de esta sección un método de aprendizaje para estudiantes en lugar de sólo verificar respuestas. Por ejemplo, se dan demostraciones para problemas de inducción matemática. Las respuestas numéricas para gran cantidad de ejercicios están expresadas tanto en forma exacta como aproximada. Siempre que es posible se incluyen gráficas, demostraciones y sugerencias. Las soluciones y respuestas elaboradas por el autor aseguran un alto grado de consistencia entre el texto, los manuales de soluciones y las respuestas.

Herramientas de enseñanza para el profesor

Manual de soluciones para el profesor Por Jeffery A. Cole
(ISBN-10: 1-111-57311-5; ISBN-13: 978-1-111-57311-9)
Este manual elaborado por el autor incluye respuestas a todos los ejercicios del texto y soluciones detalladas a casi todos los ejercicios. El manual ha sido revisado totalmente para mayor precisión.

Enhanced WebAssign
(ISBN-10: 0-538-73810-3; ISBN-13: 978-0-538-73810-1)
Exclusivamente para Cengage Learning, Enhanced WebAssign® ofrece un amplio programa en línea para álgebra y trigonometría para fomentar la práctica que es tan importante para el dominio de los conceptos. La pedagogía meticulosamente elaborada y ejercicios en los textos ha demostrado ser más eficaz en Enhanced WebAssign, complementado con apoyo tutorial multimedia y retroalimentación inmediata de cómo los estudiantes completan sus tareas.

Las características clave incluyen:

- Lea las páginas del libro electrónico, vea los videos, chat y enlaces al respecto.
- ¡Nuevo! Premium EBook con resaltados, toma de notas y funciones de búsqueda, así como enlaces a recursos multimedia.
- ¡Nuevo! Planes de estudio personal (sobre la base de preguntas de diagnóstico), que identifican temas que los estudiantes necesitan dominar para los capítulos que siguen.
- Problemas algorítmicos, que le permiten asignar una versión única a cada estudiante.
- Practicar con otra versión característica (activada por el instructor a discreción), permite que los estudiantes intenten las preguntas con nuevos conjuntos de valores hasta que se sientan lo suficientemente seguros como para trabajar el problema original.
- GraphPad, permite a los estudiantes graficar segmentos de recta, parábolas y círculos, así como responder a las preguntas.
- MathPad, que simplifica la entrada de los símbolos matemáticos.

Solution Builder www.cengage.com/solutionbuilder
Esta base de datos en línea para el instructor ofrece soluciones completas a todos los ejercicios en el texto, lo que le permite crear impresiones personalizadas, soluciones seguras (en formato PDF) que coinciden exactamente con los problemas que se asignan en la clase.

PowerLecture with ExamView

ISBN-10: 1-111-57313-1; ISBN-13: 978-1-111-57313-3

Este CD-ROM ofrece al instructor las herramientas de medios dinámicos para la enseñanza. Crear, entregar y personalizar las pruebas (tanto impresas como en línea) en cuestión de minutos con ExamView® Computerized Testing Featuring Algorithmic Equations. Construya fácilmente conjuntos de soluciones para las tareas o exámenes con Solution Builder manuales de soluciones en línea. Microsoft® PowerPoint® lecturas en trasparencias y figuras del libro también se incluyen en este CD-ROM.

CengageBrain.com Para acceder a materiales de cursos adicionales y recursos adicionales, por favor visite www.cengagebrain.com. En la página de inicio de CengageBrain.com, busque el ISBN de su título (datos de la portada trasera de su libro) utilizando el cuadro de búsqueda en la parte superior de la página. Esto le llevará a la página del producto donde se pueden encontrar los recursos adicionales de libre acceso.

Herramientas de aprendizaje para el estudiante

Manual de Soluciones para el Estudiante

(ISBN-10: 1-111-57335-2; ISBN-13: 978-1-111-57335-5)

Este manual elaborado por el autor da soluciones para todos los ejercicios de número impar del texto, estrategias para resolver ejercicios adicionales y numerosas sugerencias útiles y advertencias.

Enhanced WebAssign

ISBN-10: 0-538-73810-3; ISBN-13: 978-0-538-73810-1

Enhanced WebAssign está diseñado para que usted pueda hacer su tarea en línea. Este sistema probado y fiable utiliza la pedagogía y el contenido que se encuentra en este texto, y luego lo mejora para ayudarle a aprender álgebra y trigonometría con mayor eficacia. Las tareas graduadas le permiten automáticamente concentrarse en su aprendizaje y se les brinda ayuda de estudio interactivo fuera de clase.

DVDs específicos del texto

(ISBN-10: 1-111-58077-4; ISBN-13: 978-1-111-58077-3)

Este conjunto de DVDs presenta el material de cada uno de los capítulos del texto, desglosado en lecciones de 10 a 20 minutos para la solución de problemas y abarca cada una de las secciones.

CengageBrain.com Para acceder a materiales de cursos adicionales y recursos adicionales, por favor visite www.cengagebrain.com. En la página de inicio de CengageBrain.com, busque el ISBN de su título (datos de la portada trasera de su libro) utilizando el cuadro de búsqueda en la parte superior de la página. Esto le llevará a la página del producto donde se pueden encontrar los recursos adicionales de libre acceso.

Reconocimientos

Muchos cambios para esta edición se deben a las siguientes personas, que revisaron el manuscrito y/o hicieron sugerencias para aumentar la utilidad del texto para el estudiante:

Elsie Campbell, Angelo State University
Ronald Dotzel, University of Missouri-St. Louis
Sherry Gale, University of Cincinnati
Sheila Ledford, Coastal Georgia Community College
Chris Parks, Indiana University
Brenda Shryock, University of North Carolina at Chapel Hill
Lisa Townsley, University of Georgia
Stephanie Vance, Adams State College
Loris Zucca, Lone Star College—Kingwood

Además, doy las gracias a Marv Riedesel y Mary Johnson por su revisión precisa de ejemplos nuevos y revisados y de ejercicios.

Estoy agradecido por la excelente cooperación del personal de Brooks/Cole, en especial al grupo editorial de Gary Whalen Stacy Green, Cynthia Ashton y Stefanie Beck. Gracias especiales a Lynh Pham por el manejo de muchos temas de tecnología y a Mia Dreyer por su ayuda en la preparación de los manuscritos. Sally Lifland, Magín Gail, Hoover Jane y Ostrander Quica, de Lifland et al., Bookmakers, que vio el libro en todas las etapas de producción, tuvo un cuidado excepcional en ver que no se produjeran inconsistencias y ofreció muchas sugerencias útiles. El fallecido George Morris, de Scientific Illustrators, creó el paquete de arte matemáticamente preciso y actualizó todo el arte a través de varias ediciones. Esta tradición de excelencia se sigue llevando a cabo por su hijo Brian.

Además de todas las personas nombradas aquí, me gustaría expresar mi sincera gratitud a numerosos estudiantes y profesores que han ayudado a dar forma a mis puntos de vista sobre educación en matemáticas. Por favor siéntanse en entera libertad de escribirme sobre cualquier aspecto de este texto, que yo valoro sus opiniones.

Jeffery A. Cole

1

Conceptos fundamentales de álgebra

La palabra *álgebra* proviene de *ilm al-jabr w'al muqabala*, título de un libro escrito en el siglo IX por el matemático árabe Al-Juarismi. El título se ha traducido como la ciencia de restauración y reducción, lo cual significa trasponer y combinar términos semejantes (de una ecuación). La transliteración latina de *al-jabr* llevó al nombre de la rama de las matemáticas que ahora llamamos álgebra.

En álgebra usamos símbolos o letras, por ejemplo a, b, c, d, x, y, para denotar números arbitrarios. Esta naturaleza general del álgebra está ilustrada por las numerosas fórmulas empleadas en ciencia y la industria. A medida que el lector avance en este texto y pase a cursos más avanzados en matemáticas, o a campos de actividad donde se utilizan matemáticas, estará cada vez más consciente de la importancia y poder de las técnicas algebraicas.

1.1 Números reales

Los números reales se usan en toda la matemática y el estudiante debe estar familiarizado con los símbolos que los representan, por ejemplo

$$1, \quad 73, \quad -5, \quad \tfrac{49}{12}, \quad \sqrt{2}, \quad 0, \quad \sqrt[3]{-85}, \quad 0.33333\ldots, \quad 596.25,$$

y otros. Los **enteros positivos,** o **números naturales,** son

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots.$$

Los **números enteros** (o *enteros no negativos*) son los números naturales combinados con el número 0. Los **enteros** se escriben como sigue

$$\ldots, \quad -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

En todo este texto, las letras minúsculas $a, b, c, x, y, \ldots$ representan números reales arbitrarios (también llamados *variables*). Si a y b denotan el mismo número real, escribimos $a = b$, que se lee "a **es igual a** b" y se denomina **igualdad.** La notación $a \neq b$ se lee "a ***no es*** **igual a** b".

Si a, b y c son enteros y $c = ab$, entonces a y b son **factores**, o **divisores**, de c. Por ejemplo, como

$$6 = 2 \cdot 3 = (-2)(-3) = 1 \cdot 6 = (-1)(-6),$$

Sabemos que 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6 son factores de 6.

Un entero positivo p diferente de 1 es **primo** si sus únicos factores positivos son 1 y p. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. El **teorema fundamental de la aritmética** expresa que todo entero positivo diferente de 1 se puede expresar como el producto de números primos en una forma y sólo una (excepto por el orden de los factores). Algunos ejemplos son

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7, \quad 540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Un **número racional** es un número real que se puede expresar en la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Note que todo entero a es un número racional, dado que se puede expresar en la forma $a/1$. Todo número real se puede expresar como decimal, y las representaciones decimales para números racionales son *finitas* o *no finitas* y *periódicas*. Por ejemplo, podemos demostrar, con el uso del proceso aritmético de la división, que

$$\tfrac{5}{4} = 1.25 \quad \text{y} \quad \tfrac{177}{55} = 3.2181818\ldots,$$

donde los dígitos 1 y 8 en la representación de $\frac{177}{55}$ se repiten indefinidamente (a veces se escribe como $3.2\overline{18}$).

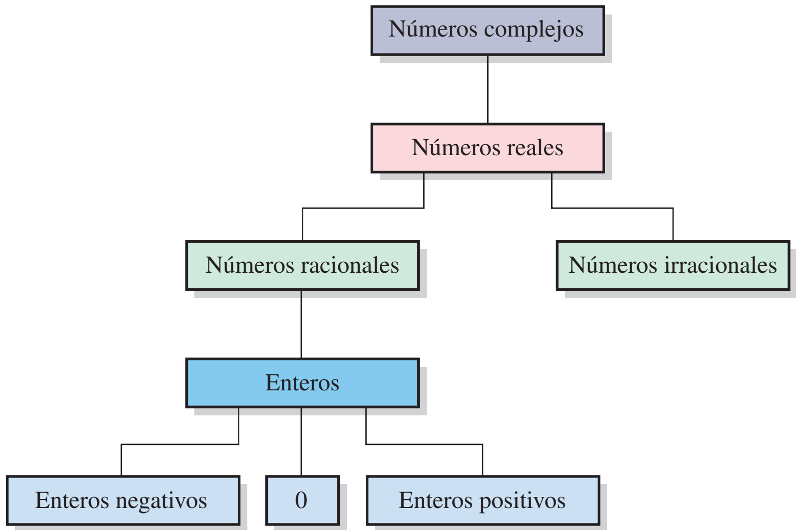
Los números reales que no son racionales son **números irracionales.** Las representaciones decimales para números irracionales son siempre *no finitas y no periódicas.* Un número irracional común, denotado por π, es la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. A veces usamos la notación $\pi \approx 3.1416$ para indicar que π **es aproximadamente igual a** 3.1416.

En escritura técnica, el uso del símbolo $\doteq$ **es aproximadamente igual a** es conveniente.

No hay número *racional* b tal que $b^2 = 2$, donde b^2 denota $b \times b$, pero hay un número *irracional* denotado por $\sqrt{2}$ (la **raíz cuadrada** de 2), tal que $(\sqrt{2})^2 = 2$.

El sistema de **números reales** está formado por todos los números racionales e irracionales. Las relaciones entre los tipos de números empleados en álgebra están ilustradas en el diagrama de la figura 1, donde una línea que enlaza dos rectángulos significa que los números mencionados en el rectángulo más alto incluyen los del rectángulo más bajo. Los números complejos, que se estudian en la sección 2.4, contienen a todos los números reales.

FIGURA 1 Tipos de números empleados en álgebra



Los números reales son **cerrados con respecto a la operación de adición** (denotada por $+$); esto es, a todo par a, b de números reales le corresponde exactamente un número real $a + b$ llamado **suma** de a y b. Los números reales son también **cerrados con respecto a la multiplicación** (denotada por $\times$); esto es, a todo par a, b de números reales le corresponde exactamente un número real $a \times b$ (también denotado por ab) llamado **producto** de a y b.

Importantes propiedades de la adición y multiplicación de números reales aparecen en la tabla siguiente.

Propiedades de los números reales

Terminología	Caso general	Significado
(1) La adición es **conmutativa.**	$a + b = b + a$	El orden es indiferente cuando se suman dos números.
(2) La adición es **asociativa.**	$a + (b + c) = (a + b) + c$	La agrupación es indiferente cuando se suman tres números.
(3) 0 es la **identidad aditiva.**	$a + 0 = a$	La suma de 0 con cualquier número da el mismo número.
(4) $-a$ es el **inverso aditivo,** o **negativo,** de a.	$a + (-a) = 0$	La suma de un número y su negativo da 0.
(5) La multiplicación es **conmutativa.**	$ab = ba$	El orden es indiferente cuando se multiplican dos números.
(6) La multiplicación es **asociativa.**	$a(bc) = (ab)c$	La agrupación es indiferente cuando se multiplican tres números.
(7) 1 es la **identidad multiplicativa.**	$a \cdot 1 = a$	La multiplicación de cualquier número por 1 da el mismo número.
(8) Si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a}$ es el **inverso multiplicativo,** o **recíproco,** de a.	$a\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1$	La multiplicación de un número diferente de cero por su recíproco da 1.
(9) La multiplicación es **distributiva** sobre la adición.	$a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$	La multiplicación de un número y una suma de dos números es equivalente a multiplicar cada uno de los dos números por el número y luego sumar los productos.

Como $a + (b + c)$ y $(a + b) + c$ son siempre iguales, podemos usar $a + b + c$ para denotar este número real. Usamos abc por $a(bc)$ o $(ab)c$. Del mismo modo, si cuatro o más números reales a, b, c, d se suman o multiplican, podemos escribir $a + b + c + d$ para su suma y $abad$ para su producto, cualquiera que sea la forma en que los números se agrupen o intercambien.

Las propiedades distributivas son útiles para hallar productos de muchos tipos de expresiones que comprendan sumas. El siguiente ejemplo da una ilustración.

EJEMPLO 1 **Uso de propiedades distributivas**

Si p, q, r y s denotan números reales, demuestre que

$$(p + q)(r + s) = pr + ps + qr + qs.$$

SOLUCIÓN Usamos las dos propiedades distributivas que aparecen en (9) de la tabla precedente:

$(p + q)(r + s)$	
$= p(r + s) + q(r +$	segunda propiedad distributiva, con $c = r + s$
$= (pr + ps) + (qr + qs)$	primera propiedad distributiva
$= pr + ps + qr + qs$	elimine paréntesis ■

EJEMPLO 2 **Guardar valores y evaluar expresiones**

Evalúe el lado izquierdo y el lado derecho de la igualdad del ejemplo 1 para

$$p = 5, \quad q = 3, \quad r = -6 \quad \text{y} \quad s = 7.$$

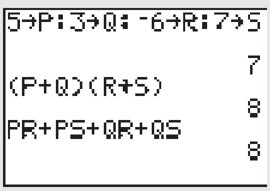
SOLUCIÓN

SECUENCIA DE TECLEO PARA LA TI-83/4 PLUS

Guarda valores en P, Q, R y S.
5 [STO▷] [ALPHA] [P] [ALPHA] [:] 3 [STO▷] [ALPHA] [Q] [ALPHA] [:]
[(−)] 6 [STO▷] [ALPHA] [R] [ALPHA] [:] 7 [STO▷] [ALPHA] [S] [ENTER]

Evalúa el lado izquierdo (LI).
[(] [ALPHA] [P] [+] [ALPHA] [Q] [)]
[(] [ALPHA] [R] [+] [ALPHA] [S] [)] [ENTER]

Evalúa el lado derecho (LD).
[ALPHA] [P] [ALPHA] [R] [+] [ALPHA] [P] [ALPHA] [S] [+]
[ALPHA] [Q] [ALPHA] [R] [+] [ALPHA] [Q] [ALPHA] [S] [ENTER]



Ambos lados son iguales a 8, lo cual presta credibilidad a nuestro resultado pero no demuestra que sea correcto. ■

Las siguientes son propiedades básicas de la igualdad.

Propiedades de la igualdad

Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces

(1) $a + c = b + c$

(2) $ac = bc$

Las propiedades 1 y 2 expresan que el mismo número puede sumarse a ambos lados de una igualdad, y ambos lados de una igualdad pueden multiplicarse por el mismo número. Haremos amplio uso de estas propiedades en todo el texto para ayudar a hallar soluciones de ecuaciones.

El siguiente resultado se puede demostrar.

Productos que involucran el cero

(1) $a \cdot 0 = 0$ para todo número real a.

(2) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Cuando usamos la palabra *o* como hicimos en (2), queremos decir que *al menos* uno de los factores a y b es 0. Nos referiremos a (2) como el *teorema del factor cero* en un trabajo futuro.

Algunas propiedades de los negativos aparecen en la tabla siguiente.

Propiedades de los negativos

Propiedad	Ilustración
(1) $-(-a) = a$	$-(-3) = 3$
(2) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-2)3 = -(2 \cdot 3) = 2(-3)$
(3) $(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-3) = 2 \cdot 3$
(4) $(-1)a = -a$	$(-1)3 = -3$

El recíproco $\dfrac{1}{a}$ de un número real a diferente de cero a veces se denota como a^{-1}, como en la tabla siguiente.

Notación para recíprocos

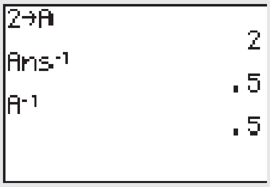
Definición	Ilustraciones
Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.	$2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = \dfrac{1}{3/4} = \dfrac{4}{3}$

Note que si $a \neq 0$, entonces

$$a \cdot a^{-1} = a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

Recíprocos

2 [STO▷] [ALPHA] [A] [ENTER]
[x^{-1}] [ENTER]
[ALPHA] [A] [x^{-1}] [ENTER]



En la figura, vemos dos formas de calcular el recíproco: (1) Con sólo presionar [x^{-1}] obtenemos el recíproco de la última respuesta, que se guarda en [ANS]. (2) Podemos introducir una variable (o sólo un número) y luego hallar su recíproco.

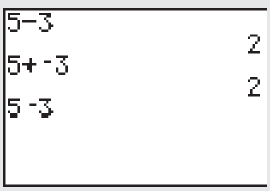
Las operaciones de **sustracción** ($-$) y **división** ($\div$) se definen como sigue.

Sustracción y división

Definición	Significado	Ilustración
$a - b = a + (-b)$	Para restar un número de otro, sume el negativo.	$3 - 7 = 3 + (-7)$
$a \div b = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = a \cdot b^{-1};\ b \neq 0$	Para dividir un número entre un número diferente de cero, multiplique por el recíproco.	$3 \div 7 = 3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) = 3 \cdot 7^{-1}$

Sustracción y negativos

5 [$-$] 3 [ENTER]
5 [$+$] [$(-)$] 3 [ENTER]
5 [$(-)$] 3 [ENTER]



La ejecución del último enunciado produce un error SYNTAX en la TI-83/4 Plus. Use la tecla de signo menos [$-$] para la operación de sustracción y la tecla [$(-)$] (negación) para números negativos. Con frecuencia omitiremos la tecla de negación de aquí en adelante y simplemente escribiremos -3.

Usamos a/b o $\frac{a}{b}$ por $a \div b$ y nos referimos a a/b como el **cociente de *a* y *b*** o la **fracción *a* sobre *b*.** Los números a y b son el **numerador** y **denominador,** respectivamente, de a/b. Como 0 no tiene inverso multiplicativo, a/b no está definido si $b = 0$; esto es, *la división entre cero no está definida.* Es por esta razón que los números reales no son cerrados con respecto a la división. Note que

$$1 \div b = \frac{1}{b} = b^{-1} \quad \text{si} \quad b \neq 0.$$

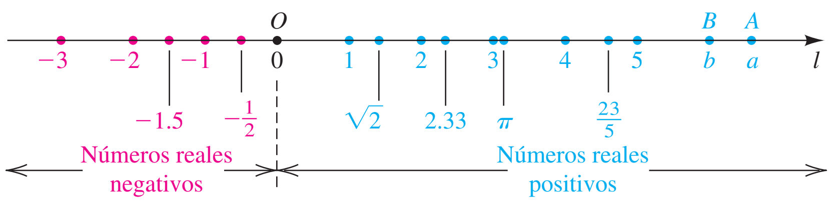
Las siguientes propiedades de los cocientes son verdaderas, siempre que todos los denominadores sean números reales diferentes de cero.

Propiedades de los cocientes

Propiedad	Ilustración
(1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$	$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ porque $2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$
(2) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5}$
(3) $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$
(4) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$	$\frac{2}{5} + \frac{9}{5} = \frac{2 + 9}{5} = \frac{11}{5}$
(5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{26}{15}$
(6) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$
(7) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$

Los números reales pueden estar representados por puntos en una recta l de manera que a cada número real a le corresponde exactamente un punto en l y a cada punto P en l le corresponde un número real. Esto se llama **correspondencia uno a uno** (o biunívoca). Primero escogemos un punto arbitrario O, llamado el **origen** y lo asociamos con el número 0. Los puntos asociados con los enteros se determinan entonces al trazar sucesivos segmentos de recta de igual longitud a ambos lados de O, como se ve en la figura 2. El punto correspondiente a un número racional, por ejemplo $\frac{23}{5}$, se obtiene al subdividir estos segmentos de recta. Los puntos asociados con ciertos números irracionales, por ejemplo $\sqrt{2}$, se pueden hallar por construcción (vea el ejercicio 45).

FIGURA 2



El número a que está asociado con un punto A en l es la **coordenada** de A. Nos referimos a estas coordenadas como un **sistema de coordenadas** y a l la llamamos **recta coordenada** o **recta real.** Se puede asignar una dirección a l al tomar la **dirección positiva** a la derecha y la **dirección negativa** a la izquierda. La dirección positiva se denota al colocar una punta de flecha en l, como se ve en la figura 2.

Los números que corresponden a puntos a la derecha de O en la figura 2 son **números reales positivos.** Los números que corresponden a puntos a la izquierda de O son **números reales negativos.** *El número real* 0 *no es ni positivo ni negativo.*

Note la diferencia entre un número real negativo y el *negativo* de un número real. En particular, el negativo de un número real a puede ser positivo. Por ejemplo, si a es negativo, digamos $a = -3$, entonces el negativo de a es $-a = -(-3) = 3$, que es positivo. En general, tenemos las siguientes relaciones.

Relaciones entre a y $-a$

(1) Si a es positiva, entonces $-a$ es negativa.

(2) Si a es negativa, entonces $-a$ es positiva.

En la tabla siguiente definimos las nociones de **mayor que** y **menor que** para números reales a y b. Los símbolos $>$ y $<$ son **signos de desigualdad**, y las expresiones $a > b$ y $a < b$ se llaman **desigualdades (estrictas).**

Mayor que o menor que

Notación	Definición	Terminología
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b

Si los puntos A y B en una recta coordenada tienen coordenadas a y b, respectivamente, entonces $a > b$ es equivalente al enunciado "A está a la *derecha* de B", mientras que $a < b$ es equivalente a "A está a la *izquierda* de B".

ILUSTRACIÓN **Mayor que (>) y menor que (<)**

- $5 > 3$, porque $5 - 3 = 2$ es positivo.
- $-6 < -2$, porque $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$ es negativo.
- $\frac{1}{3} > 0.33$, porque $\frac{1}{3} - 0.33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$ es positivo.
- $7 > 0$, porque $7 - 0 = 7$ es positivo.
- $-4 < 0$, porque $-4 - 0 = -4$ es negativo.

La siguiente ley hace posible comparar, u *ordenar*, dos números reales cualesquiera.

Ley de tricotomía

Si a y b son números reales, entonces exactamente uno de los siguientes es verdadero:

$$a = b, \qquad a > b \qquad \text{o} \qquad a < b$$

Prueba de desigualdades y la ley de tricotomía

5 [2nd] [TEST] [3] 3 [ENTER]
5 [2nd] [TEST] [5] 3 [ENTER]
5 [2nd] [TEST] [1] 3 [ENTER]



Los resultados indican que "1" representa *verdadero* y "0" representa *falso*. Sólo uno de los enunciados arriba citados puede ser verdadero por la ley de tricotomía. Como se ilustra líneas antes, usaremos la notación [*n*] para opciones de menú en la TI-83/4 Plus.

Nos referimos al **signo** de un número real como positivo si el número es positivo, o negativo si el número es negativo. Dos números reales tienen *el mismo signo* si ambos son positivos o ambos son negativos. Los números tienen *signos contrarios* si uno es positivo y el otro es negativo. Se pueden probar los siguientes resultados acerca de los signos de productos y cocientes de dos números reales a y b, usando propiedades de negativos y cocientes.

Ley de los signos

(1) Si a y b tienen el mismo signo, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son positivos.

(2) Si a y b tienen signos contrarios, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son negativos.

Los **recíprocos*** de las leyes de signos también son verdaderos. Por ejemplo, si un cociente es negativo, entonces el numerador y el denominador tienen signos contrarios.

La notación $a \geq b$ se lee "*a* **es mayor o igual a** *b*", significa que $a > b$ o que $a = b$ (pero no ambos). Por ejemplo, $a^2 \geq 0$ para todo número real a. El símbolo $a \leq b$, que se lee "*a* **es menor o igual a** *b*", significa que $a < b$ o que $a = b$. Expresiones de la forma $a \geq b$ y $a \leq b$ se denominan **desigualdades no estrictas,** porque a puede ser igual a b. Al igual que con el símbolo de igualdad, podemos negar cualquier símbolo de desigualdad al poner una raya diagonal sobre ella, es decir, $\ngtr$ significa no mayor que.

Una expresión de la forma $a < b < c$ se denomina **desigualdad continua** y significa que $a < b$ y $b < c$; decimos "*b* **está entre** *a* y *c*". Del mismo modo, la expresión $c > b > a$ significa que $c > b$ y $b > a$.

*Si un teorema se escribe en la forma "si *P*, entonces *Q*," donde *P* y *Q* son enunciados matemáticos llamados la *hipótesis* y *conclusión*, respectivamente, entonces el *recíproco* del teorema tiene la forma "si *Q*, entonces *P*." Si el teorema y su recíproco son verdaderos, con frecuencia escribimos "*P* si y sólo si *Q*" (que se denota *P* ssi *Q*).

ILUSTRACIÓN **Ordenamiento de tres números reales**

- $1 < 5 < \frac{11}{2}$
- $-4 < \frac{2}{3} < \sqrt{2}$
- $3 > -6 > -10$

Hay otros tipos de desigualdades. Por ejemplo $a < b \leq c$ significa que $a < b$ y $b \leq c$. Del mismo modo, $a \leq b < c$ significa que $a \leq b$ y $b < c$. Por último, $a \leq b \leq c$ significa que $a \leq b$ y $b \leq c$.

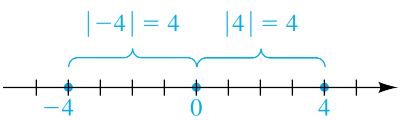
EJEMPLO 3 **Determinación del signo de un número real**

Si $x > 0$ y $y < 0$, determine el signo de $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

SOLUCIÓN Como x es un número positivo y y es un número negativo, x y y tienen signos contrarios. Entonces, x/y y y/x son negativos. La suma de dos números negativos es un número negativo, de modo que

$$\text{el signo de } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ es negativo.}$$

FIGURA 3



Si a es un entero, entonces es la coordenada de algún punto A en una recta coordenada, y el símbolo $|a|$ denota el número de unidades entre A y el origen, cualquiera que sea la dirección. El número no negativo $|a|$ se llama *valor absoluto de a*. Con referencia a la figura 3, vemos que para el punto con coordenada -4 tenemos $|-4| = 4$. Análogamente, $|4| = 4$. En general, *si a es negativo, cambiamos su signo para hallar* $|a|$; *si a es no negativo, entonces* $|a| = a$. La siguiente definición extiende este concepto a todo número real.

Definición de valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real a, denotado por $|a|$, se define como sigue.

(1) Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$.

(2) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$.

Como a es negativo en la parte (2) de la definición, $-a$ representa un número real *positivo*. Algunos casos especiales de esta definición se dan en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN **La notación de valor absoluto $|a|$**

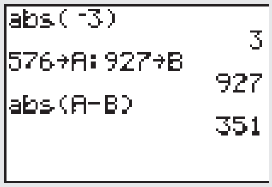
- $|3| = 3$, porque $3 > 0$.
- $|-3| = -(-3)$, porque $-3 < 0$. Entonces, $|-3| = 3$.
- $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$, porque $2 - \sqrt{2} > 0$.
- $|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2)$, porque $\sqrt{2} - 2 < 0$.
  Entonces, $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$.

En la ilustración precedente, $|3| = |-3|$ y $|2 - \sqrt{2}| = |\sqrt{2} - 2|$. En general, tenemos lo siguiente:

$$|a| = |-a|, \text{ para todo número real } a$$

Valor absoluto

MATH ▷ 1 −3) ENTER
576 STO▷ ALPHA A ALPHA : 927 STO▷ ALPHA B ENTER
MATH ▷ 1 ALPHA A − ALPHA B) ENTER



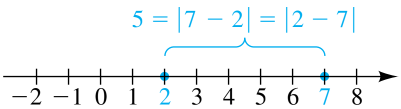
EJEMPLO 4 **Remoción del símbolo de valor absoluto**

Si $x < 1$, reescriba $|x - 1|$ sin usar el símbolo de valor absoluto.

SOLUCIÓN Si $x < 1$, entonces $x - 1 < 0$; esto es, $x - 1$ es negativo. En consecuencia, por la parte (2) de la definición de valor absoluto,

$$|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 = 1 - x.$$ ■

FIGURA 4



Usaremos el concepto de valor absoluto para definir la distancia entre dos puntos cualesquiera sobre una recta coordenada. Primero observamos que la distancia entre los puntos con coordenadas 2 y 7, que se ve en la figura 4, es igual a 5 unidades. Esta distancia es la diferencia obtenida al restar la coordenada menor (extrema izquierda) de la coordenada mayor (extrema derecha) $(7 - 2 = 5)$. Si usamos valores absolutos, entonces, como $|7 - 2| = |2 - 7|$, no es necesario preocuparse del orden de la sustracción. Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición de la distancia entre puntos en una recta coordenada

Sean a y b las coordenadas de dos puntos A y B, respectivamente, en una recta coordenada. La **distancia entre A y B,** denotada por $d(A, B)$, está definida por

$$d(A, B) = |b - a|.$$

El número $d(A, B)$ es la longitud del segmento de recta AB.

Como $d(B, A) = |a - b|$ y $|b - a| = |a - b|$, vemos que

$$d(A, B) = d(B, A).$$

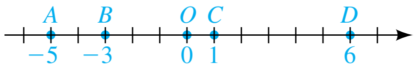
Note que la distancia entre el origen O y el punto A es

$$d(O, A) = |a - 0| = |a|,$$

que concuerda con la interpretación geométrica de valor absoluto ilustrada en la figura 4. La fórmula $d(A, B) = |b - a|$ es verdadera cualquiera que sean los signos de a y b, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Hallar distancias entre puntos**

FIGURA 5



A, B, C y D tienen coordenadas -5, -3, 1 y 6, respectivamente, en una recta coordenada, como se ve en la figura 5. Encuentre $d(A, B)$, $d(C, B)$, $d(O, A)$ y $d(C, D)$.

SOLUCIÓN Usando la definición de la distancia entre puntos en una recta coordenada, obtenemos las distancias:

$$\begin{aligned}
d(A, B) &= |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2 \\
d(C, B) &= |-3 - 1| = |-4| = 4 \\
d(O, A) &= |-5 - 0| = |-5| = 5 \\
d(C, D) &= |6 - 1| = |5| = 5
\end{aligned}$$

■

El concepto de valor absoluto tiene otros usos además de hallar distancias entre puntos; se utiliza siempre que nos interese la magnitud o valor numérico de un número real sin que importe su signo.

En la siguiente sección discutiremos la *notación exponencial* a^n, donde a es un número real (llamado la *base*) y n es un entero (llamado un *exponente*). En particular, para base 10 tenemos

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 10 \cdot 10 = 100, \quad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000,$$

y así sucesivamente. Para exponentes negativos usamos el recíproco del exponente positivo correspondiente, como sigue:

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}, \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

Podemos usar esta notación para escribir cualquier representación decimal finita de un número real como una suma del siguiente tipo:

$$\begin{aligned}
437.56 &= 4(100) + 3(10) + 7(1) + 5\left(\tfrac{1}{10}\right) + 6\left(\tfrac{1}{100}\right) \\
&= 4(10^2) + 3(10^1) + 7(10^0) + 5(10^{-1}) + 6(10^{-2})
\end{aligned}$$

En las ciencias es frecuente trabajar con números muy grandes o muy pequeños y comparar las magnitudes relativas de cantidades muy grandes o muy pequeñas. Por lo general representamos un número positivo a grande o pequeño en *forma científica*, usando el símbolo $\times$ para denotar multiplicación.

Forma científica	$a = c \times 10^n$, donde $1 \le c < 10$ y n es un entero.

La distancia que un rayo de luz recorre en un año es aproximadamente 5,900,000,000,000 millas. Este número se puede escribir en forma científica como 5.9×10^{12}. El exponente positivo 12 indica que el punto decimal debe moverse 12 lugares a la *derecha*. La notación funciona igualmente bien para números pequeños. El peso de una molécula de oxígeno se estima que es

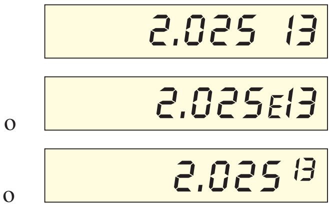
$$0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,053 \text{ gramos},$$

o sea, en forma científica, 5.3×10^{-23} gramos. El exponente negativo indica que el punto decimal debe moverse 23 lugares a la *izquierda*.

ILUSTRACIÓN **Forma científica**

- $513 = 5.13 \times 10^2$
- $93{,}000{,}000 = 9.3 \times 10^7$
- $0.000\,000\,000\,43 = 4.3 \times 10^{-10}$
- $7.3 = 7.3 \times 10^0$
- $20{,}700 = 2.07 \times 10^4$
- $0.000\,648 = 6.48 \times 10^{-4}$

FIGURA 6



Muchas calculadoras usan forma científica en sus pantallas. Para el número $c \times 10^n$, el 10 se suprime y el exponente se muestra precedido por la letra E. Por ejemplo, para hallar $(4{,}500{,}000)^2$ en una calculadora científica, podríamos introducir el entero 4,500,000 y presionar la tecla x^2 (o elevar al cuadrado), obteniendo un despliegue semejante al de la figura 6. Traduciríamos esto como 2.025×10^{13}. Entonces,

$$(4{,}500{,}000)^2 = 20{,}250{,}000{,}000{,}000.$$

Las calculadoras también usan forma científica en la entrada de números. El manual del usuario de su calculadora debe dar detalles específicos.

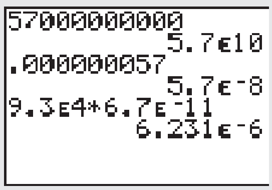
Forma científica

57 000 000 000 ENTER

.000 000 057 ENTER

9.3 2nd EE 4 ×

6.7 2nd EE −11 ENTER



Antes de que concluyamos esta sección, debemos considerar brevemente el problema de redondear resultados. Los problemas aplicados incluyen con frecuencia números que se obtienen mediante varios tipos de mediciones y, en consecuencia, son *aproximaciones* a valores exactos. Esas respuestas deben redondearse, porque el resultado final de un cálculo no puede ser más preciso que los datos que hemos estado usando. Por ejemplo, si la longitud y ancho de un rectángulo se miden con una precisión de dos lugares decimales, no podemos esperar una precisión de más de dos lugares decimales en el valor calculado del área del rectángulo. Para un trabajo puramente *matemático*, si se dan los valores de la longitud y ancho de un rectángulo, suponemos que las dimensiones son *exactas* y no se requiere redondeo.

Si un número a se escribe en forma científica como $a = c \times 10^n$ para $1 \leq c < 10$ y si c se redondea a k lugares decimales, entonces decimos que a es precisa (o se ha redondeado) a $k + 1$ **cifras** o **dígitos significativos.** Por ejemplo, 37.2638 redondeado a 5 cifras significativas es 3.7264×10^1 o 37.265; a 3 cifras significativas, 3.73×10^1 o 37.3; y a 1 cifra significativa, 4×10^1 o 40.

1.1 Ejercicios

Ejer. 1–2: Si $x < 0$ y $y > 0$, determine el signo del número real.

1 (a) xy (b) x^2y

(c) $\dfrac{x}{y} + x$ (d) $y - x$

2 (a) $\dfrac{x}{y}$ (b) xy^2

(c) $\dfrac{x - y}{xy}$ (d) $y(y - x)$

Ejer. 3–6: Sustituya el símbolo □ con <, > o = para que el enunciado resultante sea verdadero.

3 (a) -7 □ -4 (b) $\dfrac{\pi}{2}$ □ 1.5 (c) $\sqrt{225}$ □ 15

4 (a) -3 □ -6 (b) $\dfrac{\pi}{4}$ □ 0.8 (c) $\sqrt{289}$ □ 17

5 (a) $\frac{1}{11}$ □ 0.09 (b) $\frac{2}{3}$ □ 0.666 (c) $\frac{22}{7}$ □ π

6 (a) $\frac{1}{7}$ □ 0.143 (b) $\frac{5}{6}$ □ 0.833 (c) $\sqrt{2}$ □ 1.4

Ejer. 7–8: Exprese el enunciado como una desigualdad.

7 (a) x es negativo.

(b) y es no negativo.

(c) q es menor o igual a π.

(d) d está entre 4 y 2.

(e) t no es menor que 5.

(f) El negativo de z no es mayor a 3.

(g) El cociente de p y q es a lo más 7.

(h) El recíproco de w es al menos 9.

(i) El valor absoluto de x es mayor que 7.

8 (a) b es positivo.

(b) s es no positivo.

(c) w es mayor o igual a -4.

(d) c está entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$.

(e) p es no mayor que -2.

(f) El negativo de m no es menor que -2.

(g) El cociente de r y s es al menos $\frac{1}{5}$.

(h) El recíproco de f es a lo más 14.

(i) El valor absoluto de x es menor que 4.

Ejer. 9–14: Reescriba el número sin usar el símbolo de valor absoluto, y simplifique el resultado.

9 (a) $|-3 - 4|$ (b) $|-5| - |2|$ (c) $|7| + |-4|$

10 (a) $|-11 + 1|$ (b) $|6| - |-3|$ (c) $|8| + |-9|$

11 (a) $(-5)|3 - 6|$ (b) $|-6|/(-2)$ (c) $|-7| + |4|$

12 (a) $(4)|6 - 7|$ (b) $5/|-2|$ (c) $|-1| + |-9|$

13 (a) $|4 - \pi|$ (b) $|\pi - 4|$ (c) $|\sqrt{2} - 1.5|$

14 (a) $|\sqrt{3} - 1.7|$ (b) $|1.7 - \sqrt{3}|$ (c) $|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}|$

Ejer. 15–18: Los números dados son coordenadas de los puntos A, B y C, respectivamente, en una recta coordenada. Encuentre la distancia.

(a) $d(A, B)$ (b) $d(B, C)$

(c) $d(C, B)$ (d) $d(A, C)$

15 $3, 7, -5$ 16 $-6, -2, 4$

17 $-9, 1, 10$ 18 $8, -4, -1$

Ejer. 19–24: Los dos números dados son coordenadas de los puntos A y B, respectivamente, en una recta coordenada. Exprese el enunciado indicado como desigualdad que involucre el símbolo de valor absoluto.

19 x, 7; $d(A, B)$ es menor que 2

20 x, $-\sqrt{2}$; $d(A, B)$ es mayor que 1

21 x, -3; $d(A, B)$ es al menos 8

22 x, 4; $d(A, B)$ es a lo más 5

23 4, x; $d(A, B)$ no es mayor que 3

24 -2, x; $d(A, B)$ no es menor que 4

Ejer. 25–32: Reescriba la expresión sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifique el resultado.

25 $|3 + x|$ si $x < -3$ 26 $|5 - x|$ si $x > 5$

27 $|2 - x|$ si $x < 2$ 28 $|7 + x|$ si $x \geq -7$

29 $|a - b|$ si $a < b$ 30 $|a - b|$ si $a > b$

31 $|x^2 + 4|$ 32 $|-x^2 - 1|$

Ejer. 33–40: Sustituya el símbolo □ con = o ≠ para que el enunciado resultante sea verdadero para todos los números reales *a*, *b*, *c* y *d*, siempre que las expresiones estén definidas.

33 $\dfrac{ab + ac}{a} \;\square\; b + ac$

34 $\dfrac{ab + ac}{a} \;\square\; b + c$

35 $\dfrac{b + c}{a} \;\square\; \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}$

36 $\dfrac{a + c}{b + d} \;\square\; \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$

37 $(a \div b) \div c \;\square\; a \div (b \div c)$

38 $(a - b) - c \;\square\; a - (b - c)$

39 $\dfrac{a - b}{b - a} \;\square\; -1$

40 $-(a + b) \;\square\; -a + b$

Ejer. 41–42: Aproxime la expresión del número real a cuatro lugares decimales.

41 **(a)** $\left|3.2^2 - \sqrt{4.27}\right|$

(b) $\sqrt{(15.6 - 1.5)^2 + (4.3 - 5.4)^2}$

42 **(a)** $\dfrac{3.42 - 1.29}{5.83 + 2.64}$

(b) π^3

Ejer. 43–44: Aproxime la expresión del número real. Exprese la respuesta en notación científica precisa a cuatro cifras significativas.

43 **(a)** $\dfrac{1.2 \times 10^3}{3.1 \times 10^2 + 1.52 \times 10^3}$

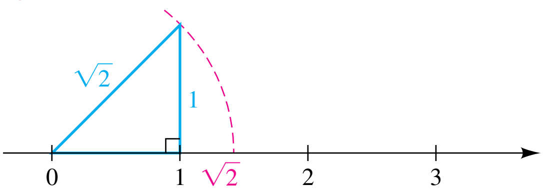
(b) $(1.23 \times 10^{-4}) + \sqrt{4.5 \times 10^3}$

44 **(a)** $\sqrt{\left|3.45 - 1.2 \times 10^4\right| + 10^5}$

(b) $(1.79 \times 10^2) \times (9.84 \times 10^3)$

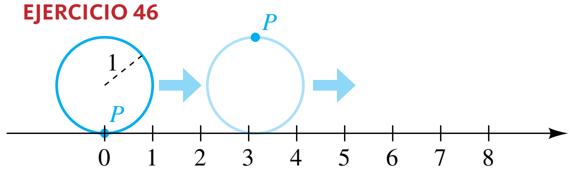
45 El punto en una recta coordenada correspondiente a $\sqrt{2}$ puede ser determinado si se construye un triángulo recto con lados de longitud 1, como se ve en la figura. Determine los puntos que corresponden a $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, respectivamente. (*Sugerencia*: use el teorema de Pitágoras.)

EJERCICIO 45



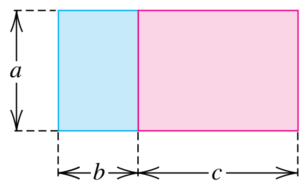
46 Un círculo de radio 1 rueda a lo largo de una recta coordenada en la dirección positiva, como se muestra en la figura. Si el punto *P* está inicialmente en el origen, encuentre la coordenada de *P* después de una, dos y diez revoluciones completas.

EJERCICIO 46



47 Las demostraciones geométricas de propiedades de números reales fueron dadas primero por los antiguos griegos. Para establecer la propiedad distributiva $a(b + c) = ab + ac$ para los números reales positivos *a, b* y *c*, encuentre el área del rectángulo que se ilustra en la figura en dos formas.

EJERCICIO 47



48 Las aproximaciones racionales a raíces cuadradas se pueden hallar usando una fórmula descubierta por los antiguos babilonios. Sea x_1 la primera aproximación racional para $\sqrt{n}$. Si hacemos

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{n}{x_1}\right),$$

entonces x_2 será una mejor aproximación para $\sqrt{n}$, y podemos repetir el cálculo con x_2 en lugar de x_1. Comenzando con $x_1 = \frac{3}{2}$, encuentre las siguientes dos aproximaciones racionales para $\sqrt{2}$.

Ejer. 49–50: Exprese el número en forma científica.

49 **(a)** 427,000 **(b)** 0.000 000 093 **(c)** 810,000,000

50 **(a)** 85,200 **(b)** 0.000 005 4 **(c)** 24,900,000

Ejer. 51–52: Exprese el número en forma decimal.

51 **(a)** 8.3×10^5 **(b)** 2.9×10^{-12} **(c)** 5.64×10^8

52 **(a)** 2.3×10^7 **(b)** 7.01×10^{-9} **(c)** 1.25×10^{10}

53 **Masa de un átomo de hidrógeno** La masa de un átomo de hidrógeno es aproximadamente

0.000 000 000 000 000 000 000 001 7 gramos.

Exprese este número en forma científica.

54 **Masa de un electrón** La masa de un electrón es aproximadamente 9.1×10^{-31} kilogramos. Exprese este número en forma decimal.

55 Años luz En astronomía, las distancias a estrellas se miden en años luz. Un año luz es la distancia que un rayo de luz recorre en un año. Si la velocidad de la luz es aproximadamente 186 000 millas por segundo, estime el número de millas en un año luz.

56 Galaxia de la Vía Láctea

(a) Los astrónomos han estimado que la galaxia de la Vía Láctea contiene 100 000 millones de estrellas. Exprese este número en forma científica.

(b) El diámetro d de la galaxia de la Vía Láctea se estima en 100 000 años luz. Exprese d en millas. (Consulte el Ejercicio 55.)

57 Número de Avogadro El número de átomos de hidrógeno en un mol es el número de Avogadro, 6.02×10^{23}. Si un mol del gas tiene una masa de 1.01 gramos, estime la masa de un átomo de hidrógeno.

58 Población de peces Las dinámicas poblacionales de muchos peces se caracterizan por porcentajes de fertilidad extremadamente altos entre adultos y porcentajes de supervivencia muy bajos entre los jóvenes. Un lenguado maduro puede poner hasta 2.5 millones de huevos, pero sólo 0.00035% de la prole sobrevive a la edad de 3 años. Use la forma científica para aproximar el número de descendientes que viven hasta la edad de 3 años.

59 Cuadros de una película de cine Una de las películas más largas jamás hechas es una película inglesa de 1970 que corre durante 48 horas. Suponiendo que la velocidad de la película es de 24 cuadros por segundo, aproxime el número total de cuadros de esta película. Exprese su respuesta en forma científica.

60 Números primos grandes El número $2^{44,497} - 1$ es primo. En el tiempo que se determinó que este número era primo, una de las computadoras más rápidas del mundo tomó unos 60 días para verificar que lo era. Esta computadora era capaz de efectuar 2×10^{11} cálculos por segundo. Use la forma científica para estimar el número de cálculos necesarios para efectuar esta comprobación. (Más recientemente, en 2005, $2^{30,402,457} - 1$, un número que contiene 9,152,052 dígitos, resultó ser primo.)

61 Presión de un tornado Cuando un tornado pasa cerca de un edificio, hay un rápido descenso en la presión exterior y la presión interior no tiene tiempo de cambiar. La diferencia resultante es capaz de causar una presión hacia fuera de 1.4 lb/in^2 en las paredes y el cielo raso del edificio.

(a) Calcule la fuerza en libras ejercida en 1 pie cuadrado de una pared.

(b) Estime las toneladas de fuerza ejercidas en una pared que mide 8 pies de alto y 40 pies de ancho.

62 Población de ganado Un ranchero tiene 750 cabezas de ganado formado por 400 adultos (de 2 años o más), 150 de un año y 200 becerros. La siguiente información se conoce acerca de esta especie particular. Cada primavera una hembra adulta tiene un solo becerro y 75% de estos becerros sobrevivirá el primer año. Los porcentajes anuales de supervivencia de animales de un año y de adultos es 80% y 90%, respectivamente. La proporción macho-hembra es uno en todas las clases de edad. Estime la población de cada clase de edad

(a) en la siguiente primavera
(b) en la última primavera

1.2 Exponentes y radicales

Si n es un entero positivo, la notación exponencial a^n, definida en la tabla siguiente, representa el producto del número real a consigo mismo n veces. Nos referimos a a^n como ***a* a la *n*-ésima potencia** o, simplemente, *a a la n*. El entero positivo n se denomina **exponente** y el número real a se llama **base.**

Notación exponencial

Caso general (*n* es cualquier entero positivo)	Casos especiales
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}$	$a^1 = a$ $a^2 = a \cdot a$ $a^3 = a \cdot a \cdot a$ $a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

La siguiente ilustración contiene varios ejemplos numéricos de notación exponencial.

ILUSTRACIÓN **La notación exponencial a^n**

- $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$
- $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81}$

Es importante observar que si n es un entero positivo, entonces una expresión como $3a^n$ significa $3(a^n)$, no $(3a)^n$. El número real 3 es el **coeficiente** de a^n en la expresión $3a^n$. Del mismo modo, $-3a^n$ significa $(-3)a^n$, no $(-3a)^n$.

ILUSTRACIÓN **La notación ca^n**

- $5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$
- $-5 \cdot 2^3 = -5 \cdot 8 = -40$
- $-2^4 = -(2^4) = -16$
- $3(-2)^3 = 3(-2)(-2)(-2) = 3(-8) = -24$

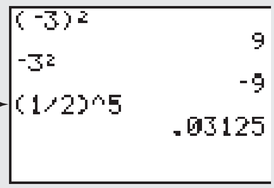
Notación exponencial

(−3) x^2 ENTER

−3 x^2 ENTER

(1 ÷ 2) ∧ 5 ENTER

$\left(\frac{1}{2}\right)^5$ →



Note que la expresión del segundo renglón, -3^2, es equivalente a $-1 \cdot 3^2$.

A continuación extendemos la definición de a^n a exponentes no positivos.

Exponentes cero y negativos (no positivos)

Definición ($a \neq 0$)	Ilustraciones
$a^0 = 1$	$3^0 = 1, \quad \left(-\sqrt{2}\right)^0 = 1$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$5^{-3} = \dfrac{1}{5^3}, \quad (-3)^{-5} = \dfrac{1}{(-3)^5}$

Si m y n son enteros positivos, entonces

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores de } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}.$$

Como el número total de factores de a a la derecha es $m + n$, esta expresión es igual a a^{m+n}; esto es,

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Podemos extender esta fórmula a $m \leq 0$ o $n \leq 0$ si usamos las definiciones del exponente cero y los exponentes negativos. Esto nos da la ley 1, que se expresa en la tabla siguiente.

Para demostrar la ley 2, podemos escribir, para m y n positivos,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \; \cdots \; \cdot a^m}_{n \text{ factores de } a^m}$$

y contamos el número de veces que a aparece como factor en el lado derecho. Como $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \; \cdots \; \cdot a$, con a como factor m veces, y como el número de esos grupos de m factores es n, el número total de factores de a es $m \cdot n$. Entonces,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Los casos $m \leq 0$ y $n \leq 0$ se pueden demostrar usando la definición de exponentes no positivos. Las tres leyes restantes se pueden establecer de modo semejante al contar factores. En las leyes 4 y 5 suponemos que los denominadores no son 0.

Leyes de los exponentes para números reales *a* y *b* y enteros *m* y *n*

Ley	Ilustración
(1) $a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
(2) $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$
(3) $(ab)^n = a^n b^n$	$(20)^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$
(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{8}{125}$
(5) **(a)** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
(b) $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$	$\dfrac{2^3}{2^5} = \dfrac{1}{2^{5-3}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

Por lo general usamos 5(a) si $m > n$ y 5(b) si $m < n$.

Podemos extender las leyes de los exponentes para obtener reglas como $(abc)^n = a^n b^n c^n$ y $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$. Algunos otros ejemplos de las leyes de exponentes se dan en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN **Leyes de los exponentes**

- $x^5 x^6 x^2 = x^{5+6+2} = x^{13}$
- $(y^5)^7 = y^{5 \cdot 7} = y^{35}$
- $(3st)^4 = 3^4 s^4 t^4 = 81 s^4 t^4$
- $\left(\dfrac{p}{2}\right)^5 = \dfrac{p^5}{2^5} = \dfrac{p^5}{32}$
- $\dfrac{c^8}{c^3} = c^{8-3} = c^5$
- $\dfrac{u^3}{u^8} = \dfrac{1}{u^{8-3}} = \dfrac{1}{u^5}$

Simplificar una expresión que comprenda potencias de números reales significa cambiarla a una expresión en la que cada número real aparezca sólo una vez y todos los exponentes sean positivos. *Supondremos que los denominadores siempre representan números reales diferentes de cero.*

EJEMPLO 1 Simplificación de expresiones que contienen exponentes

Use leyes de los exponentes para simplificar cada expresión:

(a) $(3x^3y^4)(4xy^5)$ **(b)** $(2a^2b^3c)^4$ **(c)** $\left(\dfrac{2r^3}{s}\right)^2\left(\dfrac{s}{r^3}\right)^3$ **(d)** $(u^{-2}v^3)^{-3}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}(3x^3y^4)(4xy^5) &= (3)(4)x^3xy^4y^5 && \text{reacomodar factores}\\ &= 12x^4y^9 && \text{ley 1}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(2a^2b^3c)^4 &= 2^4(a^2)^4(b^3)^4c^4 && \text{ley 3}\\ &= 16a^8b^{12}c^4 && \text{ley 2}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3 &= \frac{(2r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{(r^3)^3} && \text{ley 4}\\ &= \frac{2^2(r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{(r^3)^3} && \text{ley 3}\\ &= \left(\frac{4r^6}{s^2}\right)\left(\frac{s^3}{r^9}\right) && \text{ley 2}\\ &= 4\left(\frac{r^6}{r^9}\right)\left(\frac{s^3}{s^2}\right) && \text{reacomodar factores}\\ &= 4\left(\frac{1}{r^3}\right)(s) && \text{leyes 5(b) y 5(a)}\\ &= \frac{4s}{r^3} && \text{reacomodar factores}\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}(u^{-2}v^3)^{-3} &= (u^{-2})^{-3}(v^3)^{-3} && \text{ley 3}\\ &= u^6v^{-9} && \text{ley 2}\\ &= \frac{u^6}{v^9} && \text{definición de } a^{-n}\end{aligned}$$

■

El siguiente teorema es útil para problemas que contienen exponentes negativos.

Teorema sobre exponentes negativos

(1) $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^m}$ **(2)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

DEMOSTRACIONES Con el uso de las propiedades de exponentes negativos y cocientes, obtenemos

(1) $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{1/a^m}{1/b^n} = \dfrac{1}{a^m}\cdot\dfrac{b^n}{1} = \dfrac{b^n}{a^m}$

(2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{a^{-n}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ ■

EJEMPLO 2 **Simplificación de expresiones que contienen exponentes negativos**

Simplifique:

(a) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$ (b) $\left(\dfrac{u^2}{2v}\right)^{-3}$

SOLUCIÓN Aplicamos el teorema sobre exponentes negativos y las leyes de exponentes.

(a)
$$\begin{aligned}\frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} &= \frac{8x^3}{4y^2}\cdot\frac{y^{-5}}{x^{-1}} && \text{reacomodar cocientes para que los exponentes negativos queden en una fracción}\\ &= \frac{8x^3}{4y^2}\cdot\frac{x^1}{y^5} && \text{teorema sobre exponentes negativos (1)}\\ &= \frac{2x^4}{y^7} && \text{ley 1 de exponentes}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\left(\frac{u^2}{2v}\right)^{-3} &= \left(\frac{2v}{u^2}\right)^3 && \text{teorema sobre exponentes negativos (2)}\\ &= \frac{2^3v^3}{(u^2)^3} && \text{leyes 4 y 3 de exponentes}\\ &= \frac{8v^3}{u^6} && \text{ley 2 de exponentes}\end{aligned}$$

■

A continuación se define la **raíz *n*-ésima principal** $\sqrt[n]{a}$ de un número real a.

Definición de $\sqrt[n]{a}$

Sea n un entero positivo mayor que 1 y sea a un número real.

(1) Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$.

(2) Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real b *positivo* tal que $b^n = a$.

(3) **(a)** Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real b *negativo* tal que $b^n = a$.

(b) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

Los números complejos, que se estudian en la sección 2.4, son necesarios para definir $\sqrt[n]{a}$ si $a < 0$ y n es un entero positivo *par*, porque para todos los números reales b, $b^n \geq 0$ siempre que n sea par.

Si $n = 2$, escribimos $\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$ y a $\sqrt{a}$ la llamamos **raíz cuadrada principal** de a o, simplemente, la **raíz cuadrada** de a. El número $\sqrt[3]{a}$ es la **raíz cúbica** (principal) de a.

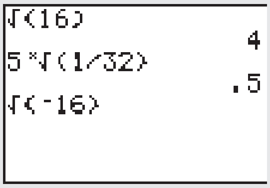
ILUSTRACIÓN **La raíz *n*-ésima principal $\sqrt[n]{a}$**

- $\sqrt{16} = 4$, porque $4^2 = 16$.
- $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

Note que $\sqrt{16} \neq \pm 4$ porque, por definición, las raíces de números reales positivos son positivas. El símbolo $\pm$ se lee "más-menos".

Raíz *n* principal

2nd $\sqrt{\ }$ 16) ENTER
5 MATH 5 (1 ÷ 32) ENTER
2nd $\sqrt{\ }$ −16) ENTER



Cuando la última línea se ejecuta en la TI-83/4 Plus, se da el mensaje de error NONREAL ANS porque esta expresión representa un número complejo, no un número real (que se expone en la sección 2.4).

Para completar nuestra terminología, la expresión $\sqrt[n]{a}$ es un **radical**, el número a es el **radicando** y n es el **índice** del radical. El símbolo $\sqrt{\ }$ se denomina **signo de radical.**

Si $\sqrt{a} = b$, entonces $b^2 = a$; esto es, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Si $\sqrt[3]{a} = b$, entonces $b^3 = a$ o $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$. Generalizando este patrón nos da la propiedad 1 de la tabla siguiente.

Propiedades de $\sqrt[n]{a}$ (*n* es un entero positivo)

Propiedad	Ilustraciones	
(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ si $\sqrt[n]{a}$ es un número real	$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$,	$\left(\sqrt[3]{-8}\right)^3 = -8$
(2) $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a \geq 0$	$\sqrt{5^2} = 5$,	$\sqrt[3]{2^3} = 2$
(3) $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a < 0$ y n es impar	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$,	$\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
(4) $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si $a < 0$ y n es par	$\sqrt{(-3)^2} = \lvert -3 \rvert = 3$,	$\sqrt[4]{(-2)^4} = \lvert -2 \rvert = 2$

Si $a \geq 0$, entonces la propiedad 4 se reduce a la propiedad 2. También vemos de la propiedad 4 que

$$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$$

para todo número real x. En particular, si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$; pero, si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, que es positiva.

Las tres leyes que aparecen en la tabla siguiente son verdaderas para enteros positivos m y n, *siempre que* ***existan*** *las raíces indicadas*, es decir, siempre que las raíces sean números reales.

Leyes de los radicales

Ley	Ilustraciones
(1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\,\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{-108} = \sqrt[3]{(-27)(4)} = \sqrt[3]{-27}\,\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$
(2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\dfrac{5}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}$
(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2(3)]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Los radicandos de las leyes 1 y 2 comprenden productos y cocientes. Debe tenerse cuidado si hay sumas o diferencias en el radicando. La tabla siguiente contiene dos advertencias particulares referentes a errores que se cometen con frecuencia.

¡Cuidado!

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$	Ilustraciones
(1) $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$
(2) $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

Si c es un número real y c^n es un factor en un radical de índice n, entonces podemos eliminar c del radicando si el signo de c se toma en cuenta. Por ejemplo, si $c > 0$ o si $c < 0$ y n es *impar*, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d} = c\sqrt[n]{d},$$

siempre que $\sqrt[n]{d}$ exista. Si $c < 0$ y n es *par*, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d} = |c|\sqrt[n]{d},$$

siempre que $\sqrt[n]{d}$ exista.

ILUSTRACIÓN **Remoción de potencias n-ésimas de $\sqrt[n]{}$**

- $\sqrt[5]{x^7} = \sqrt[5]{x^5 \cdot x^2} = \sqrt[5]{x^5}\,\sqrt[5]{x^2} = x\sqrt[5]{x^2}$
- $\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{(x^2)^3 x} = \sqrt[3]{(x^2)^3}\,\sqrt[3]{x} = x^2\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$
- $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3|$
- $\sqrt[4]{x^6 y^3} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 y^3} = \sqrt[4]{x^4}\,\sqrt[4]{x^2 y^3} = |x|\sqrt[4]{x^2 y^3}$

Nota: para evitar considerar valores absolutos, *en ejemplos y ejercicios que contengan radicales en este capítulo, supondremos que todas las letras* a, b, c, d, x, y y otras *que aparecen en radicandos representan números reales positivos, a menos que se especifique otra cosa.*

Como se muestra en la ilustración precedente y en los siguientes ejemplos, si el índice de un radical es n, entonces reacomodamos el radicando, aislando un factor de la forma p^n, donde p puede estar formado por varias letras. A continuación eliminamos $\sqrt[n]{p^n} = p$ del radical como se indicó previamente. Entonces, en el ejemplo 3(b) el índice del radical es 3 y reacomodamos el radicando en *cubos*, obteniendo un factor p^3, con $p = 2xy^2z$. En el inciso (c) el índice del radical es 2 y reacomodamos el radicando en cuadrados, obteniendo un factor p^2, con $p = 3a^3b^2$.

Simplificar un radical significa eliminar factores del radical hasta que ningún factor del radicando tenga un exponente mayor o igual al índice del radical y el índice sea tan bajo como sea posible.

EJEMPLO 3 **Remoción de factores de radicales**

Simplifique cada radical (todas las letras denotan números reales positivos):

(a) $\sqrt[3]{320}$ **(b)** $\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}$ **(c)** $\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{320} &= \sqrt[3]{64\cdot 5} && \text{Factorice el cubo más grande en 320}\\ &= \sqrt[3]{4^3}\sqrt[3]{5} && \text{Ley 1 de radicales}\\ &= 4\sqrt[3]{5} && \text{Propiedad 2 de } \sqrt[n]{\ }\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{16x^3y^8z^4} &= \sqrt[3]{(2^3x^3y^6z^3)(2y^2z)} && \text{reacomode el radicando en cubos}\\ &= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3(2y^2z)} && \text{leyes 2 y 3 de exponentes}\\ &= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3}\sqrt[3]{2y^2z} && \text{ley 1 de radicales}\\ &= 2xy^2z\sqrt[3]{2y^2z} && \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{\ }\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b} &= \sqrt{3a^2b^3\cdot 2\cdot 3a^5b} && \text{ley 1 de radicales}\\ &= \sqrt{(3^2a^6b^4)(2a)} && \text{reacomode el radicando en cuadrados}\\ &= \sqrt{(3a^3b^2)^2(2a)} && \text{leyes 2 y 3 de exponentes}\\ &= \sqrt{(3a^3b^2)^2}\sqrt{2a} && \text{ley 1 de radicales}\\ &= 3a^3b^2\sqrt{2a} && \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{\ }\end{aligned}$$

■

Si el denominador de un cociente contiene un factor de la forma $\sqrt[n]{a^k}$, con $k < n$ y $a > 0$, entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ eliminará el radical del denominador, porque

$$\sqrt[n]{a^k}\sqrt[n]{a^{n-k}} = \sqrt[n]{a^{k+n-k}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Este proceso se denomina **racionalizar un denominador.** Algunos casos especiales aparecen en la tabla siguiente.

Racionalizar denominadores de cocientes ($a > 0$)

Factor en denominador	Multiplicar numerador y denominador por	Factor resultante
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$
$\sqrt[7]{a^3}$	$\sqrt[7]{a^4}$	$\sqrt[7]{a^3}\sqrt[7]{a^4} = \sqrt[7]{a^7} = a$

El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

EJEMPLO 4 **Racionalización de denominadores**

Racionalice cada denominador:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **(d)** $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y^2}}$

SOLUCIÓN

(a) $$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(continúa)

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

(c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(d) $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}}\dfrac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$ ■

Si usamos una calculadora para hallar aproximaciones decimales de radicales, no hay ventaja alguna en racionalizar denominadores, tales como $1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$ o $\sqrt{2/3} = \sqrt{6}/3$, como hicimos en el ejemplo 4(a) y (c). No obstante, para simplificaciones *algebraicas*, cambiar expresiones a esas formas es a veces deseable. Del mismo modo, en cursos de matemáticas avanzadas como en cálculo, cambiar $1/\sqrt[3]{x}$ a $\sqrt[3]{x^2}/x$, como en el ejemplo 4(b), podría hacer un problema *más* complicado. En esos cursos es más sencillo trabajar con la expresión $1/\sqrt[3]{x}$ que con su forma racionalizada.

A continuación usamos radicales para definir *exponentes racionales.*

Definición de exponentes racionales

Sea m/n un número racional, donde n es un entero positivo mayor que 1. Si a es un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ existe, entonces

(1) $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

(2) $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

(3) $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$

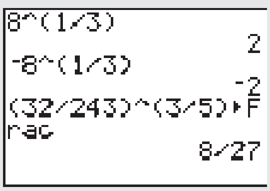
Al evaluar $a^{m/n}$ en (2), por lo general usamos $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$; es decir, tomamos la n raíz de a primero y luego elevamos ese resultado a la m potencia, como se muestra en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN **La notación exponencial $a^{m/n}$**

- $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$
- $x^{3/5} = \left(\sqrt[5]{x}\right)^3 = \sqrt[5]{x^3}$
- $125^{2/3} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{5^3}\right)^2 = 5^2 = 25$
- $\left(\frac{32}{243}\right)^{3/5} = \left(\sqrt[5]{\frac{32}{243}}\right)^3 = \left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

Exponentes racionales

8 [^] [(] 1 [÷] 3 [)] [ENTER]
−8 [^] [(] 1 [÷] 3 [)] [ENTER]
[(] 32 [÷] 243 [)] [^] [(] 3 [÷] 5 [)] [MATH] [1] [ENTER]



El comando Frac cambia una representación decimal a una fraccionaria.

Las leyes de los exponentes son verdaderas para exponentes racionales y también para exponentes *irracionales*, por ejemplo $3^{\sqrt{2}}$ o 5^{π}, considerados en el capítulo 5.

Para simplificar una expresión que contenga potencias racionales de letras que representen números reales, la cambiamos a una expresión en que cada letra aparezca sólo una vez y todos los exponentes sean positivos. Como lo hicimos con los radicales, supondremos que todas las letras representan números reales positivos a menos que se indique otra cosa.

EJEMPLO 5 **Simplificación de potencias racionales**

Simplificar:

(a) $(-27)^{2/3}(4)^{-5/2}$ **(b)** $(r^2s^6)^{1/3}$ **(c)** $\left(\dfrac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}
(-27)^{2/3}(4)^{-5/2} &= \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2\left(\sqrt{4}\right)^{-5} && \text{definición de exponentes racionales}\\
&= (-3)^2(2)^{-5} && \text{calcule raíces}\\
&= \frac{(-3)^2}{2^5} && \text{definición de exponentes negativos}\\
&= \tfrac{9}{32} && \text{calcule potencias}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
(r^2s^6)^{1/3} &= (r^2)^{1/3}(s^6)^{1/3} && \text{ley 3 de exponentes}\\
&= r^{2/3}s^2 && \text{ley 2 de exponentes}
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) &= \left(\frac{4x^{4/3}}{y}\right)\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) && \text{leyes de exponentes}\\
&= \frac{(4\cdot 3)x^{4/3-5/6}}{y^{1+(1/3)}} && \text{ley 1 de exponentes}\\
&= \frac{12x^{8/6-5/6}}{y^{4/3}} && \text{denominador común}\\
&= \frac{12x^{1/2}}{y^{4/3}} && \text{simplifique}
\end{aligned}$$

■

Los exponentes racionales son útiles para problemas que contengan radicales que no tienen el mismo índice, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 **Combinación de radicales**

Cambie a una expresión que contenga un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$:

(a) $\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$

SOLUCIÓN Si introducimos exponentes racionales, obtenemos

(a) $\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a} = a^{1/3}a^{1/2} = a^{(1/3)+(1/2)} = a^{5/6} = \sqrt[6]{a^5}$

(b) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{a^{1/4}}{a^{2/3}} = a^{(1/4)-(2/3)} = a^{-5/12} = \dfrac{1}{a^{5/12}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{a^5}}$ ■

En los ejercicios 1.2, siempre que un índice de un radical sea par (o se emplea un exponente racional m/n con n par), suponga que las letras que aparecen en el radicando denotan números reales positivos a menos que se indique otra cosa.

1.2 Ejercicios

Ejer. 1–10: Exprese el número en la forma a/b, donde a y b son enteros.

1 $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

2 $(-3)^3$

3 $\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}}$

4 $\dfrac{2^0 + 0^2}{2 + 0}$

5 $-2^4 + 3^{-1}$

6 $\left(-\frac{3}{2}\right)^4 - 2^{-4}$

7 $9^{5/2}$

8 $16^{-3/4}$

9 $(-0.008)^{2/3}$

10 $(0.008)^{-2/3}$

Ejer. 11–46: Simplifique.

11 $\left(\frac{1}{2}x^4\right)(16x^5)$

12 $(-3x^{-2})(4x^4)$

13 $\dfrac{(2x^3)(3x^2)}{(x^2)^3}$

14 $\dfrac{(2x^2)^3y^2}{4x^4y^2}$

15 $\left(\frac{1}{6}a^5\right)(-3a^2)(4a^7)$

16 $(-4b^3)\left(\frac{1}{6}b^2\right)(-9b^4)$

17 $\dfrac{(6x^3)^2}{(2x^2)^3} \cdot (3x^2)^0$

18 $\dfrac{(3y^3)(2y^2)^2}{(y^4)^3} \cdot (5y^3)^0$

19 $(3u^7v^3)(4u^4v^{-5})$

20 $(x^2yz^3)(-2xz^2)(x^3y^{-2})$

21 $(8x^4y^{-3})\left(\frac{1}{2}x^{-5}y^2\right)$

22 $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right)$

23 $\left(\frac{1}{3}x^4y^{-3}\right)^{-2}$

24 $(-2xy^2)^5\left(\dfrac{x^7}{8y^3}\right)$

25 $(3y^3)^4(4y^2)^{-3}$

26 $(-3a^2b^{-5})^3$

27 $(-2r^4s^{-3})^{-2}$

28 $(2x^2y^{-5})(6x^{-3}y)\left(\frac{1}{3}x^{-1}y^3\right)$

29 $(5x^2y^{-3})(4x^{-5}y^4)$

30 $(-2r^2s)^5(3r^{-1}s^3)^2$

31 $\left(\dfrac{3x^5y^4z}{x^0y^{-3}z}\right)^2$

32 $(4a^2b)^4\left(\dfrac{-a^3}{2b}\right)^2$

33 $(-5a^{3/2})(2a^{1/2})$

34 $(-6x^{7/5})(2x^{8/5})$

35 $(3x^{5/6})(8x^{2/3})$

36 $(8r)^{1/3}(2r^{1/2})$

37 $(27a^6)^{-2/3}$

38 $(25z^4)^{-3/2}$

39 $(8x^{-2/3})x^{1/6}$

40 $(3x^{1/2})(-2x^{5/2})$

41 $\left(\dfrac{-8x^3}{y^{-6}}\right)^{2/3}$

42 $\left(\dfrac{-y^{3/2}}{y^{-1/3}}\right)^3$

43 $\left(\dfrac{x^6}{16y^{-4}}\right)^{-1/2}$

44 $\left(\dfrac{c^{-4}}{81d^8}\right)^{3/4}$

45 $\dfrac{(x^6y^3)^{-1/3}}{(x^4y^2)^{-1/2}}$

46 $a^{4/3}a^{-3/2}a^{1/6}$

Ejer. 47–52: Reescriba la expresión usando exponentes racionales.

47 $\sqrt[4]{x^4 + y}$

48 $\sqrt[3]{x^3 + y^2}$

49 $\sqrt[3]{(a + b)^2}$

50 $\sqrt{a + \sqrt{b}}$

51 $\sqrt{x^2 + y^2}$

52 $\sqrt[3]{r^3 - s^3}$

Ejer. 53–56: Reescriba la expresión usando un radical.

53 (a) $4x^{3/2}$ (b) $(4x)^{3/2}$

54 (a) $4 + x^{3/2}$ (b) $(4 + x)^{3/2}$

55 (a) $8 - y^{1/3}$ (b) $(8 - y)^{1/3}$

56 (a) $64y^{1/3}$ (b) $(64y)^{1/3}$

Ejer. 57–80: Simplifique la expresión y racionalice el denominador cuando sea apropiado.

57 $\sqrt{81}$

58 $\sqrt[3]{-216}$

59 $\sqrt[5]{-64}$

60 $\sqrt[4]{512}$

61 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

62 $\sqrt{\dfrac{1}{5}}$

63 $\sqrt{9x^{-4}y^6}$

64 $\sqrt{16a^8b^{-2}}$

65 $\sqrt[3]{8a^6b^{-3}}$

66 $\sqrt[4]{81r^5s^8}$

67 $\sqrt{\dfrac{3x}{2y^3}}$

68 $\sqrt{\dfrac{1}{3x^3y}}$

69 $\sqrt[3]{\dfrac{2x^4y^4}{9x}}$

70 $\sqrt[3]{\dfrac{3x^2y^5}{4x}}$

71 $\sqrt[4]{\dfrac{5x^8y^3}{27x^2}}$

72 $\sqrt[4]{\dfrac{x^7y^{12}}{125x}}$

73 $\sqrt[5]{\dfrac{5x^7y^2}{8x^3}}$

74 $\sqrt[5]{\dfrac{3x^{11}y^3}{9x^2}}$

75 $\sqrt[4]{(5x^5y^{-2})^4}$

76 $\sqrt[6]{(7u^{-3}v^4)^6}$

77 $\sqrt[5]{\dfrac{8x^3}{y^4}}\ \sqrt[5]{\dfrac{4x^4}{y^2}}$

78 $\sqrt{5xy^7}\ \sqrt{15x^3y^3}$

79 $\sqrt[3]{3t^4v^2}\ \sqrt[3]{-9t^{-1}v^4}$

80 $\sqrt[3]{(2r - s)^3}$

Ejer. 81–84: Simplifique la expresión, suponiendo que x y y puedan ser negativos.

81 $\sqrt{x^6y^4}$

82 $\sqrt{x^4y^{10}}$

83 $\sqrt[4]{x^8(y - 3)^{12}}$

84 $\sqrt[4]{(x + 2)^{12}y^4}$

Ejer. 85–90: Sustituya el símbolo □ con = o ≠ para que el enunciado resultante sea verdadero, siempre que la expresión tenga significado. Dé una razón para su respuesta.

85 $(a^r)^2 \;\square\; a^{(r^2)}$

86 $(a^2 + 1)^{1/2} \;\square\; a + 1$

87 $a^x b^y \;\square\; (ab)^{xy}$

88 $\sqrt{a^r} \;\square\; (\sqrt{a})^r$

89 $\sqrt[n]{\dfrac{1}{c}} \;\square\; \dfrac{1}{\sqrt[n]{c}}$

90 $a^{1/k} \;\square\; \dfrac{1}{a^k}$

Ejer. 91–92: Al evaluar números negativos elevados a potencias fraccionarias, puede ser necesario evaluar por separado la raíz y las potencias enteras. Por ejemplo, $(-3)^{2/5}$ se puede evaluar bien como $[(-3)^{1/5}]^2$ o $[(-3)^2]^{1/5}$, pues de otro modo podría aparecer un mensaje de error. Aproxime la expresión de número real a cuatro lugares decimales.

91 (a) $(-3)^{2/5}$ (b) $(-7)^{4/3}$

92 (a) $(-1.2)^{3/7}$ (b) $(-5.08)^{7/3}$

Ejer. 93–94: Aproxime la expresión de número real a cuatro lugares decimales.

93 (a) $\sqrt{\pi + 1}$ (b) $\sqrt[3]{17.1} + 5^{1/4}$

94 (a) $(2.6 - 1.3)^{-2}$ (b) $5^{\sqrt{7}}$

95 **Cuenta de ahorros** Uno de los bancos más antiguos de Estados Unidos es el Bank of America, fundado en 1812. Si $200 se depositaron en aquel tiempo en una cuenta que pagaba 4% de interés anual, entonces 180 años después la cantidad habría crecido a $200(1.04)^{180}$ dólares. Aproxime esta cantidad al centavo más próximo.

96 **Distancia de observación** En un día claro, la distancia d (en millas) que se puede ver desde lo alto de un elevado edificio de altura h (en pies) se puede aproximar con $d = 1.2\sqrt{h}$. Aproxime la distancia que se puede ver desde lo alto de la torre Sears de Chicago, que mide 1454 pies de altura.

97 **Longitud de un lenguado** La relación longitud/peso para un lenguado del Pacífico se puede aproximar con la fórmula $L = 0.46\sqrt[3]{W}$, donde W está en kilogramos y L en metros. El lenguado más grande que se ha documentado pesaba 230 kilogramos. Estime su longitud.

98 **Peso de una ballena** La relación longitud-peso para la ballena rorcual se puede aproximar con $W = 0.0016L^{2.43}$, donde W está en toneladas y L en pies. Estime el peso de una ballena que mide 25 pies de largo.

99 **Desventajas de los levantadores de pesas** La fórmula de O'Carroll se usa para poner obstáculos a levantadores de pesas. Si un levantador que pesa b kilogramos levanta w kilogramos de peso, entonces el peso W con desventaja está dado por

$$W = \frac{w}{\sqrt[3]{b - 35}}.$$

Suponga que dos levantadores que pesan 75 kilogramos y 120 kilogramos levantan pesas de 180 kilogramos y 250 kilogramos, respectivamente. Use la fórmula de O'Carroll para determinar al mejor levantador de pesas.

100 **Área de superficie corporal** El área de superficie corporal S de una persona (en pies cuadrados) se puede aproximar con

$$S = (0.1091)w^{0.425}h^{0.725},$$

donde la estatura h está en pulgadas y el peso w en libras.

(a) Estime S para una persona que mide 6 pies de alto y pesa 175 libras.

(b) Si una persona mide 5 pies 6 pulgadas de estatura, ¿qué efecto tiene sobre S un aumento de 10% en el peso?

101 **Peso en hombres** El promedio de peso W (en libras) para hombres con estatura h entre 64 y 79 pulgadas se puede aproximar con el uso de la fórmula $W = 0.1166h^{1.7}$. Construya una tabla para W con $h = 64, 65, \ldots, 79$. Redondee todos los pesos a la libra más cercana.

Estatura	Peso	Estatura	Peso
64		72	
65		73	
66		74	
67		75	
68		76	
69		77	
70		78	
71		79	

102 **Peso en mujeres** El promedio de peso W (en libras) para mujeres con estatura h entre 60 y 75 pulgadas se puede aproximar con el uso de la fórmula $W = 0.1049h^{1.7}$. Construya una tabla para W con $h = 60, 61, \ldots, 75$. Redondee todos los pesos a la libra más cercana.

Estatura	Peso	Estatura	Peso
60		68	
61		69	
62		70	
63		71	
64		72	
65		73	
66		74	
67		75	

1.3 Expresiones algebraicas

A veces usamos la notación y terminología de conjuntos para describir relaciones matemáticas. Un **conjunto** es una colección de objetos de algún tipo, y los objetos se denominan **elementos** del conjunto. Es frecuente que se usen las letras mayúsculas $R, S, T, \ldots$ para denotar conjuntos, y las letras minúsculas $a, b, x, y, \ldots$ representan elementos de conjuntos. En todo este libro, $\mathbb{R}$ denota el conjunto de números reales y $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de enteros.

Dos conjuntos S y T son **iguales**, denotados por $S = T$, si S y T contienen exactamente los mismos elementos. Escribimos $S \neq T$ si S y T no son iguales. En la tabla siguiente se indican notación y terminología adicionales.

Notación o terminología	Significado	Ilustraciones
$a \in S$	a es un elemento de S	$3 \in \mathbb{Z}$
$a \notin S$	a no es un elemento de S	$\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$
S es un **subconjunto** de T	Todo elemento de S es un elemento de T	$\mathbb{Z}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$
Constante	Una letra o símbolo que representa un elemento *específico* de un conjunto	$5, -\sqrt{2}, \pi$
Variable	Una letra o símbolo que representa *cualquier* elemento de un conjunto	Sea x que denota cualquier número real

Por lo general usamos letras cercanas al final del alfabeto, como x, y y z, para variables y letras cercanas al principio del alfabeto, como a, b, y c para constantes. En todo este texto, a menos que se especifique otra cosa, las variables representan números reales.

Si los elementos de un conjunto S tienen cierta propiedad, a veces escribimos $S = \{x: \ \}$ y expresamos la propiedad describiendo la variable x en el espacio después de los dos puntos. La expresión encerrada por las llaves y los dos puntos se lee "el conjunto de toda x tal que . . . ," donde completamos la frase al expresar la propiedad deseada. Por ejemplo, $\{x: x > 3\}$ se lee "el conjunto de toda x tal que x es mayor a 3."

$\{x \mid x > 3\}$ es una notación equivalente.

Para conjuntos finitos, a veces encerramos todos los elementos del conjunto dentro de llaves. Así, si el conjunto T está formado por los primeros cinco enteros positivos, podemos escribir $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Cuando describimos conjuntos en esta forma, el orden empleado al hacer una lista de los elementos es irrelevante, de modo que podríamos también escribir $T = \{1, 3, 2, 4, 5\}$, $T = \{4, 3, 2, 5, 1\}$, etcétera.

Si empezamos con cualquier colección de variables y números reales, entonces una **expresión algebraica** es el resultado obtenido al aplicar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias, o sacar raíces de esta colección. Si números específicos se sustituyen por las variables en una expresión algebraica, el número resultante se denomina **valor** de la expresión para estos números. El **dominio** de una expresión algebraica está formado por todos los números reales que pueden representar a las variables. Entonces, a menos que se especifique otra cosa, *suponemos que el dominio está formado por los números reales que, cuando se sustituyan por las variables, no hacen que la expresión carezca de sentido; es decir, cuando los denominadores no pueden ser iguales a cero y las raíces siempre existen.* En la siguiente tabla se dan dos ilustraciones.

Expresiones algebraicas

Ilustración	Dominio	Valor típico
$x^3 - 5x + \dfrac{6}{\sqrt{x}}$	Toda $x > 0$	En $x = 4$: $4^3 - 5(4) + \dfrac{6}{\sqrt{4}} = 64 - 20 + 3 = 47$
$\dfrac{2xy + (3/x^2)}{\sqrt[3]{y - 1}}$	toda $x \neq 0$ y toda $y \neq 1$	En $x = 1$ y $y = 9$: $\dfrac{2(1)(9) + (3/1^2)}{\sqrt[3]{9 - 1}} = \dfrac{18 + 3}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{21}{2}$

Si x es una variable, entonces un **monomio** en x es una expresión de la forma ax^n, donde a es un número real y n es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. Un *polinomio en x* es una suma de cualquier número de monomios en x. Otra forma de expresar esto es como sigue.

Definición de polinomio

Un **polinomio en *x*** es una suma de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo y cada coeficiente a_k es un número real. Si $a_n \neq 0$, entonces se dice que el polinomio tiene **grado *n*.**

Cada expresión $a_k x^k$ de la suma es un **término** del polinomio. Si un coeficiente a_k es cero, por lo general se elimina el término $a_k x^k$. El coeficiente a_k de la máxima potencia de x se denomina **coeficiente principal** del polinomio.

La tabla siguiente contiene ilustraciones específicas de polinomios.

Polinomios

Ejemplo	Coeficiente principal	Grado
$3x^4 + 5x^3 + (-7)x + 4$	3	4
$x^8 + 9x^2 + (-2)x$	1	8
$-5x^2 + 1$	-5	2
$7x + 2$	7	1
8	8	0

Por definición, dos polinomios son **iguales** si y sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de las potencias semejantes de x son iguales. Si todos los coeficientes de un polinomio son cero, recibe el nombre de **polinomio cero** y se denota por 0 pero, por convención, el grado del polinomio cero *no es* cero sino que es indefinido. Si c es un *número real diferente de cero*, entonces c es un polinomio de grado 0. Tales polinomios (junto con el polinomio cero) son **polinomios constantes.**

Si un coeficiente de un polinomio es negativo, por lo general usamos un signo menos entre términos apropiados. Para ilustrar,

$$3x^2 + (-5)x + (-7) = 3x^2 - 5x - 7.$$

También podemos considerar polinomios con variables que no sean x. Por ejemplo, $\frac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}\,z^4$ es un polinomio en z de grado 7. Con frecuencia acomodamos los términos de un polinomio en orden de potencias decrecientes de la variable; así,

$$\tfrac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}\,z^4 = -3z^7 - \sqrt{5}\,z^4 + \tfrac{2}{5}z^2 + 8.$$

Podemos considerar un polinomio en x como una expresión algebraica obtenida al emplear un número finito de adiciones, sustracciones y multiplicaciones que contengan x. Si una expresión algebraica contiene divisiones o raíces que contienen una variable x, entonces no es un polinomio en x.

ILUSTRACIÓN **No polinomios**

- $\dfrac{1}{x} + 3x$
- $\dfrac{x-5}{x^2+2}$
- $3x^2 + \sqrt{x} - 2$

Como los polinomios representan números reales, podemos usar las propiedades descritas en la sección 1.1. En particular, si se realizan adiciones, sustracciones y multiplicaciones con polinomios, podemos simplificar los resultados usando propiedades de los números reales, como se demuestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 **Adición y sustracción de polinomios**

(a) Encuentre la suma: $(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3)$

(b) Encuentre la diferencia: $(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3)$

SOLUCIÓN

(a) Para obtener la suma de dos polinomios cualesquiera en x, podemos sumar coeficientes de potencias semejantes de x.

$(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3)$

$= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3$ — elimine paréntesis

$= (1 + 4)x^3 + (2 - 5)x^2 - 5x + (7 + 3)$ — sume coeficientes de potencias semejantes de x

$= 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10$ — simplifique

La agrupación en el primer paso se mostró para tener el panorama completo. El estudiante puede omitir este paso después de adquirir experiencia con esas manipulaciones.

(b) Cuando se restan polinomios, primero eliminamos paréntesis, observando que el signo menos que precede al segundo par de paréntesis cambia el signo de *cada* término de ese polinomio.

$(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3)$

$= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 - 4x^3 + 5x^2 - 3$ — elimine paréntesis

$= (1 - 4)x^3 + (2 + 5)x^2 - 5x + (7 - 3)$ — sume coeficientes de potencias semejantes de x

$= -3x^3 + 7x^2 - 5x + 4$ — simplifique ■

EJEMPLO 2 **Multiplicación de binomios**

Encuentre el producto: $(4x + 5)(3x - 2)$

SOLUCIÓN Como $3x - 2 = 3x + (-2)$, podemos proseguir como en el ejemplo 1 de la sección 1.1:

Prueba de calculadora para el ejemplo 2: guarde 17 en X y demuestre que la expresión original y la expresión final son iguales a 3577.

$$\begin{aligned}(4x + 5)&(3x - 2)\\ &= (4x)(3x) + (4x)(-2) + (5)(3x) + (5)(-2) && \text{propiedades distributivas}\\ &= 12x^2 - 8x + 15x - 10 && \text{multiplique}\\ &= 12x^2 + 7x - 10 && \text{simplifique}\end{aligned}$$

■

Después de adquirir suficiente experiencia trabajando problemas del tipo del ejemplo 2, el lector puede efectuar los primeros dos pasos mentalmente y continuar directamente a la forma final.

En el siguiente ejemplo ilustramos métodos diferentes para hallar el producto de dos polinomios.

EJEMPLO 3 **Multiplicación de polinomios**

Encuentre el producto: $(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1)$

SOLUCIÓN

Método 1 Empezamos por usar una propiedad distributiva, tratando al polinomio $2x^3 + 3x - 1$ como un solo número real:

$$\begin{aligned}(x^2 + 5x - 4)&(2x^3 + 3x - 1)\\ &= x^2(2x^3 + 3x - 1) + 5x(2x^3 + 3x - 1) - 4(2x^3 + 3x - 1)\end{aligned}$$

A continuación usamos otra propiedad distributiva tres veces y simplificamos el resultado, obteniendo

$$\begin{aligned}(x^2 + 5x - 4)&(2x^3 + 3x - 1)\\ &= 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 10x^4 + 15x^2 - 5x - 8x^3 - 12x + 4\\ &= 2x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 17x + 4.\end{aligned}$$

Note que los tres monomios del primer polinomio fueron multiplicados por cada uno de los tres monomios del segundo polinomio, dándonos un total de nueve términos.

Método 2 Ponemos en lista los polinomios verticalmente y multiplicamos, dejando espacios para potencias de x que tengan coeficientes cero, como sigue:

$$\begin{array}{llllll|l} 2x^3 & & +\ 3x & & -\ 1 & & \\ x^2 & & +\ 5x & & -\ 4 & & \\ \hline 2x^5 & & +\ 3x^3 & -\ x^2 & & & = x^2(2x^3 + 3x - 1)\\ & 10x^4 & & +\ 15x^2 & -\ 5x & & = 5x(2x^3 + 3x - 1)\\ & & -\ 8x^3 & & -\ 12x & +\ 4 & = -4(2x^3 + 3x - 1)\\ \hline 2x^5 & +\ 10x^4 & -\ 5x^3 & +\ 14x^2 & -\ 17x & +\ 4 & = \text{suma de lo anterior}\end{array}$$

En la práctica omitiríamos los argumentos (igualdades) que aparecen en lista a la derecha en las últimas cuatro líneas. ■

Podemos considerar polinomios con más de una variable. Por ejemplo, un polinomio con *dos* variables, x y y, es una suma finita de términos, cada uno de la forma ax^my^k para algún número real a y enteros m y k no negativos. Un ejemplo es

$$3x^4y + 2x^3y^5 + 7x^2 - 4xy + 8y - 5.$$

Otros polinomios pueden tener tres variables, por ejemplo x, y, z; o bien, para el caso, *cualquier* número de variables. La adición, sustracción y multiplicación se realizan usando las propiedades de los números reales, igual que para polinomios con una variable.

El siguiente ejemplo ilustra la división de un polinomio entre un monomio.

EJEMPLO 4 **División de un polinomio entre un monomio**

Exprese como un polinomio en x y y:

$$\frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy} &= \frac{6x^2y^3}{2xy} + \frac{4x^3y^2}{2xy} - \frac{10xy}{2xy} && \text{divida cada término entre } 2xy \\ &= 3xy^2 + 2x^2y - 5 && \text{simplifique} \end{aligned}$$

■

Los productos que se ponen en lista en la siguiente tabla se presentan con tal frecuencia que merecen especial atención. El lector puede comprobar la validez de cada fórmula por multiplicación. En (2) y (3) usamos ya sea el signo superior en ambos lados o el signo inferior en ambos lados. Así, (2) es en realidad *dos* fórmulas:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad \text{y} \qquad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Del mismo modo, (3) representa dos fórmulas.

Fórmulas de producto

Fórmula	Ilustración
(1) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$	$(2a + 3)(2a - 3) = (2a)^2 - 3^2 = 4a^2 - 9$
(2) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$	$(2a - 3)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3) + (3)^2 = 4a^2 - 12a + 9$
(3) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	$(2a + 3)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3) + 3(2a)(3)^2 + (3)^3 = 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

En el siguiente ejemplo se dan varias otras ilustraciones de las fórmulas de producto.

EJEMPLO 5 **Uso de fórmulas de producto**

Encuentre el producto:

(a) $\left(2r^2 - \sqrt{s}\right)\left(2r^2 + \sqrt{s}\right)$ **(b)** $\left(\sqrt{c} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$ **(c)** $(2a - 5b)^3$

SOLUCIÓN

(a) Usamos la fórmula de producto 1, con $x = 2r^2$ y $y = \sqrt{s}$:

$$\begin{aligned} \left(2r^2 - \sqrt{s}\right)\left(2r^2 + \sqrt{s}\right) &= (2r^2)^2 - \left(\sqrt{s}\right)^2 \\ &= 4r^4 - s \end{aligned}$$

(b) Usamos la fórmula del producto 2, con $x = \sqrt{c}$ y $y = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$:

$$\left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 = \left(\sqrt{c}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$$

$$= c + 2 + \frac{1}{c}$$

Note que la última expresión *no es* un polinomio.

(c) Usamos la fórmula del producto 3, con $x = 2a$ y $y = 5b$:

$$(2a - 5b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(5b) + 3(2a)(5b)^2 - (5b)^3$$

$$= 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$$

■

Si un polinomio es un producto de otros polinomios, entonces cada polinomio del producto es un **factor** del polinomio original. **Factorizar** es el proceso de expresar una suma de términos como un producto. Por ejemplo, como $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, los polinomios $x + 3$ y $x - 3$ son factores de $x^2 - 9$.

La factorización es un proceso importante en matemáticas, puesto que se puede usar para reducir el estudio de una expresión complicada al estudio de varias expresiones más sencillas. Por ejemplo, las propiedades del polinomio $x^2 - 9$ se puede determinar al examinar los factores $x + 3$ y $x - 3$. Como veremos en el capítulo 2, otro importante uso de la factorización está en hallar soluciones de ecuaciones.

Vamos a estar interesados principalmente en **factores no triviales** de polinomios; es decir, factores que contengan polinomios de grado positivo. No obstante, si los coeficientes se restringen a *enteros*, entonces por lo general eliminaremos un factor común entero de cada término del polinomio. Por ejemplo,

$$4x^2y + 8z^3 = 4(x^2y + 2z^3).$$

Un polinomio con coeficientes en algún conjunto S de números es **primo,** o **irreducible** sobre S, si no se puede escribir como el producto de dos polinomios de grado positivo con coeficientes en S. Un polinomio puede ser irreducible sobre un conjunto S pero no sobre otro. Por ejemplo, $x^2 - 2$ es irreducible sobre los números racionales, puesto que no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado positivo que tengan coeficientes *racionales*. Sin embargo, $x^2 - 2$ *no es* irreducible sobre los números reales, ya que podemos escribir

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right).$$

Del mismo modo, $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números reales, pero, como veremos en la sección 2.4, no sobre los números complejos.

Todo polinomio $ax + b$ de grado 1 es irreducible.

Antes de que factoricemos un polinomio, debemos especificar el sistema numérico (o conjunto) del cual se han de escoger los coeficientes de los factores. En este capítulo usaremos la regla de que *si un polinomio tiene coeficientes enteros, entonces los factores serán polinomios con coeficientes enteros.* **Factorizar un polinomio** significa expresarlo como el producto de polinomios irreducibles.

El **máximo factor común (mfc)** de una expresión es el producto de los factores que aparecen en cada término, con cada uno de estos factores elevado al mínimo exponente diferente de cero que aparezca en cualquier término. Al factorizar polinomios, es aconsejable factorizar primer el mfc, como se ve en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN **Polinomios factorizados**

- $8x^2 + 4xy = 4x(2x + y)$
- $25x^2 + 25x - 150 = 25(x^2 + x - 6) = 25(x + 3)(x - 2)$
- $4x^5y - 9x^3y^3 = x^3y(4x^2 - 9y^2) = x^3y(2x + 3y)(2x - 3y)$

Suele ser difícil factorizar polinomios de grado mayor que 2. En casos sencillos, pueden ser útiles las siguientes fórmulas para factorizar. Cada fórmula se puede variar al multiplicar los factores del lado derecho del signo igual. Se puede demostrar que los factores $x^2 + xy + y^2$ y $x^2 - xy + y^2$ en la diferencia y suma de dos cubos, respectivamente, son irreducibles sobre los números reales.

Fórmulas de factorización

Fórmula	Ilustración
(1) Diferencia de dos cuadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	$9a^2 - 16 = (3a)^2 - (4)^2 = (3a + 4)(3a - 4)$
(2) Diferencia de dos cubos: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$8a^3 - 27 = (2a)^3 - (3)^3$ $= (2a - 3)[(2a)^2 + (2a)(3) + (3)^2]$ $= (2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)$
(3) Suma de dos cubos: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$125a^3 + 1 = (5a)^3 + (1)^3$ $= (5a + 1)[(5a)^2 - (5a)(1) + (1)^2]$ $= (5a + 1)(25a^2 - 5a + 1)$

Varias otras ilustraciones del uso de fórmulas de factorización se dan en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 6 Diferencia de dos cuadrados

Factorice cada polinomio:

(a) $25r^2 - 49s^2$ **(b)** $81x^4 - y^4$ **(c)** $16x^4 - (y - 2z)^2$

SOLUCIÓN

(a) Aplicamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados, con $x = 5r$ y $y = 7s$:

$$25r^2 - 49s^2 = (5r)^2 - (7s)^2 = (5r + 7s)(5r - 7s)$$

(b) Escribimos $81x^4 = (9x^2)^2$ y $y^4 = (y^2)^2$ y aplicamos dos veces la fórmula de la diferencia de dos cuadrados:

$$\begin{aligned} 81x^4 - y^4 &= (9x^2)^2 - (y^2)^2 \\ &= (9x^2 + y^2)(9x^2 - y^2) \\ &= (9x^2 + y^2)[(3x)^2 - (y)^2] \\ &= (9x^2 + y^2)(3x + y)(3x - y) \end{aligned}$$

(c) Escribimos $16x^4 = (4x^2)^2$ y aplicamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados:

$$\begin{aligned} 16x^4 - (y - 2z)^2 &= (4x^2)^2 - (y - 2z)^2 \\ &= [(4x^2) + (y - 2z)][(4x^2) - (y - 2z)] \\ &= (4x^2 + y - 2z)(4x^2 - y + 2z) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 **Suma y diferencia de dos cubos**

Factorice cada polinomio:

(a) $a^3 + 64b^3$ **(b)** $8c^6 - 27d^9$

SOLUCIÓN

(a) Aplicamos la fórmula de la suma de dos cubos, con $x = a$ y $y = 4b$:

$$\begin{aligned} a^3 + 64b^3 &= a^3 + (4b)^3 \\ &= (a + 4b)[a^2 - a(4b) + (4b)^2] \\ &= (a + 4b)(a^2 - 4ab + 16b^2) \end{aligned}$$

(b) Aplicamos la fórmula de la diferencia de dos cubos, con $x = 2c^2$ y $y = 3d^3$:

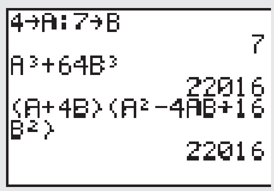
$$\begin{aligned} 8c^6 - 27d^9 &= (2c^2)^3 - (3d^3)^3 \\ &= (2c^2 - 3d^3)[(2c^2)^2 + (2c^2)(3d^3) + (3d^3)^2] \\ &= (2c^2 - 3d^3)(4c^4 + 6c^2d^3 + 9d^6) \end{aligned}$$

■

Comprobación de un resultado de factorización

Podemos comprobar un resultado de factorización al multiplicar la respuesta propuesta y compararla con la expresión original. Aquí sustituiremos valores para las variables y evaluaremos la expresión original y la respuesta propuesta.

4 [STO▷] [ALPHA] [A] [ALPHA] [:]
7 [STO▷] [ALPHA] [B] [ENTER]
[ALPHA] [A] [MATH] [3] [+] 64
[ALPHA] [B] [MATH] [3] [ENTER]
[(] [ALPHA] [A] [+] 4 [ALPHA] [B] [)]
[(] [ALPHA] [A] [x^2] [−] 4 [ALPHA] [A]
[ALPHA] [B] [+]
16 [ALPHA] [B] [x^2] [)] [ENTER]



No escoja valores como 0, 1 o 2 para A y B; es demasiado fácil obtener el mismo valor para la expresión original y la respuesta propuesta. Por ejemplo, si sustituimos 1 por A y 0 por B e incorrectamente factorizamos $A^3 + 64B^3$ como $(A - 4B)(A^2 + 16B^2)$, ambas expresiones serían igual a 1 y nos confundiríamos al pensar que hemos factorizado correctamente $A^3 + 64B^3$.

Una factorización de un trinomio $px^2 + qx + r$, donde p, q y r son enteros, debe ser de la forma

$$px^2 + qx + r = (ax + b)(cx + d),$$

donde a, b, c y d son enteros. Se deduce que

$$ac = p, \qquad bd = r \qquad \text{y} \qquad ad + bc = q.$$

Sólo un número limitado de opciones para a, b, c y d satisfacen estas condiciones. Si ninguna de las opciones funciona, entonces $px^2 + qx + r$ es irreducible. Tratar las diversas posibilidades, como se describe en el ejemplo siguiente, recibe el nombre de **método de ensayo y error.** Este método también es aplicable a trinomios de la forma $px^2 + qxy + ry^2$, en cuyo caso la factorización debe ser de la forma $(ax + by)(cx + dy)$.

EJEMPLO 8 Factorización de un trinomio por ensayo y error

Factorice $6x^2 - 7x - 3$.

SOLUCIÓN Si escribimos

$$6x^2 - 7x - 3 = (ax + b)(cx + d),$$

entonces las siguientes relaciones deben ser verdaderas:

$$ac = 6, \qquad bd = -3 \qquad \text{y} \qquad ad + bc = -7$$

Si suponemos que a y c son ambas positivas, entonces todos los posibles valores se dan en la tabla siguiente:

a	1	6	2	3
c	6	1	3	2

Por tanto, $6x^2 - 7x - 3$ es factorizable, entonces es verdadero uno de los siguientes:

$$6x^2 - 7x - 3 = (x + b)(6x + d)$$
$$6x^2 - 7x - 3 = (6x + b)(x + d)$$
$$6x^2 - 7x - 3 = (2x + b)(3x + d)$$
$$6x^2 - 7x - 3 = (3x + b)(2x + d)$$

A continuación consideramos todos los valores posibles para b y d. Como $bd = -3$, éstos son como sigue:

b	1	−1	3	−3
d	−3	3	−1	1

Al ensayar varios (posiblemente todos) los valores, llegamos a $b = -3$ y $d = 1$; esto es,

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1).$$

Como prueba, el lector debe multiplicar la factorización final para ver si se obtiene el polinomio original. ■

El método de ensayo y error que se ilustra en el ejemplo 8 puede ser largo y tedioso si los coeficientes de los polinomios son grandes y tienen muchos factores primos. En la sección 2.3 mostraremos un método que se puede usar para factorizar cualquier trinomio de alguna de las formas del ejemplo 8, cualquiera que sea el tamaño de los coeficientes. Para casos sencillos, con frecuencia es posible llegar rápidamente a la selección correcta.

EJEMPLO 9 **Factorización de polinomios**

Factorice:

(a) $12x^2 - 36xy + 27y^2$ **(b)** $4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3$

SOLUCIÓN

(a) Como cada uno de los términos tiene 3 como factor, empezamos por escribir

$$12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 - 12xy + 9y^2).$$

Una factorización de $4x^2 - 12xy + 9y^2$ como producto de dos polinomios de primer grado debe ser de la forma

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (ax + by)(cx + dy),$$

con $ac = 4, \quad bd = 9 \quad \text{y} \quad ad + bc = -12.$

Si usamos el método de ensayo y error, como en el ejemplo 8, obtenemos

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)(2x - 3y) = (2x - 3y)^2.$$

Entonces, $12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 - 12xy + 9y^2) = 3(2x - 3y)^2.$

(b) Como cada uno de los términos tiene a x^2y como factor, empezamos por escribir

$$4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x^2 - 11xy + 6y^2).$$

Por ensayo y error, obtenemos la factorización

$$4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x - 3y)(x - 2y).$$ ■

Si una suma contiene cuatro o más términos, puede ser posible agrupar los términos en una forma apropiada y luego hallar una factorización mediante el uso de las propiedades distributivas. Esta técnica, llamada **factorización por agrupación**, se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 10 **Factorización por agrupación**

Factorice:

(a) $4ac + 2bc - 2ad - bd$ **(b)** $3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$

(c) $x^2 - 16y^2 + 10x + 25$

SOLUCIÓN

(a) Agrupamos los primeros dos términos y los últimos dos términos y luego procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= (4ac + 2bc) - (2ad + bd) \\ &= 2c(2a + b) - d(2a + b) \end{aligned}$$

En esta etapa no hemos factorizado la expresión dada porque el lado derecho tiene la forma

$$2ck - dk \quad \text{con } k = 2a + b.$$

No obstante, si factorizamos k, entonces

$$2ck - dk = (2c - d)k = (2c - d)(2a + b).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= 2c(2a + b) - d(2a + b) \\ &= (2c - d)(2a + b). \end{aligned}$$

Note que si factorizamos $2ck - dk$ como $k(2c - d)$, entonces la última expresión es $(2a + b)(2c - d)$.

(b) Agrupamos los primeros dos términos y los últimos dos términos y luego procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 &= (3x^3 + 2x^2) - (12x + 8) \\ &= x^2(3x + 2) - 4(3x + 2) \\ &= (x^2 - 4)(3x + 2) \end{aligned}$$

Por último, usando la fórmula de la diferencia de dos cuadrados para $x^2 - 4$, obtenemos la factorización:

$$3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = (x + 2)(x - 2)(3x + 2)$$

(c) Primero reacomodamos y agrupamos términos, y luego aplicamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados, como sigue

$$\begin{aligned} x^2 - 16y^2 + 10x + 25 &= (x^2 + 10x + 25) - 16y^2 \\ &= (x + 5)^2 - (4y)^2 \\ &= [(x + 5) + 4y][(x + 5) - 4y] \\ &= (x + 4y + 5)(x - 4y + 5) \end{aligned}$$

■

1.3 Ejercicios

Ejer. 1–44: Exprese como un polinomio.

1 $(3x^3 + 4x^2 - 7x + 1) + (9x^3 - 4x^2 - 6x)$

2 $(7x^3 + 2x^2 - 11x) + (-3x^3 - 2x^2 + 4x - 3)$

3 $(4x^3 + 5x - 3) - (3x^3 + 2x^2 + 5x - 8)$

4 $(6x^3 - 2x^2 + x - 3) - (8x^2 - x - 3)$

5 $(2x + 5)(3x - 7)$

6 $(3x - 4)(2x + 9)$

7 $(5x + 4y)(3x + 2y)$

8 $(4x - 3y)(x - 5y)$

9 $(2u + 3)(u - 4) + 4u(u - 2)$

10 $(3u - 1)(u + 2) + 7u(u + 1)$

11 $(3x + 5)(2x^2 + 9x - 5)$

12 $(7x - 4)(x^3 - x^2 + 6)$

13 $(t^2 + 2t - 5)(3t^2 - t + 2)$

14 $(r^2 - 8r - 2)(-r^2 + 3r - 5)$

15 $(x + 1)(2x^2 - 2)(x^3 + 5)$

16 $(2x - 1)(x^2 - 5)(x^3 - 1)$

17 $\dfrac{8x^2y^3 - 6x^3y}{2x^2y}$

18 $\dfrac{6a^3b^3 - 9a^2b^2 + 3ab^4}{3ab^2}$

19 $\dfrac{3u^3v^4 - 2u^5v^2 + (u^2v^2)^2}{u^3v^2}$

20 $\dfrac{6x^2yz^3 - xy^2z}{xyz}$

21 $(2x + 7y)(2x - 7y)$

22 $(5x + 3y)(5x - 3y)$

23 $(x^2 + 5y)(x^2 - 5y)$

24 $(3x + y^3)(3x - y^3)$

25 $(x^2 + 9)(x^2 - 4)$

26 $(x^2 + 1)(x^2 - 8)$

27 $(3x + 2y)^2$

28 $(5x - 4y)^2$

29 $(x^2 - 5y^2)^2$

30 $(2x^2 + 5y^2)^2$

31 $(x + 2)^2(x - 2)^2$

32 $(x + y)^2(x - y)^2$

33 $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$

34 $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$

35 $(x^{1/3} - 2y^{1/3})(x^{2/3} + 2x^{1/3}y^{1/3} + 4y^{2/3})$

36 $(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

37 $(x - 2y)^3$

38 $(x + 3y)^3$

39 $(2x + 3y)^3$

40 $(3x - 4y)^3$

41 $(a + b - c)^2$

42 $(x^2 + x + 1)^2$

43 $(y^2 - y + 2)^2$

44 $(x - 2y + 3z)^2$

Ejer. 45–102: Factorice el polinomio.

45 $rs + 4st$

46 $4u^2 - 2uv$

47 $3a^2b^2 - 6a^2b$

48 $12xy + 18xy^2$

49 $3x^2y^3 - 9x^3y^2$

50 $16x^5y^2 + 8x^3y^3$

51 $15x^3y^5 - 25x^4y^2 + 10x^6y^4$

52 $121r^3s^4 + 77r^2s^4 - 55r^4s^3$

53 $8x^2 - 17x - 21$

54 $7x^2 + 10x - 8$

55 $x^2 + 4x + 5$

56 $3x^2 - 4x + 2$

57 $6x^2 + 7x - 20$

58 $12x^2 - x - 6$

59 $12x^2 - 29x + 15$

60 $21x^2 + 41x + 10$

61 $36x^2 - 60x + 25$

62 $9x^2 + 24x + 16$

63 $25z^2 + 30z + 9$

64 $16z^2 - 56z + 49$

65 $45x^2 + 38xy + 8y^2$

66 $50x^2 + 45xy - 18y^2$

67 $64r^2 - 25t^2$

68 $81r^2 - 16t^2$

69 $z^4 - 64w^2$

70 $9y^4 - 121x^2$

71 $x^4 - 4x^2$

72 $x^3 - 16x$

73 $x^2 + 169$

74 $4x^2 + 9$

75 $75x^2 - 48y^2$

76 $64x^2 - 36y^2$

77 $64x^3 + 27$

78 $125x^3 - 8$

79 $8x^3 - y^6$

80 $216x^9 + 125y^3$

81 $343x^3 + y^9$

82 $x^6 - 27y^3$

83 $125 - 27x^3$

84 $x^3 + 64$

85 $2ax - 6bx + ay - 3by$

86 $2by^2 - bxy + 6xy - 3x^2$

87 $3x^3 + 3x^2 - 27x - 27$

88 $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$

89 $x^4 + 2x^3 - x - 2$

90 $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

91 $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

92 $6w^8 + 17w^4 + 12$

93 $a^6 - b^6$

94 $x^8 - 16$

95 $x^2 + 4x + 4 - 9y^2$

96 $x^2 - 4y^2 - 6x + 9$

97 $y^2 - x^2 + 8y + 16$

98 $y^2 + 9 - 6y - 4x^2$

99 $y^6 + 7y^3 - 8$

100 $8c^6 + 19c^3 - 27$

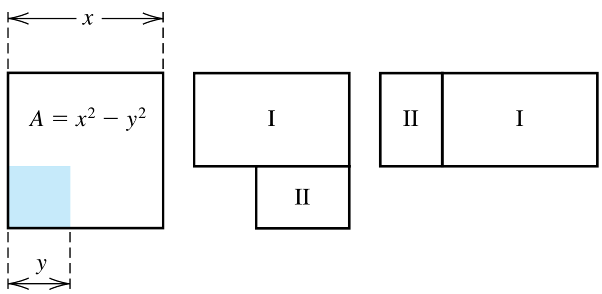
101 $x^{16} - 1$

102 $4x^3 + 4x^2 + x$

Ejer. 103–104: Los antiguos griegos dieron demostraciones geométricas de las fórmulas de factorización para la diferencia de dos cuadrados y la diferencia de dos cubos. Establezca la fórmula para el caso especial descrito.

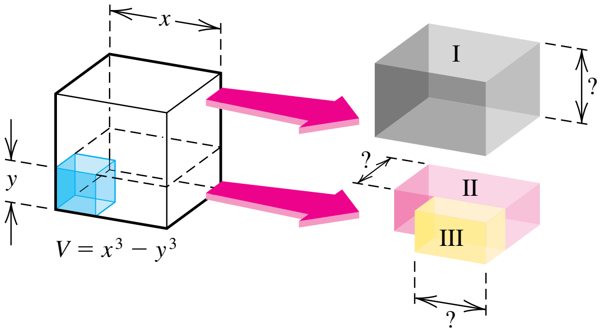
103 Encuentre las áreas de las regiones I y II de la figura para establecer la fórmula de la diferencia de dos cuadrados para el caso especial $x > y$.

EJERCICIO 103



104 Encuentre los volúmenes de las cajas I, II y II de la figura para establecer la fórmula de la diferencia de dos cubos para el caso especial $x > y$.

EJERCICIO 104



105 Requerimientos de calorías El requerimiento de energía basal para una persona indica el número mínimo de calorías necesarias para mantener los procesos esenciales de sostenimiento de la vida, como son circulación, regulación de la temperatura corporal y respiración. Dado el sexo, peso w (en kilogramos), estatura h (en centímetros) y edad y (en años) de una persona, podemos estimar el requerimiento de energía basal en calorías usando las fórmulas siguientes, donde C_f y C_m son las calorías necesarias para mujeres y hombres, respectivamente:

$$C_f = 66.5 + 13.8w + 5h - 6.8y$$
$$C_m = 655 + 9.6w + 1.9h - 4.7y$$

(a) Determine los requerimientos de energía basal primero para una mujer de 25 años de edad que pesa 59 kilogramos, que mide 163 centímetros de estatura y luego para un hombre de 55 años de edad que pesa 75 kilogramos y mide 178 centímetros de estatura.

(b) Explique por qué, en ambas fórmulas, el coeficiente para y es negativo pero los otros coeficientes son positivos.

1.4 Expresiones fraccionarias

Una **expresión fraccionaria** es un cociente de dos expresiones algebraicas. Como caso especial, una **expresión racional** es un cociente p/q de dos *polinomios* p y q. Como la división entre cero no está permitida, el dominio de p/q está formado por todos los números reales excepto los que hagan que el denominador sea cero. Dos ilustraciones se dan en la tabla siguiente.

Expresiones racionales

Cociente	El denominador es cero si	Dominio
$\dfrac{6x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$	$x = \pm 3$	Toda $x \neq \pm 3$
$\dfrac{x^3 - 3x^2y + 4y^2}{y - x^3}$	$y = x^3$	Toda x y y tales que $y \neq x^3$

En casi todo nuestro trabajo nos ocuparemos de expresiones racionales en las que tanto el numerador como el denominador son polinomios con sólo una variable.

Como las variables de una expresión racional representan números reales, podemos usar las propiedades de los cocientes de la sección 1.1, sustituyendo las letras a, b, c y d con polinomios. La siguiente propiedad es de particular importancia, donde $bd \neq 0$:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

A veces describimos este proceso de simplificación al decir que *un factor común diferente de cero en el numerador y denominador de un cociente se puede cancelar.* En la práctica, por lo general mostramos esta cancelación por medio de una diagonal sobre el factor común, como en la siguiente ilustración, donde se supone que todos los denominadores son diferentes de cero.

ILUSTRACIÓN **Factores comunes cancelados**

- $\dfrac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}} = \dfrac{a}{b}$ ■ $\dfrac{m\cancel{n}}{\cancel{n}pq} = \dfrac{m}{pq}$ ■ $\dfrac{\cancel{p}q\cancel{r}}{\cancel{r}\cancel{p}v} = \dfrac{q}{v}$

Una expresión racional *se simplifica*, o *se reduce a su mínima expresión*, si el numerador y denominador no tienen como factores comunes polinomiales de grado positivo y no hay factores enteros comunes mayores que 1. Para simplificar una expresión racional, factorizamos numerador y denominador en sus factores primos y luego, suponiendo que los factores del denominador no son cero, cancelamos factores comunes como en la ilustración siguiente.

ILUSTRACIÓN **Expresiones racionales simplificadas**

- $\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} = \dfrac{(3x + 1)\cancel{(x - 2)}}{(x + 2)\cancel{(x - 2)}} \overset{\text{si } x \neq 2}{=} \dfrac{3x + 1}{x + 2}$
- $\dfrac{2 - x - 3x^2}{6x^2 - x - 2} = \dfrac{-(3x^2 + x - 2)}{6x^2 - x - 2} = -\dfrac{\cancel{(3x - 2)}(x + 1)}{\cancel{(3x - 2)}(2x + 1)} \overset{\text{si } x \neq 2/3}{=} -\dfrac{x + 1}{2x + 1}$
- $\dfrac{(x^2 + 8x + 16)(x - 5)}{(x^2 - 5x)(x^2 - 16)} = \dfrac{(x + 4)^{\cancel{2}}\cancel{(x - 5)}}{x\cancel{(x - 5)}\cancel{(x + 4)}(x - 4)} \overset{\text{si } x \neq 5,\, x \neq -4}{=} \dfrac{x + 4}{x(x - 4)}$

Como se ve en el ejemplo siguiente, cuando se simplifica un producto o cociente de expresiones racionales, con frecuencia usamos propiedades de los cocientes para obtener una expresión racional. A continuación factorizamos el numerador y denominador y cancelamos factores comunes, como hicimos en la ilustración precedente.

EJEMPLO 1 **Productos y cocientes de expresiones racionales**

Efectúe la operación indicada y simplifique:

(a) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{2x - 2}{x - 3}$ **(b)** $\dfrac{x + 2}{2x - 3} \div \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a)

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x - 2}{x - 3} = \frac{(x^2 - 6x + 9)(2x - 2)}{(x^2 - 1)(x - 3)} \quad \text{propiedad de los cocientes}$$

$$= \frac{(x - 3)^{\cancel{2}} \cdot 2\cancel{(x - 1)}}{(x + 1)\cancel{(x - 1)}\cancel{(x - 3)}} \quad \text{factorice todos los polinomios}$$

$$\overset{\text{si } x \neq 3,\, x \neq 1}{=} \frac{2(x - 3)}{x + 1} \quad \text{cancele factores comunes}$$

(b)

$$\frac{x + 2}{2x - 3} \div \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x} = \frac{x + 2}{2x - 3} \cdot \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 4} \quad \text{propiedad de los cocientes}$$

$$= \frac{\cancel{(x + 2)}x\cancel{(2x - 3)}}{\cancel{(2x - 3)}\cancel{(x + 2)}(x - 2)} \quad \text{propiedad de los cocientes; factorice todos los polinomios}$$

$$\overset{\text{si } x \neq -2,\, x \neq 3/2}{=} \frac{x}{x - 2} \quad \text{cancele factores comunes}$$

■

Para sumar o restar dos expresiones racionales, por lo general encontramos un *denominador común* y usamos las siguientes propiedades de los cocientes:

$$\frac{a}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{d} \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{d}$$

Si los denominadores de las expresiones no son iguales, podemos obtener un común denominador al multiplicar el numerador y denominador de cada fracción por una expresión apropiada. Generalmente empleamos el ***mínimo* común denominador** (mcd) de los dos cocientes. Para hallar el mcd, factorizamos cada denominador en primos y luego formamos el producto de los factores primos diferentes, usando el *máximo* exponente que aparezca con cada factor primo. Empecemos con un ejemplo numérico de esta técnica.

EJEMPLO 2 **Suma de fracciones usando el mcd**

Exprese como número racional simplificado:

$$\frac{7}{24}+\frac{5}{18}$$

SOLUCIÓN Las factorizaciones primas de los denominadores 24 y 18 son $24 = 2^3 \cdot 3$ y $18 = 2 \cdot 3^2$. Para hallar el mcd, formamos el producto de los factores primos diferentes, usando el máximo exponente asociado con cada factor. Esto nos da $2^3 \cdot 3^2$. Ahora cambiamos cada fracción a una fracción equivalente con denominador $2^3 \cdot 3^2$ y sumamos:

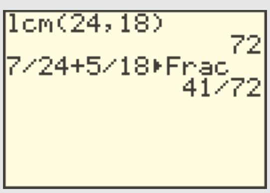
$$\begin{aligned}\frac{7}{24}+\frac{5}{18} &= \frac{7}{2^3\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 3^2}\\ &= \frac{7}{2^3\cdot 3}\cdot\frac{3}{3}+\frac{5}{2\cdot 3^2}\cdot\frac{2^2}{2^2}\\ &= \frac{21}{2^3\cdot 3^2}+\frac{20}{2^3\cdot 3^2}\\ &= \frac{41}{2^3\cdot 3^2}\\ &= \frac{41}{72}\end{aligned}$$

■

Las calculadoras graficadoras pueden darnos el mínimo común múltiplo (mcm) de dos números, así como sumas exactas de fracciones. Ilustraremos estas funciones usando los números del ejemplo 2.

Para hallar el mcd MATH ▷ 8 24 , 18) ENTER

Sumamos fracciones 7 ÷ 24 + 5 ÷ 18 MATH 1 ENTER



El método para hallar el mcm para expresiones racionales es análogo al proceso ilustrado en el ejemplo 2. La única diferencia es que usamos factorizaciones de polinomios en lugar de enteros.

EJEMPLO 3 **Sumas y diferencias de expresiones racionales**

Efectúe las operaciones y simplifique:

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}$$

SOLUCIÓN Los denominadores ya están en forma factorizada. El mcm es $x^2(3x-2)$. Para obtener tres cocientes que tengan el denominador $x^2(3x-2)$, multiplicamos el numerador y denominador del primer cociente por x, los del segundo por x^2 y los del tercero por $3x-2$, lo cual nos da

$$\begin{aligned}\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}&=\frac{6}{x(3x-2)}\cdot\frac{x}{x}+\frac{5}{3x-2}\cdot\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\cdot\frac{3x-2}{3x-2}\\&=\frac{6x}{x^2(3x-2)}+\frac{5x^2}{x^2(3x-2)}-\frac{2(3x-2)}{x^2(3x-2)}\\&=\frac{6x+5x^2-2(3x-2)}{x^2(3x-2)}\\&=\frac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}.\end{aligned}$$

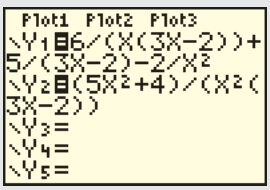
■

Cree una tabla

Comprobemos la simplificación del ejemplo 3 al crear y comparar tablas de valores para la expresión original y la expresión final. Asignaremos estas expresiones a Y_1 y Y_2 (más adelante llamadas *funciones*) y comparamos sus valores para $x = 1, 2, 3, \ldots$.

Haga asignaciones Y.

[Y=] 6 [÷] [(] [X,T,θ,n] [(] 3 [X,T,θ,n] [−] 2 [)] [)] [+]
5 [÷] [(] 3 [X,T,θ,n] [−] 2 [)] [−] 2 [÷] [X,T,θ,n] [x^2] [ENTER]
[(] 5 [X,T,θ,n] [x^2] [+] 4 [)] [÷] [(] [X,T,θ,n] [x^2] [(]
3 [X,T,θ,n] [−] 2 [)] [)] [ENTER]



Formule una tabla.

[2nd] [TBLSET] 1 [▽] 1 [ENTER]



(continúa)

Vista de la tabla. 2nd TABLE

X	Y1	Y2
1	9	9
2	1.5	1.5
3	.77778	.77778
4	.525	.525
5	.39692	.39692
6	.31944	.31944
7	.26745	.26745

X=1

La tabla apoya nuestra simplificación.

EJEMPLO 4 **Simplificación de sumas de expresiones racionales**

Efectúe las operaciones y simplifique:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9}+\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{x-3}$$

SOLUCIÓN Empezamos por factorizar denominadores:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9}+\frac{x}{x^2-9}+\frac{1}{x-3}=\frac{2x+5}{(x+3)^2}+\frac{x}{(x+3)(x-3)}+\frac{1}{x-3}$$

Como el mcd es $(x+3)^2(x-3)$, multiplicamos el numerador y denominador del primer cociente por $x-3$, los del segundo por $x+3$ y los del tercero por $(x+3)^2$, y luego sumamos:

$$\frac{(2x+5)(x-3)}{(x+3)^2(x-3)}+\frac{x(x+3)}{(x+3)^2(x-3)}+\frac{(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)}$$

$$=\frac{(2x^2-x-15)+(x^2+3x)+(x^2+6x+9)}{(x+3)^2(x-3)}$$

$$=\frac{4x^2+8x-6}{(x+3)^2(x-3)}=\frac{2(2x^2+4x-3)}{(x+3)^2(x-3)}$$

■

Una **fracción compleja** es un cociente en el que el numerador y/o el denominador es una expresión fraccionaria. Ciertos problemas en cálculo requieren simplificar fracciones complejas del tipo dado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Simplificación de una fracción compleja**

Simplifique la fracción compleja:

$$\frac{\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{a+3}}{x-a}$$

SOLUCIÓN Cambiamos el numerador de la expresión dada en un solo cociente y luego usamos una propiedad para simplificar cocientes:

$$\frac{\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{a+3}}{x-a}=\frac{\dfrac{2(a+3)-2(x+3)}{(x+3)(a+3)}}{x-a}$$ combine fracciones en el numerador

$$=\frac{2a-2x}{(x+3)(a+3)}\cdot\frac{1}{x-a}$$ simplifique; propiedad de los cocientes

$$=\frac{2(a-x)}{(x+3)(a+3)(x-a)}$$ factorice $2a-2x$; propiedad de los cocientes

si $x \neq a$

$$\overset{\downarrow}{=}-\frac{2}{(x+3)(a+3)}$$ sustituya $\dfrac{a-x}{x-a}$ con -1

Un método alternativo es multiplicar el numerador y denominador de la expresión dada por $(x+3)(a+3)$, el mcd del numerador y denominador, y luego se simplifica el resultado. ■

Algunos cocientes que no son expresiones racionales contienen denominadores de la forma $a+\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; como en el siguiente ejemplo, estos cocientes se pueden simplificar al multiplicar el numerador y denominador por el **conjugado** $a-\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, respectivamente. Desde luego, si aparece $a-\sqrt{b}$, multiplique entonces por $a+\sqrt{b}$.

EJEMPLO 6 **Racionalización de un denominador**

Racionalice el denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$ multiplique numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}$$ propiedad de los cocientes y diferencia de cuadrados

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$$ ley de radicales ■

En cálculo, a veces es necesario racionalizar el *numerador* de un cociente, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 **Racionalización de un numerador**

Si $h \neq 0$, racionalice el numerador de

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

SOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ multiplique numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$

$$= \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$ propiedad de cocientes y diferencia de cuadrados

$$= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$ ley de radicales

$$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$ simplifique

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ cancele $h \neq 0$

Puede parecer como si hubiéramos hecho muy poco, porque hay radicales en el denominador. En cálculo, no obstante, es de interés determinar lo que es verdadero si h es muy cercana a cero. Note que si usamos la expresión *dada* obtenemos lo siguiente:

$$\text{Si} \quad h \approx 0, \quad \text{entonces} \quad \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \approx \frac{\sqrt{x+0}-\sqrt{x}}{0} = \frac{0}{0},$$

que es una expresión sin sentido, pero si usamos la forma *racionalizada* obtenemos la siguiente información:

$$\text{Si} \quad h \approx 0, \quad \text{entonces} \quad \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$ ■

Ciertos problemas en cálculo requieren simplificar expresiones del tipo que se da en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 **Simplificación de una expresión fraccionaria**

Simplifique, si $h \neq 0$:

$$\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h} = \frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h}$$ combine cocientes en el numerador

$$= \frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x+h)^2x^2}\cdot\frac{1}{h}$$ eleve al cuadrado $x + h$; propiedad de los cocientes

$$= \frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2h}$$ elimine paréntesis

$$= \frac{-\cancel{h}(2x+h)}{(x+h)^2x^2\cancel{h}}$$ simplifique; factorice $-h$

$$= -\frac{2x+h}{(x+h)^2x^2}$$ cancele $h \neq 0$ ■

Problemas del tipo que se da en el siguiente ejemplo también se presentan en cálculo.

EJEMPLO 9 **Simplificación de una expresión fraccionaria**

Simplifique:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3\left(\frac{1}{2}\right)(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2}$$

SOLUCIÓN Una forma de simplificar la expresión es como sigue:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3\left(\frac{1}{2}\right)(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2}$$

$$= \frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - \dfrac{x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5} \quad \text{definición de exponentes negativos}$$

$$= \frac{\dfrac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5} \quad \text{combine términos en el numerador}$$

$$= \frac{6x^3 + 15x^2 - x^3}{(2x+5)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2x+5} \quad \text{propiedad de los cocientes}$$

$$= \frac{5x^3 + 15x^2}{(2x+5)^{3/2}} \quad \text{simplifique}$$

$$= \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{3/2}} \quad \text{factorice el numerador}$$

Una simplificación alternativa es eliminar la potencia negativa, $-\frac{1}{2}$, en la expresión dada, como sigue:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3\left(\frac{1}{2}\right)(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2} \cdot \frac{(2x+5)^{1/2}}{(2x+5)^{1/2}} \quad \text{multiplique numerador y denominador por } (2x+5)^{1/2}$$

$$= \frac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)(2x+5)^{1/2}} \quad \text{propiedad de los cocientes y ley de exponentes}$$

El resto de la simplificación es similar.

Un tercer método de simplificación es factorizar primero el máximo factor común. En este caso, los factores comunes son x y $(2x + 5)$, y los exponentes mínimos son 2 y $-\frac{1}{2}$, respectivamente. Entonces, el máximo factor común es $x^2(2x+5)^{-1/2}$, y factorizamos el numerador y simplificamos como sigue:

$$\frac{x^2(2x+5)^{-1/2}[3(2x+5)^1 - x]}{(2x+5)^1} = \frac{x^2(5x+15)}{(2x+5)^{3/2}} = \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{3/2}}$$

Uno de los problemas en cálculo es determinar los valores de x que hacen que el numerador sea igual a cero. La forma simplificada nos ayuda a responder esta pregunta con relativa facilidad, los valores son 0 y -3. ■

1.4 Ejercicios

Ejer. 1–4: Escriba la expresión como un número racional simplificado.

1 $\frac{3}{50} + \frac{7}{30}$

2 $\frac{8}{63} + \frac{5}{42}$

3 $\frac{5}{24} - \frac{3}{20}$

4 $\frac{7}{54} - \frac{5}{72}$

Ejer. 5–48: Simplifique la expresión.

5 $\frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 7x - 4}$

6 $\frac{2x^2 + 7x - 15}{3x^2 + 17x + 10}$

7 $\frac{y^2 - 25}{y^3 - 125}$

8 $\frac{y^2 - 9}{y^3 + 27}$

9 $\frac{12 + r - r^2}{r^3 + 3r^2}$

10 $\frac{10 + 3r - r^2}{r^4 + 2r^3}$

11 $\frac{9x^2 - 4}{3x^2 - 5x + 2} \cdot \frac{9x^4 - 6x^3 + 4x^2}{27x^4 + 8x}$

12 $\frac{4x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 6} \cdot \frac{4x^4 + 6x^3 + 9x^2}{8x^7 - 27x^4}$

13 $\frac{5a^2 + 12a + 4}{a^4 - 16} \div \frac{25a^2 + 20a + 4}{a^2 - 2a}$

14 $\frac{a^3 - 8}{a^2 - 4} \div \frac{a^3}{a^3 + 8}$

15 $\frac{6}{x^2 - 4} - \frac{3x}{x^2 - 4}$

16 $\frac{15}{x^2 - 9} - \frac{5x}{x^2 - 9}$

17 $\frac{4}{3s + 1} - \frac{11}{(3s + 1)^2}$

18 $\frac{4}{(5s - 2)^2} + \frac{s}{5s - 2}$

19 $\frac{2}{x} + \frac{3x + 1}{x^2} - \frac{x - 2}{x^3}$

20 $\frac{5}{x} - \frac{2x - 1}{x^2} + \frac{x + 7}{x^3}$

21 $\frac{3t}{t + 2} + \frac{5t}{t - 2} - \frac{40}{t^2 - 4}$

22 $\frac{t}{t + 3} + \frac{4t}{t - 3} - \frac{18}{t^2 - 9}$

23 $\frac{4x}{3x - 4} + \frac{8}{3x^2 - 4x} + \frac{2}{x}$

24 $\frac{12x}{2x + 1} - \frac{3}{2x^2 + x} + \frac{5}{x}$

25 $\frac{2x}{x + 2} - \frac{8}{x^2 + 2x} + \frac{3}{x}$

26 $\frac{5x}{2x + 3} - \frac{6}{2x^2 + 3x} + \frac{2}{x}$

27 $\frac{p^4 + 3p^3 - 8p - 24}{p^3 - 2p^2 - 9p + 18}$

28 $\frac{2ac + bc - 6ad - 3bd}{6ac + 2ad + 3bc + bd}$

29 $3 + \frac{5}{u} + \frac{2u}{3u + 1}$

30 $6 + \frac{2}{u} - \frac{3u}{u + 5}$

31 $\frac{2x + 1}{x^2 + 4x + 4} - \frac{6x}{x^2 - 4} + \frac{3}{x - 2}$

32 $\frac{4x + 12}{x^2 + 6x + 9} + \frac{5x}{x^2 - 9} + \frac{7}{x - 3}$

33 $\dfrac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

34 $\dfrac{\frac{1}{x + 2} - 5}{\frac{4}{x} - x}$

35 $\dfrac{\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}$

36 $\dfrac{\frac{r}{s} + \frac{s}{r}}{\frac{r^2}{s^2} - \frac{s^2}{r^2}}$

37 $\frac{y^{-1} + x^{-1}}{(xy)^{-1}}$

38 $\frac{y^{-2} - x^{-2}}{y^{-2} + x^{-2}}$

39 $\dfrac{\frac{5}{x + 1} + \frac{2x}{x + 3}}{\frac{x}{x + 1} + \frac{7}{x + 3}}$

40 $\dfrac{\frac{2}{w} - \frac{4}{2w + 1}}{\frac{5}{w} + \frac{8}{2w + 1}}$

41 $\dfrac{\frac{5}{x - 1} - \frac{5}{a - 1}}{x - a}$

42 $\dfrac{\frac{x + 2}{x} - \frac{a + 2}{a}}{x - a}$

43 $\frac{(x + h)^2 - 3(x + h) - (x^2 - 3x)}{h}$

44 $\frac{(x + h)^3 + 5(x + h) - (x^3 + 5x)}{h}$

45 $\dfrac{\frac{1}{(x + h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h}$

46 $\dfrac{\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}}{h}$

47 $\dfrac{\frac{4}{3x + 3h - 1} - \frac{4}{3x - 1}}{h}$

48 $\dfrac{\frac{7}{2x + 2h + 3} - \frac{7}{2x + 3}}{h}$

Ejer. 49–54: Racionalice el denominador.

49 $\dfrac{\sqrt{t}+5}{\sqrt{t}-5}$

50 $\dfrac{\sqrt{t}-7}{\sqrt{t}+7}$

51 $\dfrac{81x^2-16y^2}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$

52 $\dfrac{16x^2-y^2}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

53 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ (*Sugerencia:* multiplique numerador y denominador por $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.)

54 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

Ejer. 55–60: Racionalice el numerador.

55 $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^2-b^2}$

56 $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{b^2-c^2}$

57 $\dfrac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}$

58 $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

59 $\dfrac{\sqrt{1-x-h}-\sqrt{1-x}}{h}$

60 $\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$ (*Sugerencia:* Compare con ejercicio 53.)

Ejer. 61–64: Exprese como suma de términos de la forma ax^r, donde r es un número racional.

61 $\dfrac{3x^2-x+7}{x^{2/3}}$

62 $\dfrac{x^2+4x-6}{\sqrt{x}}$

63 $\dfrac{(x^2+2)^2}{x^5}$

64 $\dfrac{(\sqrt{x}-3)^2}{x^3}$

Ejer. 65–68: Exprese como un cociente.

65 $x^{-3}+x^2$

66 $x^{-5}-x$

67 $x^{-1/2}-x^{3/2}$

68 $x^{-2/3}+x^{7/3}$

Ejer. 69–82: Simplifique la expresión.

69 $(2x^2-3x+1)(4)(3x+2)^3(3)+(3x+2)^4(4x-3)$

70 $(6x-5)^3(2)(x^2+4)(2x)+(x^2+4)^2(3)(6x-5)^2(6)$

71 $(x^2-4)^{1/2}(3)(2x+1)^2(2)+(2x+1)^3\left(\frac{1}{2}\right)(x^2-4)^{-1/2}(2x)$

72 $(3x+2)^{1/3}(2)(4x-5)(4)+(4x-5)^2\left(\frac{1}{3}\right)(3x+2)^{-2/3}(3)$

73 $(3x+1)^6\left(\frac{1}{2}\right)(2x-5)^{-1/2}(2)+(2x-5)^{1/2}(6)(3x+1)^5(3)$

74 $(x^2+9)^4\left(-\frac{1}{3}\right)(x+6)^{-4/3}+(x+6)^{-1/3}(4)(x^2+9)^3(2x)$

75 $\dfrac{(6x+1)^3(27x^2+2)-(9x^3+2x)(3)(6x+1)^2(6)}{(6x+1)^6}$

76 $\dfrac{(x^2-1)^4(2x)-x^2(4)(x^2-1)^3(2x)}{(x^2-1)^8}$

77 $\dfrac{(x^2+2)^3(2x)-x^2(3)(x^2+2)^2(2x)}{[(x^2+2)^3]^2}$

78 $\dfrac{(x^2-5)^4(3x^2)-x^3(4)(x^2-5)^3(2x)}{[(x^2-5)^4]^2}$

79 $\dfrac{(x^2+4)^{1/3}(3)-(3x)\left(\frac{1}{3}\right)(x^2+4)^{-2/3}(2x)}{[(x^2+4)^{1/3}]^2}$

80 $\dfrac{(1-x^2)^{1/2}(2x)-x^2\left(\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-1/2}(-2x)}{[(1-x^2)^{1/2}]^2}$

81 $\dfrac{(4x^2+9)^{1/2}(2)-(2x+3)\left(\frac{1}{2}\right)(4x^2+9)^{-1/2}(8x)}{[(4x^2+9)^{1/2}]^2}$

82

$$\dfrac{(3x+2)^{1/2}\left(\frac{1}{3}\right)(2x+3)^{-2/3}(2)-(2x+3)^{1/3}\left(\frac{1}{2}\right)(3x+2)^{-1/2}(3)}{[(3x+2)^{1/2}]^2}$$

Ejer. 83–84: Evalúe el par de expresiones para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 construyendo una tabla de valores. Discuta si las dos expresiones podrían o no ser iguales.

83 $\dfrac{113x^3+280x^2-150x}{22x^3+77x^2-100x-350}$, $\dfrac{3x}{2x+7}+\dfrac{4x^2}{1.1x^2-5}$

84 $\dfrac{20x^2+41x+31}{10x^3+10x^2}$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3.2}{x^2}$

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS DE REPASO

1 Expprese como un número racional simplificado:

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{8}\right)$ (b) $\frac{3}{4} + \frac{6}{5}$ (c) $\frac{5}{8} - \frac{9}{7}$ (d) $\frac{3}{4} \div \frac{6}{5}$

2 Sustituya el símbolo $\square$ con $<$, $>$ o $=$ para que el enunciado resultante sea verdadero.

(a) $-0.1 \square -0.01$ (b) $\sqrt{9} \square -3$

(c) $\frac{1}{6} \square 0.166$

3 Exprese el enunciado como una desigualdad.

(a) x es negativa.

(b) a está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

(c) El valor absoluto de x no es menor que 4.

4 Reescriba sin usar el símbolo de valor absoluto, y simplifique:

(a) $|-4|$ (b) $\dfrac{|-5|}{-5}$ (c) $|3^{-1} - 2^{-1}|$

5 Si los puntos A, B y C en una recta coordenada tienen coordenadas -8, 4 y -3, respectivamente, encuentre la distancia:

(a) $d(A, C)$ (b) $d(C, A)$ (c) $d(B, C)$

6 Exprese el enunciado que se indica como una desigualdad que involucre el símbolo de valor absoluto.

(a) $d(x, -2)$ es al menos 7

(b) $d(4, x)$ es menor que 4.

Ejer. 7–8: Reescriba la expresión sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifique el resultado.

7 $|x + 3|$ si $x \leq -3$

8 $|(x - 2)(x - 3)|$ si $2 < x < 3$

9 Determine si la expresión es verdadera para todos los valores de las variables, cuando la expresión esté definida.

(a) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x + y}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{c} - \sqrt{d}} = \dfrac{\sqrt{c} + \sqrt{d}}{c - d}$

10 Exprese el número en forma científica.

(a) 93,700,000,000 (b) 0.000 004 02

11 Exprese el número en forma decimal.

(a) 6.8×10^7 (b) 7.3×10^{-4}

12 (a) Aproxime $|\sqrt{5} - 17^2|$ a cuatro cifras decimales.

(b) Exprese la respuesta del inciso (a) en notación científica con una precisión de cuatro cifras significativas.

Ejer. 13–14: Exprese el número en la forma a/b, donde a y b son enteros.

13 $-3^2 + 3^0 + 27^{-2/3}$ 14 $\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1^2 + 16^{-3/4}$

Ejer. 15–40: Simplifique la expresión y racionalice el denominador cuando sea apropiado.

15 $(3a^2b)^2(2ab^3)$ 16 $\dfrac{6r^3y^2z}{2r^5yz}$

17 $\dfrac{(3x^2y^{-3})^{-2}}{x^{-5}y}$ 18 $\left(\dfrac{a^{2/3}b^{3/2}}{a^2b}\right)^6$

19 $(-2p^2q)^3\left(\dfrac{p}{4q^2}\right)^2$ 20 $c^{-4/3}c^{3/2}c^{1/6}$

21 $\left(\dfrac{xy^{-1}}{\sqrt{z}}\right)^4 \div \left(\dfrac{x^{1/3}y^2}{z}\right)^3$ 22 $\left(\dfrac{-64x^3}{z^6y^9}\right)^{2/3}$

23 $[(a^{2/3}b^{-2})^3]^{-1}$ 24 $\dfrac{(3u^2v^5w^{-4})^3}{(2uv^{-3}w^2)^4}$

25 $\dfrac{r^{-1} + s^{-1}}{(rs)^{-1}}$ 26 $(u + v)^3(u + v)^{-2}$

27 $s^{5/2}s^{-4/3}s^{-1/6}$ 28 $x^{-2} - y^{-1}$

29 $\sqrt[3]{(x^4y^{-1})^6}$ 30 $\sqrt[3]{27x^5y^3z^4}$

31 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ 32 $\sqrt{\dfrac{a^2b^3}{c}}$

33 $\sqrt[3]{4x^2y}\ \sqrt[3]{2x^5y^2}$ 34 $\sqrt[4]{(-4a^3b^2c)^2}$

35 $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)$ 36 $\sqrt{\sqrt[3]{(c^3d^6)^4}}$

37 $\dfrac{\sqrt{12x^4y}}{\sqrt{3x^2y^7}}$ 38 $\sqrt[3]{(a + 2b)^3}$

39 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi^2}}$ 40 $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{9y}}$

Ejer. 41–44: Racionalice el denominador.

41 $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ 42 $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a - 2}}$

43 $\dfrac{81x^2 - y^2}{3\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

44 $\dfrac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$

Ejer. 45–62: Exprese como un polinomio.

45 $(3x^3 - 4x^2 + x - 6) + (x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5)$

46 $(4z^4 - 3z^2 + 1) - z(z^3 + 4z^2 - 4)$

47 $(x + 4)(x + 3) - (2x - 3)(x - 5)$

48 $(4x - 3)(2x^2 + 5x - 7)$

49 $(3y^3 - 2y^2 + y + 4)(y^2 - 3)$

50 $(3x + 2)(x - 5)(5x + 4)$

51 $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

52 $\dfrac{9p^4q^3 - 6p^2q^4 + 5p^3q^2}{3p^2q^2}$

53 $(3a - 5b)(4a + 7b)$

54 $(4r^2 - 3s)^2$

55 $(13a^2 + 5b)(13a^2 - 5b)$

56 $(a^3 - a^2)^2$

57 $(3y + x)^2$

58 $(c^2 - d^2)^3$

59 $(2a + b)^3$

60 $(x^2 - 2x + 3)^2$

61 $(3x + 2y)^2(3x - 2y)^2$

62 $(a + b + c + d)^2$

Ejer. 63–78: Factorice el polinomio.

63 $60xw + 50w$

64 $3r^4s^3 - 12r^2s^5$

65 $28x^2 - 4x - 5$

66 $16a^4 + 24a^2b^2 + 9b^4$

67 $2wy + 3yx - 8wz - 12zx$

68 $2c^3 - 12c^2 + 3c - 18$

69 $8x^3 + 64y^3$

70 $u^3v^4 - u^6v$

71 $p^8 - q^8$

72 $x^4 - 12x^3 + 36x^2$

73 $w^6 + 1$

74 $5x + 20$

75 $x^2 + 49$

76 $x^2 - 49y^2 - 14x + 49$

77 $x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32$

78 $4x^4 + 12x^3 + 20x^2$

Ejer. 79–90: Simplifique la expresión.

79 $\dfrac{6x^2 - 7x - 5}{4x^2 + 4x + 1}$

80 $\dfrac{r^3 - t^3}{r^2 - t^2}$

81 $\dfrac{6x^2 - 5x - 6}{x^2 - 4} \div \dfrac{2x^2 - 3x}{x + 2}$

82 $\dfrac{6}{4x - 5} - \dfrac{15}{10x + 1}$

83 $\dfrac{7}{x + 2} + \dfrac{3x}{(x + 2)^2} - \dfrac{5}{x}$

84 $\dfrac{x + x^{-2}}{1 + x^{-2}}$

85 $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2 + x} - \dfrac{3}{x + 3}$

86 $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$

87 $\dfrac{x + 2 - \dfrac{3}{x + 4}}{\dfrac{x}{x + 4} + \dfrac{1}{x + 4}}$

88 $\dfrac{\dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{4}{x + 2}}{x - 3 - \dfrac{6}{x + 2}}$

89 $(x^2 + 1)^{3/2}(4)(x + 5)^3 + (x + 5)^4\left(\frac{3}{2}\right)(x^2 + 1)^{1/2}(2x)$

90 $\dfrac{(4 - x^2)\left(\frac{1}{3}\right)(6x + 1)^{-2/3}(6) - (6x + 1)^{1/3}(-2x)}{(4 - x^2)^2}$

91 Exprese $\dfrac{(x + 5)^2}{\sqrt{x}}$ como una suma de términos de la forma ax^r, donde r es un número racional.

92 Exprese $x^3 + x^{-1}$ como un cociente.

93 **Células sanguíneas rojas en un cuerpo** El cuerpo de una persona promedio contiene 5.5 litros de sangre y unos 5 millones de células sanguíneas rojas por milímetro cúbico de sangre. Dado que $1\text{ L} = 10^6\text{ mm}^3$, estime el número de células sanguíneas rojas en el cuerpo de una persona promedio.

94 **Pulsaciones en toda una vida** Un corazón sano pulsa de 70 a 90 veces por minuto. Estime el número de pulsaciones en toda la vida de una persona que llega a los 80 años.

95 **Área superficial corporal** A la edad de 2 años, un niño típico mide 91.2 centímetros de estatura y pesa 13.7 kilogramos. Use la fórmula de DuBois y DuBois, $S = (0.007184)w^{0.425}h^{0.725}$, donde w es el peso y h es la estatura, para hallar el área superficial corporal S (en metros cuadrados).

96 **Expansión adiabática** Se dice que un gas se expande *en forma adiabática* si no hay pérdida o ganancia de calor. La fórmula para la expansión adiabática del aire es $pv^{-1/4} = c$, donde p es la presión, v es el volumen y c es una constante. Si, en cierto instante, la presión es 40 dinas/cm^2 y el volumen es 60 cm^3, encuentre el valor de c (una *dina* es la unidad de fuerza en el sistema cgs).

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 **Dinero en efectivo con tarjeta de crédito** Por cada 10 dólares con cargo a una determinada tarjeta de crédito, se otorga 1 punto. Al final del año, 100 puntos pueden ser canjeados por $1 en dinero en efectivo. ¿Qué porcentaje de descuento representa este dinero en efectivo en términos de la cantidad cargada a la tarjeta de crédito?

2 Determine las condiciones bajo las cuales $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

3 Demuestre que la suma de cuadrados $x^2 + 25$ se puede factorizar al sumar y restar un término particular y seguir el método demostrado en el ejemplo 10(c) de la sección 1.3.

4 ¿Cuál es la diferencia entre las expresiones $\dfrac{1}{x+1}$ y $\dfrac{x-1}{x^2-1}$?

5 Escriba el cociente de dos polinomios arbitrarios de segundo grado en x y evalúe el cociente con diversos valores grandes de x. ¿A qué conclusión general puede llegar acerca de estos cocientes?

6 Simplifique la expresión $\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$. Ahora evalúe ambas expresiones con un valor de x ($x \neq \pm 2$). Explique lo que demuestra (o no demuestra) esta evaluación y lo que demuestra (o no demuestra) su simplificación.

7 **Treta de una fiesta** Para adivinar la edad y estatura de su pareja, haga que él/ella haga lo siguiente:

1 Escriba la edad (de él/ella).
2 Multiplíquela por 2.
3 Sume 5.
4 Multiplique la suma por 50.
5 Reste 365.
6 Sume la estatura (de él/ella) (en pulgadas).
7 Sume 115.

Los primeros dos dígitos del resultado son iguales a su edad (de él/ella) y los últimos dos dígitos son iguales a su estatura (de él/ella). Explique por qué esto es verdadero.

8 **Problema de circuitos** En un problema particular de circuitos, el voltaje de salida está definido por

$$V_{\text{sal}} = I_{\text{ent}}\left(-\frac{RXi}{R - Xi}\right),$$

donde $I_{\text{ent}} = \dfrac{V_{\text{ent}}}{Z_{\text{ent}}}$ y $Z_{\text{ent}} = \dfrac{R^2 - X^2 - 3RXi}{R - Xi}$. Encuentre una fórmula para V_{sal} en términos de V_{ent} cuando R es igual a X.

9 **Relacionar récords de béisbol** Con base en el número de carreras anotadas (S) y carreras permitidas (A), el porcentaje ganador de Pitágoras estima cuál debe ser el porcentaje ganador de un equipo de béisbol. Esta fórmula, desarrollada por el experto en estadísticas del béisbol Bill James, tiene la forma

$$\frac{S^x}{S^x + A^x}.$$

James determinó que $x = 1.83$ da los resultados más precisos.

El equipo de los Yanquis de Nueva York de 1927 es considerado generalmente como uno de los mejores equipos de béisbol de la historia. Tuvieron un récord de 110 victorias contra 44 derrotas. Anotaron 975 carreras mientras que permitieron sólo 599.

(a) Encuentre el récord de ganados-perdidos de Pitágoras.

(b) Estime el valor de x (al 0.01 más cercano) que mejor predice el récord real de ganados y perdidos de los Yanquis de 1927.

CAPÍTULO 1 EXAMEN DE CAPÍTULO

1 Si x es positiva y y es negativa, ¿cuál es el signo de $\dfrac{y^{99}}{y - x}$?

2 Exprese la afirmación "el cociente de x y y no es mayor que 5" como una desigualdad.

3 Si x es negativa, reescriba $|-x^2 - 3|$ sin utilizar el símbolo de valor absoluto y simplifique el resultado.

4 Si la distancia de la Tierra al Sol es 91 500 000 millas y la velocidad de la luz es 186 000 millas por segundo, aproxime el número de segundos que le toma a la luz viajar del Sol a la Tierra.

5 Simplifique $\dfrac{x^2y^{-3}}{z}\left(\dfrac{3x^0}{zy^2}\right)^{-2}$. Escriba su respuesta con exponentes positivos.

6 Simplifique $x^{-2/3}x^{3/4}$. Escriba su respuesta usando notación radical.

7 Simplifique $\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{3}}$ racionalizando el numerador.

8 Exprese el producto $(x + 2)(x^2 - 3x + 5)$ como un polinomio.

9 Si $2x^2(2x + 3)^4$ está escrito como un polinomio, ¿cuál es el término principal?

10 Factorice el polinomio $2x^2 + 7x - 15$.

11 Factorice completamente el polinomio $3x^3 - 27x$.

12 Factorice $64x^3 + 1$.

13 Factorice $x - 5$ como una diferencia de cubos.

14 Factorice $2x^2 + 4x - 3xy - 6y$.

15 Factor $x^{93} - 1$.

16 Simplifique y reduzca la expresión $\dfrac{3x}{x - 2} + \dfrac{5}{x} - \dfrac{12}{x^2 - 2x}$.

17 Simplifique y reduzca la expresión $\dfrac{\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y^2}{x}}{\dfrac{x}{y} + 1 + \dfrac{y}{x}}$.

18 Simplifique y reduzca la expresión $\dfrac{(x + h)^2 + 7(x + h) - (x^2 + 7x)}{h}$.

19 Racionalice el denominador de la expresión $\dfrac{6h^2}{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}$.

20 Simplifique la expresión $(x + 2)^3(4)(x - 3)^3 + (x - 3)^4(3)(x + 2)^2$ escribiéndola como el producto de tres factores.

21 Simplifique la expresión $\dfrac{(x^2 - 3)^2(2x) - x^2(2)(x^2 - 3)(2x)}{[(x^2 - 3)^2]^2}$.

2

Ecuaciones y desigualdades

Desde los tiempos de los babilonios (2000 a.C.) han existido métodos para resolver ecuaciones; ellos describieron ecuaciones con palabras en lugar de usar variables —x, y y otras— que usamos hoy en día. Los avances para hallar soluciones de ecuaciones después tuvieron lugar en Italia, en el siglo XVI y continuaron por el mundo hasta bien entrado el siglo XIX. En nuestro tiempo se emplean computadoras para aproximar soluciones de ecuaciones muy complicadas.

Las desigualdades que contienen variables han alcanzado ahora el mismo nivel de importancia que las ecuaciones y se usan extensamente en aplicaciones de matemáticas. En este capítulo examinaremos varios métodos para resolver ecuaciones y desigualdades básicas.

2.1 Ecuaciones

Una **ecuación** (o **igualdad**) es una afirmación de que dos cantidades o expresiones son iguales. Se emplean ecuaciones en todos los campos que emplean números reales; como ilustración, la ecuación

$$d = rt \qquad \text{o} \qquad \text{distancia} = (\text{rapidez})(\text{tiempo}),$$

se usa para resolver problemas que comprenden un cuerpo que se mueve con rapidez constante. Si la rapidez r es 45 mi/h (millas por hora), entonces la distancia d (en millas) recorrida después del tiempo t (en horas) está dada por

$$d = 45t.$$

Por ejemplo, si $t = 2$ h, entonces $d = 45 \cdot 2 = 90$ mi. Si deseamos hallar cuánto tarda el cuerpo en recorrer 75 millas, hacemos $d = 75$ y *resolvemos* la ecuación

$$75 = 45t \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad 45t = 75.$$

Si dividimos entre 45 ambos lados de la última ecuación, obtenemos

$$t = \tfrac{75}{45} = \tfrac{5}{3}.$$

Por lo tanto, si $r = 45$ mi/h, entonces el tiempo necesario para recorrer 75 millas es $1\frac{2}{3}$ horas, o sea 1 hora y 40 minutos.

Note que la ecuación $d = rt$ contiene tres variables: d, r y t. En gran parte de nuestro trabajo en este capítulo consideraremos ecuaciones que contienen sólo una variable. La siguiente tabla se refiere a una variable x, pero se puede considerar cualquier otra variable. Las abreviaturas LI y LD de la segunda ilustración representan el lado izquierdo y el lado derecho, respectivamente.

Terminología	Definición	Ilustración
Ecuación en x	Enunciado de igualdad que contiene una variable, x	$x^2 - 5 = 4x$
Solución o **raíz,** de una ecuación en x	Número b que da un enunciado verdadero al sustituirlo por x	5 es una solución de $x^2 - 5 = 4x$, porque la sustitución nos da LI: $5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$ y LD: $4 \cdot 5 = 20$, y $20 = 20$ son enunciados verdaderos.
Un número b **satisface** una ecuación en x	b es una solución de la ecuación	5 satisface a $x^2 - 5 = 4x$.
Ecuaciones equivalentes	Ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones	$2x + 1 = 7$ $2x = 7 - 1$ $2x = 6$ $x = 3$
Resolver una ecuación en x	Encontrar todas las soluciones de la ecuación	Para resolver $(x + 3)(x - 5) = 0$, iguale a cero cada factor: $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, obteniendo las soluciones -3 y 5.

Una **ecuación algebraica** en x contiene sólo expresiones algebraicas tales como polinomios, expresiones racionales, radicales y otras. Una ecuación de

este tipo se denomina **ecuación condicional** si hay números en los dominios de las expresiones que no son soluciones. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 9$ es condicional porque el número $x = 4$ (y otros) no es una solución. Si *todo* número en los dominios de las expresiones en una ecuación algebraica es una solución, la ecuación se denomina **identidad.**

A veces es difícil determinar si una ecuación es condicional o una identidad. Una identidad con frecuencia estará indicada cuando, después de aplicar las propiedades de los números reales, se obtiene una ecuación de la forma $p = p$, donde p es alguna expresión. Para ilustrar, si multiplicamos ambos lados de la ecuación

$$\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x}{(x + 2)(x - 2)}$$

por $x^2 - 4$, obtenemos $x = x$. Esto nos pone en alerta sobre el hecho de que podemos tener una identidad entre manos, pero no demuestra nada. Un método estándar para verificar que una ecuación es una identidad es demostrar, usando propiedades de los números reales, que la expresión que aparece en un lado de la ecuación dada se puede transformar en la expresión que aparece en el otro lado de la ecuación dada. Esto es fácil de hacer en la ilustración precedente, puesto que sabemos que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Desde luego que para demostrar que una ecuación no es una identidad, sólo necesitamos hallar un número real en el dominio de la variable que no satisfaga la ecuación original.

La ecuación más básica en álgebra es la *ecuación lineal*, definida en la tabla siguiente, donde a y b denotan números reales.

Terminología	Definición	Ilustración
Ecuación lineal en x	Una ecuación que se puede escribir en la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$	$4x + 5 = 0$ $4x = -5$ $x = -\frac{5}{4}$

La ilustración de la tabla precedente indica un método típico de resolver una ecuación lineal. Siguiendo el mismo procedimiento, vemos que

$$\text{si} \qquad ax + b = 0, \qquad \text{entonces} \qquad x = -\frac{b}{a},$$

siempre que $a \neq 0$. Entonces, una ecuación lineal tiene exactamente una solución.

A veces resolvemos una ecuación al hacer una lista de ecuaciones equivalentes, cada una en algún sentido más sencilla que la precedente, terminando la lista con una ecuación de la cual las soluciones se pueden obtener fácilmente. A veces simplificamos una ecuación al sumar la misma expresión a ambos lados o sustrayendo la misma expresión de ambos lados. También podemos multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que representa un número real *diferente de cero.* En los ejemplos siguientes, las frases en color indican la forma en que se obtuvo una ecuación equivalente a partir de la ecuación precedente. Para acortar estas frases, al igual que en el ejemplo 1, hemos usado "sume 7" en lugar de la más precisa pero larga *sume 7 a ambos lados.* Del mismo modo, "reste 2x" se usa en lugar de *reste 2x de ambos lados*, y "divida entre 4" significa *divida ambos lados entre* 4.

EJEMPLO 1 **Resolver una ecuación lineal**

Resuelva la ecuación $6x - 7 = 2x + 5$.

SOLUCIÓN Las ecuaciones de la lista siguiente son equivalentes:

$$\begin{aligned} 6x - 7 &= 2x + 5 && \text{original} \\ (6x - 7) + 7 &= (2x + 5) + 7 && \text{sume 7} \\ 6x &= 2x + 12 && \text{simplifique} \\ 6x - 2x &= (2x + 12) - 2x && \text{reste } 2x \\ 4x &= 12 && \text{simplifique} \\ \frac{4x}{4} &= \frac{12}{4} && \text{divida entre 4} \\ x &= 3 && \text{simplifique} \end{aligned}$$

✓ **Prueba** $x = 3$ LI: $6(3) - 7 = 18 - 7 = 11$
LD: $2(3) + 5 = 6 + 5 = 11$

Como $11 = 11$ es un enunciado verdadero, $x = 3$ concuerda como solución. ■

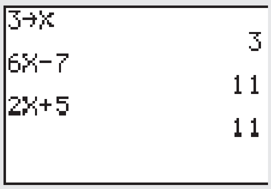
Como se indica en el ejemplo precedente, con frecuencia comprobamos una solución al sustituirla en la ecuación dada. Estas pruebas pueden detectar errores introducidos por manipulaciones incorrectas o errores en la aritmética.

Decimos que la ecuación dada en el ejemplo 1 *tiene la solución* $x = 3$. Del mismo modo, diríamos que la ecuación $x^2 = 4$ *tiene soluciones* $x = 2$ *y* $x = -2$.

Prueba de ecuaciones

Para probar la solución del ejemplo 1, guardaremos 3 en X y hallaremos el valor del lado izquierdo de la ecuación y el valor del lado derecho de la ecuación

3 [STO▷] [X,T,θ,n] [ENTER]
6 [X,T,θ,n] [−] 7 [ENTER]
2 [X,T,θ,n] [+] 5 [ENTER]



A medida que se haga más difícil el nivel de las ecuaciones, la prueba de una calculadora de gráficas se hace de gran valor.

El siguiente ejemplo ilustra que una ecuación aparentemente complicada puede simplificarse en una ecuación lineal.

EJEMPLO 2 **Resolución de una ecuación**

Resuelva la ecuación $(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)$.

SOLUCIÓN Las ecuaciones de la lista siguiente son equivalentes:

$$\begin{aligned}
(8x - 2)(3x + 4) &= (4x + 3)(6x - 1) && \text{original}\\
24x^2 + 26x - 8 &= 24x^2 + 14x - 3 && \text{multiplique factores}\\
26x - 8 &= 14x - 3 && \text{reste } 24x^2\\
12x - 8 &= -3 && \text{reste } 14x\\
12x &= 5 && \text{sume } 8\\
x &= \tfrac{5}{12} && \text{divida entre } 12
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada es $\frac{5}{12}$. ■

No probamos la solución precedente porque cada paso da una ecuación equivalente; no obstante, cuando el lector trabaje ejercicios o haga un examen, siempre es buena idea comprobar las respuestas para evitar errores.

Si una ecuación contiene expresiones racionales, a veces eliminamos denominadores al multiplicar ambos lados por el mínimo común denominador de estas expresiones. Si multiplicamos ambos lados por una expresión que sea igual a cero para algún valor de x, entonces la ecuación resultante puede *no* ser equivalente a la ecuación original, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 **Una ecuación sin soluciones**

Resuelva la ecuación $\dfrac{3x}{x - 2} = 1 + \dfrac{6}{x - 2}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{x - 2} &= 1 + \frac{6}{x - 2} && \text{original}\\
\left(\frac{3x}{x - 2}\right)(x - 2) &= (1)(x - 2) + \left(\frac{6}{x - 2}\right)(x - 2) && \text{multiplique por } x - 2\\
3x &= (x - 2) + 6 && \text{simplifique}\\
3x &= x + 4 && \text{simplifique}\\
2x &= 4 && \text{reste } x\\
x &= 2 && \text{divida entre } 2
\end{aligned}$$

✓ **Prueba** $x = 2$ LI: $\dfrac{3(2)}{(2) - 2} = \dfrac{6}{0}$

Como la división entre 0 no es permisible, $x = 2$ no es una solución. Por lo tanto, *la ecuación dada no tiene soluciones.* ■

En el proceso de resolver una ecuación se puede obtener, como *posible* solución, un número que *no es* una solución de la ecuación dada. Ese número se denomina **solución extraña** o **raíz extraña** de la ecuación dada. En el ejemplo 3, $x = 2$ es una solución (o raíz) extraña de la ecuación dada.

Las siguientes directrices también se pueden usar para resolver la ecuación del ejemplo 3. En este caso, observando la directriz 2 se hace innecesario comprobar la solución extraña $x = 2$.

Directrices para resolver una ecuación que contenga expresiones racionales

1. Determinar el mínimo común denominador (mcd) de las expresiones racionales.
2. Encontrar los valores de la variable que hagan cero al mcd. *No son* soluciones, porque dan al menos un denominador cero cuando se sustituye en la ecuación dada.
3. Multiplicar cada término de la ecuación por el mcd y simplificar, con lo cual se eliminan todos los denominadores.
4. Resolver la ecuación obtenida en la directriz 3.
5. Las soluciones de la ecuación dada son las soluciones halladas en la directriz 4, con la exclusión de los valores hallados en la directriz 2.

Seguiremos estas directrices en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 **Una ecuación que contiene expresiones racionales**

Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{2x-4} - \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{2}{x-2}$.

SOLUCIÓN

Directriz 1 Al reescribir el denominador $2x - 4$ como $2(x - 2)$, vemos que el mcd de las tres expresiones racionales es $2(x - 2)(x + 3)$.

Directriz 2 Los valores de x que hacen cero al mcd $2(x - 2)(x + 3)$ son 2 y -3, de modo que estos números no pueden ser soluciones de la ecuación.

Directriz 3 Multiplicando cada término de la ecuación por el mcd y simplificando da lo siguiente:

$$\frac{3}{2(x-2)}2(x-2)(x+3) - \frac{5}{x+3}2(x-2)(x+3) = \frac{2}{x-2}2(x-2)(x+3)$$

$$3(x+3) - 10(x-2) = 4(x+3) \qquad \text{cancele factores semejantes}$$

$$3x + 9 - 10x + 20 = 4x + 12 \qquad \text{multiplique factores}$$

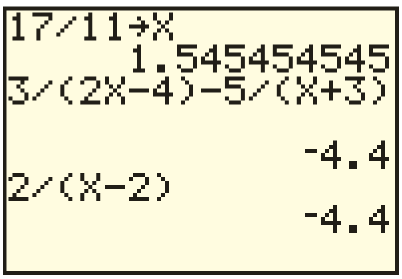
Directriz 4 Resolvemos la última ecuación obtenida en la directriz 3.

$$3x - 10x - 4x = 12 - 9 - 20 \qquad \text{reste } 4x\text{, 9 y 20}$$

$$-11x = -17 \qquad \text{combine términos semejantes}$$

$$x = \tfrac{17}{11} \qquad \text{divida entre } -11$$

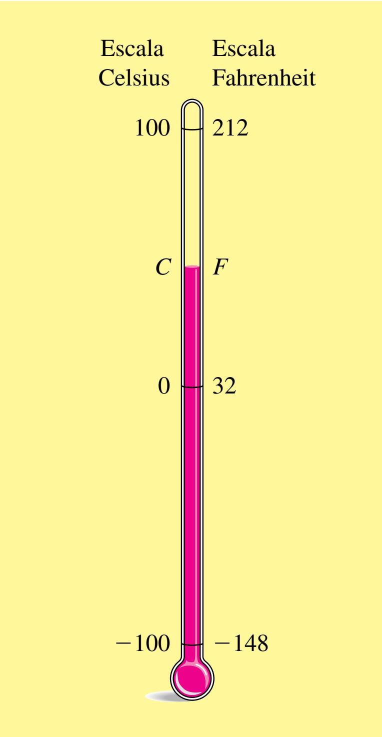
FIGURA 1



Directriz 5 Como $\frac{17}{11}$ no está incluido entre los valores (2 y -3) que hacen cero al mcd (directriz 2), vemos que $x = \frac{17}{11}$ es una solución de la ecuación dada.

No comprobaremos la solución $x = \frac{17}{11}$ por sustitución, porque la aritmética necesaria es complicada. Es más sencillo comprobar con cuidado las manipulaciones algebraicas que se emplean en cada paso, pero se recomienda una prueba de calculadora como se ve en la figura 1. ■

FIGURA 2



Las fórmulas que comprenden diversas variables se presentan en muchas aplicaciones de matemáticas. A veces es necesario despejar una variable específica en términos de las variables restantes que aparecen en la fórmula, como lo ilustran los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 **Relación entre escalas de temperatura**

Las escalas Celsius y Fahrenheit de temperatura se muestran en el termómetro de la figura 2. La relación entre las lecturas C y F de temperatura está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Despeje F.

SOLUCIÓN Para *despejar F* debemos obtener una fórmula que tenga a F en un lado del signo igual y no tenga F en el otro lado. Podemos hacer esto como sigue:

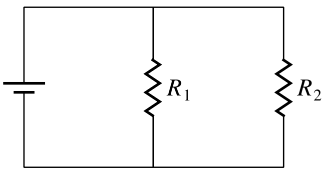
$$\begin{aligned} C &= \tfrac{5}{9}(F - 32) && \text{original} \\ \tfrac{9}{5}C &= F - 32 && \text{multiplique por } \tfrac{9}{5} \\ \tfrac{9}{5}C + 32 &= F && \text{sume 32} \\ F &= \tfrac{9}{5}C + 32 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

■

Podemos hacer una prueba sencilla de nuestro resultado del ejemplo 5 como sigue. Empiece con $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ y sustituya 212 (una opción arbitraria) para F para obtener 100 para C. Ahora sea $C = 100$ en $F = \frac{9}{5}C + 32$ para obtener $F = 212$. De nuevo, esta prueba *no demuestra* que estamos bien, pero ciertamente da credibilidad a nuestro resultado.

EJEMPLO 6 **Resistores conectados en paralelo**

FIGURA 3



En teoría eléctrica, la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

se emplea para hallar la resistencia total R cuando dos resistores R_1 y R_2 están conectados en paralelo, como se ilustra en la figura 3. Despeje R_1.

SOLUCIÓN Primero multiplicamos ambos lados de la ecuación dada por el mcd de las tres fracciones y luego despejamos R_1, como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} && \text{original} \\ \frac{1}{R} \cdot RR_1R_2 &= \frac{1}{R_1} \cdot RR_1R_2 + \frac{1}{R_2} \cdot RR_1R_2 && \text{multiplique por el mcd, } RR_1R_2 \\ R_1R_2 &= RR_2 + RR_1 && \text{cancele factores comunes} \\ R_1R_2 - RR_1 &= RR_2 && \text{reúna términos con } R_1 \text{ en un lado} \\ R_1(R_2 - R) &= RR_2 && \text{factorice } R_1 \\ R_1 &= \frac{RR_2}{R_2 - R} && \text{divida entre } R_2 - R \end{aligned}$$

(continúa)

Un método alternativo de solución es, primero, despejar $\frac{1}{R_1}$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{original}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \quad \text{ecuación equivalente}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \quad \text{reste } \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2} \quad \text{combine fracciones}$$

Si dos números diferentes de cero son iguales, entonces también lo son sus recíprocos. Por lo tanto,

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}.$$

■

2.1 Ejercicios

Ejer. 1–44: Resuelva la ecuación.

1 $-3x + 4 = -1$

2 $2x - 4 = -9$

3 $4x - 3 = -5x + 6$

4 $5x - 4 = 2(x - 2)$

5 $4(2y + 5) = 3(5y - 2)$

6 $6(2y + 3) - 4(y - 5) = 0$

7 $\frac{1}{5}x + 4 = 5 - \frac{2}{7}x$

8 $\frac{5}{3}x - 1 = 4 + \frac{2}{3}x$

9 $0.3(3 + 2x) + 1.2x = 3.2$

10 $1.5x - 0.7 = 0.6(3 - 5x)$

11 $\dfrac{3 + 5x}{5} = \dfrac{4 - x}{8}$

12 $\dfrac{2x - 9}{4} = 2 + \dfrac{x}{12}$

13 $\dfrac{13 + 2x}{4x + 1} = \dfrac{3}{4}$

14 $\dfrac{3}{7x - 2} = \dfrac{9}{3x + 1}$

15 $6 - \dfrac{5}{x} = 4 + \dfrac{3}{x}$

16 $\dfrac{3}{y} + \dfrac{6}{y} - \dfrac{1}{y} = 11$

17 $(3x - 2)^2 = (x - 5)(9x + 4)$

18 $(x + 5)^2 + 3 = (x - 2)^2$

19 $(4x - 7)(2x + 3) - 8x(x - 4) = 0$

20 $(2x + 9)(4x - 3) = 8x^2 - 12$

21 $\dfrac{3x + 1}{6x - 2} = \dfrac{2x + 5}{4x - 13}$

22 $\dfrac{7x + 2}{14x - 3} = \dfrac{x - 8}{2x + 3}$

23 $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{10x + 5} = \dfrac{7}{2x + 1}$

24 $\dfrac{-5}{3x - 9} + \dfrac{4}{x - 3} = \dfrac{5}{6}$

25 $\dfrac{3}{2x - 4} - \dfrac{5}{3x - 6} = \dfrac{3}{5}$

26 $\dfrac{9}{2x + 6} - \dfrac{7}{5x + 15} = \dfrac{2}{3}$

27 $4 - \dfrac{5}{3x - 7} = 4$

28 $\dfrac{6}{2x + 11} + 5 = 5$

29 $\dfrac{1}{2x - 1} = \dfrac{4}{8x - 4}$

30 $\dfrac{4}{5x + 2} - \dfrac{12}{15x + 6} = 0$

31 $\dfrac{7}{y^2 - 4} - \dfrac{4}{y + 2} = \dfrac{5}{y - 2}$

32 $\dfrac{4}{2u - 3} + \dfrac{10}{4u^2 - 9} = \dfrac{1}{2u + 3}$

33 $(x + 3)^3 - (3x - 1)^2 = x^3 + 4$

34 $(x - 1)^3 = (x + 1)^3 - 6x^2$

35 $\dfrac{9x}{3x - 1} = 2 + \dfrac{3}{3x - 1}$

36 $\dfrac{2x}{2x + 3} + \dfrac{6}{4x + 6} = 5$

37 $\dfrac{1}{x + 4} + \dfrac{3}{x - 4} = \dfrac{3x + 8}{x^2 - 16}$

38 $\dfrac{3}{2x + 3} + \dfrac{5}{2x - 3} = \dfrac{4x + 6}{4x^2 - 9}$

39 $\dfrac{4}{x + 2} + \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{5x - 6}{x^2 - 4}$

40 $\dfrac{2}{2x + 5} + \dfrac{3}{2x - 5} = \dfrac{10x + 5}{4x^2 - 25}$

41 $\dfrac{2}{2x + 1} - \dfrac{3}{2x - 1} = \dfrac{-2x + 7}{4x^2 - 1}$

42 $\dfrac{3}{2x+5} + \dfrac{4}{2x-5} = \dfrac{14x+3}{4x^2-25}$

43 $\dfrac{5}{2x+3} + \dfrac{4}{2x-3} = \dfrac{14x+3}{4x^2-9}$

44 $\dfrac{-3}{x+4} + \dfrac{7}{x-4} = \dfrac{-5x+4}{x^2-16}$

Ejer. 45–50: Demuestre que la ecuación es una identidad.

45 $(4x-3)^2 - 16x^2 = 9 - 24x$

46 $(3x-4)(2x+1) + 5x = 6x^2 - 4$

47 $\dfrac{x^2-16}{x+4} = x - 4$

48 $\dfrac{x^3+8}{x+2} = x^2 - 2x + 4$

49 $\dfrac{5x^2+8}{x} = \dfrac{8}{x} + 5x$

50 $\dfrac{49x^2-25}{7x-5} = 7x + 5$

Ejer. 51–52: ¿Para qué valor de *c* el número *a* es una solución de la ecuación?

51 $4x + 1 + 2c = 5c - 3x + 6; \quad a = -2$

52 $3x - 2 + 6c = 2c - 5x + 1; \quad a = 4$

Ejer. 53–54: Determine si las dos ecuaciones son equivalentes.

53 (a) $\dfrac{7x}{x-5} = \dfrac{42}{x-5}, \quad x = 6$

(b) $\dfrac{3x}{x-5} = \dfrac{15}{x-5}, \quad x = 5$

54 (a) $\dfrac{6x}{x-7} = \dfrac{54}{x-7}, \quad x = 9$

(b) $\dfrac{8x}{x-7} = \dfrac{56}{x-7}, \quad x = 7$

Ejer. 55–56: Determine los valores para *a* y *b* para los cuales $\frac{5}{3}$ es una solución de la ecuación.

55 $ax + b = 0$

56 $ax^2 + bx = 0$

Ejer. 57–58: Determine cuál ecuación no es equivalente a la ecuación que la precede.

57
$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= x^2 - 4 \\ (x+1)(x-2) &= (x+2)(x-2) \\ x+1 &= x+2 \\ 1 &= 2 \end{aligned}$$

58
$$\begin{aligned} 5x + 6 &= 4x + 3 \\ x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 4x + 3 \\ (x+2)(x+3) &= (x+1)(x+3) \\ x+2 &= x+1 \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

Ejer. 59–62: Despeje de la fórmula la variable especificada.

59 $EK + L = D - TK$ despeje K

60 $CD + C = PC + R$ despeje C

61 $N = \dfrac{Q+1}{Q}$ despeje Q

62 $\beta = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ despeje α

Ejer. 63–76: La fórmula se presenta en la aplicación indicada. Despeje la variable especificada.

63 $I = Prt$ despeje P (interés simple)

64 $C = 2\pi r$ despeje r (circunferencia de un círculo)

65 $A = \frac{1}{2}bh$ despeje h (área de un triángulo)

66 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ despeje h (volumen de un cono)

67 $F = g\dfrac{mM}{d^2}$ despeje m (ley de Newton de la gravitación)

68 $R = \dfrac{V}{I}$ despeje I (ley de Ohm en teoría eléctrica)

69 $P = 2l + 2w$ despeje w (perímetro de un rectángulo)

70 $A = P + Prt$ despeje r (principal más interés)

71 $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$ despeje b_1 (área de un trapecio)

72 $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ despeje v_0 (distancia que cae un objeto)

73 $S = \dfrac{p}{q + p(1 - q)}$ despeje q (ley de Amdahl para supercomputadoras)

74 $S = 2(lw + hw + hl)$ despeje h (área superficial de una caja rectangular)

75 $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ despeje q (ecuación de una lente)

76 $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$ despeje R_2 (tres resistores conectados en paralelo)

Ejer. 77–78: Escoja la ecuación que mejor describe la tabla de datos. (*Sugerencia:* haga asignaciones a Y_1–Y_4 y examine la tabla de sus valores.)

77

x	y
1	0.8
2	−0.4
3	−1.6
4	−2.8
5	−4.0

(1) $y = -1.2x + 2$

(2) $y = -1.2x^2 + 2$

(3) $y = 0.8\sqrt{x}$

(4) $y = x^{3/4} - 0.2$

78

x	y
1	−9
2	−4
3	11
4	42
5	95

(1) $y = 13x - 22$

(2) $y = x^2 - 2x - 8$

(3) $y = 4\sqrt{x} - 13$

(4) $y = x^3 - x^2 + x - 10$

2.2 Problemas de aplicación

Con frecuencia se usan ecuaciones para resolver *problemas de aplicación*, es decir, problemas que involucran la aplicación de las matemáticas a otros campos de actividad. Debido a la ilimitada variedad de problemas de aplicación, es difícil expresar reglas específicas para hallar soluciones. Las siguientes directrices pueden ser útiles, siempre que el problema se pueda formular en términos de una ecuación con una variable.

Directrices para resolver problemas de aplicación

1 Si el problema se expresa por escrito, léalo cuidadosamente varias veces y piense en los datos que se proporcionan junto con la cantidad desconocida que ha de hallarse.

2 Introduzca una letra para denotar la cantidad desconocida. Éste es uno de los pasos más importantes en la solución. Frases que contengan palabras como *qué*, *encuentre*, *cuánto*, *a qué distancia* o *cuándo* deben poner en alerta al lector acerca de la cantidad desconocida.

3 Si es apropiado, haga un dibujo y póngale leyendas.

4 Haga una lista de los datos conocidos, junto con cualesquiera relaciones que contengan a la cantidad desconocida. Una relación puede ser descrita por una ecuación en la que enunciados por escrito, en lugar de letras o números, aparecen en uno o ambos lados del signo igual.

5 Después de analizar la lista de la directriz 4, formule una ecuación que describa en forma precisa lo que se expresa en palabras.

6 Resuelva la ecuación formulada en la directriz 5.

7 Comprueba las soluciones obtenidas en la directriz 6 consultando el enunciado original del problema. Verifique que la solución concuerde con las condiciones expresadas.

El uso de estas directrices se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 **Promedio de examen**

Un estudiante en un curso de álgebra tiene calificaciones de examen de 64 y 78. ¿Qué calificación en un tercer examen dará al estudiante un promedio de 80?

SOLUCIÓN

Directriz 1 Lea el problema al menos una vez más.

Directriz 2 La cantidad desconocida es la calificación del tercer examen, de modo que hacemos

$$x = \text{calificación del tercer examen.}$$

Directriz 3 Una figura o diagrama no es necesario para este problema.

Directriz 4 Los datos conocidos son 64 y 78 en los dos primeros exámenes. Una relación que abarca a x es la calificación promedio de 64, 78 y x. Entonces,

$$\text{calificación promedio} = \frac{64 + 78 + x}{3}.$$

Directriz 5 Como la calificación promedio de la directriz 4 debe ser 80, consideramos la ecuación

$$\frac{64 + 78 + x}{3} = 80.$$

Directriz 6 Resolvemos la ecuación formulada en la directriz 5:

$$64 + 78 + x = 80 \cdot 3 \quad \text{multiplique por 3}$$
$$142 + x = 240 \quad \text{simplifique}$$
$$x = 98 \quad \text{reste 142}$$

✓ *Directriz 7* **Prueba** Si las tres calificaciones de examen son 64, 78 y 98, entonces el promedio es

$$\frac{64 + 78 + 98}{3} = \frac{240}{3} = 80,$$

como se desea. ■

En los ejemplos restantes, trate de identificar las directrices que se usan en las soluciones.

EJEMPLO 2 **Cálculo del precio en una preventa**

Una tienda de ropa que realiza una venta de liquidación anuncia que todos los precios tienen un descuento de 20%. Si una camisa está a la venta en $28, ¿cuál es su precio de preventa?

SOLUCIÓN Como la cantidad desconocida es el precio de preventa, hacemos

$$x = \text{precio de preventa.}$$

(continúa)

A continuación tomamos nota de lo siguiente:

$$0.20x = \text{descuento de 20\% en precio de preventa}$$
$$28 = \text{precio de venta}$$

El precio de venta se determina como sigue:

(precio de preventa) – (descuento) = precio de venta

Traduciendo la última ecuación a símbolos y luego resolviendo tendremos

$$x - 0.20x = 28 \qquad \text{formule una ecuación}$$
$$0.80x = 28 \qquad \text{reste } 0.20x \text{ de } 1x$$
$$x = \frac{28}{0.80} = 35. \qquad \text{divida entre } 0.80$$

El precio de preventa fue $35.

✓ **Prueba** Si una camisa de $35 tiene 20% de descuento, entonces el descuento (en dólares) es $(0.20)(35) = 7$ y el precio de venta es $35 - 7$, o sea $28. ■

Los bancos y otras instituciones financieras pagan intereses sobre inversiones. Por lo general este interés es *compuesto* como se describe en la sección 5.2) pero, si el dinero se invierte o presta durante un tiempo corto, puede pagarse *interés simple* usando la fórmula siguiente.

Fórmula de interés simple

Si una suma de dinero P (**capital inicial**) se invierte a una tasa de interés simple r (expresado como decimal), entonces el **interés simple** I al final de t años es

$$I = Prt.$$

La tabla siguiente ilustra el interés simple para tres casos.

Capital inicial	Tasa de interés r	Número de años t	Interés $I = Prt$
$1000	$8\% = 0.08$	1	$1000(0.08)(1) = $80
$2000	$6\% = 0.06$	$1\frac{1}{2}$	$2000(0.06)(1.5) = $180
$3200	$5\frac{1}{2}\% = 0.055$	2	$3200(0.055)(2) = $352

EJEMPLO 3 **Inversión de dinero en dos acciones**

Una empresa de inversiones tiene $100,000 para invertir de un cliente y decide invertirlos en dos acciones, A y B. La tasa anual de interés esperada, o interés simple, para la acción A es 15%, pero hay un riesgo implicado, y el cliente no desea invertir más de $50,000 en esta acción. Se anticipa que la tasa anual de interés en la más estable acción B es 10%. Determine si hay una forma de invertir el dinero para que el interés anual sea

(a) $12,000 **(b)** $13,000

SOLUCIÓN La tasa anual está dada por $I = Pr$, que proviene de la fórmula de interés simple $I = Prt$ con $t = 1$. Si con x denotamos la cantidad invertida en la acción A, entonces $100{,}000 - x$ se invertirá en la acción B. Esto lleva a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} x &= \text{cantidad invertida en la acción A al 15\%} \\ 100{,}000 - x &= \text{cantidad invertida en la acción B al 10\%} \\ 0.15x &= \text{interés anual de la acción A} \\ 0.10(100{,}000 - x) &= \text{interés anual de la acción B} \end{aligned}$$

Sumando el interés de ambas acciones, obtenemos

$$\text{Interés anual total} = 0.15x + 0.10(100{,}000 - x).$$

Simplificando el lado derecho, tendremos

$$\text{Interés anual total} = 10{,}000 + 0.05x. \qquad (*)$$

(a) El interés anual total es \$12,000 si

$$\begin{aligned} 10{,}000 + 0.05x &= 12{,}000 && \text{de } (*) \\ 0.05x &= 2000 && \text{reste } 10{,}000 \\ x &= \frac{2000}{0.05} = 40{,}000 && \text{divida entre } 0.05 \end{aligned}$$

Entonces, \$40,000 deben invertirse en la acción A y los \$60,000 restantes deben invertirse en la acción B. Como la cantidad invertida en la acción A no es más que \$50,000, esta forma de invertir el dinero satisface el requisito del cliente.

✓ **Prueba** Si \$40,000 se invierten en la acción A y \$60,000 en la acción B, entonces el interés anual total es

$$40{,}000(0.15) + 60{,}000(0.10) = 6000 + 6000 = 12{,}000.$$

(b) El interés anual total es \$13,000 si

$$\begin{aligned} 10{,}000 + 0.05x &= 13{,}000 && \text{de } (*) \\ 0.05x &= 3000 && \text{reste } 10{,}000 \\ x &= \frac{3000}{0.05} = 60{,}000 && \text{divida entre } 0.05 \end{aligned}$$

Entonces, \$60,000 deben invertirse en la acción A y los restantes \$40,000 en la acción B. Este plan *no satisface* el requisito del cliente de que no más de \$50,000 deben invertirse en la acción A. En consecuencia, la empresa no puede invertir el dinero del cliente en las acciones A y B de modo que el interés total anual sea \$13,000. ■

En ciertas aplicaciones es necesario combinar dos sustancias para obtener una mezcla prescrita, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 4 Mezcla de productos químicos

Un químico tiene 10 mililitros de una solución que contiene una concentración al 30% de ácido. ¿Cuántos mililitros de ácido puro deben agregarse para aumentar la concentración al 50%?

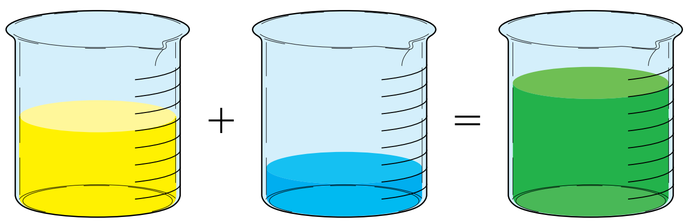
(continúa)

SOLUCIÓN Como la cantidad desconocida es la cantidad de ácido puro por agregar, hacemos

$$x = \text{número de mL de ácido puro por agregar}$$

Para ayudar a visualizar el problema, tracemos un dibujo, como en la figura 1 y apliquemos leyendas apropiadas.

FIGURA 1



	Mezcla original al 30%	Ácido puro	Nueva mezcla al 50%
Cantidad total de solución:	10 mL	x mL	$10 + x$ mL
Cantidad de ácido puro:	$0.30(10) = 3$ mL	$1.00(x) = x$ mL	$0.50(10 + x)$ mL

Como podemos expresar la cantidad de ácido puro en la solución final ya sea como $3 + x$ (de los primeros dos vasos de precipitados) o $0.50(10 + x)$, obtenemos la ecuación

$$3 + x = 0.50(10 + x).$$

Ahora despejamos x:

$$3 + x = 5 + 0.5x \quad \text{multiplique factores}$$
$$0.5x = 2 \quad \text{reste } 0.5x \text{ y } 3$$
$$x = \frac{2}{0.5} = 4 \quad \text{divida entre } 0.5$$

Por lo tanto, deben agregarse 4 mililitros de ácido puro a la solución original.

✓ **Prueba** Si 4 mililitros de ácido se agregan a la solución original, entonces la nueva solución contiene 14 mililitros, de los cuales 7 mililitros son ácido puro. Esta es la concentración deseada al 50%. ■

EJEMPLO 5 Cambio de anticongelante

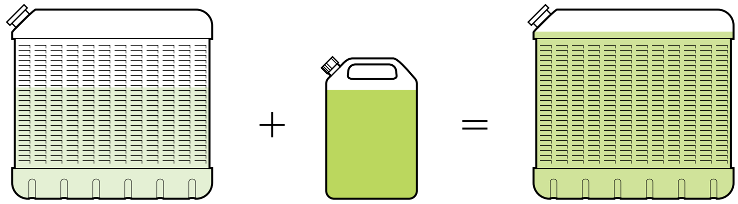
Un radiador contiene 8 cuartos (qt) de una mezcla de agua y anticongelante. Si 40% de la mezcla es anticongelante, ¿cuánto de la mezcla debe drenarse y cambiarse por anticongelante puro para que la mezcla resultante contenga 60% de anticongelante?

SOLUCIÓN Sea

$$x = \text{número de qt de mezcla por drenar.}$$

Como había 8 qt en la mezcla original al 40%, podemos describir el problema como en la figura 2.

FIGURA 2



Cantidad total:	$(8 - x)$ qt	x qt	8 qt
Cantidad de anticongelante puro:	$0.40(8 - x)$ qt	$1.00(x) = x$ qt	$0.60(8) = 4.8$ qt

Como el número de cuartos de anticongelante puro de la mezcla final se puede expresar ya sea como $0.40(8 - x) + x$ o 4.8, obtenemos la ecuación

$$0.40(8 - x) + x = 4.8.$$

Ahora despejamos x:

$$3.2 - 0.4x + x = 4.8 \quad \text{multiplique factores}$$

$$0.6x = 1.6 \quad \text{combine términos en } x \text{ y reste 3.2}$$

$$x = \frac{1.6}{0.6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \quad \text{divida entre 0.6}$$

Por lo tanto, $\frac{8}{3}$ deben drenarse de la mezcla original.

✓ **Prueba** Primero observemos que la cantidad de anticongelante en la mezcla original de 8 qt era 0.4(8), o 3.2 qt. Al drenar $\frac{8}{3}$ qt de la mezcla original al 40%, perdemos $0.4\left(\frac{8}{3}\right)$ qt de anticongelante, de modo que quedan $3.2 - 0.4\left(\frac{8}{3}\right)$ qt de anticongelante después de drenar. Si entonces agregamos $\frac{8}{3}$ qt de anticongelante puro, la cantidad de anticongelante en la mezcla final es

$$3.2 - 0.4\left(\tfrac{8}{3}\right) + \tfrac{8}{3} = 4.8 \text{ qt}.$$

Este número, 4.8, es 60% de 8. ■

EJEMPLO 6 **Comparación de tiempos de recorrido por autos**

Dos ciudades están comunicadas por una carretera. Un auto sale de la ciudad B a la 1:00 p.m. y avanza a una velocidad constante de 40 mi/h hacia la ciudad C. Treinta minutos después, otro auto sale de la ciudad B y avanza hacia C a una velocidad constante de 55 millas/h. Si no consideramos las longitudes de los autos, ¿a qué hora el segundo auto alcanzará al primero?

SOLUCIÓN Denotemos con t el número de horas después de la 1:00 p.m. que viaja el primer auto. Como el segundo auto sale de B a la 1:30 p.m., ha viajado $\frac{1}{2}$ hora menos que el primero. Esto nos lleva a la siguiente tabla.

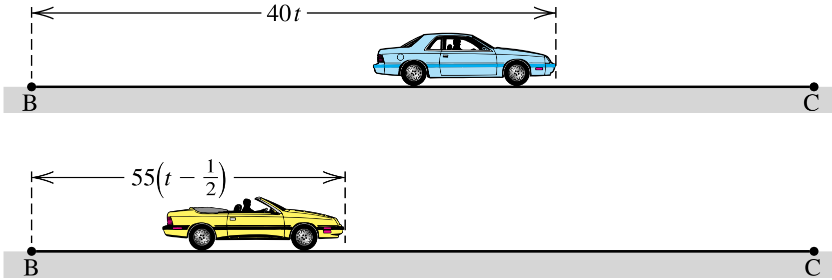
Auto	Velocidad (mi/hr)	Horas de viaje	Millas recorridas
Primer auto	40	t	$40t$
Segundo auto	55	$t - \frac{1}{2}$	$55\left(t - \frac{1}{2}\right)$

(continúa)

El dibujo de la figura 3 ilustra posibles posiciones de los autos t horas después de la 1:00 p.m. El segundo auto alcanza al primero cuando el número de millas recorridas por los dos autos sea igual, es decir, cuando

$$55\left(t - \tfrac{1}{2}\right) = 40t.$$

FIGURA 3



Ahora despejamos t:

$$55t - \tfrac{55}{2} = 40t \qquad \text{multiplique factores}$$
$$15t = \tfrac{55}{2} \qquad \text{reste } 40t \text{ y sume } \tfrac{55}{2}$$
$$t = \tfrac{55}{30} = \tfrac{11}{6} \qquad \text{divida entre 15}$$

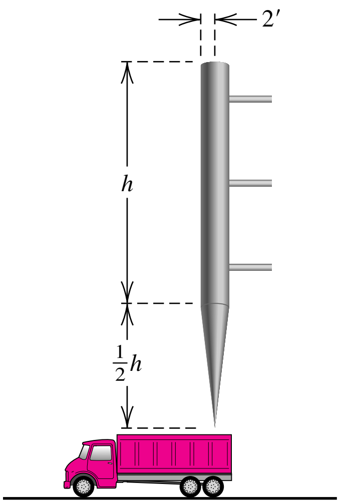
Entonces, t es $1\frac{5}{6}$ horas, o bien, 1 hora 50 minutos después de la 1:00 p.m. En consecuencia, el segundo auto alcanza al primero a las 2:50 p.m.

✓ **Prueba** A las 2:50 p.m. el primer auto ha viajado $1\frac{5}{6}$ horas y su distancia de B es $40\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{220}{3}$ millas. A las 2:50 p.m., el segundo auto ha viajado durante $1\frac{1}{3}$ horas y está $55\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{220}{3}$ millas de B. Por lo tanto, están juntos a las 2:50 p.m. ■

EJEMPLO 7 **Construcción de una tolva de elevador de granos**

Una tolva de elevador de granos ha de construirse como se indica en la figura 4, con un cilindro circular recto de 2 pies de radio y altura de h pies sobre un cono circular recto cuya altura es la mitad de la del cilindro. ¿Qué valor de h hará que el volumen total V de la tolva sea 500 ft^3?

FIGURA 4



SOLUCIÓN Si V_{cilindro} y V_{cono} denotan los volúmenes (en ft^3) y h_{cilindro} y h_{cono} denotan las alturas (en pies) del cilindro y cono, respectivamente, entonces, usando las fórmulas para volumen que aparecen en la primera y segunda de forros de este texto, obtenemos lo siguiente:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h_{\text{cilindro}} = \pi(2)^2 h = 4\pi h$$
$$V_{\text{cono}} = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h_{\text{cono}} = \tfrac{1}{3}\pi(2)^2\left(\tfrac{1}{2}h\right) = \tfrac{2}{3}\pi h$$

Como el volumen total V de la tolva ha de ser 500 ft^3, debemos tener

$$4\pi h + \tfrac{2}{3}\pi h = 500 \qquad V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cono}} = V_{\text{total}}$$
$$12\pi h + 2\pi h = 1500 \qquad \text{multiplique por 3}$$
$$14\pi h = 1500 \qquad \text{combine términos}$$
$$h = \frac{1500}{14\pi} \approx 34.1 \text{ ft.} \qquad \text{divida entre } 14\pi$$
■

EJEMPLO 8 **Tiempo requerido para realizar un trabajo**

Se cuenta con dos bombas para llenar un tanque de almacenamiento de combustible. La bomba A, empleada sola, puede llenar el tanque en 3 horas, y la bomba B, empleada sola, puede llenarlo en 4 horas. Si ambas bombas se usan simultáneamente, ¿cuánto tardará en llenarse el tanque?

SOLUCIÓN Denotemos con t el número de horas necesario para que A y B llenen el tanque si se usan simultáneamente. Es conveniente introducir la *parte* del tanque que se llena en 1 hora como sigue:

$$\tfrac{1}{3} = \text{parte del tanque llenado por A en 1 h}$$
$$\tfrac{1}{4} = \text{parte del tanque llenado por B en 1 h}$$
$$\frac{1}{t} = \text{parte del tanque llenado por A } y \text{ B en 1 h}$$

Con el uso de

$$\left(\begin{array}{c}\text{parte llenada}\\ \text{por A en 1 h}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{parte llenada}\\ \text{por B en 1 h}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{parte llenada por}\\ \text{A } y \text{ B en 1 h}\end{array}\right),$$

obtenemos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{t}, \qquad \text{o} \qquad \frac{7}{12} = \frac{1}{t}.$$

Tomando el recíproco de cada lado de la última ecuación tendremos $t = \frac{12}{7}$. Por lo tanto, si las bombas A y B se usan simultáneamente, el tanque estará lleno en $1\frac{5}{7}$ horas, o alrededor de 1 hora 43 minutos. ■

2.2 Ejercicios

1 **Calificaciones de examen** Un estudiante en un curso de álgebra tiene calificaciones de examen de 75, 82, 71 y 84. ¿Qué calificación en el siguiente examen subirá el promedio del estudiante a 80?

2 **Promedio final de clase** Antes del examen final, un estudiante tiene calificaciones de examen de 72, 83, 65, 73 y 62. Si el examen final cuenta como $\frac{1}{3}$ de la calificación final, ¿qué calificación debe recibir el estudiante para tener un promedio final de 76?

3 **Paga bruta** La paga que lleva a casa un trabajador es \$504, después de restar deducciones que totalizan 40% de la paga bruta. ¿Cuál es la paga bruta?

4 **Costo de comer fuera** Una pareja no desea gastar más de \$70 por comer en un restaurante. Si se agrega un impuesto de venta de 8% a la cuenta y piensan dar una propina de 15% después de agregar el impuesto, ¿cuánto es lo más que pueden gastar en la comida?

5 **Cociente de inteligencia** El cociente de inteligencia (CI) de una persona se determina al multiplicar por 100 el cociente de su edad mental y su edad cronológica.

(a) Encuentre el CI de un niño de 10 años de edad cuya edad mental es de 15.

(b) Encuentre la edad mental de una persona de 15 años de edad cuyo CI es 140.

6 **Área superficial de la Tierra** El agua cubre 70.8%, o sea 361×10^6 km^2 de la superficie de la Tierra. Aproxime el área superficial total de la Tierra.

7 **Costo de aislamiento** El costo de instalar aislamiento en una casa particular de dos recámaras es \$2400. Los costos mensuales de calefacción actuales promedian \$200, pero se espera que el aislamiento reduzca los costos en 10%. ¿Cuántos meses tardará en recuperarse el costo del aislamiento?

8 **Paga de tiempo extra** El sueldo base por hora de un trabajador es \$12, pero él recibe una y media veces su sueldo por cualesquiera horas trabajadas que excedan de 40 por semana. Si su cheque de paga para la semana es \$714, ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó?

9 **Cuentas de ahorros** Un estudiante de álgebra ha ganado \$500,000 en una lotería y desea depositarlos en cuentas de ahorros en dos instituciones financieras. Una cuenta paga 4% de interés simple, pero los depósitos se aseguran sólo hasta \$250,000. La segunda cuenta paga 3.2% de interés simple y los depósitos se aseguran hasta \$500,000. Determine si el dinero se puede depositar para que quede completamente asegurado y gane un interés anual de \$18,500.

10 **Inversión municipal** El gobierno de una ciudad ha aprobado la construcción de un campo deportivo de \$800 millones. Hasta \$480 se recaudarán por la venta de bonos que pagan interés simple a razón de 6% anualmente. La cantidad restante (hasta \$640 millones) se obtendrán por préstamos de una compañía de seguros a una tasa de interés simple de 5%. Determine si el campo se puede financiar para que el interés anual sea de \$42 millones.

11 **Asistencia al cine** Seiscientas personas asistieron al estreno de una película. Los boletos para adultos costaron \$9 y la admisión de niños fue de \$6. Si los recibos de la taquilla totalizaron \$4800, ¿cuántos niños asistieron al estreno?

12 **Paga por hora** El tiempo de una ingeniera consultora se factura a \$60 por hora y el de su asistente se factura a \$20 por hora. Un cliente recibe una cuenta de \$580 por cierto trabajo. Si la asistente trabajó 5 horas menos que la ingeniera, ¿cuánto tiempo facturó cada una en el trabajo?

13 **Preparación de una solución de glucosa** En cierto examen médico diseñado para medir la tolerancia a los carbohidratos, un adulto bebe 7 onzas de una solución de glucosa al 30%. Cuando el examen se administra a un niño, la concentración de glucosa debe reducirse al 20%. ¿Cuánta solución de glucosa al 30% y cuánta agua debe usarse para preparar 7 onzas de solución de glucosa al 20%?

14 **Preparación de gotas para los ojos** Un farmacéutico debe elaborar 15 mililitros de gotas especiales para los ojos para un paciente con glaucoma. La solución de gotas para los ojos debe tener un ingrediente activo al 2%, pero el farmacéutico tiene sólo solución al 10% y solución al 1% en existencia. ¿Cuánto de cada tipo de solución debe usarse para surtir la receta?

15 **Preparación de una aleación** La plata de ley inglesa es una aleación de cobre y plata que contiene 7.5% de cobre en peso. ¿Cuántos gramos de cobre puro y cuántos gramos de plata de ley inglesa deben usarse para preparar 200 gramos de aleación de cobre-plata que tenga 10% de cobre en peso?

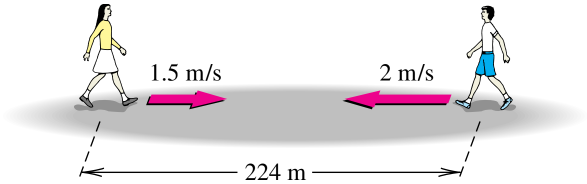
16 **Concentración de medicamento** La teofilina, medicamento para el asma, se ha de preparar de un elíxir con una concentración de teofilina de 5 mg/mL y un jarabe con sabor a cereza que se ha de agregar para ocultar el sabor del medicamento. ¿Cuánto de cada uno debe usarse para elaborar 100 mililitros de solución con una concentración de teofilina de 2 mg/mL?

17 **Rapidez de caminata** Dos niños, que están a 224 metros entre sí, empiezan a caminar uno hacia el otro en el mismo instante a un ritmo de 1.5 m/s y 2 m/s, respectivamente (vea la figura).

(a) ¿Cuándo se encontrarán?

(b) ¿Cuánto habrá caminado cada uno?

EJERCICIO 17



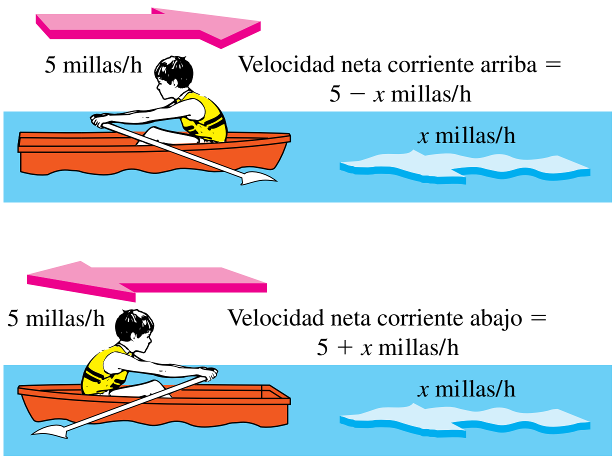
18 **Rapidez de carrera** Un corredor arranca al principio de una pista para corredores y corre a un ritmo constante de 6 millas/h. Cinco minutos después, un segundo corredor arranca en el mismo punto, corriendo a un ritmo de 8 millas/h y siguiendo el mismo curso. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo corredor en alcanzar al primero?

19 **Velocidad de una quitanieves** A las 6 a.m. una máquina quitanieves, que avanza a velocidad constante, empieza a limpiar una carretera que sale de una ciudad. A las 8 a.m. un automóvil empieza a avanzar por la carretera a una velocidad de 30 millas/h y alcanza a la quitanieves 30 minutos después. Encuentre la velocidad de la máquina.

20 **Alcance de un radio de comunicación** Dos niños tienen radios de comunicación que tienen un alcance máximo de 2 millas. Uno de ellos sale de cierto punto a la 1:00 p.m. y camina al norte a razón de 4 millas/h. El otro sale del mismo punto a la 1:15 p.m. y camina al sur a 6 millas/h. ¿Cuándo no podrán comunicarse entre sí?

21 **Rapidez para remar** Un niño puede remar en un bote a un ritmo constante de 5 millas/h en aguas en calma, como se indica en la figura. Él rema corriente arriba durante 15 minutos y luego corriente abajo y regresa a su punto de partida en otros 12 minutos.

EJERCICIO 21



(a) Encuentre la rapidez de la corriente.

(b) Encuentre la distancia total recorrida.

22 **Rendimiento de combustible** Un vendedor compró un automóvil que estaba anunciado para promediar 27 millas/galón en la ciudad y 38 millas/galón en carretera. Un reciente viaje de ventas en el que recorrió 1762 millas requirió de 51 galones de gasolina. Suponiendo que las estimaciones anunciadas de rendimiento fueran correctas, ¿cuántas millas recorrió en la ciudad?

23 **Distancia a un blanco** Una bala se dispara horizontalmente a un blanco y el sonido de su impacto se escucha 1.5 segundos después. Si la velocidad de la bala es 3300 pies/s y la velocidad del sonido es 1100 pies/s, ¿a qué distancia está el blanco?

24 **Rapidez para trotar** Una mujer empieza a trotar a las 6:00 p.m., corriendo al norte a un paso de 6 minutos por milla. Después invierte la dirección y corre al sur a un paso de 7 minutos por milla. Si regresa al punto de partida a las 6:47 p.m., encuentre el número total de millas recorridas.

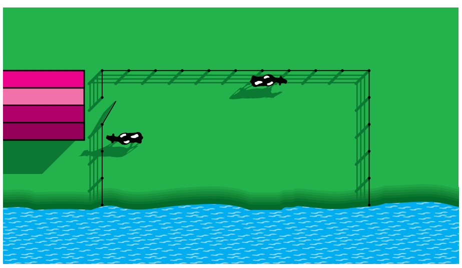
25 **Instalación de una cerca** Un agricultor piensa usar 180 pies de cerca para encerrar una región rectangular, usando parte de una margen recta de un río en lugar de cerca como uno de los lados del rectángulo, como se ve en la figura. Encuentre el área de la región si la longitud del lado paralelo a la margen mide

(a) el doble de la longitud de un lado adyacente.

(b) la mitad de la longitud de un lado adyacente.

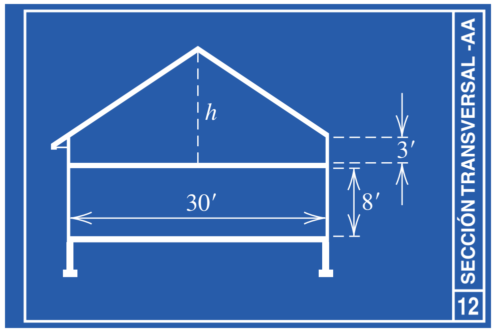
(c) lo mismo que la longitud de un lado adyacente.

EJERCICIO 25



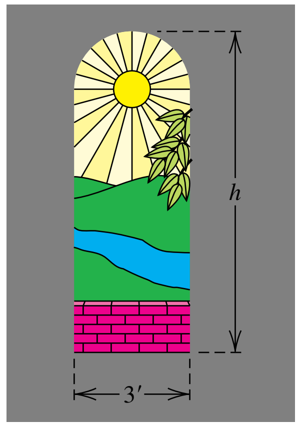
26 **Dimensiones de una casa** En la figura se ilustra una sección transversal de un diseño para una casa de dos pisos. La altura central h del segundo piso todavía no se ha determinado. Encuentre h de manera que el segundo piso tenga la misma área de sección transversal que el primer piso.

EJERCICIO 26



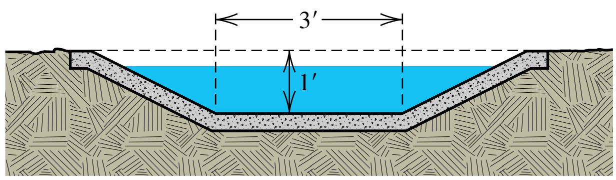
27 **Dimensiones de ventana** Una ventana con vidrio de color se está diseñando en forma de un rectángulo rematado por un semicírculo, como se ve en la figura. El ancho de la ventana debe medir 3 pies, pero la altura h todavía no se determina. Si se han de usar 24 ft^2 de vidrio, encuentre la altura h.

EJERCICIO 27



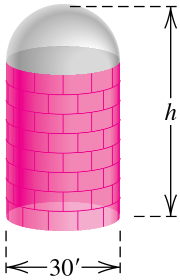
28 **Dimensiones de una zanja** Toda sección transversal de una zanja es un trapecio isósceles con una pequeña base de 3 pies y una altura de 1 pie, como se ve en la figura. Determine el ancho de la base más grande que daría a la zanja un área de sección de 5 ft^2.

EJERCICIO 28



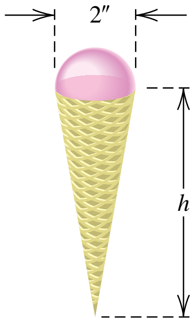
29 **Construcción de un silo** Se ha de construir un silo grande para granos en forma de cilindro circular con una semiesfera en la parte superior (vea la figura). El diámetro del silo debe medir 30 pies, pero la altura no se ha determinado. Encuentre la altura h del silo que resultará en una capacidad de $11{,}250\pi$ ft^3.

EJERCICIO 29



30 Dimensiones de un cono El cono del barquillo de la figura debe contener 8 pulg^3 de helado cuando se llene hasta el fondo. El diámetro del cono es 2 pulgadas, y la parte superior del helado tiene forma de una semiesfera. Encuentre la altura h del barquillo.

EJERCICIO 30



31 Rapidez para podar pasto Un niño tarda 90 minutos en podar un prado, pero su hermana puede podarlo en 60 minutos. ¿Cuánto tardarían en podar el pasto si trabajaran juntos, usando dos podadoras?

32 Llenado de una piscina Con agua de una manguera, una piscina se puede llenar en 8 horas. Si se usa una segunda manguera sola, más grande, la piscina puede llenarse en 5 horas. ¿Cuánto tardaría en llenarse si ambas mangueras se usaran simultáneamente?

33 Entrega de periódicos Una niña tarda 45 minutos en repartir los periódicos de su ruta, pero si su hermano la ayuda, a ambos les lleva sólo 20 minutos. ¿Cuánto tardaría su hermano en repartir los periódicos por sí solo?

34 Vaciado de un tanque Un tanque de agua se puede vaciar usando una bomba durante 5 horas. Una segunda bomba más pequeña puede vaciar el tanque en 8 horas. Si la bomba más grande se arranca a la 1:00 p.m., ¿en cuánto tiempo debe arrancarse la bomba más pequeña para que el tanque se vacíe a las 5:00 p.m.?

35 Promedio de calificaciones Una estudiante universitaria ha terminado 48 horas crédito con un promedio de 2.75. Para entrar al programa en que ella desea estar, debe tener un promedio de 3.2. ¿Cuántas horas crédito adicionales de trabajo de 4.0 subirán su promedio a 3.2?

36 Ley de Ohm En teoría eléctrica, la ley de Ohm expresa que $I = V/R$, donde I es la corriente en amperes, V es la fuerza electromotriz en volts y R es la resistencia en ohms. En cierto circuito $V = 110$ y $R = 50$. Si V y R han de cambiarse por la misma cantidad numérica, ¿qué cambio en ellos hará que I se duplique?

37 Temperatura del aire Debajo de la base de una nube, la temperatura del aire T (en °F) a una altura h (en pies) se puede aproximar con la ecuación $T = T_0 - \left(\frac{5.5}{1000}\right)h$, donde T_0 es la temperatura al nivel del suelo.

(a) Determine la temperatura del aire a una altura de 1 milla si la temperatura del suelo es 70°F.

(b) ¿A qué altitud es la temperatura de congelación?

38 Altura de una nube La altura h (en pies) de la base de una nube se puede estimar usando $h = 227(T - D)$, donde T es la temperatura del suelo y D es el punto de condensación.

(a) Si la temperatura es 70°F y el punto de condensación es 55°F, encuentre la altura de la base de la nube.

(b) Si el punto de condensación es 65°F y la base de la nube está a 3500 pies, estime la temperatura del suelo.

39 Temperatura de una nube La temperatura T dentro de una nube a una altura h (en pies) por arriba de la base de la nube se puede aproximar usando la ecuación $T = B - \left(\frac{3}{1000}\right)h$, donde B es la temperatura de la nube en su base. Determine la temperatura a 10,000 pies en una nube con una temperatura de su base de 55°F y una altura de base de 4000 pies. **Nota:** para una aplicación interesante que abarca los tres ejercicios precedentes, vea el ejercicio 6 de los ejercicios de análisis al final del capítulo.

40 Relación huesos-estatura Los arqueólogos pueden determinar la estatura de un ser humano sin tener un esqueleto completo. Si un arqueólogo encuentra sólo un húmero, entonces la estatura del individuo se puede determinar usando una relación lineal sencilla. (El húmero es el hueso entre el hombro y el codo.) Para una mujer, si x es la longitud del húmero (en centímetros), entonces su estatura h (en centímetros) se puede determinar usando la fórmula $h = 65 + 3.14x$. Para un hombre, debe usarse $h = 73.6 + 3.0x$.

(a) Se encuentra un esqueleto femenino que tiene un húmero de 30 centímetros. Encuentre la estatura de la mujer cuando murió.

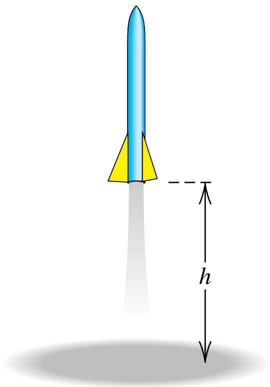
(b) La estatura de una persona disminuirá típicamente 0.06 centímetros por año después de los 30 años. Se encuentra el esqueleto completo de un hombre. El húmero mide 34 centímetros y la estatura del hombre era de 174 centímetros. Determine su edad aproximada cuando murió.

2.3 Ecuaciones cuadráticas

Un cohete de juguete se lanza verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, como se ilustra en la figura 1. Si su velocidad inicial es 120 ft/s y la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad, entonces la altura h del cohete (en pies) sobre el suelo después de t segundos está dada por

$$h = -16t^2 + 120t.$$

FIGURA 1



Algunos valores de h para los primeros 7 segundos de vuelo aparecen en la tabla siguiente.

***t* (seg)**	0	1	2	3	4	5	6	7
***h* (ft)**	0	104	176	216	224	200	144	56

Vemos en la tabla que, cuando ascendía, el cohete estaba a 180 pies sobre el suelo en algún momento entre $t = 2$ y $t = 3$. Cuando descendía, el cohete estaba 180 pies sobre el suelo en algún momento entre $t = 5$ y $t = 6$. Para hallar los valores exactos de t para los cuales $h = 180$ pies, debemos resolver la ecuación

$$180 = -16t^2 + 120t,$$

o bien $$16t^2 - 120t + 180 = 0.$$

Como se indica en la tabla siguiente, una ecuación de este tipo se denomina *ecuación cuadrática* en t. Después de desarrollar una fórmula para resolver ecuaciones como ésta, regresaremos a este problema en el ejemplo 13 y hallaremos los tiempos exactos a los cuales el cohete estaba a 180 pies sobre el suelo.

Terminología	Definición	Ilustraciones
Ecuación cuadrática en x	Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$	$4x^2 = 8 - 11x$ $x(3 + x) = 5$ $4x = x^2$

Para que podamos resolver muchos tipos de ecuaciones, haremos uso del siguiente teorema.

Teorema del factor cero

Si p y q son expresiones algebraicas, entonces

$$pq = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad p = 0 \quad \text{o} \quad q = 0.$$

El teorema del factor cero se puede extender a cualquier número de expresiones algebraicas, es decir,

$$pqr = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad p = 0 \quad \text{o} \quad q = 0 \quad \text{o} \quad r = 0,$$

y así sucesivamente. Se deduce que si $ax^2 + bx + c$ se puede escribir como un producto de dos polinomios de primer grado, entonces se pueden hallar soluciones al igualar a 0 cada uno de los factores, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos. Esta técnica se conoce como **método de factorización.**

EJEMPLO 1 **Resolución de una ecuación por factorización**

Resuelva la ecuación $3x^2 = 10 - x$.

SOLUCIÓN Para usar el método de factorización, *es esencial que sólo el número* 0 *aparezca en un lado de la ecuación.* Así, procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 10 - x && \text{original} \\ 3x^2 + x - 10 &= 0 && \text{sume } x - 10 \\ (3x - 5)(x + 2) &= 0 && \text{factorice} \\ 3x - 5 = 0, \quad x + 2 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ x = \tfrac{5}{3}, \quad x &= -2 && \text{despeje } x \end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son $\frac{5}{3}$ y -2. ■

EJEMPLO 2 **Resolución de una ecuación por factorización**

Resuelva la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

SOLUCIÓN Procedemos como en el Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} x^2 + 16 &= 8x && \text{original} \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 && \text{reste } 8x \\ (x - 4)(x - 4) &= 0 && \text{factorice} \\ x - 4 = 0, \quad x - 4 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ x = 4, \quad x &= 4 && \text{despeje } x \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación cuadrática dada tiene una solución, 4. ■

Como $x - 4$ aparece como factor dos veces en la solución previa, a 4 lo llamamos **raíz doble** o **raíz de multiplicidad 2** de la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

Si una ecuación cuadrática tiene la forma $x^2 = d$ para algún número $d > 0$, entonces $x^2 - d = 0$ o, lo que es equivalente,

$$\left(x + \sqrt{d}\right)\left(x - \sqrt{d}\right) = 0.$$

Al igualar a cero cada factor nos da las soluciones $-\sqrt{d}$ y $\sqrt{d}$. Con frecuencia usamos el símbolo $\pm\sqrt{d}$ (*más-menos* $\sqrt{d}$) para representar $\sqrt{d}$ y $-\sqrt{d}$. Entonces, para $d > 0$, hemos demostrado el siguiente resultado. (El caso $d < 0$ requiere el sistema de números complejos que se estudia en la sección 2.4.)

Una ecuación cuadrática especial	Si $x^2 = d$, entonces $x = \pm\sqrt{d}$.

Nota sobre notación: es práctica común que una variable represente más de un valor, como en $x = \pm 3$. Una notación más descriptiva es $x_{1,2} = \pm 3$, lo que implica que $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.

El proceso de resolver $x^2 = d$ como se indica en el recuadro precedente se conoce como *sacar la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación.* Note que si $d > 0$ obtenemos una raíz cuadrada positiva y una raíz cuadrada negativa, no sólo la raíz cuadrada principal definida en la sección 1.2.

EJEMPLO 3 **Resolución de ecuaciones de la forma $x^2 = d$**

Resuelva las ecuaciones:

(a) $x^2 = 5$ **(b)** $(x + 3)^2 = 5$

SOLUCIÓN

(a) $x^2 = 5$ original

$x = \pm\sqrt{5}$ saque la raíz cuadrada

Entonces, las soluciones son $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$.

(b) $(x + 3)^2 = 5$ original

$x + 3 = \pm\sqrt{5}$ saque la raíz cuadrada

$x = -3 \pm \sqrt{5}$ reste 3

Entonces, las soluciones son $-3 + \sqrt{5}$ y $-3 - \sqrt{5}$. ■

En el trabajo que sigue sustituiremos una expresión de la forma $x^2 + kx$ por $(x + d)^2$, donde k y d son números reales. Este procedimiento, llamado **completar el cuadrado** para $x^2 + kx$, exige sumar $(k/2)^2$, como se describe en el recuadro siguiente. (El mismo procedimiento se usa para $x^2 - kx$.)

Completar el cuadrado

Para completar el cuadrado para $x^2 + kx$ o $x^2 - kx$, sumamos $\left(\frac{k}{2}\right)^2$; esto es, se *suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x*.

$$\textbf{(1)}\quad x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$$

$$\textbf{(2)}\quad x^2 - kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2$$

EJEMPLO 4 **Completar el cuadrado**

Determine el valor o valores de d que completen el cuadrado para cada expresión. Escriba el trinomio y el cuadrado del binomio que representa.

(a) $x^2 - 3x + d$ **(b)** $x^2 + dx + 64$

SOLUCIÓN

(a) El cuadrado de la mitad del coeficiente de x es $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Así, $d = \frac{9}{4}$ y

$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2.$$

(b) Si $(x + c)^2 = x^2 + dx + 64$, entonces $x^2 + 2cx + c^2 = x^2 + dx + 64$, de modo que c^2 debe ser igual a 64 y $2c$ debe ser igual a d. Por tanto, c debe ser igual a 8 o -8, y como $d = 2c$, d podría ser 16 o -16. Entonces tenemos

$$x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2 \quad \text{o} \quad x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2.$$ ■

En el ejemplo siguiente resolveremos una ecuación cuadrática completando un cuadrado.

EJEMPLO 5 **Resolución de una ecuación cuadrática al completar el cuadrado**

Resuelva la ecuación $x^2 - 5x + 3 = 0$.

SOLUCIÓN Es conveniente primero reescribir la ecuación para que los únicos términos que contengan a x se encuentren en el lado izquierdo, como sigue:

$x^2 - 5x + 3 = 0$	original
$x^2 - 5x = -3$	reste 3
$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$	complete el cuadrado, sume $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ a *ambos* lados
$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$	ecuación equivalente
$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$	tome la raíz cuadrada
$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$	sume $\frac{5}{2}$

Entonces, las soluciones de la ecuación son $\left(5 + \sqrt{13}\right)/2 \approx 4.3$ y $\left(5 - \sqrt{13}\right)/2 \approx 0.7$. ■

En el ejemplo 5 resolvimos una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a = 1$. Si $a \neq 1$, podemos resolver la ecuación cuadrática al sumar un paso al procedimiento empleado en el ejemplo precedente. Después de reescribir la ecuación para que sólo términos con x se encuentren en el lado izquierdo,

$$ax^2 + bx = -c,$$

dividimos ambos lados entre a, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Entonces completamos el cuadrado al sumar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos lados. Esta técnica se usa en la demostración de la siguiente e importante fórmula.

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La fórmula cuadrática nos da dos soluciones de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Son $x = x_1, x_2$, donde

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

DEMOSTRACIÓN Supondremos que $b^2 - 4ac \geq 0$ de modo que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real. (El caso en que $b^2 - 4ac < 0$ se estudiará en la siguiente sección.) Prosigamos como sigue:

$ax^2 + bx + c = 0$	original
$ax^2 + bx = -c$	reste c
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	divida entre a
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$	complete el cuadrado

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{ecuación equivalente}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{saque la raíz cuadrada}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{reste } \frac{b}{2a}$$

Podemos escribir el radical de la última ecuación como

$$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}.$$

Como $|2a| = 2a$ si $a > 0$ o $|2a| = -2a$ si $a < 0$, vemos que en todos los casos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$ ■

Note que si la fórmula cuadrática se ejecuta en forma apropiada, no es necesario comprobar las soluciones.

El número $b^2 - 4ac$ bajo el signo del radical de la fórmula cuadrática se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. El discriminante se puede usar para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación, como en la tabla siguiente.

Valor del discriminante $b^2 - 4ac$	**Naturaleza de las raíces de** $ax^2 + bx + c = 0$
Valor positivo	Dos raíces reales y desiguales
0	Una raíz de multiplicidad 2
Valor negativo	No hay raíz real

El discriminante en los dos ejemplos siguientes es positivo. En el ejemplo 8 el discriminante es 0.

EJEMPLO 6 **Uso de la fórmula cuadrática**

Resuelva la ecuación $4x^2 + x - 3 = 0$.

SOLUCIÓN Sea $a = 4$, $b = 1$ y $c = -3$ en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8} \qquad \text{Simplifique el discriminante}$$

$$= \frac{-1 \pm 7}{8} \qquad \sqrt{49} = 7$$

Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{-1 + 7}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1 - 7}{8} = -1.$$ ■

El ejemplo 6 también se puede resolver por factorización. Si escribimos $(4x - 3)(x + 1) = 0$ e igualamos a cero cada factor tendremos $x = \frac{3}{4}$ y $x = -1$.

EJEMPLO 7 **Uso de la fórmula cuadrática**

Resuelva la ecuación $2x(3 - x) = 3$.

SOLUCIÓN Para usar la fórmula cuadrática, debemos escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} 2x(3 - x) &= 3 && \text{original} \\ 6x - 2x^2 &= 3 && \text{multiplique factores} \\ -2x^2 + 6x - 3 &= 0 && \text{reste 3} \\ 2x^2 - 6x + 3 &= 0 && \text{multiplique por } -1 \end{aligned}$$

Ahora sea $a = 2$, $b = -6$ y $c = 3$ en la fórmula cuadrática, obteniendo

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}.$$

Note que

$$\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \neq \frac{3}{2} \pm \sqrt{3}.$$

El 2 del denominador debe dividirse entre ***ambos*** *términos del numerador, de modo que*

$$\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Como 2 es un factor del numerador y del denominador, podemos simplificar la última fracción como sigue:

$$\frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones son

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{2} \approx 2.37 \quad \text{y} \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0.63.$$

■

El siguiente ejemplo ilustra el caso de una doble raíz.

EJEMPLO 8 **Uso de la fórmula cuadrática**

Resuelva la ecuación $9x^2 - 30x + 25 = 0$.

SOLUCIÓN Sea $a = 9$, $b = -30$ y $c = 25$ en la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(9)(25)}}{2(9)} && x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{18} && \text{simplifique} \\ &= \frac{30 \pm 0}{18} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación tiene una (doble) raíz, $\frac{5}{3}$. ■

EJEMPLO 9 **Simplificar una ecuación de fracciones**

Resuelva la ecuación $\dfrac{2x}{x - 3} + \dfrac{5}{x + 3} = \dfrac{36}{x^2 - 9}$.

SOLUCIÓN Usando las directrices expresadas en la sección 2.1 para resolver una ecuación que contenga expresiones racionales, multiplicamos por el mcd, $(x + 3)(x - 3)$, recordando que, por la directriz 2, los números (-3 y 3) que hacen que el mcd sea cero no pueden ser soluciones. Entonces, procedemos como sigue:

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{5}{x+3} = \frac{36}{x^2-9} \qquad \text{original}$$

$$2x(x+3) + 5(x-3) = 36 \qquad \text{multiplique por el mcd, } (x+3)(x-3)$$

$$2x^2 + 6x + 5x - 15 - 36 = 0 \qquad \text{multiplique factores y reste 36}$$

$$2x^2 + 11x - 51 = 0 \qquad \text{simplifique}$$

$$(2x+17)(x-3) = 0 \qquad \text{factorice}$$

$$2x + 17 = 0, \quad x - 3 = 0 \qquad \text{teorema el factor cero}$$

$$x = -\tfrac{17}{2}, \quad x = 3 \qquad \text{despeje } x$$

Como $x = 3$ no puede ser una solución, vemos que $x = -\frac{17}{2}$ es la única solución de la ecuación dada. ■

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede usar la fórmula cuadrática para ayudar a factorizar trinomios.

EJEMPLO 10 **Factorizar con la fórmula cuadrática**

Factorice el polinomio $21x^2 - 13x - 20$.

SOLUCIÓN Resolvemos la ecuación cuadrática asociada,

$$21x^2 - 13x - 20 = 0,$$

usando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(21)(-20)}}{2(21)}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{169 + 1680}}{42} = \frac{13 \pm \sqrt{1849}}{42}$$

$$= \frac{13 \pm 43}{42} = \frac{56}{42}, -\frac{30}{42} = \frac{4}{3}, -\frac{5}{7}$$

Ahora escribimos la ecuación como un producto de factores lineales, ambos de la forma (x − solución):

$$\left(x - \tfrac{4}{3}\right)\left(x - \left(-\tfrac{5}{7}\right)\right) = 0$$

Elimine los denominadores al multiplicar ambos lados por $3 \cdot 7$:

$$3 \cdot 7\left(x - \tfrac{4}{3}\right)\left(x + \tfrac{5}{7}\right) = 0 \cdot 3 \cdot 7$$

$$3\left(x - \tfrac{4}{3}\right) \cdot 7\left(x + \tfrac{5}{7}\right) = 0$$

$$(3x - 4)(7x + 5) = 0$$

El lado izquierdo es la factorización deseada, es decir,

$$21x^2 - 13x - 20 = (3x - 4)(7x + 5).$$ ■

En el ejemplo siguiente usamos la fórmula cuadrática para resolver una ecuación que contiene más de una variable.

EJEMPLO 11 **Uso de la fórmula cuadrática**

De la ecuación $y = x^2 - 6x + 5$ despeje x, donde $x \leq 3$.

(continúa)

SOLUCIÓN La ecuación se puede escribir en la forma

$$x^2 - 6x + 5 - y = 0,$$

de modo que es una ecuación cuadrática en x con coeficientes $a = 1$, $b = -6$ y $c = 5 - y$. Note que y se considera una constante puesto que estamos despejando la variable x. Ahora usamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5 - y)}}{2(1)} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{16 + 4y}}{2} \qquad \text{simplifique } b^2 - 4ac$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{4}\sqrt{4 + y}}{2} \qquad \text{factorice } \sqrt{4}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{4 + y}}{2} \qquad \sqrt{4} = 2$$

$$= 3 \pm \sqrt{4 + y} \qquad \text{divida entre 2 \textit{ambos} términos}$$

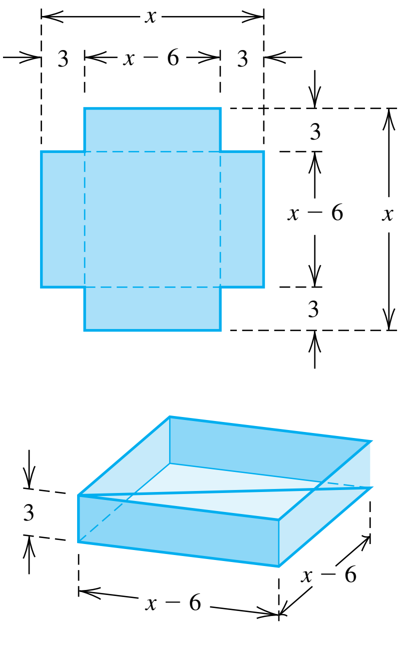
Como $\sqrt{4 + y}$ es no negativa, $3 + \sqrt{4 + y}$ es mayor o igual a 3 y $3 - \sqrt{4 + y}$ es menor o igual a 3. Como la restricción dada es $x \leq 3$, tenemos

$$x = 3 - \sqrt{4 + y}.$$

■

Muchos problemas de aplicación llevan a ecuaciones cuadráticas. Una se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 2



EJEMPLO 12 **Construcción de una caja rectangular**

Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de construirse de una pieza cuadrada de hojalata al cortar un cuadrado de 3 pulgadas de cada esquina y doblar los lados. Si la caja debe contener 48 pulg^3, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de hojalata que debe usarse?

SOLUCIÓN Empezamos por hacer el dibujo de la figura 2, denotando con x la longitud desconocida del lado de la pieza de hojalata. En consecuencia, cada lado de la base de la caja tendrá una longitud $x - 3 - 3 = x - 6$.

Como el área de la base de la caja es $(x - 6)^2$ y la altura es 3, obtenemos

$$\text{volumen de caja} = 3(x - 6)^2.$$

Como la caja debe contener 48 pulg^3,

$$3(x - 6)^2 = 48.$$

Ahora despejamos x:

$$(x - 6)^2 = 16 \qquad \text{divida entre 3}$$

$$x - 6 = \pm 4 \qquad \text{saque la raíz cuadrada}$$

$$x = 6 \pm 4 \qquad \text{sume 6}$$

En consecuencia,

$$x = 10 \qquad \text{o} \qquad x = 2.$$

✓ **Prueba** Si consultamos la figura 2, vemos que $x = 2$ es inaceptable porque no hay caja posible en este caso, pero si empezamos con un cuadrado de 10 pulgadas de hojalata, cortamos esquinas de 3 pulgadas y doblamos, obtenemos una caja que tiene dimensiones de 4 pulgadas, 4 pulgadas y 3 pulgadas. La caja tiene el volumen deseado de 48 pulg^3. Entonces, un cuadrado de 10 pulgadas es la respuesta al problema. ■

Como se ilustra en el ejemplo 12, aun cuando una ecuación se formule correctamente, es posible llegar a soluciones que no tienen sentido por la naturaleza física de un problema determinado. Estas soluciones deben desecharse. Por ejemplo, no aceptaríamos la respuesta -7 años para la edad de una persona o $\sqrt{50}$ por el número de automóviles en un lote de estacionamiento.

En el siguiente ejemplo resolvemos el problema de aplicación que vimos al principio de esta sección.

EJEMPLO 13 **Hallar la altura de un cohete de juguete**

La altura sobre el suelo h (en pies) de un cohete de juguete, t segundos después que es lanzado, está dada por $h = -16t^2 + 120t$. ¿Cuándo estará el cohete a 180 pies sobre el suelo?

SOLUCIÓN Usando $h = -16t^2 + 120t$, obtenemos lo siguiente:

$$180 = -16t^2 + 120t \quad \text{sea } h = 180$$

$$16t^2 - 120t + 180 = 0 \quad \text{sume } 16t^2 - 120t$$

$$4t^2 - 30t + 45 = 0 \quad \text{divida entre 4}$$

Note que la ecuación es cuadrática en t, de modo que de la fórmula cuadrática se despeja t.

Aplicando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = -30$ y $c = 45$ nos da

$$t = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4)(45)}}{2(4)}$$

$$= \frac{30 \pm \sqrt{180}}{8} = \frac{30 \pm 6\sqrt{5}}{8} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{4}.$$

Por lo tanto, el cohete está a 180 pies sobre el suelo en los tiempos siguientes

$$t = \frac{15 - 3\sqrt{5}}{4} \approx 2.07 \text{ seg}$$

$$t = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} \approx 5.43 \text{ seg}$$ ■

2.3 Ejercicios

Ejer. 1–14: Resuelva la ecuación por factorización.

1 $6x^2 + x - 12 = 0$

2 $4x^2 + 13x - 35 = 0$

3 $15x^2 - 6 = -13x$

4 $15x^2 - 14 = 29x$

5 $2x(4x + 15) = 27$

6 $x(3x + 10) = 77$

7 $75x^2 + 35x - 10 = 0$

8 $48x^2 + 12x - 90 = 0$

9 $12x^2 + 60x + 75 = 0$

10 $4x^2 - 72x + 324 = 0$

11 $\dfrac{x}{x + 3} + \dfrac{1}{x} - 4 = \dfrac{9}{x^2 + 3x}$

12 $\dfrac{5x}{x - 2} + \dfrac{3}{x} + 2 = \dfrac{-6}{x^2 - 2x}$

13 $\dfrac{5x}{x - 3} + \dfrac{4}{x + 3} = \dfrac{90}{x^2 - 9}$

14 $\dfrac{3x}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{-4}{x^2 - 4}$

Ejer. 15–16: Determine si las dos ecuaciones son equivalentes.

15 (a) $x^2 = 16$, $x = 4$ (b) $x = \sqrt{49}$, $x = 7$

16 (a) $x^2 = 25$, $x = 5$ (b) $x = \sqrt{64}$, $x = 8$

Ejer. 17–24: Resuelva la ecuación usando la ecuación cuadrática especial de la página 76.

17 $x^2 = 225$ 18 $x^2 = 361$

19 $25x^2 = 9$ 20 $64x^2 = 49$

21 $(x - 3)^2 = 17$ 22 $(x + 5)^2 = 29$

23 $4(x + 7)^2 = 13$ 24 $9(x - 1)^2 = 7$

Ejer. 25–26: Determine el valor o valores de *d* que completen el cuadrado para la expresión.

25 (a) $x^2 + 9x + d$ (b) $x^2 - 12x + d$

(c) $x^2 + dx + 36$ (d) $x^2 + dx + \frac{49}{4}$

26 (a) $x^2 + 17x + d$ (b) $x^2 - 6x + d$

(c) $x^2 + dx + 25$ (d) $x^2 + dx + \frac{81}{4}$

Ejer. 27–30: Resuelva completando el cuadrado. (*Nota:* vea la exposición después del ejemplo 5 como ayuda para resolver los ejercicios 29 y 30.)

27 $x^2 + 6x - 4 = 0$ 28 $x^2 - 10x + 20 = 0$

29 $4x^2 - 12x - 11 = 0$ 30 $4x^2 + 20x + 13 = 0$

Ejer. 31–44: Resuelva usando la fórmula cuadrática.

31 $6x^2 - x = 2$ 32 $5x^2 + 13x = 6$

33 $x^2 + 6x + 3 = 0$ 34 $x^2 - 4x - 2 = 0$

35 $2x^2 - 3x - 4 = 0$ 36 $3x^2 + 5x + 1 = 0$

37 $\frac{3}{2}z^2 - 4z - 1 = 0$ 38 $\frac{5}{3}s^2 + 3s + 1 = 0$

39 $\dfrac{5}{w^2} - \dfrac{10}{w} + 2 = 0$ 40 $\dfrac{x+1}{3x+2} = \dfrac{x-2}{2x-3}$

41 $4x^2 + 81 = 36x$ 42 $30x + 9 = -25x^2$

43 $\dfrac{3x}{x^2 + 9} = -2$ 44 $\frac{1}{7}x^2 + 1 = \frac{4}{7}x$

Ejer. 45–48: Use la fórmula cuadrática para factorizar las expresiones.

45 $x^2 + x - 30$ 46 $x^2 - 11x$

47 $12x^2 - 16x - 3$ 48 $15x^2 + 34x - 16$

Ejer. 49–50: Use la fórmula cuadrática para despejar (a) *x* en términos de *y* y (b) *y* en términos de *x*.

49 $4x^2 - 4xy + 1 - y^2 = 0$ 50 $2x^2 - xy = 3y^2 + 1$

Ejer. 51–54: Despeje la variable especificada.

51 $K = \frac{1}{2}mv^2$ despeje v (energía cinética)

52 $F = g\dfrac{mM}{d^2}$ despeje d (ley de Newton de la gravitación)

53 $A = 2\pi r(r + h)$ despeje r (área superficial de un cilindro cerrado)

54 $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ despeje t (distancia que cae un objeto)

55 **Velocidad de un gas** Cuando un gas caliente sale de una chimenea cilíndrica, su velocidad varía en toda una sección transversal circular de la chimenea, con el gas cerca del centro de la sección transversal que tiene una mayor velocidad que el gas cerca del perímetro. Este fenómeno puede ser descrito por la fórmula

$$V = V_{\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right],$$

donde $V_{\text{máx}}$ es la velocidad máxima del gas, r_0 es el radio de la chimenea y V es la velocidad del gas a una distancia r del centro de la sección transversal circular. De esta fórmula, despeje r.

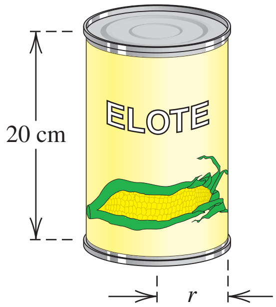
56 **Densidad de la atmósfera** Para altitudes h de hasta 10,000 metros, la densidad D de la atmósfera de la Tierra (en kg/m^3) se puede aproximar con la fórmula

$$D = 1.225 - (1.12 \times 10^{-4})h + (3.24 \times 10^{-9})h^2.$$

Aproxime la altitud si la densidad de la atmósfera es $0.74\ kg/m^3$.

57 **Dimensiones de una lata** Un fabricante de latas desea construir un bote cilíndrico circular recto de altura 20 centímetros y capacidad de $3000\ cm^3$ (vea la figura). Encuentre el radio interior r de la lata.

EJERCICIO 57



58 **Construcción de una caja rectangular** Consulte el ejemplo 12. Una caja sin tapa ha de construirse al cortar cuadrados de 3 pulgadas de las esquinas de una lámina rectangular de hojalata cuya longitud es el doble de su ancho. ¿Una lámina de qué medidas producirá una caja que tenga un volumen de 60 pulg^3?

59 **Tiro de una pelota de béisbol** Una pelota de béisbol es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 64 ft/s. El número de pies s sobre el suelo después de t segundos está dado por la ecuación $s = -16t^2 + 64t$.

(a) ¿Cuándo estará la pelota a 48 pies sobre el suelo?

(b) ¿Cuándo regresará al suelo?

60 **Distancia de frenado** La distancia que un auto recorre entre el momento en que el conductor toma la decisión de pisar el freno y el tiempo en que el auto en realidad se detiene es la distancia de frenado. Para un cierto auto que corre a v mi/h, la distancia de frenado d (en pies) está dada por $d = v + (v^2/20)$.

(a) Encuentre la distancia de frenado cuando v es 55 mi/h.

(b) Si un conductor decide frenar a 120 pies de un señalamiento de parada, ¿qué tan rápido puede ir el auto y todavía detenerse en el momento en que llegue al señalamiento?

61 **Temperatura de agua hirviendo** La temperatura T (en °C) a la que el agua hierve está relacionada con la elevación h (en metros sobre el nivel del mar) por la fórmula

$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$$

para $95 \leq T \leq 100$.

(a) ¿A qué elevación hierve el agua a una temperatura de 98°C?

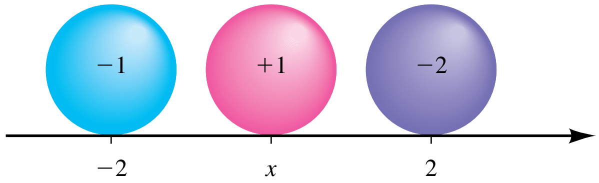
(b) La elevación del monte Everest es de aproximadamente 8840 metros. Estime la temperatura a la que el agua hierve en la cima de esta montaña. (*Sugerencia:* use la fórmula cuadrática con $x = 100 - T$.)

62 **Ley de Coulomb** Una partícula de carga -1 está colocada en una recta de coordenadas en $x = -2$ y una partícula de carga -2 está colocada en $x = 2$, como se ve en la figura. Si una partícula de carga $+1$ se coloca en una posición x entre -2 y 2, la ley de Coulomb en teoría eléctrica expresa que la fuerza neta F que actúa sobre esta partícula está dada por

$$F = \frac{-k}{(x + 2)^2} + \frac{2k}{(2 - x)^2}$$

para alguna constante $k > 0$. Determine la posición en la que la fuerza neta es cero.

EJERCICIO 62



63 **Dimensiones de una banqueta** Un terreno rectangular que tiene dimensiones de 26 pies por 30 pies está rodeado por una banqueta de ancho uniforme. Si el área de la banqueta es de 240 ft^2, ¿cuál es su ancho?

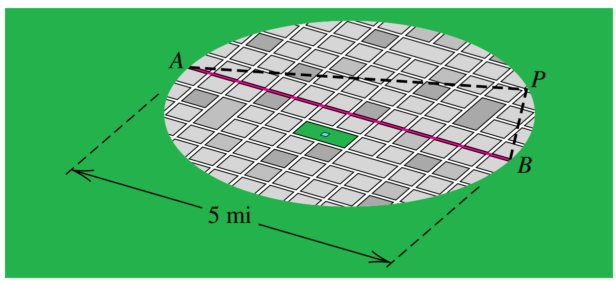
64 **Diseño de un cartel** Una hoja de papel de 24 por 36 pulgadas se va a usar para un cartel, con el lado más corto en la parte inferior. Los márgenes de los lados y la parte superior van a tener el mismo ancho, y el margen de abajo va a tener el doble de ancho que los otros márgenes. Encuentre el ancho de los márgenes si el área impresa va a ser de 661.5 pulg^2.

65 **Instalación de una cerca en un jardín** Un jardín cuadrado se va a cultivar y luego a cerrar con una cerca. Si ésta cuesta \$1 por pie y el costo de preparar el suelo es de 0.50 por ft^2, determine el tamaño del jardín que puede encerrarse a un costo de \$120.

66 **Instalación de una cerca en un lugar** Un agricultor piensa poner una cerca en un lugar rectangular, usando parte de su granero en un lado y cerca para los otros tres lados. Si el lado paralelo al granero va a tener el doble de largo que un lado adyacente, y el área del lugar va a ser de 128 ft^2, ¿cuántos pies de cerca debe comprar?

67 **Planeación de una autopista** Los límites de una ciudad son de forma circular, de 5 millas de diámetro. Como se ve en la figura, una carretera recta pasa por el centro de la ciudad de A a B. El departamento de carreteras está pensando construir una autopista de 6 millas de largo del punto A al P en las afueras y luego a B. Encuentre la distancia de A a P. (*Sugerencia: APB* es un triángulo rectángulo.)

EJERCICIO 67



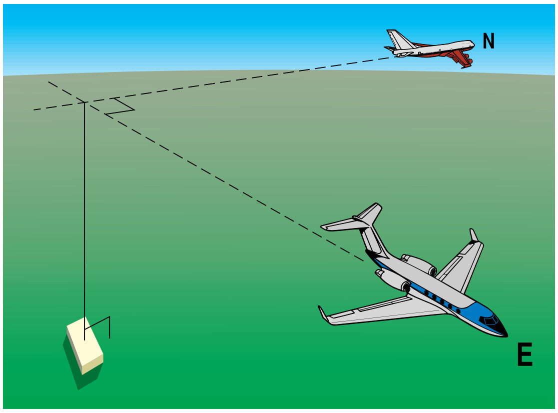
68 **Expansión de una ciudad** El límite de una ciudad es una circunferencia de 10 millas de diámetro. En la última década, la ciudad ha crecido en superficie aproximadamente 16π millas cuadradas (unas 50 mi^2). Suponiendo que la ciudad siempre tiene forma circular, encuentre el cambio correspondiente en distancia del centro de la ciudad a su límite.

69 **Distancia entre aviones** Un avión que vuela al norte a 200 mi/h pasó sobre un punto en tierra a las 2:00 p.m. Otro avión a la misma altitud pasó sobre el punto a las 2:30 p.m., volando al este a 400 mi/h (vea la figura).

(a) Si t denota el tiempo en horas después de las 2:30 p.m., exprese la distancia d entre los aviones en términos de t.

(b) ¿A qué hora después de las 2:30 p.m. estaban los aviones a 500 millas entre sí?

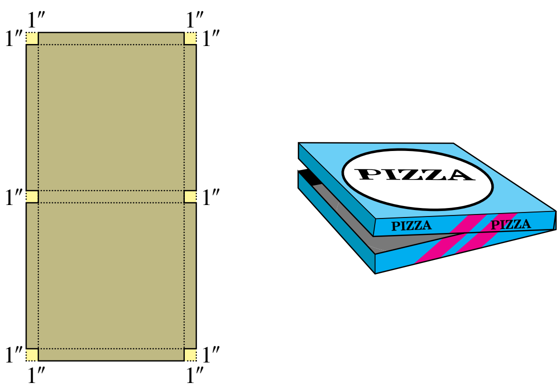
EJERCICIO 69



70 **Alcance de un radio de comunicaciones** Dos topógrafos con radios de comunicación salen del mismo punto a las 9:00 a.m., uno de ellos camina al sur a 4 mi/h y el otro al oeste a 3 mi/h. ¿Cuánto tiempo se pueden comunicar si cada radio tiene un alcance máximo de 2 millas?

71 **Construcción de una caja para pizza** Una caja para pizza, con base cuadrada, se va a construir de una hoja rectangular de cartón al cortar seis cuadrados de 1 pulgada de las esquinas y las secciones medias y doblar los lados (vea la figura). Si el área de la base debe ser de 144 $pulg^2$, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de cartón que ha usarse?

EJERCICIO 71



72 **Construcción de marcos de alambre** Dos marcos cuadrados de alambre se van a construir de un alambre de 100 pulgadas de largo. Si el área encerrada por un marco debe ser la mitad del área encerrada por el otro, encuentre las dimensiones de cada marco. (No considere el grueso del alambre.)

73 **Rapidez de navegación en canoa** La rapidez de la corriente en un arroyo es de 5 mi/h. A un hombre que viaja en canoa le lleva 30 minutos más remar 1.2 millas corriente arriba que remar la misma distancia corriente abajo. ¿Cuál es la rapidez del hombre en aguas en calma?

74 **Altura de un acantilado** Cuando una piedra se tira desde un acantilado hacia el mar, recorre aproximadamente $16t^2$ pies en t segundos. Si su caída en el agua se escucha 4 segundos más tarde y la velocidad del sonido es de 1100 pies/s, aproxime la altura del acantilado.

75 **Descuento por cantidad** Una compañía vende zapatos para correr a un distribuidor en \$40 el par si éste pide menos de 50 pares; si pide 50 pares o más (hasta 600), el precio por par se reduce a un ritmo de \$0.04 multiplicado por el número pedido. ¿Cuántos pares puede comprar el distribuidor con \$8400?

76 **Precio de un reproductor de CD** Cuando una popular marca de reproductores de CD tiene un precio de \$300 por unidad, una tienda vende 15 unidades por semana. No obstante, cada vez que el precio se reduce en \$10 las ventas aumentan en 2 por semana. ¿Qué precio de venta resultará en ingresos semanales de \$7000?

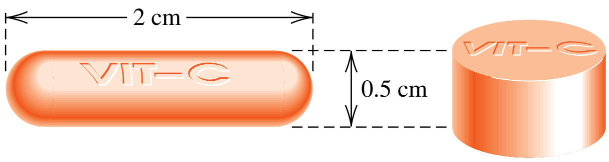
77 **Dimensiones de un barril de petróleo** Se va a fabricar un barril de petróleo, cilíndrico circular recto cerrado de 4 pies de altura, de modo que el área superficial total sea de 10π ft^2. Encuentre el diámetro del barril.

78 **Dimensiones de una pastilla de vitaminas** La rapidez a la que una pastilla de vitamina C empieza a disolverse depende de su área superficial. Una marca de pastillas mide 2 centímetros de largo y tiene forma de cilindro con una semiesfera de 0.5 cm de diámetro unida en cada uno de sus extremos, como se ve en la figura. Una segunda marca de pastilla se va a fabricar en forma de cilindro circular recto de 0.5 cm de altura.

(a) Encuentre el diámetro de la segunda pastilla para que su área superficial sea igual a la de la primera pastilla.

(b) Encuentre el volumen de cada pastilla.

EJERCICIO 78



Ejer. 79–80: Durante una explosión nuclear se produce una bola de fuego con volumen máximo V_0. Para temperaturas abajo de 2000 K y una fuerza explosiva dada, el volumen *V* de la bola de fuego *t* segundos después de la explosión se puede estimar usando la fórmula siguiente. (Note que el kelvin se abrevia como K, no °K.) Aproxime *t* cuando *V* sea 95% de V_0.

79 $V/V_0 = 0.8197 + 0.007752t + 0.0000281t^2$
(explosión de 20 kilotones)

80 $V/V_0 = 0.831 + 0.00598t + 0.0000919t^2$
(explosión de 10 megatones)

Ejer. 81–82: Cuando se realizan cálculos en una calculadora, la fórmula cuadrática no siempre dará resultados precisos si b^2 es grande en comparación con *ac*, porque una de las raíces será cercana a cero y difícil de aproximar.

(a) Use la fórmula cuadrática para aproximar las raíces de la ecuación dada.

(b) Para obtener una mejor aproximación para la raíz cercana a cero, racionalice el numerador para cambiar

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \textbf{por} \quad x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

y use la segunda fórmula

81 $x^2 + 4{,}500{,}000x - 0.96 = 0$

82 $x^2 - 73{,}000{,}000x + 2.01 = 0$

83 **Relaciones temperatura-latitud** La tabla siguiente contiene temperaturas anuales promedio para los hemisferios norte y sur a varias latitudes.

Latitud	Hemisf. N	Hemisf. S
85°	−8°F	−5°F
75°	13°F	10°F
65°	30°F	27°F
55°	41°F	42°F
45°	57°F	53°F
35°	68°F	65°F
25°	78°F	73°F
15°	80°F	78°F
5°	79°F	79°F

(a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones predice en forma más precisa la temperatura anual promedio en el hemisferio sur a una latitud *L*?

(1) $T_1 = -1.09L + 96.01$

(2) $T_2 = -0.011L^2 - 0.126L + 81.45$

(b) Aproxime la temperatura anual promedio en el hemisferio sur a 50° grados de latitud.

2.4 Números complejos

Se requiere de *números complejos* para hallar soluciones de ecuaciones que no se pueden resolver usando sólo el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. La tabla siguiente ilustra varias ecuaciones cuadráticas sencillas y los tipos de números requeridos para solucionarlas.

Ecuación	Soluciones	Tipo de números requeridos
$x^2 = 9$	$3, -3$	Enteros
$x^2 = \frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	Números racionales
$x^2 = 5$	$\sqrt{5}, -\sqrt{5}$	Números irracionales
$x^2 = -9$	?	Números complejos

Las soluciones de las primeras tres ecuaciones de la tabla están en $\mathbb{R}$; sin embargo, como los cuadrados de números reales nunca son negativos, $\mathbb{R}$ no contiene las soluciones de $x^2 = -9$. Para resolver esta ecuación, necesitamos el **sistema de números complejos** $\mathbb{C}$, que contiene tanto a $\mathbb{R}$ como a los números cuyos cuadrados son negativos.

Empecemos por introducir la **unidad imaginaria,** denotada por i, que tiene las siguientes propiedades.

Propiedades de i

$$i = \sqrt{-1}, \qquad i^2 = -1$$

Debido a que su cuadrado es negativo, la letra i no representa un número real. Es una nueva entidad matemática que hará posible que obtengamos $\mathbb{C}$. Puesto que i, junto con $\mathbb{R}$, debe estar contenida en $\mathbb{C}$, debemos considerar productos de la forma bi para un número real b y también expresiones de la forma $a + bi$ para números reales a y b. La tabla siguiente da definiciones que usaremos.

Terminología	Definición	Ejemplo(s)
Número complejo	$a + bi$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1$	$3, 2 + i, 2i$
Número imaginario	$a + bi$ con $b \neq 0$	$3 + 2i, -4i$
Número imaginario puro	bi con $b \neq 0$	$-4i, \sqrt{3}\,i, i$
Igualdad	$a + bi = c + di$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$	$x + yi = 3 + 4i$ ssi $x = 3$ y $y = 4$
Suma	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	vea ejemplo 1(a)
Producto	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	vea ejemplo 1(b)

Note que los números imaginarios puros son un subconjunto de los números imaginarios y los números imaginarios son un subconjunto de los números complejos. Usamos la frase *número complejo no real* indistintamente con *número imaginario*.

No es necesario aprender de memoria las definiciones de adición y multiplicación de números complejos dadas en la tabla precedente. En lugar de eso, *podemos tratar todos los símbolos como si tuvieran propiedades de los números reales, con exactamente una excepción: sustituimos i^2 por* -1. Así, para el producto $(a + bi)(c + di)$ simplemente usamos las leyes distributivas y el hecho de que

$$(bi)(di) = bdi^2 = bd(-1) = -bd.$$

EJEMPLO 1 **Adición y multiplicación de números complejos**

Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

(a) $(3 + 4i) + (2 + 5i)$ **(b)** $(3 + 4i)(2 + 5i)$

SOLUCIÓN

(a) $(3 + 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (4 + 5)i = 5 + 9i$

(b) $$\begin{aligned}(3 + 4i)(2 + 5i) &= (3 + 4i)(2) + (3 + 4i)(5i)\\ &= 6 + 8i + 15i + 20i^2\\ &= 6 + 23i + 20(-1)\\ &= -14 + 23i\end{aligned}$$ ■

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales puede identificarse con el conjunto de los números complejos de la forma $a + 0i$. También es cómodo denotar el número complejo $0 + bi$ por bi. Así,

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

En consecuencia, podemos considerar $a + bi$ como la suma de dos números complejos a y bi (es decir, $a + 0i$ y $0 + bi$). Para el número complejo $a + bi$, decimos que a es la **parte real** y b es la **parte imaginaria.**

EJEMPLO 2 **Igualdad de números complejos**

Encuentre los valores de x y y, donde x y y son números reales:

$$(2x - 4) + 9i = 8 + 3yi$$

SOLUCIÓN Empezamos por igualar las partes reales y las partes imaginarias de cada lado de la ecuación:

$$2x - 4 = 8 \quad \text{y} \quad 9 = 3y$$

Como $2x - 4 = 8$, $2x = 12$ y $x = 6$. Como $9 = 3y$, $y = 3$. Los valores de x y y que hacen iguales los números complejos son

$$x = 6 \quad \text{y} \quad y = 3.$$ ■

Con números complejos, ahora podemos resolver una ecuación como $x^2 = -9$. Específicamente, como

$$(3i)(3i) = 3^2i^2 = 9(-1) = -9,$$

vemos que una solución es $3i$ y otra es $-3i$.

En la tabla siguiente definimos la diferencia de números complejos y multiplicación de un número complejo por un número real.

Terminología	Definición
Diferencia	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Multiplicación por un número real *k*	$k(a + bi) = ka + (kb)i$

Si nos piden escribir una expresión de la forma $a + bi$, la forma $a - di$ es aceptable, porque $a - di = a + (-d)i$.

EJEMPLO 3 **Operaciones con números complejos**

Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

(a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i)$ **(b)** $(4 - 3i)(2 + i)$ **(c)** $i(3 - 2i)^2$

(d) i^{51} **(e)** i^{-13}

SOLUCIÓN

(a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i) = 8 + 20i - 3 + 4i = 5 + 24i$

(b) $(4 - 3i)(2 + i) = 8 - 6i + 4i - 3i^2 = 11 - 2i$

(c) $i(3 - 2i)^2 = i(9 - 12i + 4i^2) = i(5 - 12i) = 5i - 12i^2 = 12 + 5i$

(d) Evaluando potencias sucesivas de i, obtenemos

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

(continúa)

y entonces el ciclo se inicia otra vez:

$$i^5 = i, \quad i^6 = i^2 = -1, \quad \text{y así sucesivamente.}$$

En particular,

$$i^{51} = i^{48}i^3 = (i^4)^{12}i^3 = (1)^{12}i^3 = (1)(-i) = -i.$$

(e) En general, multiplique i^{-a} por i^b, donde $a \leq b \leq a + 3$ y b es un múltiplo de 4 (para que $i^b = 1$). Para i^{-13}, escoja $b = 16$.

$$i^{-13} \cdot i^{16} = i^3 = -i$$

El siguiente concepto tiene importantes usos al trabajar con números complejos.

Definición del conjugado de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su **conjugado**, denotado por $\bar{z}$, es $a - bi$.

Como $a - bi = a + (-bi)$, se deduce que el conjugado de $a - bi$ es

$$a - (-bi) = a + bi.$$

Por lo tanto, $a + bi$ *y* $a - bi$ *son conjugados uno del otro.* Algunas propiedades de los conjugados se dan en los ejercicios 57–62.

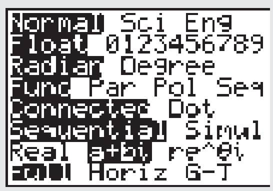
ILUSTRACIÓN **Conjugados**

Número complejo	Conjugado
$5 + 7i$	$5 - 7i$
$5 - 7i$	$5 + 7i$
$4i$	$-4i$
3	3

Operaciones con números complejos

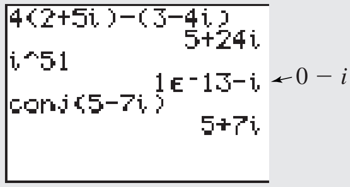
Primero, cambie al modo complejo.

MODE ▽ (6 veces) ▷ ENTER



La i está en la tecla del punto decimal.

4 (2 + 5 2nd *i*) −
(3 − 4 2nd *i*) ENTER
2nd *i* ^ 51 ENTER
MATH ▷ ▷ 1
5 − 7 2nd *i*) ENTER



En la TI-83/4 Plus, note que la segunda respuesta es equivalente a $0 - i$. Sabemos esto del ejemplo 3(d), donde vimos que la parte real de una potencia de i debe ser 0, 1 o -1. El lector debe estar alerta de estas pequeñas inconsistencias.

Las siguientes dos propiedades son consecuencias de las definiciones de la suma y producto de números complejos.

Propiedades de conjugados	**Ilustración**
$(a + bi) + (a - bi) = 2a$	$(4 + 3i) + (4 - 3i) = 4 + 4 = 2 \cdot 4$
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$	$(4 + 3i)(4 - 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 4^2 - 3^2i^2 = 4^2 + 3^2$

Note que *la suma y el producto de un número complejo y su conjugado son números reales.* Los conjugados son útiles para hallar el **inverso multiplicativo** de $a + bi$, $1/(a + bi)$, o para simplificar el cociente de dos números complejos. Como se ilustra en el ejemplo siguiente, podemos considerar estos tipos de simplificaciones simplemente como *racionalizar el denominador,* puesto que estamos multiplicando el cociente por el conjugado del denominador dividido por sí mismo.

EJEMPLO 4 **Cocientes de números complejos**

Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

(a) $\dfrac{1}{9 + 2i}$ **(b)** $\dfrac{7 - i}{3 - 5i}$

SOLUCIÓN

(a) $\dfrac{1}{9 + 2i} = \dfrac{1}{9 + 2i} \cdot \dfrac{9 - 2i}{9 - 2i} = \dfrac{9 - 2i}{81 + 4} = \dfrac{9}{85} - \dfrac{2}{85}i$

(b) $\dfrac{7 - i}{3 - 5i} = \dfrac{7 - i}{3 - 5i} \cdot \dfrac{3 + 5i}{3 + 5i} = \dfrac{21 + 35i - 3i - 5i^2}{9 + 25}$

$= \dfrac{26 + 32i}{34} = \dfrac{13}{17} + \dfrac{16}{17}i$ ■

Si p es un número real positivo, entonces la ecuación $x^2 = -p$ tiene soluciones en $\mathbb{C}$. Una solución es $\sqrt{p}\, i$, porque

$$\left(\sqrt{p}\, i\right)^2 = \left(\sqrt{p}\right)^2 i^2 = p(-1) = -p.$$

Del mismo modo, $-\sqrt{p}\, i$ también es una solución.

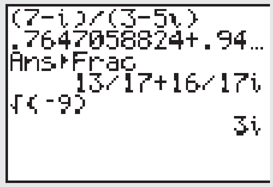
La definición de $\sqrt{-r}$ de la tabla siguiente está motivada por $(\sqrt{r}\,i)^2 = -r$ para $r > 0$. Cuando use esta definición, tenga cuidado de *no escribir* $\sqrt{ri}$ cuando $\sqrt{r}\,i$ sea lo que se pretende.

Terminología	Definición	Ilustraciones
Raíz cuadrada principal $\sqrt{-r}$ para $r > 0$	$\sqrt{-r} = \sqrt{r}\,i$	$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,i = 3i$ $\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i$ $\sqrt{-1} = \sqrt{1}\,i = i$

Operaciones con números complejos

No olvide cambiar al modo complejo.

(7 − 2nd i) ÷
(3 − 5 2nd i) ENTER
MATH 1 ENTER
2nd √ −9) ENTER



El signo de radical debe usarse con precaución cuando el radicando sea negativo. Por ejemplo, la fórmula $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, que se cumple para números reales positivos, *no es* verdadera cuando a y b son negativos, como se ve enseguida:

$$\sqrt{-3}\,\sqrt{-3} = (\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}\,i) = (\sqrt{3})^2 i^2 = 3(-1) = -3$$

Pero $$\sqrt{(-3)(-3)} = \sqrt{9} = 3.$$

Por tanto, $$\sqrt{-3}\,\sqrt{-3} \neq \sqrt{(-3)(-3)}.$$

Si sólo *uno* de a o b es negativo, entonces $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. En general, no aplicaremos leyes de radicales si los radicandos son negativos. En lugar de ello, cambiaremos la forma de los radicales antes de efectuar alguna operación, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 **Trabajo con raíces cuadradas de números negativos**

Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

$$(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4})$$

SOLUCIÓN Primero usamos la definición $\sqrt{-r} = \sqrt{r}\,i$, y luego simplificamos:

$$\begin{aligned}(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4}) &= (5 - \sqrt{9}\,i)(-1 + \sqrt{4}\,i)\\ &= (5 - 3i)(-1 + 2i)\\ &= -5 + 10i + 3i - 6i^2\\ &= -5 + 13i + 6 = 1 + 13i\end{aligned}$$ ■

En la sección 2.3 indicamos que si el discriminante $b^2 - 4ac$ de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es negativo, entonces no hay raíces reales de la ecuación. De hecho, las soluciones de la ecuación son dos números *imaginarios*. Además, las soluciones son conjugadas entre sí, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 **Una ecuación cuadrática con soluciones complejas**

Resuelva la ecuación $5x^2 + 2x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Si aplicamos la fórmula cuadrática con $a = 5$, $b = 2$ y $c = 1$, vemos que

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(5)(1)}}{2(5)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} = \frac{-2 \pm 4i}{10} = \frac{-1 \pm 2i}{5} = -\frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}i.$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ y $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. ■

EJEMPLO 7 **Una ecuación con soluciones complejas**

Resuelva la ecuación $x^3 - 1 = 0$.

Diferencia de dos cubos:
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

SOLUCIÓN Usando la fórmula de factorización de la diferencia de dos cubos con $a = x$ y $b = 1$, escribimos $x^3 - 1 = 0$ como

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Igualando a cero cada factor y resolviendo las ecuaciones resultantes, obtenemos las soluciones

$$1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

o lo que es equivalente,

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Como el número 1 se denomina **número real unitario** y la ecuación dada puede escribirse como $x^3 = 1$, a estas tres soluciones se les llama **raíces cúbicas de la unidad.** ■

En la sección 1.3 mencionamos que $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números *reales* pero, si factorizamos sobre los números *complejos*, entonces $x^2 + 1$ se puede factorizar como sigue:

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

2.4 Ejercicios

Ejer. 1–34: Escriba la expresión en la forma *a* + *bi*, donde *a* y *b* son números reales.

1 $(5 - 2i) + (-3 + 6i)$

2 $(-5 + 4i) + (3 + 9i)$

3 $(7 - 8i) - (-5 - 3i)$

4 $(-3 + 8i) - (2 + 3i)$

5 $(3 + 5i)(2 - 7i)$

6 $(-2 + 3i)(8 - i)$

7 $(4 - 3i)(2 + 7i)$

8 $(8 + 2i)(7 - 3i)$

9 $(5 - 2i)^2$

10 $(6 + 7i)^2$

11 $i(3 + 4i)^2$

12 $i(2 - 7i)^2$

13 $(3 + 4i)(3 - 4i)$

14 $(4 + 7i)(4 - 7i)$

15 (a) i^{43} (b) i^{-20} 16 (a) i^{68} (b) i^{-33}

17 (a) i^{73} (b) i^{-46} 18 (a) i^{66} (b) i^{-55}

19 $\dfrac{3}{2+4i}$ 20 $\dfrac{5}{3-7i}$

21 $\dfrac{1-7i}{6-2i}$ 22 $\dfrac{2+9i}{-3-i}$

23 $\dfrac{-4+6i}{2+7i}$ 24 $\dfrac{-3-2i}{5+2i}$

25 $\dfrac{4-2i}{-7i}$ 26 $\dfrac{-2+6i}{3i}$

27 $(2+5i)^3$ 28 $(3-2i)^3$

29 $\left(2-\sqrt{-4}\right)\left(3-\sqrt{-16}\right)$

30 $\left(-3+\sqrt{-25}\right)\left(8-\sqrt{-36}\right)$

31 $\dfrac{4+\sqrt{-81}}{2-\sqrt{-9}}$ 32 $\dfrac{5-\sqrt{-121}}{1+\sqrt{-25}}$

33 $\dfrac{\sqrt{-36}\sqrt{-49}}{\sqrt{-16}}$ 34 $\dfrac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-16}\sqrt{-81}}$

Ejer. 35–38: Encuentre los valores de x y y, donde x y y son números reales.

35 $4+(x+2y)i=x+2i$ 36 $(x-y)+3i=4+yi$

37 $(2x-y)-16i=10+4yi$

38 $8+(3x+y)i=2x-4i$

Ejer. 39–56: Encuentre las soluciones de la ecuación.

39 $x^2-6x+13=0$ 40 $x^2-2x+26=0$

41 $x^2+12x+37=0$ 42 $x^2+8x+17=0$

43 $x^2-5x+20=0$ 44 $x^2+3x+6=0$

45 $4x^2+x+3=0$ 46 $-3x^2+x-5=0$

47 $x^3+64=0$ 48 $x^3-27=0$

49 $27x^3=(x+5)^3$

50 $16x^4=(x-4)^4$

51 $x^4=625$ 52 $x^4=81$

53 $4x^4+25x^2+36=0$ 54 $27x^4+21x^2+4=0$

55 $x^3+3x^2+4x=0$

56 $8x^3-12x^2+2x-3=0$

Ejer. 57–62: Verifique la propiedad.

57 $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ 58 $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$

59 $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$ 60 $\overline{z/w}=\overline{z}/\overline{w}$

61 $\overline{z}=z$ si y sólo si z es real.

62 $\overline{z^2}=(\overline{z})^2$

2.5 Otros tipos de ecuaciones

Las ecuaciones consideradas en secciones previas son inadecuadas para muchos problemas. Por ejemplo, en aplicaciones a veces es necesario considerar potencias x^k con $k>2$. Algunas ecuaciones comprenden valores absolutos o radicales. En esta sección damos ejemplos de ecuaciones de estos tipos que se pueden resolver usando métodos elementales.

EJEMPLO 1 **Resolver una ecuación que contenga un valor absoluto**

Resuelva la ecuación $|x-5|=3$.

SOLUCIÓN Si a y b son números reales con $b>0$, entonces $|a|=b$ si y sólo si $a=b$ o $a=-b$. Por tanto, si $|x-5|=3$, entonces

$$x-5=3 \qquad \text{o bien} \qquad x-5=-3.$$

Despejar la x nos da

$$x = 5 + 3 = 8 \qquad \text{o bien} \qquad x = 5 - 3 = 2.$$

Entonces, la ecuación dada tiene dos soluciones, 8 y 2. ■

Para una ecuación como

$$2|x - 5| + 3 = 11,$$

primero aislamos la expresión de valor absoluto al restar 3 y dividir entre 2 para obtener

$$|x - 5| = \frac{11 - 3}{2} = 4,$$

y luego continuamos como en el ejemplo 1.

Si una ecuación está en forma factorizada *con cero en un lado*, entonces podemos obtener soluciones al igualar a cero cada factor. Por ejemplo, si p, q y r son expresiones que contienen a x y si $pqr = 0$, entonces o bien $p = 0$, $q = 0$ o $r = 0$. En el siguiente ejemplo factorizamos al agrupar términos.

EJEMPLO 2 **Resolver una ecuación usando agrupación**

Resuelva la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= 0 && \text{original} \\ x^2(x + 2) - 1(x + 2) &= 0 && \text{agrupe términos} \\ (x^2 - 1)(x + 2) &= 0 && \text{factorice } x + 2 \\ (x + 1)(x - 1)(x + 2) &= 0 && \text{factorice } x^2 - 1 \\ x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x + 2 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ x = -1, \qquad x = 1, \qquad x &= -2 && \text{despeje } x \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 **Resolver una ecuación que contenga exponentes racionales**

Resuelva la ecuación $x^{3/2} = x^{1/2}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} x^{3/2} &= x^{1/2} && \text{original} \\ x^{3/2} - x^{1/2} &= 0 && \text{reste } x^{1/2} \\ x^{1/2}(x - 1) &= 0 && \text{factorice } x^{1/2} \\ x^{1/2} = 0, \quad x - 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ x = 0, \qquad x &= 1 && \text{despeje } x \end{aligned}$$

■

En el ejemplo 3 hubiera sido incorrecto dividir ambos lados de la ecuación $x^{3/2} = x^{1/2}$ por $x^{1/2}$, obteniendo $x = 1$, porque la solución $x = 0$ se perdería. En general, *evite dividir ambos lados de una ecuación entre una expresión que contenga variables*; en cambio, siempre *factorice*.

Si una ecuación contiene radicales o exponentes fraccionarios, con frecuencia elevamos ambos lados a una potencia positiva. Las soluciones de la nueva ecuación siempre contienen las soluciones de la ecuación dada. Por ejemplo, las soluciones de

$$2x - 3 = \sqrt{x + 6}$$

son también soluciones de

$$(2x - 3)^2 = \left(\sqrt{x + 6}\right)^2.$$

*Elevar ambos lados de una ecuación a una potencia **impar** puede introducir soluciones imaginarias. Por ejemplo, elevar al cubo ambos lados de $x = 1$ nos da $x^3 = 1$, que es equivalente a $x^3 - 1 = 0$. Esta ecuación tiene tres soluciones, de las cuales dos son imaginarias (vea el ejemplo 7 de la sección 2.4).*

En algunos casos la nueva ecuación tiene *más* soluciones que la ecuación dada. Para ilustrar, si nos dan la ecuación $x = 3$ y elevamos al cuadrado ambos lados, obtenemos $x^2 = 9$. Note que la ecuación dada $x = 3$ tiene sólo una solución, 3, pero la nueva ecuación $x^2 = 9$ tiene dos soluciones, 3 y -3. Cualquier solución de la nueva ecuación que no sea una solución de la ecuación original es una solución extraña. En vista de que pueden presentarse soluciones extrañas, *es absolutamente esencial comprobar todas las soluciones obtenidas después de elevar ambos lados de una ecuación a una potencia par.* Estas comprobaciones no son necesarias si ambos lados se elevan a una potencia *impar*, porque en este caso las soluciones extrañas (números reales) no se introducen.

EJEMPLO 4 **Resolver una ecuación que contenga un radical**

Resuelva la ecuación $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$.

SOLUCIÓN

$\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$	original
$\left(\sqrt[3]{x^2 - 1}\right)^3 = 2^3$	eleve al cubo ambos lados
$x^2 - 1 = 8$	propiedad de $\sqrt[n]{\ }$
$x^2 = 9$	sume 1
$x = \pm 3$	saque la raíz cuadrada

Entonces, la ecuación dada tiene dos soluciones, 3 y -3. Excepto para detectar errores algebraicos, una prueba es innecesaria porque elevamos ambos lados a una potencia par. ■

En la última solución empleamos la frase *elevar al cubo ambos lados* de $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$. En general, para la ecuación $x^{m/n} = a$, donde x es un número real, elevamos ambos lados a la potencia n/m (el recíproco de m/n) para despejar x. Si m es impar, obtenemos $x = a^{n/m}$, pero si m es par, tenemos $x = \pm a^{n/m}$. Si n es par, pueden presentarse soluciones extrañas; por ejemplo, si $x^{3/2} = -8$, entonces $x = (-8)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-8}\right)^2 = (-2)^2 = 4$. No obstante, 4 no es una solución de $x^{3/2} = -8$ porque $4^{3/2} = 8$ no -8.

ILUSTRACIÓN **Resolviendo $x^{m/n} = a$, m impar, x real**

Ecuación	Solución
■ $x^{3/1} = 64$	$x = 64^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$
■ $x^{3/2} = 64$	$x = 64^{2/3} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$

ILUSTRACIÓN **Resolviendo $x^{m/n} = a$, m par, x real**

Ecuación	Solución
■ $x^{4/1} = 16$	$x = \pm 16^{1/4} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$
■ $x^{2/3} = 16$	$x = \pm 16^{3/2} = \pm\left(\sqrt{16}\right)^3 = \pm 4^3 = \pm 64$

En los siguientes dos ejemplos, antes de que elevemos ambos lados de la ecuación a una potencia, *aislamos un radical*; es decir, consideramos una ecuación equivalente en la que el radical aparece sólo en un lado.

EJEMPLO 5 **Resolver una ecuación que contiene un radical**

Resuelva la ecuación $3 + \sqrt{3x + 1} = x$.

SOLUCIÓN

$3 + \sqrt{3x+1} = x$	original
$\sqrt{3x+1} = x - 3$	aísle el radical
$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = (x-3)^2$	eleve al cuadrado ambos lados
$3x + 1 = x^2 - 6x + 9$	simplifique
$x^2 - 9x + 8 = 0$	reste $3x + 1$
$(x-1)(x-8) = 0$	factorice
$x - 1 = 0, \quad x - 8 = 0$	teorema del factor cero
$x = 1, \quad x = 8$	despeje x

Elevamos ambos lados a una potencia par, de modo que se requieren pruebas.

✓ **Prueba** $x = 1$ LI: $3 + \sqrt{3(1) + 1} = 3 + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$
LD: 1

Como $5 \neq 1$, $x = 1$ no es una solución.

✓ **Prueba** $x = 8$ LI: $3 + \sqrt{3(8) + 1} = 3 + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$
LD: 8

Como $8 = 8$ es un enunciado verdadero, $x = 8$ es una solución.
Por lo tanto, la ecuación dada tiene una solución, $x = 8$.

Para resolver una ecuación que contenga varios radicales, puede ser necesario elevar ambos lados a potencias dos veces o más, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 **Resolver una ecuación que contenga radicales**

Resuelva la ecuación $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 7} + 2 = 0$.

SOLUCIÓN

$\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} + 2 = 0$	original
$\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+7} - 2$	aísle $\sqrt{2x-3}$
$2x - 3 = (x+7) - 4\sqrt{x+7} + 4$	eleve al cuadrado ambos lados
$x - 14 = -4\sqrt{x+7}$	aísle el término radical
$x^2 - 28x + 196 = 16(x+7)$	eleve al cuadrado ambos lados
$x^2 - 28x + 196 = 16x + 112$	multiplique factores
$x^2 - 44x + 84 = 0$	reste $16x + 112$
$(x-42)(x-2) = 0$	factorice
$x - 42 = 0, \quad x - 2 = 0$	teorema del factor cero
$x = 42, \quad x = 2$	despeje x

Se requiere prueba, porque ambos lados se elevaron a una potencia par.

(continúa)

✓ **Prueba** $x = 42$ LI: $\sqrt{84 - 3} - \sqrt{42 + 7} + 2 = 9 - 7 + 2 = 4$
LD: 0

Como $4 \neq 0$, $x = 42$ no es una solución.

✓ **Prueba** $x = 2$ LI: $\sqrt{4 - 3} - \sqrt{2 + 7} + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$
LD: 0

Como $0 = 0$ es un enunciado verdadero, $x = 2$ es una solución.

Por tanto, la ecuación dada tiene una solución, $x = 2$. ■

Una ecuación es de **tipo cuadrático** si se puede escribir de la forma

$$au^2 + bu + c = 0,$$

donde $a \neq 0$ y u es una expresión con alguna variable. Si encontramos las soluciones en términos de u, entonces las soluciones de la ecuación dada se pueden obtener con referencia a la forma específica de u.

EJEMPLO 7 **Resolver una ecuación de tipo cuadrático**

Resuelva la ecuación $x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Como $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$, la forma de la ecuación sugiere que hagamos $u = x^{1/3}$, como en la segunda línea que sigue:

$$\begin{aligned}
x^{2/3} + x^{1/3} - 6 &= 0 && \text{original}\\
u^2 + u - 6 &= 0 && \text{sea } u = x^{1/3}\\
(u + 3)(u - 2) &= 0 && \text{factorice}\\
u + 3 = 0, \quad u - 2 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
u = -3, \quad u &= 2 && \text{despeje } u\\
x^{1/3} = -3, \quad x^{1/3} &= 2 && u = x^{1/3}\\
x = -27, \quad x &= 8 && \text{eleve al cubo ambos lados}
\end{aligned}$$

Una prueba es innecesaria porque no elevamos ambos lados a una potencia par. Por tanto, la ecuación dada tiene dos soluciones, -27 y 8.

Un método alternativo es factorizar el lado izquierdo de la ecuación dada como sigue:

$$x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = (x^{1/3} + 3)(x^{1/3} - 2)$$

Al igualar a cero cada factor, obtenemos las soluciones. ■

EJEMPLO 8 **Resolver una ecuación de tipo cuadrático**

Resuelva la ecuación $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Como $x^4 = (x^2)^2$, la forma de la ecuación sugiere que hagamos $u = x^2$, como en la segunda línea que sigue:

$$\begin{aligned}
x^4 - 3x^2 + 1 &= 0 && \text{original}\\
u^2 - 3u + 1 &= 0 && \text{sea } u = x^2\\
u &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} && \text{fórmula cuadrática}
\end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad u = x^2$$

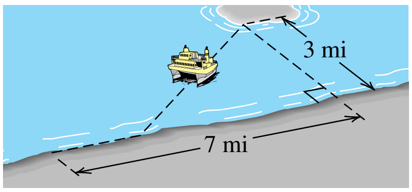
$$x = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} \qquad \text{saque la raíz cuadrada}$$

Entonces, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \quad \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Con el uso de una calculadora, obtenemos las aproximaciones ± 1.62 y ± 0.62. Una prueba es innecesaria porque no elevamos ambos lados de una ecuación a una potencia par. ■

FIGURA 1

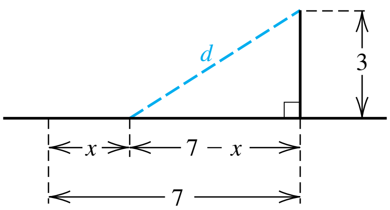


EJEMPLO 9 **Determinar la ruta de un transbordador (ferry)**

Un transbordador de pasajeros hace viajes de una ciudad a una comunidad isleña que está a 7 millas playa abajo desde la ciudad y a 3 millas en línea recta desde la orilla. Como se ve en la figura 1, el trasbordador navega a lo largo de la línea de la costa hasta algún punto y luego avanza directamente a la isla. Si el transbordador navega a 12 mi/h a lo largo de la línea de la costa y a 10 mi/h cuando sale a mar abierto, determine las rutas que tengan un tiempo de viaje de 45 minutos.

SOLUCIÓN Denotemos con x la distancia recorrida a lo largo de la línea de la costa. Esto nos lleva al dibujo de la figura 2, donde d es la distancia de un punto en la línea de la costa a la isla. Consulte el triángulo recto indicado:

FIGURA 2



$$\begin{aligned} d^2 &= (7-x)^2 + 3^2 && \text{teorema de Pitágoras} \\ &= 49 - 14x + x^2 + 9 && \text{eleve al cuadrado los términos} \\ &= x^2 - 14x + 58 && \text{simplifique} \end{aligned}$$

Sacando la raíz cuadrada de ambos lados y observando que $d > 0$, obtenemos

$$d = \sqrt{x^2 - 14x + 58}.$$

Usando distancia = (velocidad)(tiempo) o bien, lo que es equivalente, tiempo = (distancia)/(velocidad) tendremos la tabla siguiente.

	A lo largo de la costa	Alejándose de la costa
Distancia (mi)	x	$\sqrt{x^2 - 14x + 58}$
Velocidad (mi/h)	12	10
Tiempo (h)	$\frac{x}{12}$	$\frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10}$

El tiempo para el viaje completo es la suma de las dos expresiones de la última fila de la tabla. Como la rapidez es en mi/h, debemos, por consistencia, expresar este tiempo (45 minutos) como $\frac{3}{4}$ de hora. Entonces, tenemos lo siguiente:

(continúa)

$$\frac{x}{12} + \frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10} = \frac{3}{4} \qquad \text{tiempo total de viaje}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10} = \frac{3}{4} - \frac{x}{12} \qquad \text{reste } \frac{x}{12}$$

$$6\sqrt{x^2 - 14x + 58} = 45 - 5x \qquad \text{multiplique por el mcd, 60}$$

$$6\sqrt{x^2 - 14x + 58} = 5(9 - x) \qquad \text{factorice}$$

$$36(x^2 - 14x + 58) = 25(9 - x)^2 \qquad \text{eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$36x^2 - 504x + 2088 = 2025 - 450x + 25x^2 \qquad \text{multiplique términos}$$

$$11x^2 - 54x + 63 = 0 \qquad \text{simplifique}$$

$$(x - 3)(11x - 21) = 0 \qquad \text{factorice}$$

$$x - 3 = 0, \quad 11x - 21 = 0 \qquad \text{teorema del factor cero}$$

$$x = 3, \qquad x = \frac{21}{11} \qquad \text{despeje } x$$

Una prueba verifica que estos números son también soluciones de la ecuación original. Por tanto, hay dos posibles rutas con un tiempo de viaje de 45 minutos: el transbordador puede navegar a lo largo de la orilla ya sea 3 millas o $\frac{21}{11} \approx 1.9$ millas antes de avanzar a la isla. ■

2.5 Ejercicios

Ejer. 1–50: Resuelva la ecuación.

1 $|x + 4| = 11$

2 $|x - 7| = 3$

3 $|3x - 2| + 3 = 7$

4 $2|5x + 2| - 1 = 5$

5 $3|x + 1| - 5 = -11$

6 $|x - 3| + 6 = 6$

7 $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$

8 $3x^3 - 5x^2 - 12x + 20 = 0$

9 $4x^4 + 10x^3 = 6x^2 + 15x$

10 $15x^5 - 20x^4 = 6x^3 - 8x^2$

11 $y^{3/2} = 5y$

12 $y^{4/3} = -4y$

13 $\sqrt{7 - 5x} = 8$

14 $\sqrt{2x - 9} = \frac{1}{2}$

15 $4 + \sqrt[3]{1 - 5t} = 0$

16 $\sqrt[3]{6 - s^2} + 5 = 0$

17 $\sqrt[5]{2x^2 + 1} - 2 = 0$

18 $\sqrt[4]{6x^2 - 9} = x$

19 $\sqrt{7 - x} = x - 5$

20 $\sqrt{3 - x} - x = 3$

21 $3\sqrt{2x - 3} + 2\sqrt{7 - x} = 11$

22 $\sqrt{2x + 15} - 2 = \sqrt{6x + 1}$

23 $x = 4 + \sqrt{4x - 19}$

24 $x = 3 + \sqrt{5x - 9}$

25 $x - \sqrt{-7x - 24} = -2$

26 $x + \sqrt{5x + 19} = -1$

27 $\sqrt{7 - 2x} - \sqrt{5 + x} = \sqrt{4 + 3x}$

28 $4\sqrt{1 + 3x} + \sqrt{6x + 3} = \sqrt{-6x - 1}$

29 $\sqrt{11 + 8x} + 1 = \sqrt{9 + 4x}$

30 $2\sqrt{x} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{5 + x}$

31 $\sqrt{2\sqrt{x + 1}} = \sqrt{3x - 5}$

32 $\sqrt{5\sqrt{x}} = \sqrt{2x - 3}$

33 $\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

34 $\sqrt{x + 2} = \sqrt{x} - 2$

35 $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

36 $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$

37 $5y^4 - 7y^2 + 1.5 = 0$

38 $3y^4 - 5y^2 + 1.5 = 0$

39 $36x^{-4} - 13x^{-2} + 1 = 0$

40 $x^{-2} - 2x^{-1} - 35 = 0$

41 $3x^{2/3} + 4x^{1/3} - 4 = 0$

42 $2y^{1/3} - 3y^{1/6} + 1 = 0$

43 $6w + 7w^{1/2} - 20 = 0$

44 $8t + 6t^{1/2} - 35 = 0$

45 $2x^{-2/3} - 7x^{-1/3} - 15 = 0$

46 $6u^{-1/2} - 13u^{-1/4} + 6 = 0$

47 $\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 - \frac{2t}{t+1} - 8 = 0$

48 $\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 - \frac{2x}{x-2} - 15 = 0$

49 $\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[4]{x}$ (*Sugerencia:* eleve ambos lados al mínimo *común* múltiplo de 3 y 4.)

50 $\sqrt{x+3} = \sqrt[4]{2x+6}$

Ejer. 51–52: Encuentre las soluciones reales de la ecuación.

51 **(a)** $x^{5/3} = 32$ **(b)** $x^{4/3} = 16$

(c) $x^{2/3} = -64$ **(d)** $x^{3/4} = 125$

(e) $x^{3/2} = -27$

52 **(a)** $x^{3/5} = -27$ **(b)** $x^{2/3} = 25$

(c) $x^{4/3} = -49$ **(d)** $x^{3/2} = 64$

(e) $x^{3/4} = -8$

Ejer. 53–56: Despeje la variable especificada.

53 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ despeje l (periodo de un péndulo)

54 $d = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - C^2}$ despeje C (segmentos de círculos)

55 $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ despeje h (área superficial de un cono)

56 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ despeje C (circuitos de corriente alterna)

57 **Altura de escalera** La distancia recomendada d a la que una escalera debe colocarse de una pared vertical es 25% de su longitud L. Aproxime la altura h a la que se pueda llegar al relacionar h como un porcentaje de L.

EJERCICIO 57



58 **Experimentos nucleares** Los experimentos nucleares realizados en el océano vaporizan grandes cantidades de agua salada. La sal hierve y se convierte en vapor a 1738 K. Después de ser vaporizada por una fuerza de 10 megatones, la sal tarda al menos de 8 a 10 segundos para enfriarse lo suficiente para cristalizarse. La cantidad de sal A que se ha cristalizado t segundos después de un experimento se calcula a veces usando $A = k\sqrt{t/T}$, donde k y T son constantes. De esta ecuación despeje t.

59 **Potencia de un molino de viento** La potencia P (en watts) generada por un molino de viento que tiene una eficiencia E está dada por la fórmula $P = 0.31ED^2V^3$, donde D es el diámetro (en pies) de las aspas del molino de viento y V es la velocidad del viento (en ft/s). Aproxime la velocidad del viento necesaria para generar 10,000 watts si $E = 42\%$ y $D = 10$.

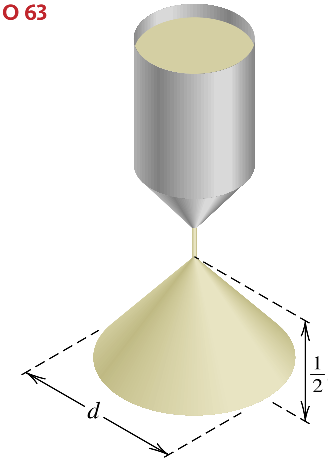
60 **Resistencia al arranque de clavos** La *resistencia al arranque* de un clavo indica su resistencia de retención en madera. Una fórmula que se usa para clavos comunes brillantes es $P = 15{,}700S^{5/2}RD$, donde P es la máxima resistencia al arranque (en libras), S es la gravedad específica de la madera con 12% de contenido de humedad, R es el radio del clavo (en pulgadas) y D es la profundidad (en pulgadas) que el clavo ha penetrado en la madera. Un clavo común 6d (6 centavos), brillante, de 2 pulgadas y diámetro de 0.113 pulgadas se introduce por completo en una pieza de abeto Douglas. Si se requiere una fuerza máxima de 380 libras para sacar el clavo, aproxime la gravedad específica del abeto Douglas.

61 **El efecto del precio sobre la demanda** La demanda de una mercancía por lo general depende de su precio. Si otros factores no afectan la demanda, entonces la cantidad Q comprada a un precio P (en centavos) está dada por $Q = kP^{-c}$, donde k y c son constantes positivas. Si $k = 10^5$ y $c = \frac{1}{2}$, encuentre el precio que resultará en una compra de 5000 artículos.

62 La isla de calor urbano Las zonas urbanas tienen promedios más altos de temperaturas del aire que las rurales, como resultado de la presencia de edificios, asfalto y concreto. Este fenómeno se ha conocido como *isla de calor urbano*. La diferencia de temperatura T (en °C) entre zonas urbanas y rurales cerca de Montreal, con una población P entre 1000 y 1,000,000, se puede describir con la fórmula $T = 0.25P^{1/4}/\sqrt{v}$, donde v es el promedio de velocidad del viento (en mi/h) y $v \geq 1$. Si $T = 3$ y $v = 5$, encuentre P.

63 Dimensiones de una pila de arena Cuando se fuga arena de cierto recipiente, forma una pila que tiene la forma de un cono circular recto cuya altitud es siempre la mitad del diámetro d de la base. ¿Cuál es d en el instante en que se han fugado 144 cm^3 de arena ?

EJERCICIO 63



64 Inflar un globo meteorológico El volumen de un globo meteorológico esférico es de $10\frac{2}{3}$ ft^3. Para levantar un transmisor y equipo meteorológico, el globo se infla con otros $25\frac{1}{3}$ ft^3 más de helio. ¿Cuánto aumenta su diámetro?

65 La regla del cubo en ciencias políticas La regla cúbica en ciencias políticas es una fórmula empírica que, se dice, pronostica el porcentaje y de asientos en la cámara de representantes de Estados Unidos que serán ganados por un partido político, a partir del voto popular para el candidato presidencial del partido. Si x denota el porcentaje del voto popular para el candidato presidencial del partido, entonces la regla del cubo dice que

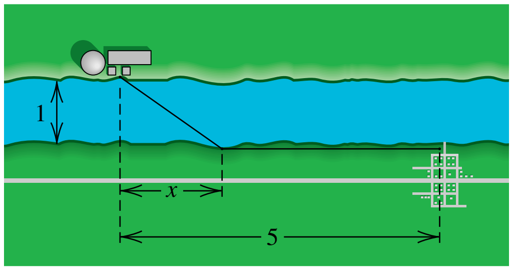
$$y = \frac{x^3}{x^3 + (1 - x)^3}.$$

¿Qué porcentaje del voto popular necesitará el candidato presidencial para que su partido gane 60% de los asientos de la cámara?

66 Dimensiones de una taza cónica Una taza cónica de papel ha de tener una altura de 3 pulgadas. Encuentre el radio del cono que resultará en un área superficial de 6π pulg^2.

67 Instalación de una línea de energía eléctrica Se va a instalar una línea de energía eléctrica que cruce un río de 1 milla de ancho a una ciudad que está 5 millas corriente abajo (vea la figura). Cuesta \$7500 por milla tender un cable bajo el agua y \$6000 por milla tenderlo en tierra. Determine cómo debe instalarse el cable si se han asignado \$35,000 para este proyecto.

EJERCICIO 67



68 Cálculo de crecimiento humano Adolphe Quetelet (1796-1874), director del Observatorio de Bruselas de 1832 a 1874, fue el primero en tratar de ajustar una expresión matemática a datos sobre el crecimiento humano. Si h denota la estatura en metros y t es la edad en años, la fórmula de Quetelet para hombres en Bruselas se puede expresar como

$$h + \frac{h}{h_M - h} = at + \frac{h_0 + t}{1 + \frac{4}{3}t},$$

con $h_0 = 0.5$, la estatura al nacimiento; $h_M = 1.684$, la estatura final de un hombre adulto; y $a = 0.545$.

(a) Encuentre la estatura esperada de un niño de 12 años de edad.

(b) ¿A qué edad se alcanza 50% de la estatura adulta?

69 Relaciones luz diurna-latitud La tabla siguiente da los números de minutos de luz diurna que ocurren en diversas latitudes en el hemisferio norte en los solsticios de verano e invierno.

Latitud	Verano	Otoño
0°	720	720
10°	755	685
20°	792	648
30°	836	604
40°	892	548
50°	978	462
60°	1107	333

(a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones predice con más precisión la duración del día en el solsticio de verano en la latitud L?

(1) $D_1 = 6.096L + 685.7$

(2) $D_2 = 0.00178L^3 - 0.072L^2 + 4.37L + 719$

(b) Aproxime la duración de la luz diurna a 35° de latitud en el solsticio de verano.

70 **Volumen de una caja** A partir de una pieza rectangular metálica, que tiene dimensiones de 24×36 pulgadas, se ha de hacer una caja abierta al cortar un cuadrado idéntico de área x^2 de cada esquina y doblar los lados hacia arriba.

(a) Determine una ecuación para hallar el volumen V de la caja en términos de x.

(b) Use una tabla de valores para aproximar el valor de x con tolerancia de ± 0.1 pulg que producirá un volumen máximo.

71 **Construcción de una caja** Una caja de cartón sin tapa y fondo cuadrado ha de tener un volumen de 25 ft^3. Use una tabla de valores para determinar las dimensiones de la caja al 0.1 pie más cercano que minimizará la cantidad de cartón empleado para construir la caja.

2.6 Desigualdades

Una **desigualdad** es un enunciado de que dos cantidades o expresiones no son iguales. Puede ser el caso que una cantidad sea menor ($<$), menor o igual ($\leq$) o mayor o igual ($\geq$) a otra cantidad. Considere la desigualdad

$$2x + 3 > 11,$$

donde x es una variable. Como se ilustra en la tabla siguiente, ciertos números dan enunciados verdaderos cuando se sustituyen por x y otros dan enunciados falsos.

x	$2x + 3 > 11$	Conclusion
3	$9 > 11$	Enunciado falso
4	$11 > 11$	Enunciado falso
5	$13 > 11$	Enunciado verdadero
6	$15 > 11$	Enunciado verdadero

Si se obtiene un enunciado verdadero cuando un número b es sustituido por x, entonces b es una **solución** de la desigualdad. Así, $x = 5$ es una solución de $2x + 3 > 11$ porque $13 > 11$ es verdadero, pero $x = 3$ no es una solución porque $9 > 11$ es falso. **Resolver** una desigualdad significa hallar *todas* las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

Casi todas las desigualdades tienen un número infinito de soluciones. Para ilustrar, las soluciones de la desigualdad

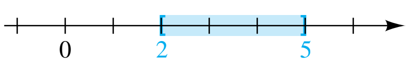
$$2 < x < 5$$

están formadas por *todo* número real x entre 2 y 5. A este conjunto de números se le denomina **intervalo abierto** y se denota por $(2, 5)$. La **gráfica** del intervalo abierto $(2, 5)$ es el conjunto de todos los puntos de una recta coordenada que se encuentre, pero no los incluya, entre los puntos correspondientes a $x = 2$ y $x = 5$. La gráfica está representada al sombrear una parte apropiada del eje, como se ve en la figura 1. A este proceso lo conocemos como **trazar la gráfica** del intervalo. Los números 2 y 5 se denominan **puntos extremos** del intervalo $(2, 5)$. Los paréntesis en la notación $(2, 5)$ y en la figura 1 se usan para indicar que los puntos extremos del intervalo no están incluidos.

FIGURA 1



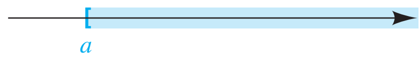
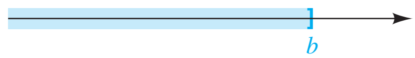
FIGURA 2



Si se desea incluir un punto extremo, se usa un corchete en lugar de paréntesis; por ejemplo, las soluciones de la desigualdad $2 \leq x \leq 5$ se denotan por $[2, 5]$ y éste se conoce como **intervalo cerrado.** La gráfica $[2, 5]$ está trazada en la figura 2, donde los corchetes indican que los puntos extremos están incluidos. También consideramos **intervalos semiabiertos** $[a, b)$ y $(a, b]$ así como **intervalos infinitos,** como se describe en la tabla siguiente.

El símbolo ∞ (lea *infinito*) que se usa para intervalos infinitos es simplemente una notación y *no representa* un número real.

Intervalos

Notación	Desigualdad	Gráfica
(1) (a, b)	$a < x < b$	
(2) $[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
(3) $[a, b)$	$a \leq x < b$	
(4) $(a, b]$	$a < x \leq b$	
(5) (a, ∞)	$x > a$	
(6) $[a, \infty)$	$x \geq a$	
(7) $(-\infty, b)$	$x < b$	
(8) $(-\infty, b]$	$x \leq b$	
(9) $(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$	

Los métodos para resolver desigualdades en x son semejantes a los que se emplean para resolver ecuaciones. En particular, con frecuencia usamos propiedades de las desigualdades para sustituir una desigualdad dada con una lista de desigualdades equivalentes, terminando con una desigualdad de la que fácilmente se obtienen soluciones. Las propiedades de la tabla siguiente se pueden demostrar para números reales a, b, c y d.

Propiedades de las desigualdades

Propiedad	Ilustración
(1) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$	$2 < 5$ y $5 < 9$, entonces $2 < 9$.
(2) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.	$2 < 7$, entonces $2 + 3 < 7 + 3$ y $2 - 3 < 7 - 3$.
(3) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	$2 < 5$ y $3 > 0$, entonces $2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$ y $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$.
(4) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	$2 < 5$ y $-3 < 0$, entonces $2(-3) > 5(-3)$ y $\frac{2}{-3} > \frac{5}{-3}$.

Invierta la desigualdad cuando multiplique o divida por un número negativo.

Es importante recordar que multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por un número real negativo *invierte* el signo de la desigualdad (vea la propiedad 4). Las propiedades semejantes en las anteriores líneas son verdaderas para otras desigualdades y para $\leq$ y $\geq$. Por tanto, si $a > b$, entonces $a + c > b + c$; si $a \geq b$ y $c < 0$, entonces $ac \leq bc$; y así sucesivamente.

Si x representa un número real, entonces, por la propiedad 2, sumar o restar la misma expresión que contenga x en ambos lados de una desigualdad dará una desigualdad equivalente. Por la propiedad 3, podemos multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por una expresión que contenga x si estamos seguros de que la expresión es positiva para todos los valores de x en consideración. Como ilustración, la multiplicación o división entre $x^4 + 3x^2 + 5$ sería permisible puesto que esta expresión es siempre positiva. Si multiplicamos o dividimos ambos lados de una desigualdad por una expresión que siempre sea negativa, como $-7 - x^2$, entonces, por la propiedad 4, la desigualdad se invierte.

En los ejemplos describiremos soluciones de desigualdades por medio de intervalos y también los representaremos gráficamente.

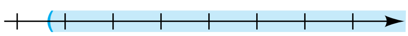
EJEMPLO 1 **Resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $-3x + 4 < 11$.

SOLUCIÓN

$$-3x + 4 < 11 \quad \text{original}$$
$$(-3x + 4) - 4 < 11 - 4 \quad \text{reste 4}$$
$$-3x < 7 \quad \text{simplifique}$$
$$\frac{-3x}{-3} > \frac{7}{-3} \quad \text{divida entre } -3\text{; invierta el signo de desigualdad}$$
$$x > -\tfrac{7}{3} \quad \text{simplifique}$$

FIGURA 3



Entonces, las soluciones de $-3x + 4 < 11$ están formadas por todos los números reales x tales que $x > -\frac{7}{3}$. Este es el intervalo $\left(-\frac{7}{3}, \infty\right)$ trazado en la figura 3. ■

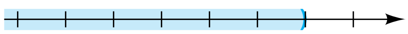
EJEMPLO 2 **Resolver de una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $4x - 3 < 2x + 5$.

SOLUCIÓN

$$4x - 3 < 2x + 5 \quad \text{original}$$
$$(4x - 3) + 3 < (2x + 5) + 3 \quad \text{sume 3}$$
$$4x < 2x + 8 \quad \text{simplifique}$$
$$4x - 2x < (2x + 8) - 2x \quad \text{reste } 2x$$
$$2x < 8 \quad \text{simplifique}$$
$$\frac{2x}{2} < \frac{8}{2} \quad \text{divida entre 2}$$
$$x < 4 \quad \text{simplifique}$$

FIGURA 4



Por lo tanto, las soluciones de la desigualdad dada están formadas por todos los números reales x tales que $x < 4$. Éste es el intervalo $(-\infty, 4)$ que se ve en la figura 4. ■

EJEMPLO 3 **Resolución de una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $-6 < 2x - 4 < 2$.

(continúa)

SOLUCIÓN Un número real x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si es una solución de *las dos* desigualdades

$$-6 < 2x - 4 \qquad \text{y} \qquad 2x - 4 < 2.$$

Esta primera desigualdad se resuelve como sigue:

$$\begin{aligned} -6 &< 2x - 4 && \text{original} \\ -6 + 4 &< (2x - 4) + 4 && \text{sume 4} \\ -2 &< 2x && \text{simplifique} \\ \frac{-2}{2} &< \frac{2x}{2} && \text{divida entre 2} \\ -1 &< x && \text{simplifique} \\ x &> -1 && \text{desigualdad equivalente} \end{aligned}$$

La segunda desigualdad se resuelve entonces:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &< 2 && \text{original} \\ 2x &< 6 && \text{sume 4} \\ x &< 3 && \text{divida entre 2} \end{aligned}$$

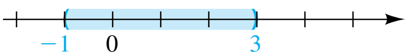
Así, x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si

$$x > -1 \qquad \text{y} \qquad x < 3;$$

es decir,

$$-1 < x < 3.$$

FIGURA 5



En consecuencia, las soluciones son todos los números del intervalo abierto $(-1, 3)$ trazado en la figura 5.

Un método alternativo (y más corto) es resolver ambas desigualdades simultáneamente, es decir, resolver la desigualdad continua:

$$\begin{aligned} -6 < 2x &- 4 < 2 && \text{original} \\ -6 + 4 < 2x &\quad < 2 + 4 && \text{sume 4} \\ -2 < 2x &\quad < 6 && \text{simplifique} \\ -1 < x &\quad < 3 && \text{divida entre 2} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 **Resolución de una desigualdad continua**

Resuelva la desigualdad continua $-5 \leq \dfrac{4 - 3x}{2} < 1$.

SOLUCIÓN Un número x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si

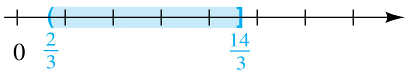
$$-5 \leq \frac{4 - 3x}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{4 - 3x}{2} < 1.$$

Podemos trabajar con cada desigualdad por separado o resolver ambas desigualdades simultáneamente, como sigue (recuerde que nuestra meta es aislar x):

$$\begin{aligned} -5 &\leq \frac{4 - 3x}{2} < 1 && \text{original} \\ -10 &\leq 4 - 3x < 2 && \text{multiplique por 2} \\ -10 - 4 &\leq \quad -3x < 2 - 4 && \text{reste 4} \\ -14 &\leq \quad -3x < -2 && \text{simplifique} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-14}{-3} \geq \quad \frac{-3x}{-3} &> \frac{-2}{-3} && \text{divida entre } -3\text{; invierta los signos de desigualdad} \\ \tfrac{14}{3} \geq \quad x &> \tfrac{2}{3} && \text{simplifique} \\ \tfrac{2}{3} < \quad x &\leq \tfrac{14}{3} && \text{desigualdad equivalente} \end{aligned}$$

FIGURA 6

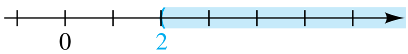


Así, las soluciones de la desigualdad son todos los números del intervalo semiabierto $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$ que se ve en la figura 6. ■

EJEMPLO 5 **Resolución de una desigualdad racional**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{1}{x-2} > 0$.

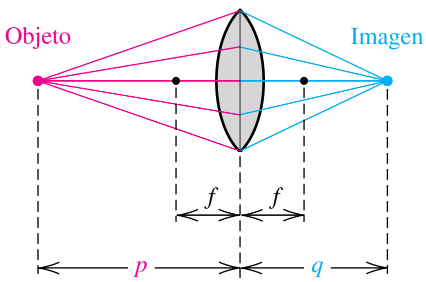
FIGURA 7



SOLUCIÓN Como el numerador es positivo, la fracción es positiva si y sólo si el denominador, $x - 2$, es también positivo. Así, $x - 2 > 0$ o, lo que es equivalente, $x > 2$, y las soluciones son todos los números del intervalo infinito $(2, \infty)$ que se ve en la figura 7. ■

EJEMPLO 6 **Uso de la fórmula de una lente**

FIGURA 8



Como se ilustra en la figura 8, si una lente convexa tiene longitud focal de f centímetros y si un objeto se coloca a una distancia de p centímetros de la lente con $p > f$, entonces la distancia q desde la lente hasta la imagen está relacionada con p y f mediante la fórmula

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Si $f = 5$ cm, ¿qué tan cerca debe estar el objeto de la lente para que la imagen esté a más de 12 centímetros de la lente?

SOLUCIÓN Como $f = 5$, la fórmula dada puede escribirse como

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{5}.$$

Deseamos determinar los valores de q tales que $q > 12$. Primero despejamos q de la ecuación:

$$\begin{aligned} 5q + 5p &= pq && \text{multiplique por el mcd, } 5pq \\ q(5 - p) &= -5p && \text{reúna los términos } q \text{ en un lado y factorice} \\ q &= -\frac{5p}{5-p} = \frac{5p}{p-5} && \text{divida entre } 5 - p \end{aligned}$$

Para resolver la desigualdad $q > 12$, proseguimos como sigue:

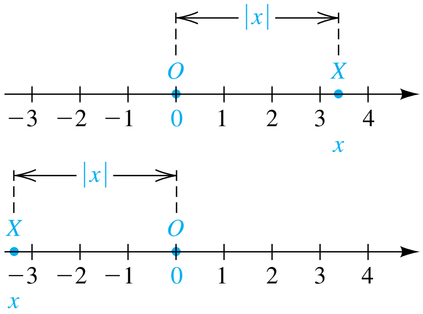
$$\begin{aligned} \frac{5p}{p-5} &> 12 && q = \frac{5p}{p-5} \\ 5p &> 12(p-5) && \text{permisible, porque } p > f \text{ implica que } p - 5 > 0 \\ -7p &> -60 && \text{multiplique factores y reúna los términos } p \text{ en un lado} \\ p &< \tfrac{60}{7} && \text{divida entre } -7\text{; invierta la desigualdad} \end{aligned}$$

(continúa)

Combinando la última desigualdad con el hecho de que p es mayor que 5, llegamos a la solución

$$5 < p < \tfrac{60}{7}. \qquad \blacksquare$$

FIGURA 9

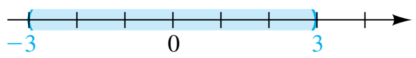


Si un punto X en una recta coordenada tiene coordenada x, como se ve en la figura 9, entonces X está a la derecha del origen O si $x > 0$ y a la izquierda de O si $x < 0$. De la sección 1.1, la distancia $d(O, X)$ entre O y X es el número real *no negativo* dado por

$$d(O, X) = |x - 0| = |x|.$$

Se deduce que las soluciones de una desigualdad tal como $|x| < 3$ consisten de las coordenadas de todos los puntos cuya distancia desde O es menor que 3. Este es el intervalo abierto $(-3, 3)$ que se ve en la figura 10. Así,

FIGURA 10

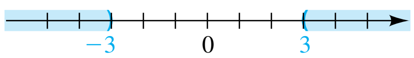


$$|x| < 3 \quad \text{es equivalente a} \quad -3 < x < 3.$$

Del mismo modo, para $|x| > 3$, la distancia entre O y un punto con coordenada x es mayor que 3; esto es,

$$|x| > 3 \quad \text{es equivalente a} \quad x < -3 \text{ o } x > 3.$$

FIGURA 11



La gráfica de las soluciones para $|x| > 3$ está en la figura 11. Con frecuencia usamos el **símbolo de unión** $\cup$ y escribimos

$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

para denotar todos los números reales que están ya sea en $(-\infty, -3)$ o $(3, \infty)$.

La notación

$$(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

representa el conjunto de todos los números reales excepto 2.

El **símbolo de intersección** $\cap$ se usa para denotar los elementos que son *comunes* a dos conjuntos. Por ejemplo,

$$(-\infty, 3) \cap (-3, \infty) = (-3, 3),$$

Como la intersección de $(-\infty, 3)$ y $(-3, \infty)$ está formada por todos los números reales x tales que $x < 3$ *y además* $x > -3$.

La exposición precedente puede generalizarse para obtener las siguientes propiedades de los valores absolutos.

Propiedades de los valores absolutos ($b > 0$)

(1) $|a| < b$ es equivalente a $-b < a < b$.

(2) $|a| > b$ es equivalente a $a < -b$ o $a > b$.

En el siguiente ejemplo usamos la propiedad 1 con $a = x - 3$ y $b = 0.5$.

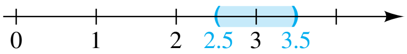
EJEMPLO 7 **Resolución de una desigualdad que contiene un valor absoluto**

Resuelva la desigualdad $|x - 3| < 0.5$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} |x - 3| &< 0.5 && \text{original} \\ -0.5 < x - 3 &< 0.5 && \text{propiedad 1} \\ -0.5 + 3 < (x - 3) + 3 &< 0.5 + 3 && \text{aísle } x \text{ al sumar 3} \\ 2.5 < x &< 3.5 && \text{simplifique} \end{aligned}$$

FIGURA 12



De este modo, las soluciones son los números reales del intervalo abierto (2.5, 3.5). La gráfica se traza en la figura 12. ■

En el siguiente ejemplo usamos la propiedad 2 con $a = 2x + 3$ y $b = 9$.

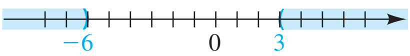
EJEMPLO 8 **Resolución de una desigualdad que contiene un valor absoluto**

Resuelva la desigualdad $|2x + 3| > 9$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} & & |2x + 3| &> 9 && \text{original} \\ 2x + 3 &< -9 \quad \text{o} & 2x + 3 &> 9 && \text{propiedad 2} \\ 2x &< -12 \quad \text{o} & 2x &> 6 && \text{reste 3} \\ x &< -6 \quad \text{o} & x &> 3 && \text{divida entre 2} \end{aligned}$$

FIGURA 13



En consecuencia, las soluciones de la desigualdad $|2x + 3| > 9$ están formadas por los números en $(-\infty, -6) \cup (3, \infty)$. La gráfica se traza en la figura 13. ■

La ley de tricotomía de la sección 1.1 indica que para cualesquiera números reales a y b exactamente uno de los siguientes es verdadero:

$$a > b, \qquad a < b \qquad \text{o} \qquad a = b$$

Así, después de resolver $|2x + 3| > 9$ en el ejemplo 8, fácilmente obtenemos las soluciones para $|2x + 3| < 9$ y $|2x + 3| = 9$; es decir, $(-6, 3)$ y $\{-6, 3\}$, respectivamente. Note que la unión de estos tres conjuntos de soluciones es necesariamente el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Cuando usemos la notación $a < x < b$, debemos tener $a < b$. De este modo, *es incorrecto escribir las soluciones* $x < -6$ *o* $x > 3$ (en el ejemplo 8) *como* $3 < x < -6$. Otro error de notación de desigualdad es escribir $a < x > b$, porque cuando se usan varios símbolos de desigualdad en una expresión, *deben apuntar en la misma dirección.*

2.6 Ejercicios

1 Dados $-7 < -3$, determine la desigualdad obtenida si

(a) se suma 5 a ambos lados

(b) se resta 2 de ambos lados

(c) ambos lados se multiplican por $\frac{1}{3}$

(d) ambos lados se multiplican por $-\frac{1}{3}$

2 Dados $4 > -5$, determine la desigualdad obtenida si

(a) se suma 5 a ambos lados

(b) se resta -3 de ambos lados

(c) ambos lados se dividen entre 6

(d) ambos lados se dividen entre -6

Ejer. 3–12: Expprese la desigualdad como intervalo y trace su gráfica.

3 $x < -2$

4 $x \leq 5$

5 $x \geq 4$

6 $x > -3$

7 $-2 < x \leq 4$

8 $-3 \leq x < 5$

9 $3 \leq x \leq 7$

10 $-3 < x < -1$

11 $5 > x \geq -2$

12 $-3 \geq x > -5$

Ejer. 13–20: Exprese el intervalo como una desigualdad en la variable *x*.

13 $(-5, 4]$

14 $[0, 4)$

15 $[-8, -1]$

16 $(3, 7)$

17 $[4, \infty)$

18 $(-6, \infty)$

19 $(-\infty, -7)$

20 $(-\infty, 2]$

Ejer. 21–74: Resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en términos de intervalos siempre que sea posible.

21 $3x - 2 > 12$

22 $2x + 5 \leq 8$

23 $-2 - 3x \geq 2$

24 $3 - 5x < 11$

25 $2x + 5 < 3x - 7$

26 $x - 6 > 5x + 3$

27 $\frac{1}{4}x + 7 \leq \frac{1}{3}x - 2$

28 $9 + \frac{1}{3}x \geq 4 - \frac{1}{2}x$

29 $-3 < 2x - 5 < 7$

30 $4 \geq 3x + 5 > -1$

31 $3 \leq \dfrac{2x - 9}{5} < 7$

32 $-2 < \dfrac{4x + 1}{3} \leq 0$

33 $4 > \dfrac{2 - 3x}{7} \geq -2$

34 $5 \geq \dfrac{6 - 5x}{3} > 2$

35 $0 \leq 4 - \frac{1}{3}x < 2$

36 $-2 < 3 + \frac{1}{4}x \leq 5$

37 $(2x - 3)(4x + 5) \leq (8x + 1)(x - 7)$

38 $(x - 3)(x + 3) \geq (x + 5)^2$

39 $(x - 4)^2 > x(x + 12)$

40 $2x(6x + 5) < (3x - 2)(4x + 1)$

41 $\dfrac{4}{3x + 2} \geq 0$

42 $\dfrac{3}{2x + 5} \leq 0$

43 $\dfrac{-7}{4 - 3x} > 0$

44 $\dfrac{-3}{2 - x} < 0$

45 $\dfrac{5}{(1 - x)^2} > 0$

46 $\dfrac{3}{x^2 + 4} < 0$

47 $|x| < 8$

48 $|x| \leq 7$

49 $|x| \geq 5$

50 $|-x| > 6$

51 $|x + 3| < 0.01$

52 $|x - 4| \leq 0.03$

53 $|x + 2| + 0.1 \geq 0.2$

54 $|x - 3| - 0.3 > 0.1$

55 $|2x + 5| < 4$

56 $|3x - 7| \geq 5$

57 $-\frac{1}{3}|6 - 5x| + 2 \geq 1$

58 $2|-11 - 7x| - 2 > 10$

59 $|7x + 2| > -2$

60 $|6x - 5| \leq -2$

61 $|3x - 9| > 0$

62 $|5x + 2| \leq 0$

63 $|2x - 5| < -1$

64 $|4x + 7| \leq 0$

65 $|2x - 11| \geq -3$

66 $|x - 5| > 0$

67 $\left|\dfrac{2 - 3x}{5}\right| \geq 2$

68 $\left|\dfrac{2x + 5}{3}\right| < 1$

69 $\dfrac{3}{|5 - 2x|} < 2$

70 $\dfrac{2}{|2x + 3|} \geq 5$

71 $-2 < |x| < 4$

72 $1 < |x| < 5$

73 $1 < |x - 2| < 4$

74 $2 < |2x - 1| < 3$

Ejer. 75–76: Resuelva el inciso (a) y use esa respuesta para determinar las respuestas a los incisos (b) y (c).

75 (a) $|x + 5| = 3$ (b) $|x + 5| < 3$

(c) $|x + 5| > 3$

76 (a) $|x - 4| < 3$ (b) $|x - 4| = 3$

(c) $|x - 4| > 3$

Ejer. 77–80: Exprese el enunciado en términos de una desigualdad que contenga un valor absoluto.

77 El peso w de un luchador debe ser no más de 2 libras más de 141 libras.

78 El radio r de un cojinete debe estar a no más de 0.01 centímetros respecto de 1 centímetro.

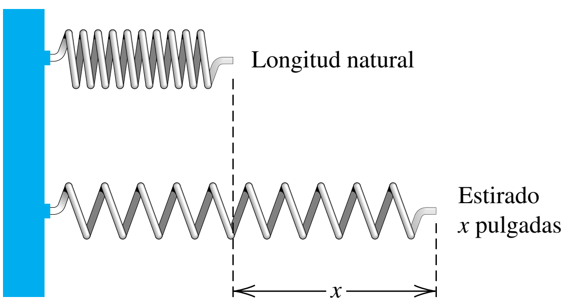
79 La diferencia de dos temperaturas T_1 y T_2 en una mezcla química debe estar entre 5°C y 10°C.

80 El tiempo de llegada t del tren B debe ser al menos 5 minutos diferente de las 4:00 p.m., el tiempo de llegada del tren A.

81 **Escalas de temperatura** Las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius están relacionadas por la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. ¿Qué valores de F corresponden a los valores de C tales que $30 \leq C \leq 40$?

82 **Ley de Hooke** De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza F (en libras) necesaria para estirar cierto resorte x pulgadas más de su longitud natural está dada por $F = (4.5)x$ (vea la figura). Si $10 \leq F \leq 18$, ¿cuáles son los valores correspondientes para x?

EJERCICIO 82



83 **Ley de Ohm** La ley de Ohm en teoría eléctrica expresa que si R denota la resistencia de un objeto (en ohms), V la diferencia de potencial entre terminales del objeto (en volts) e I es la corriente que circula por él (en amperes), entonces $R = V/I$. Si el voltaje es 110, ¿qué valores de la resistencia resultarán en una corriente que no pase de 10 amperes?

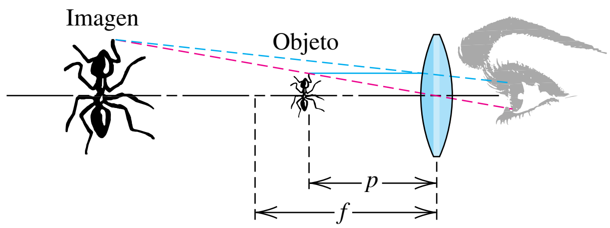
84 **Resistencia eléctrica** Si dos resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo en un circuito eléctrico, la resistencia neta R está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Si $R_1 = 10$ ohms, ¿qué valores de R_2 resultarán en una resistencia neta de menos de 5 ohms?

85 **Amplificación lineal** En la figura se muestra una lente de aumento simple que consiste en una lente convexa. El objeto por amplificarse está colocado de modo que la distancia p desde la lente es menor que la longitud focal f. La amplificación lineal M es la razón entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto. Se demuestra en física que $M = f/(f - p)$. Si $f = 6$ cm, ¿a qué distancia debe colocarse el objeto desde la lente para que su imagen aparezca al menos tres veces mayor? (Compare con el ejemplo 6.)

EJERCICIO 85



86 **Concentración de medicamento** Para tratar la arritmia (pulsación irregular del corazón), por una vena se introduce un medicamento en el torrente sanguíneo. Suponga que la concentración c del medicamento después de t horas está dada por $c = 3.5t/(t + 1)$ mg/L. Si el nivel terapéutico mínimo es 1.5 mg/L, determine cuándo se rebasa este nivel.

87 **Gastos en un negocio** Una empresa constructora está tratando de decidir cuál de dos modelos de grúa comprar. El modelo A cuesta \$100,000 y requiere \$8000 por año para su mantenimiento. El modelo B tiene un costo inicial de \$80,000 y su mantenimiento cuesta \$11,000 por año. ¿Durante cuántos años debe usarse el modelo A antes de que sea más económico que B?

88 Compra de un auto Un consumidor está tratando de decidir si comprar el auto A o el B. El auto A cuesta \$20,000 y tiene un rendimiento de combustible de 30 millas por galón y el seguro cuesta \$1000 por año. El auto B cuesta \$24,000 y tiene un rendimiento de 50 millas por galón, y el seguro cuesta \$1200 por año. Suponga que el consumidor recorre 15,000 millas por año y que el precio de la gasolina permanece constante en \$3 por galón. Con base sólo en estos datos, determine cuánto tiempo tomará para que el costo total del auto B sea menor que el del auto A.

89 Estatura decreciente La estatura de una persona típicamente disminuirá en 0.024 pulgadas por año después de los 30 años.

(a) Si una mujer medía 5 pies 9 pulgadas cuando tenía 30 años, prediga su estatura a la edad de 70 años.

(b) Un hombre de 50 años mide 5 pies 6 pulgadas. Determine una desigualdad para el intervalo de sus estaturas (en pulgadas) que este hombre tendrá entre las edades de 30 y 70.

2.7 Más sobre desigualdades

Para resolver una desigualdad que contenga polinomios de grado mayor que 1, expresaremos cada polinomio como un producto de factores lineales $ax + b$ y/o factores cuadráticos irreducibles $ax^2 + bx + c$. Si cualquiera de estos factores no es cero en un intervalo, entonces es positivo o negativo en todo el intervalo. En consecuencia, si escogemos cualquier k en el intervalo y si el factor es positivo (o negativo) para $x = k$, entonces es positivo (o negativo) en todo el intervalo. El valor del factor en $x = k$ se denomina **valor de prueba** del factor en el número de prueba k. Este concepto se exhibe en el ejemplo siguiente.

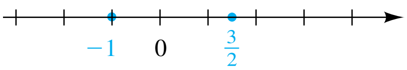
EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $2x^2 - x < 3$.

SOLUCIÓN Para usar valores de prueba, *es esencial tener* 0 *en un lado del signo de desigualdad.* Así, procedemos como sigue:

$$2x^2 - x < 3 \quad \text{original}$$
$$2x^2 - x - 3 < 0 \quad \text{iguale a 0 un lado}$$
$$(x + 1)(2x - 3) < 0 \quad \text{factorice}$$

FIGURA 1



Los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son cero en -1 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. Los puntos correspondientes en una recta coordenada (vea la figura 1) determinan los intervalos que no se intersectan.

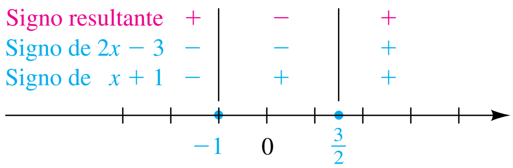
$$(-\infty, -1), \quad \left(-1, \tfrac{3}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\tfrac{3}{2}, \infty\right).$$

Podemos hallar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ en cada intervalo si usamos un valor de prueba tomado de cada intervalo. Para ilustrar, si escogemos $k = -10$ en $(-\infty,-1)$, los valores de $x + 1$ y $2x - 3$ son negativos, y por lo tanto son negativos en todo $(-\infty,-1)$. Un procedimiento similar para los restantes dos intervalos nos da la siguiente *tabla de signos*, donde el término *signo resultante* de la última fila se refiere al signo obtenido al aplicar las leyes de los signos al producto de los factores. Note que el signo resultante es positivo o negativo según si el número de signos negativos de factores es par o impar, respectivamente.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
Signo de $x + 1$	$-$	$+$	$+$
Signo de $2x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo resultante	$+$	$-$	$+$

A veces es conveniente representar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ usando una recta coordenada y un *diagrama de signos,* del tipo que se ilustra en la figura 2. Las líneas verticales indican dónde son cero los factores y los signos de factores se muestran arriba de la recta coordenada. Los signos resultantes se indican en rojo.

FIGURA 2



Las soluciones de $(x + 1)(2x - 3) < 0$ son los valores de x para los cuales el producto de los factores es *negativo*; es decir, donde el signo resultante es negativo. Esto corresponde al intervalo abierto $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$. ■

En la página 75 estudiamos el teorema del factor cero, que hablaba de *igualdades.* Es un error común extender este teorema a *desigualdades.* La siguiente advertencia muestra esta extensión incorrecta aplicada a la desigualdad del ejemplo 1.

Advertencia

$(x + 1)(2x - 3) < 0$ ***no es*** equivalente a $x + 1 < 0$ o $2x - 3 < 0$

En futuros ejemplos usaremos ya sea una tabla de signos o un diagrama de signos, pero no ambos. Cuando trabaje con ejercicios, el lector debe escoger el método de solución con el que se sienta más cómodo.

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad cuadrática

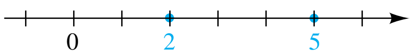
Resuelva la desigualdad $-3x^2 < -21x + 30$.

SOLUCIÓN

$$-3x^2 < -21x + 30 \quad \text{original}$$
$$-3x^2 + 21x - 30 < 0 \quad \text{iguale a 0 un lado}$$
$$x^2 - 7x + 10 > 0 \quad \text{divida entre el factor común } -3\text{; invierta la desigualdad}$$
$$(x - 2)(x - 5) > 0 \quad \text{factorice}$$

Los factores son cero en 2 y 5. Los puntos correspondientes en una recta coordenada (vea la figura 3) determinan los intervalos que no se cruzan.

FIGURA 3



$$(-\infty, 2), \quad (2, 5) \quad \text{y} \quad (5, \infty).$$

Al igual que en el ejemplo 1, podemos usar valores de prueba de cada intervalo para obtener la siguiente tabla de signos.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
Signo de $x - 2$	−	+	+
Signo de $x - 5$	−	−	+
Signo resultante	+	−	+

(continúa)

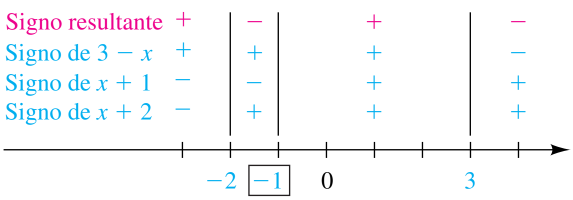
Las soluciones de $(x - 2)(x - 5) > 0$ son los valores de x para los cuales el signo resultante es *positivo*. Así, la solución de la desigualdad dada es la unión $(-\infty, 2)$ $(5, \infty)$. ■

EJEMPLO 3 **Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{(x + 2)(3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 1)} \leq 0$.

SOLUCIÓN Como 0 ya está en el lado derecho de la desigualdad y el lado izquierdo está factorizado, podemos ir directamente al diagrama de signos de la figura 4, donde las líneas verticales indican los ceros $(-2, -1$ y $3)$ de los factores

FIGURA 4



El cuadro alrededor de -1 indica que -1 hace que un factor del denominador de la desigualdad original sea igual a 0. Como el factor cuadrático $x^2 + 1$ es siempre positivo, no tiene efecto en el signo del cociente y por tanto puede omitirse del diagrama.

Los diversos signos de los factores se pueden hallar usando valores de prueba. Alternativamente, sólo necesitamos recordar que cuando x aumenta, el signo de un factor lineal $ax + b$ cambia de negativo a positivo si el coeficiente a de x es positivo, y el signo cambia de positivo a negativo si a es negativo.

Para determinar dónde es que el cociente es menor o igual a 0, primero vemos del diagrama de signos que es *negativo* para números en $(-2, -1) \cup (3, \infty)$. Como el cociente es 0 en $x = -2$ y $x = 3$, los números -2 y 3 también son soluciones y deben estar *incluidos* en nuestra solución. Por último, el cociente es *indefinido* en $x = -1$, de modo que -1 debe ser *excluido* de nuestra solución. Así, las soluciones de la desigualdad original están dadas por

$$[-2, -1) \cup [3, \infty).$$ ■

EJEMPLO 4 **Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{(2x + 1)^2(x - 1)}{x(x^2 - 1)} \geq 0$.

SOLUCIÓN Si reescribimos la desigualdad como

$$\frac{(2x + 1)^2(x - 1)}{x(x + 1)(x - 1)} \geq 0,$$

vemos que $x - 1$ es un factor del numerador y del denominador. Así, *suponiendo que* $x - 1 \neq 0$ (esto es, $x \neq 1$), podemos cancelar este factor y reducir nuestra búsqueda de soluciones al caso de

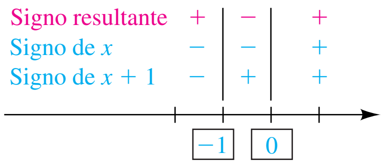
$$\frac{(2x + 1)^2}{x(x + 1)} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x \neq 1.$$

A continuación vemos que este cociente es 0 si $2x + 1 = 0$ (esto es, si $x = -\frac{1}{2}$). Por lo tanto, $-\frac{1}{2}$ es una solución. Para hallar las soluciones restantes, construimos el diagrama de signos de la figura 5. No incluimos $(2x + 1)^2$ en el diagrama de signos, porque esta expresión siempre es positiva si $x \neq -\frac{1}{2}$ y entonces no tiene efecto en el signo del cociente. Consultando el signo resultante y recordando que $-\frac{1}{2}$ es una solución pero 1 *no es* una solución, vemos que las soluciones de la desigualdad dada están dadas por

$$(-\infty, -1) \cup \left\{-\tfrac{1}{2}\right\} \cup (0, 1) \cup (1, \infty).$$

■

FIGURA 5



EJEMPLO 5 **Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{x+1}{x+3} \leq 2$.

SOLUCIÓN Un error común al resolver este tipo de igualdades es multiplicar primero ambos lados por $x + 3$. Si lo hacemos así, tendríamos que considerar dos casos, porque $x + 3$ puede ser positivo o negativo (suponiendo $x + 3 \neq 0$), y podríamos tener que invertir la desigualdad. Un método más sencillo es obtener primero una desigualdad equivalente que tenga 0 en el lado derecho y continuar desde ahí:

$$\frac{x+1}{x+3} \leq 2 \quad \text{original}$$

$$\frac{x+1}{x+3} - 2 \leq 0 \quad \text{haya 0 un lado}$$

$$\frac{x+1-2(x+3)}{x+3} \leq 0 \quad \text{combine en una fracción}$$

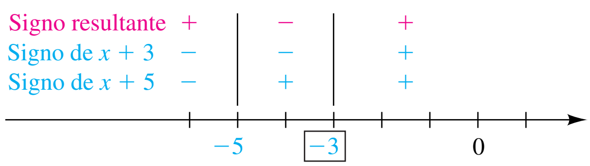
$$\frac{-x-5}{x+3} \leq 0 \quad \text{simplifique}$$

$$\frac{x+5}{x+3} \geq 0 \quad \text{multiplique por } -1$$

Note que la dirección de la desigualdad se cambia en el último paso, porque multiplicamos por un número negativo. Esta multiplicación fue realizada por comodidad, para que todos los factores tengan coeficientes positivos de x.

Los factores $x + 5$ y $x + 3$ son 0 en $x = -5$ y $x = -3$, respectivamente. Esto lleva al diagrama de signos de la figura 6, donde los signos están determinados como en ejemplos previos. Vemos del diagrama que el signo resultante, y por tanto el signo del cociente, es positivo en $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$. El cociente es 0 en $x = -5$ (incluido -5) y no definido en $x = -3$ (excluido -3). En consecuencia, la solución de $(x + 5)/(x + 3) \geq 0$ es $(-\infty, -5] \cup (-3, \infty)$.

FIGURA 6



Un método alternativo de solución es empezar por multiplicar ambos lados de la desigualdad dada por $(x + 3)^2$, *suponiendo que* $x \neq -3$. En este caso, $(x + 3)^2 > 0$ y la multiplicación es permisible; no obstante, después de resolver la desigualdad resultante, el valor de $x = -3$ debe excluirse. ■

EJEMPLO 6 **Determinación de niveles terapéuticos mínimos**

Para que un medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración en el torrente sanguíneo debe exceder de cierto valor, que se denomina *nivel terapéutico mínimo*. Suponga que la concentración c (en mg/L) de un medicamento particular t horas después de tomarlo oralmente está dado por

$$c = \frac{20t}{t^2 + 4}.$$

Si el nivel terapéutico mínimo es 4 mg/L, determine cuándo este nivel se rebasa.

SOLUCIÓN El nivel terapéutico mínimo, 4 mg/L, se rebasa si $c > 4$. Así, debemos resolver la desigualdad

$$\frac{20t}{t^2 + 4} > 4.$$

Como $t^2 + 4 > 0$ para toda t, podemos multiplicar ambos lados por $t^2 + 4$ y continuar como sigue:

$$20t > 4t^2 + 16 \qquad \text{permisible, porque } t^2 + 4 > 0$$
$$-4t^2 + 20t - 16 > 0 \qquad \text{iguale a 0 un lado}$$
$$t^2 - 5t + 4 < 0 \qquad \text{divida entre el factor común } -4$$
$$(t - 1)(t - 4) < 0 \qquad \text{factorice}$$

Los factores de la última desigualdad son 0 cuando $t = 1$ y $t = 4$. Estos son los tiempos en los que c es *igual a* 4. Al igual que en ejemplos previos, podemos usar una tabla de signos o diagrama de signos (con $t \geq 0$) para demostrar que $(t - 1)(t - 4) < 0$ para toda t en el intervalo $(1, 4)$. Por lo tanto, el nivel terapéutico mínimo se rebasa si $1 < t < 4$. ■

Debido a que las gráficas en un plano de coordenadas se introducen en el siguiente capítulo, sería prematuro demostrar aquí el uso de una calculadora de gráficas o software de computadora para resolver desigualdades en x. Estos métodos se van a considerar más adelante en el texto.

Algunas propiedades básicas de desigualdades se expusieron al principio de la última sección. Las siguientes propiedades adicionales son útiles para resolver ciertas desigualdades. Las pruebas de las propiedades se dan después de la tabla.

Propiedades adicionales de desigualdades

Propiedad	Ilustración
(1) Si $0 < a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.	Si $0 < \frac{1}{x} < 4$, entonces $\frac{1}{1/x} > \frac{1}{4}$ o $x > \frac{1}{4}$.
(2) Si $0 < a < b$, entonces $0 < a^2 < b^2$.	Si $0 < \sqrt{x} < 4$, entonces $0 < (\sqrt{x})^2 < 4^2$ o $0 < x < 16$.
(3) Si $0 < a < b$, entonces $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.	Si $0 < x^2 < 4$, entonces $0 < \sqrt{x^2} < \sqrt{4}$ o $0 < \lvert x \rvert < 2$.

DEMOSTRACIONES

(1) Si $0 < a < b$, entonces multiplicar por $1/(ab)$ da

$$a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab} \quad \text{o} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}; \qquad \text{es decir,} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

(2) Si $0 < a < b$, entonces multiplicar por a da $a \cdot a < a \cdot b$ y multiplicar por b da $b \cdot a < b \cdot b$, de modo que $a^2 < ab < b^2$ y por lo tanto $a^2 < b^2$.

(3) Si $0 < a < b$, entonces $b - a > 0$ o bien, lo que es equivalente,

$$(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0.$$

Al dividir ambos lados de la última desigualdad entre $\sqrt{b} + \sqrt{a}$, obtenemos $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$; es decir, $\sqrt{b} > \sqrt{a}$ ■

2.7 Ejercicios

Ejer. 1–2: Establezca la solución de cada desigualdad.

1 (a) $x^2 + 4 > 0$ (b) $x^2 + 4 < 0$

2 (a) $x^2 + 9 > 0$ (b) $x^2 + 9 < 0$

Ejer. 3–42: Resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en términos de intervalos siempre que sea posible.

3 $(3x + 1)(5 - 10x) > 0$

4 $(2 - 3x)(4x - 7) \geq 0$

5 $(x + 2)(x - 1)(4 - x) \leq 0$

6 $(x - 6)(x + 3)(-2 - x) < 0$

7 $x^2 - x - 6 < 0$

8 $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

9 $x^2 - 2x - 7 > 1$

10 $x^2 - 4x - 15 \leq 6$

11 $x(2x + 3) \geq 5$

12 $x(3x - 1) \leq 4$

13 $8x - 15 > x^2$

14 $x + 20 \leq x^2$

15 $x^2 < 16$

16 $x^2 > 64$

17 $25x^2 - 16 < 0$

18 $25x^2 - 16x < 0$

19 $16x^2 \geq 9x$

20 $16x^2 > 9$

21 $x^4 + 5x^2 \geq 36$

22 $x^4 + 15x^2 < 16$

23 $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$

24 $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \leq 0$

25 $\dfrac{x^2(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} \leq 0$

26 $\dfrac{(x^2 + 1)(x - 3)}{x^2 - 9} \geq 0$

27 $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \leq 0$

28 $\dfrac{(x + 3)^2(2 - x)}{(x + 4)(x^2 - 4)} \leq 0$

29 $\dfrac{x - 2}{x^2 - 3x - 10} \geq 0$

30 $\dfrac{x + 6}{x^2 - 7x + 12} \leq 0$

31 $\dfrac{-3x}{x^2 - 9} > 0$

32 $\dfrac{5x}{16 - x^2} < 0$

33 $\dfrac{x + 1}{2x - 3} > 2$

34 $\dfrac{x - 2}{3x + 5} \leq 4$

35 $\dfrac{1}{x - 2} \geq \dfrac{3}{x + 1}$

36 $\dfrac{2}{2x + 3} \leq \dfrac{2}{x - 5}$

37 $\dfrac{4}{3x - 2} \leq \dfrac{2}{x + 2}$

38 $\dfrac{3}{5x + 1} \geq \dfrac{1}{x - 3}$

39 $\dfrac{x}{3x - 5} \leq \dfrac{2}{x - 1}$

40 $\dfrac{x}{2x - 1} \geq \dfrac{3}{x + 2}$

41 $x^3 > x$

42 $x^4 \geq x^2$

Ejer. 43–44: Cuando una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria recta, su velocidad v (en cm/s) en el tiempo t (en segundos), está dada por la ecuación. ¿Para qué subintervalos del intervalo de tiempo dado $[a, b]$ su velocidad será al menos k cm/s?

43 $v = t^3 - 3t^2 - 4t + 20$; $[0, 5]$; $k = 8$

44 $v = t^4 - 4t^2 + 10$; $[1, 6]$; $k = 10$

45 Récord de salto vertical El *Libro Guiness de récords mundiales* informa que los perros pastores alemanes pueden dar saltos verticales de más de 10 pies cuando escalan paredes. Si la distancia s (en pies) desde el suelo después de t segundos está dada por la ecuación $s = -16t^2 + 24t + 1$, ¿durante cuántos segundos está el perro a más de 9 pies del suelo?

46 Altura de un objeto lanzado Si un objeto se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 320 ft/s, entonces su distancia s sobre el suelo después de t segundos está dada por $s = -16t^2 + 320t$. ¿Para qué valores de t estará el objeto a más de 1536 pies sobre el suelo?

47 Distancia de frenado La distancia d de frenado (en pies) de cierto automóvil que corre a v mi/h está dada por la ecuación $d = v + (v^2/20)$. Determine las velocidades que resulten en distancias de frenado de menos de 75 pies.

48 Rendimiento de combustible El número de millas M que cierto auto compacto puede viajar con 1 galón de gasolina, está relacionado con su velocidad v (en mi/h) por

$$M = -\tfrac{1}{30}v^2 + \tfrac{5}{2}v \quad \text{para } 0 < v < 70.$$

¿Para qué velocidades será M al menos de 45?

49 Propagación de salmón Para una población particular de salmón, la relación entre el número S de peces hembra y el número R de descendientes que sobreviven hasta la edad adulta está dada por la fórmula $R = 4500S/(S + 500)$. ¿En qué condiciones es $R > S$?

50 Densidad de población La densidad D de población (en habitantes/mi²) en una gran ciudad está relacionada con la distancia x desde el centro de la ciudad por $D = 5000x/(x^2 + 36)$. ¿En qué partes de la ciudad la densidad de población rebasa las 400 personas/mi²?

51 Peso en el espacio Después de que un astronauta es lanzado al espacio, su peso disminuye hasta alcanzar un estado de ingravidez. El peso de un astronauta de 125 libras a una altitud de x kilómetros sobre el nivel del mar está dado por

$$W = 125\left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2.$$

¿A qué altitudes el peso del astronauta es menor que 5 libras?

52 Fórmula de contracción de Lorentz La fórmula de contracción de Lorentz, en teoría de la relatividad, relaciona la longitud L de un objeto que se mueve a una velocidad de v mi/s con respecto a un observador y su longitud L_0 en reposo. Si c es la velocidad de la luz, entonces

$$L^2 = L_0^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

¿Para qué velocidades L será menor que $\frac{1}{2}L_0$? Exprese la respuesta en términos de c.

53 Velocidad de aterrizaje de aviones En el diseño de cierto avión pequeño de turbohélice, la velocidad V de aterrizaje (en ft/s) está determinada por la fórmula $W = 0.00334V^2S$, donde W es el peso bruto (en libras) de la nave y S es el área superficial (en ft²) de las alas. Si el peso bruto de la nave está entre 7500 y 10,000 libras y $S = 210$ ft², determine el intervalo de las velocidades de aterrizaje en millas por hora.

Ejer. 54–55: Use una tabla de valores para ayudar en la solución de la desigualdad en el intervalo dado.

54 $\dfrac{(2 - x)(3x - 9)}{(1 - x)(x + 1)} > 0, \qquad [-2, 3.5]$

55 $x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48 < 0, \qquad [-3.5, 5]$

CAPÍTULO 2 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–24: Resuelva la ecuación.

1 $\dfrac{3x + 1}{5x + 7} = \dfrac{6x + 11}{10x - 3}$

2 $2 - \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{3}{x}$

3 $\dfrac{2}{x + 5} - \dfrac{3}{2x + 1} = \dfrac{5}{6x + 3}$

4 $\dfrac{7}{x - 2} - \dfrac{6}{x^2 - 4} = \dfrac{3}{2x + 4}$

5 $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3 = \dfrac{1 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

6 $2x^2 + 7x - 15 = 0$

7 $x(3x + 4) = 2$

8 $\dfrac{x}{3x + 1} = \dfrac{x - 1}{2x + 3}$

9 $(x - 2)(x + 1) = 6$

10 $4x^4 - 37x^2 + 75 = 0$

11 $x^{2/3} - 2x^{1/3} - 15 = 0$

12 $20x^3 + 8x^2 - 55x - 22 = 0$

13 $5x^2 = 2x - 3$

14 $x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$

15 $6x^4 + 29x^2 + 28 = 0$

16 $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

17 $|4x - 1| = 7$

18 $2|2x + 1| + 1 = 15$

19 $\dfrac{1}{x} + 6 = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

20 $\sqrt[3]{4x - 5} - 3 = 0$

21 $\sqrt{7x + 2} + x = 6$

22 $\sqrt{x + 4} = \sqrt[4]{6x + 19}$

23 $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 4} = 1$

24 $x^{4/3} = 16$

Ejer. 25–26: Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

25 $3x^2 - 12x + 3 = 0$

26 $x^2 + 10x + 36 = 0$

Ejer. 27–44: Resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en términos de intervalos siempre que sea posible.

27 $(x - 5)^2 \leq 0$

28 $10 - 7x < 4 + 8x$

29 $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{2x + 3}{5} < \dfrac{3}{2}$

30 $(3x - 1)(10x + 4) \geq (6x - 5)(5x - 7)$

31 $\dfrac{7}{10x + 3} < 0$

32 $|4x + 7| < 21$

33 $2|3 - x| + 1 > 5$

34 $-2|x - 3| + 1 \geq -5$

35 $|16 - 3x| \geq 5$

36 $2 < |x - 6| < 4$

37 $10x^2 + 11x > 6$

38 $x(x - 3) \leq 18$

39 $\dfrac{x^2(3 - x)}{x + 2} \leq 0$

40 $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} \leq 0$

41 $\dfrac{3}{2x + 3} < \dfrac{1}{x - 2}$

42 $\dfrac{x + 2}{x^2 - 25} \leq 0$

43 $x^3 > x^2$

44 $(x^2 - x)(x^2 - 5x + 6) < 0$

Ejer. 45–50: Despeje la variable especificada.

45 $P + N = \dfrac{C + 2}{C}$ despeje C

46 $A = B\sqrt[3]{\dfrac{C}{D}} - E$ despeje D

47 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ despeje r (volumen de una esfera)

48 $F = \dfrac{\pi P R^4}{8VL}$ despeje R (ley de Poiseuille para fluidos)

49 $c = \sqrt{4h(2R - h)}$ despeje h (base de un segmento circular)

50 $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR)$ despeje r (volumen de un tronco de un cono)

Ejer. 51–56: Exprese en la forma *a* + *bi*, donde *a* y *b* son números reales.

51 $(7 + 5i) - (-2 + 3i)$

52 $(4 + 2i)(-5 + 4i)$

53 $(5 + 8i)^2$

54 $\dfrac{1}{9 - \sqrt{-4}}$

55 $\dfrac{6 - 3i}{2 + 7i}$

56 $\dfrac{24 - 8i}{4i}$

57 **Puntuaciones de bolos** Para entrar en el Club 250, un jugador debe tener un promedio de puntuación de 250 en una serie de tres juegos. Si un jugador de bolos tiene puntajes de 267 y 225 de sus dos primeros juegos, ¿cuál es la puntuación mínima para su tercer juego que lo metería en el Club 250?

58 **Cálculo de un precio de preventa** Una tienda de artículos deportivos está celebrando sus 37 años en el negocio y otorga un 37% de descuento en todo lo que vende y también paga cualquier impuesto sobre las ventas. Un niño tiene $50 para gastar. ¿Cuál es el precio máximo de preventa que puede pagar?

59 **Regla del 90** En un sindicato particular de profesores, un profesor se puede retirar cuando la edad del profesor más sus años de servicio sean al menos 90. Si un profesor de 37 años de edad tiene 15 años de servicio, ¿a qué edad será elegible para retirarse? Haga suposiciones razonables.

60 **Resistencia eléctrica** Cuando dos resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo, la resistencia neta R está dada por $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$. Si $R_1 = 5$ ohms, ¿qué valor de R_2 hará que la resistencia neta sea de 2 ohms?

61 **Ingreso por inversiones** Un inversionista tiene una opción de dos inversiones: un capital en bonos y un capital en acciones. El capital en bonos da 7.186% de interés anual, que no paga impuestos a niveles federal y estatal. Suponga que el inversionista paga impuestos sobre la renta federales a una tasa de 28% e impuestos estatales a una tasa de 7%. Determine cuál debe ser el rendimiento anual del capital en acciones que paga impuestos para que los dos capitales paguen la misma cantidad de interés neto al inversionista.

62 **Ingresos por inversiones** Una mujer tiene $216,000 para invertir y quiere generar $12,000 por año en ingresos por intereses. Ella puede invertir en dos fondos libres de impuestos. El primero es estable, pero paga sólo el 4.5%. El segundo paga 9.25%, pero tiene un riesgo mayor. Si se quiere reducir al mínimo la cantidad de dinero invertido en el segundo fondo, ¿cuánto se debe invertir en el primer fondo?

63 **Tasa de remoción de nieve** Un hombre puede limpiar su camino de entrada con un quitanieves en 45 minutos. A su hijo le toma dos horas limpiar el camino de entrada con una pala. ¿Cuánto tiempo les llevará despejar el camino de entrada si trabajan juntos?

64 **Mezcla de oro y plata** Un anillo que pesa 80 gramos está hecho de oro y plata. Al medir el desplazamiento del anillo en agua se ha determinado que tiene un volumen de 5 cm^3. El oro pesa 19.3 g/cm^3 y la plata pesa 10.5 g/cm^3. ¿Cuántos gramos de oro contiene el anillo?

65 **Preparación de alimentos en un hospital** La dietista de un hospital desea preparar un platillo de 10 onzas de carne y verduras que dará 7 gramos de proteína. Si una onza de la porción de verduras da $\frac{1}{2}$ gramo de proteína y una onza de carne da 1 gramo de proteína, ¿cuánto debe usar de cada una?

66 **Preparación de un bactericida** Una solución de alcohol etílico que contiene 75% de alcohol en peso se ha de usar como bactericida. La solución se va a preparar agregando agua a una solución de alcohol etílico al 95%. ¿Cuántos gramos de cada uno deben usarse para preparar 400 gramos del bactericida?

67 **Calentamiento solar** Un panel solar de calefacción requiere 120 galones de un fluido que es 30% anticongelante. Este fluido viene en solución al 50% o en solución al 20%. ¿Cuántos galones de cada uno deben usarse para preparar los 120 galones de solución?

68 **Fábrica de latón** Una empresa desea fabricar aleaciones de bronce compuestas de 65% cobre y 35% de zinc. ¿Cuánto cobre se debe mezclar con 140 kg de zinc para producir latón?

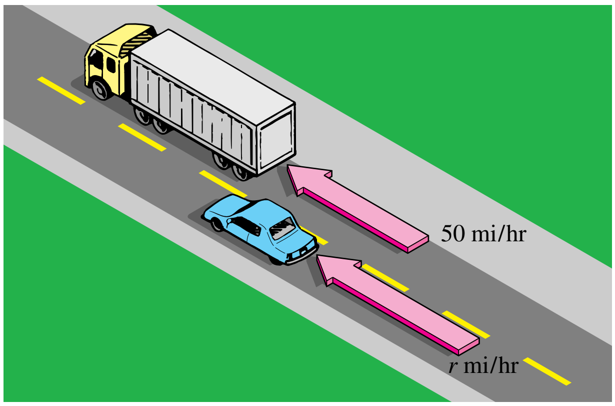
69 **Consumo de combustible** Un bote tiene un tanque de 10 galones de gasolina y navega a 20 mi/h con un consumo de combustible de 16 mi/gal cuando opera a toda velocidad en aguas en calma. El bote se mueve corriente arriba en una corriente de 5 mi/h. ¿A qué distancia corriente arriba puede navegar el bote y regresar gastando 10 galones de gasolina si se opera a toda velocidad durante todo el viaje?

70 **Viaje en tren** Un tren de alta velocidad hace un viaje de 400 millas sin escala entre dos ciudades importantes en $5\frac{1}{2}$ horas. El tren corre a 100 mi/h en el campo, pero los reglamentos de seguridad exigen que corra a sólo 25 mi/h cuando pase por ciudades intermedias más pequeñas. ¿Cuántas horas pasan viajando por las ciudades más pequeñas?

71 **Velocidad del viento** Un avión voló a favor del viento durante 30 minutos y regresó la misma distancia en 45 minutos. Si la velocidad de crucero del avión fue de 320 mi/h, ¿cuál fue la velocidad del viento?

72 **Velocidad de rebase** Un automóvil de 20 pies de largo rebasa a un camión de 40 pies de largo que corre a 50 mi/h (vea la figura). ¿A qué velocidad constante debe correr el auto para pasar al camión en 5 segundos?

EJERCICIO 72



73 **Velocidad de una lancha rápida** Una lancha deja un muelle hacia el este a 30 mi/hr. Otra lancha sale desde el mismo muelle 20 minutos más tarde, hacia el oeste a 24 mi/hr. ¿Cuánto tiempo después de la salida de la primera de las lanchas rápidas estarán separadas 37 millas?

74 **Rapidez de trote** Una chica recorre 5 millas en 24 minutos menos de lo que tarda en correr 7 millas. Suponiendo que se mueve a una velocidad constante, encuentre su rapidez de trote en millas por hora.

75 **Llenado de una tolva** Una máquina de moldeo puede llenar una tolva vacía en 2 horas y el personal de empacado puede vaciar una tolva llena en 5 horas. Si una tolva está

llena a la mitad cuando una máquina de moldeo empieza a llenarla y el personal de empacado empieza a vaciarla, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse la tolva?

76 **Rendimiento de combustible** Una representante de ventas de una empresa estima que el consumo de gasolina de su automóvil promedia 28 millas por galón en carretera y 22 mpg en la ciudad. En un viaje reciente recorrió 627 millas y consumió 24 galones de gasolina. ¿Cuánto del viaje se hizo en la ciudad?

77 **Expansión de una ciudad** El recorrido más largo al centro de una ciudad cuadrada desde las afueras es de 10 millas. Dentro de la última década, la ciudad se ha expandido en un área de 50 mi^2. Suponiendo que la ciudad siempre ha tenido forma cuadrada, encuentre el cambio correspondiente en el recorrido más largo al centro de la ciudad.

78 **Dimensiones de la membrana de una célula** La membrana de una célula es una esfera cuyo radio mide 6 micrones. ¿Qué cambio en el radio aumentará el área superficial de la membrana en un 25%?

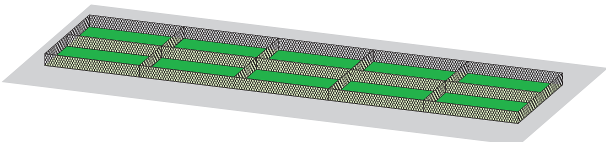
79 **Viaje en carretera** Una carretera en sentido norte-sur cruza otra carretera en sentido este-oeste en un punto P. Un automóvil cruza P a las 10 a.m., viajando al este a una velocidad constante de 20 mi/h. En el mismo instante, otro automóvil está a 2 millas al norte de P, viajando al sur a 50 mi/h.

(a) Encuentre una fórmula para la distancia d entre los automóviles t horas después de las 10:00 a.m.

(b) ¿Aproximadamente a qué hora estarán los autos a 103 millas entre sí?

80 **Cercado de una perrera** El dueño de una perrera tiene 270 pies de material para cerca que ha de usarse para dividir un área rectangular en 10 jaulas iguales, como se ve en la figura. Encuentre las dimensiones que permitan tener 100 ft^2 para cada jaula.

EJERCICIO 80

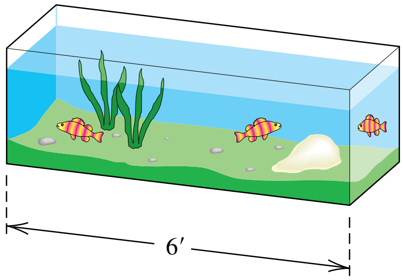


81 **Dimensiones de un acuario** Un acuario sin tapa se va a construir con costados de 6 pies de largo y extremos cuadrados, como se ve en la figura.

(a) Encuentre la altura del acuario si el volumen ha de ser de 48 ft^3.

(b) Encuentre la altura si se van a usar 44 ft^2 de vidrio.

EJERCICIO 81



82 **Dimensiones de una piscina** La longitud de una piscina rectangular debe medir cuatro veces su ancho y una banqueta de 6 pies de ancho ha de rodear la piscina. Si se ha reservado un área total de 1440 ft^2 para la construcción, ¿cuáles son las dimensiones de la piscina?

83 **Dimensiones de una bañera** Un contratista desea diseñar una bañera hundida rectangular con 40 ft^2 de área de baño. Un pasillo de teja de 1 pie de ancho rodeará el área de baño. La longitud total del área con teja debe medir el doble de su ancho. Encuentre las dimensiones del área de baño.

84 **Crecimiento poblacional** La población P (en miles) de un pequeño poblado se espera que aumente de acuerdo con la fórmula

$$P = 15 + \sqrt{3t + 2},$$

donde t es el tiempo en años. ¿Cuándo será de 20,000 la población?

85 **Ley de Boyle** La ley de Boyle para cierto gas expresa que si la temperatura es constante, entonces $pv = 200$, donde p es la presión (en lb/in^2) y v es el volumen (en in^3). Si $25 \leq v \leq 50$, ¿cuál es el correspondiente intervalo para p?

86 **Comisión de ventas** Un estudiante recién graduado de universidad tiene ofertas de trabajo para una posición de vendedor en dos empresas de computadoras. El trabajo A paga $50,000 por año más 10% de comisión. El trabajo B paga sólo $40,000 al año, pero el porcentaje de comisión es 20%. ¿Cuántas ventas al año debe hacer el vendedor para que el segundo trabajo sea más lucrativo?

87 **Velocidad del sonido** La velocidad del sonido en el aire a 0°C (o 273 K) es 1087 ft/s, pero su velocidad aumenta a medida que la temperatura sube. La velocidad v del sonido a una temperatura T en K está dada por $v = 1087\sqrt{T/273}$. ¿A qué temperaturas la velocidad del sonido rebasa los 1100 ft/s?

88 **Periodo de un péndulo** Si la longitud del péndulo en un reloj del abuelo es l centímetros, entonces su periodo T (en segundos) está dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde g es una constante gravitacional. Si, en ciertas condiciones, $g = 980$ y $98 \leq l \leq 100$, ¿cuál es el correspondiente intervalo para T?

89 **Órbita de un satélite** Para que un satélite mantenga una órbita de altitud h kilómetros, su velocidad (en km/s) debe ser igual a $626.4/\sqrt{h + R}$, donde $R = 6372$ km es el radio de la Tierra. ¿Qué velocidades resultarán en órbitas con una altitud de más de 100 kilómetros desde la superficie terrestre?

90 **Instalar una cerca de un terreno** Hay 100 pies de cerca para encerrar un terreno rectangular. ¿Para qué anchos el terreno cercado contendrá al menos 600 ft^2?

91 **Plantar una huerta de manzanas** El propietario de una huerta de manzanas estima que si planta 24 árboles por acre, entonces cada árbol maduro dará 600 manzanas por año. Por cada árbol adicional plantado por acre, el número de manzanas producidas por cada árbol disminuye en 12 por año. ¿Cuántos árboles debe plantar por acre para obtener al menos 16,146 manzanas por año?

92 **Rentas de departamentos** Una empresa de bienes raíces posee 218 departamentos en edificios, que están ocupados por completo cuando la renta es \$940 al mes. La empresa estima que por cada \$25 de aumento en renta, 5 departamentos se desocuparán. ¿Qué renta debe cobrarse para pagar las facturas mensuales, que totalizan \$205,920?

93 Escoja la ecuación que mejor describa la tabla de datos.

x	y
1	2.1213
2	3.6742
3	4.7434
4	5.6125
5	6.3640

(1) $y = 1.5529x + 0.5684$

(2) $y = \dfrac{3}{x} + x^2 - 1$

(3) $y = 3\sqrt{x - 0.5}$

(4) $y = 3x^{1/3} + 1.1213$

CAPÍTULO 2 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 Cuando factorizamos la suma o diferencia de cubos, $x^3 \pm y^3$, ¿el factor $(x^2 \mp xy + y^2)$ es siempre factorizable en los números reales?

2 ¿Cuál es el promedio de las dos soluciones de la ecuación cuadrática arbitraria $ax^2 + bx + c = 0$? Discuta cómo es que este conocimiento puede ayudarlo a probar fácilmente las soluciones de una ecuación cuadrática

3 **(a)** Encuentre una expresión de la forma $p + qi$ para el inverso multiplicativo de $\dfrac{a + bi}{c + di}$, donde a, b, c y d son números reales.

(b) ¿La expresión encontrada se aplica a números reales de la forma a/c?

(c) ¿Hay alguna restricción en su respuesta al inciso (a)?

4 Al resolver la desigualdad $\dfrac{x - 1}{x - 2} \geq 3$, ¿qué está mal al emplear $x - 1 \geq 3(x - 2)$ como primer paso?

5 Considere la desigualdad $ax^2 + bx + c \geq 0$, donde a, b, y c son números reales con $a \neq 0$. Suponga que la igualdad asociada $ax^2 + bx + c = 0$ tiene discriminante D. Clasifique las soluciones de la desigualdad de acuerdo con los signos de a y D.

6 **Nivel de congelación en una nube** Consulte los ejercicios 37–39 de la sección 2.2.

(a) Aproxime la altura del nivel de congelación en una nube si la temperatura del suelo es de 80°F y el punto de rocío o condensación es 68°F.

(b) Encuentre una fórmula para la altura h del nivel de congelación en una nube para temperatura del suelo G y punto de rocío D.

7 Explique por qué no debe tratar de resolver una de estas ecuaciones.

$$\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x + 5} = 0$$

$$\sqrt[3]{2x - 3} + \sqrt[3]{x + 5} = 0$$

8 De la ecuación

$$\sqrt{x} = cx - 2/c$$

despeje x, donde $c = 2 \times 10^{500}$. Discuta por qué una de sus soluciones positivas es extraña.

9 **Superficie de un tanque** Usted sabe que un tanque esférico contiene 10 mil galones de agua. ¿Qué es lo que necesita saber para determinar el área superficial del tanque? Estime el área superficial del tanque.

CAPÍTULO 2 EXAMEN DE CAPÍTULO

1 Resuelva la ecuación $\frac{5x}{x-3} + \frac{7}{x} = \frac{45}{x^2 - 3x}$ para x.

2 Resuelva la ecuación $A = \frac{3B}{2B - 5}$ para B en términos de A.

3 Una acción aumenta su valor 20% el primer año y 30% el siguiente. Su valor actual es $2720. Defina una variable, escriba una ecuación y resuélvala para determinar el valor original.

4 Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $3x^2 + \sqrt{60}xy + 5y^2 = 0$ para x en términos de y.

5 Resuelva la ecuación $(x - y + z)^2 = 9$ para x en términos de y y z.

6 La altura h de un objeto sobre el nivel del suelo, t segundos después de ser lanzado, está dada por $h = -16t^2 + 320t$. ¿En qué momento el objeto estará a 1584 pies sobre el nivel del suelo?

7 Si x es cualquier número real y la expresión i^{4x+3} está simplificada y escrita en la forma $a + bi$, determine los valores de a y b.

8 Encuentre tres soluciones para la ecuación $x^3 = 64$.

9 Resuelva la ecuación $A = B\sqrt{x^2 + r^2}$ para x.

10 Encuentre las soluciones de la ecuación $3x^{32}(x + 2)^{65}(x - 5)^{13}(x^{2/3} - 4) = 0$.

11 Un globo tiene un volumen de 20,000 pulg^3, el cual aumenta 25% hasta 25,000 pulg^3. Encuentre el cambio correspondiente en el radio al décimo del porcentaje más cercano.

12 Una mujer desea retirarse a la edad de 55 años (plan A) y recibir $3300 al mes por el resto de su vida. En lugar de esto, si ella se retira a los 65 años de edad (plan B) recibirá $4200 por mes. Escriba una desigualdad que relacione el total de pagos de los planes y resuélvala para determinar cuánto tiempo le tomará al plan B para tener un pago total tan grande al menos como el del plan A.

13 Resuelva la desigualdad $-\frac{1}{4}|3 - 2x| + 6 \geq 2$ para x y escriba su respuesta en notación de intervalo.

14 Resuelva la desigualdad $x(2x + 1) \geq 3$ para x, y escriba su respuesta en notación de intervalo.

15 Resuelva la desigualdad $\frac{(x + 1)^2(x - 7)}{(7 - x)(x - 4)} \leq 0$ para x y escriba su respuesta en notación de intervalo.

16 Resuelva la desigualdad $\frac{2}{x - 3} \leq \frac{2}{x + 1}$ para x, y escriba su respuesta en notación de intervalo.

17 La suma de la longitud y el ancho de un rectángulo es 14. Encuentre los valores de la anchura para los que el área del rectángulo es al menos 45.

3

Funciones y gráficas

El término matemático *función* (o su equivalente latino) data del siglo XVII, cuando el cálculo estaba en las primeras etapas de desarrollo. Este importante concepto es ahora la espina dorsal de cursos avanzados en matemáticas y es indispensable en todos los campos de las ciencias.

En este capítulo estudiamos las propiedades de las funciones con el empleo de métodos algebraicos y gráficos que incluyen la localización de puntos, determinación de simetrías y desplazamientos horizontales y verticales. Estas técnicas son adecuadas para obtener bosquejos aproximados de gráficas que nos ayudan a entender las propiedades de las funciones; sin embargo, los métodos de nuestro tiempo utilizan programas avanzados de computadoras y matemáticas avanzadas para generar representaciones gráficas sumamente precisas de funciones.

3.1 Sistemas de coordenadas rectangulares

En la sección 1.1 estudiamos la forma de asignar un número real (coordenada) a cada punto sobre una recta. Ahora mostraremos cómo asignar un **par ordenado** (a, b) de números reales a cada punto en un plano. Aun cuando también hemos empleado la notación (a, b) para denotar un intervalo abierto, hay poca probabilidad de confusión puesto que en nuestra exposición siempre debe estar claro si (a, b) representa un punto o un intervalo.

Introducimos un **sistema de coordenadas rectangulares**, o **cartesianas,*** en un plano por medio de dos rectas perpendiculares coordenadas, llamadas **ejes de coordenadas,** que se cruzan en el **origen** O, como se ve en la figura 1. Muchas veces nos referimos a la recta horizontal como **eje *x*** y a la vertical como **eje *y*,** y los marcamos como x y y, respectivamente. El plano es entonces un **plano coordenado,** o **plano *xy*.** Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro partes denominadas **primero, segundo, tercero y cuarto cuadrantes,** marcados como I, II, III y IV, respectivamente (vea la figura 1). Los puntos sobre los ejes no pertenecen a cuadrante alguno.

A cada punto P en un plano xy se le asigna un par ordenado (a, b), como se ve en la figura 1. A a le damos el nombre de **coordenada *x*** (o **abscisa**) de P, y b es la **coordenada *y*** (u **ordenada**). Decimos que P *tiene coordenadas* (a, b) y nos referimos al *punto* (a, b) o *punto* $P(a, b)$. Recíprocamente, todo par ordenado (a, b) determina un punto P con coordenadas a y b. Se **representa un punto** mediante un punto, como se ilustra en la figura 2.

FIGURA 1

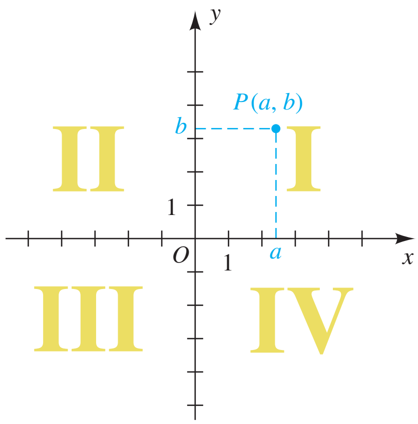
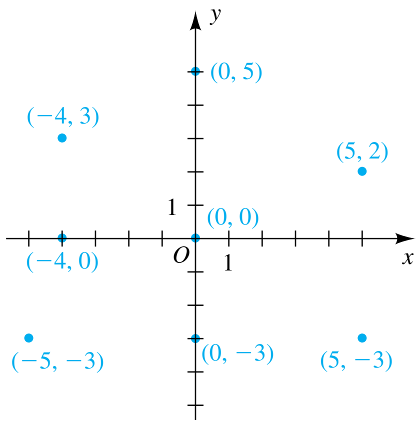


FIGURA 2



Para hallar la distancia entre dos puntos en un plano coordenado se usa la fórmula siguiente.

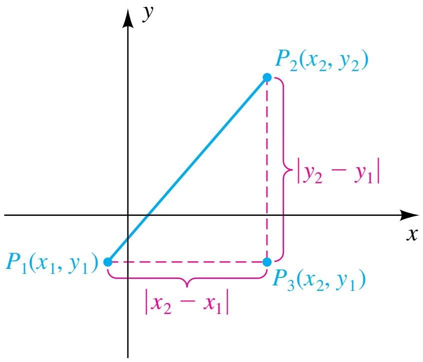
Fórmula de la distancia

La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en un plano coordenado es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

*El término *cartesiano* se usa en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596–1650), quien fue uno de los primeros en emplear estos sistemas de coordenadas.

FIGURA 3



DEMOSTRACIÓN Si $x \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces, como se ilustra en la figura 3, los puntos P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2.$$

De la figura vemos que

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \qquad \text{y} \qquad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

Como $|a|^2 = a^2$ para todo número real a, podemos escribir

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Sacando la raíz cuadrada de cada lado de la última ecuación y usando el hecho de que $d(P_1, P_2) \geq 0$ tendremos la fórmula de la distancia.

Si $y_1 = y_2$, los puntos P_1 y P_2 se encuentran en la misma recta horizontal y

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Del mismo modo, si $x_1 = x_2$, los puntos están en la misma recta vertical y

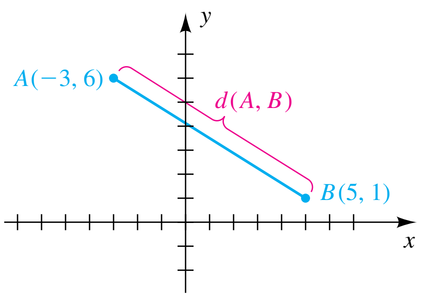
$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

Éstos son casos especiales de la fórmula de la distancia.

Aun cuando nos referimos a los puntos mostrados en la figura 3, nuestra demostración es independiente de las posiciones de P_1 y P_2. ■

Cuando aplique la fórmula de la distancia, observe que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$ y, por tanto, el orden en el que restemos las coordenadas x y las coordenadas y de los puntos es intrascendente. Podemos considerar la distancia entre dos puntos como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

FIGURA 4



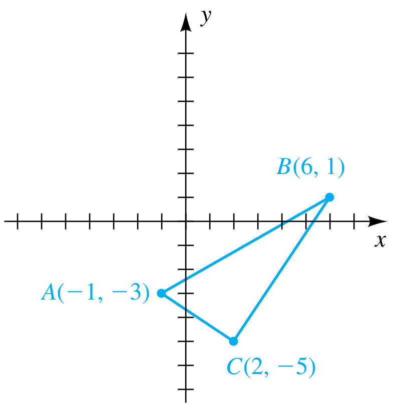
EJEMPLO 1 **Hallar la distancia entre puntos**

Localice los puntos $A(-3, 6)$ y $B(5, 1)$, y encuentre la distancia $d(A, B)$.

SOLUCIÓN Los puntos están trazados en la figura 4. Por la fórmula de la distancia,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9.43. \end{aligned}$$ ■

FIGURA 5



EJEMPLO 2 **Demostrar que un triángulo es un triángulo rectángulo.**

(a) Localice $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$, y demuestre que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

(b) Encuentre el área del triángulo ABC.

SOLUCIÓN

(a) Los puntos están trazados en la figura 5. De acuerdo con la geometría, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del lado restante. Por la fórmula de la distancia,

$$d(A, B) = \sqrt{(6 + 1)^2 + (1 + 3)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

(continúa)

$$d(B, C) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$
$$d(A, C) = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-5 + 3)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Como $d(A, B) = \sqrt{65}$ es el mayor de los tres valores, la condición por satisfacer es

$$[d(A, B)]^2 = [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2.$$

Sustituyendo los valores hallados usando la fórmula de la distancia, obtenemos

Área de un triángulo:
$A = \frac{1}{2}bh$

$$[d(A, B)]^2 = \left(\sqrt{65}\right)^2 = 65$$

y $\quad [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 = 52 + 13 = 65.$

Por tanto, el triángulo es un triángulo rectángulo con hipotenusa AB.

(b) El área de un triángulo con base b y altura h es $\frac{1}{2}bh$. Consultando la figura 5, hacemos

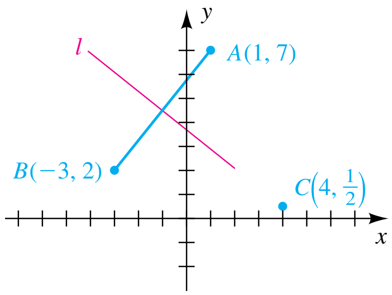
$$b = d(B, C) = \sqrt{52} \qquad \text{y} \qquad h = d(A, C) = \sqrt{13}.$$

En consecuencia, el área del triángulo ABC es

$$\tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}\sqrt{52}\,\sqrt{13} = \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{13}\,\sqrt{13} = 13.$$ ■

EJEMPLO 3 Aplicación de la fórmula de la distancia

FIGURA 6



Dados $A(1, 7)$, $B(-3, 2)$ y $C\left(4, \frac{1}{2}\right)$, demuestre que C está sobre la mediatriz del segmento AB.

SOLUCIÓN Los puntos A, B, C y la mediatriz l se ilustran en la figura 6. De acuerdo con la geometría plana, l puede caracterizarse por cualquiera de las siguientes condiciones:

(1) l es la recta perpendicular al segmento AB en su punto medio

(2) l es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los puntos extremos del segmento AB.

Usaremos la condición 2 para demostrar que C está en l al verificar que

$$d(A, C) = d(B, C).$$

Aplicamos la fórmula de la distancia:

$$d(A, C) = \sqrt{(4 - 1)^2 + \left(\tfrac{1}{2} - 7\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(-\tfrac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{169}{4}} = \sqrt{\tfrac{205}{4}}$$

$$d(B, C) = \sqrt{[4 - (-3)]^2 + \left(\tfrac{1}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{7^2 + \left(-\tfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{49 + \tfrac{9}{4}} = \sqrt{\tfrac{205}{4}}$$

Por lo tanto, C es equidistante de A y B, y la verificación está completa. ■

EJEMPLO 4 Hallar una fórmula que describa una mediatriz

Dados $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$, encuentre una fórmula que exprese el hecho de que un punto arbitrario $P(x, y)$ está sobre la mediatriz l del segmento AB.

SOLUCIÓN Por la condición 2 del ejemplo 3, $P(x, y)$ está en l si y sólo si $d(A, P) = d(B, P)$; esto es,

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 7)^2} = \sqrt{[x - (-3)]^2 + (y - 2)^2}.$$

Para obtener una fórmula más sencilla, elevemos al cuadrado ambos lados y simplifiquemos términos de la ecuación resultante como sigue:

$$(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = [x - (-3)]^2 + (y - 2)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$$
$$-2x + 1 - 14y + 49 = 6x + 9 - 4y + 4$$
$$-8x - 10y = -37$$
$$8x + 10y = 37$$

Observe que, en particular, la última fórmula es verdadera para las coordenadas del punto $C\left(4, \frac{1}{2}\right)$ en el ejemplo 3, porque si $x = 4$ y $y = \frac{1}{2}$, la sustitución en $8x + 10y$ nos da

$$8 \cdot 4 + 10 \cdot \tfrac{1}{2} = 37.$$

En el ejemplo 9 de la sección 3.3, encontraremos una fórmula para la mediatriz de un segmento usando la condición 1 del ejemplo 3. ■

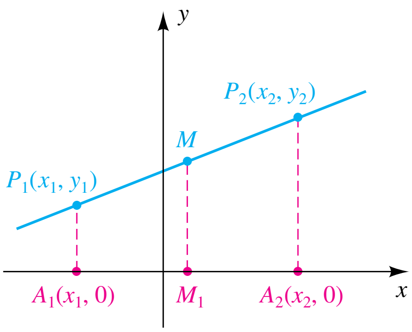
Podemos hallar el punto medio de un segmento de recta al usar la fórmula siguiente.

Fórmula del punto medio

El punto medio M del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

FIGURA 7



DEMOSTRACIÓN Las rectas que pasan por P_1 y P_2 paralelas al eje y se intersectan con el eje x en $A_1(x_1, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$. De la geometría plana, la recta que pasa por el punto medio M paralelo al eje y corta al segmento A_1A_2 en el punto M_1 (vea la figura 7). Si $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$, y por tanto $d(A_1, A_2) = x_2 - x_1$. Como M_1 está a la mitad de A_1 a A_2, la coordenada x de M_1 es igual a la coordenada x de A_1 más la mitad de la distancia de A_1 a A_2, esto es,

$$\text{coordenada } x \text{ de } M_1 = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

La expresión en el lado derecho de la última ecuación se simplifica a

$$\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Este cociente es el *promedio* de los números x_1 y x_2. Se deduce que la coordenada x de M es también $(x_1 + x_2)/2$. Del mismo modo, la coordenada y de M es $(y_1 + y_2)/2$. Estas fórmulas se cumplen para todas las posiciones de P_1 y P_2. ■

Para aplicar la fórmula del punto medio, puede ser suficiente recordar que

La coordenada x del punto medio = el *promedio* de las coordenadas x,

y que

La coordenada y del punto medio = el *promedio* de las coordenadas y.

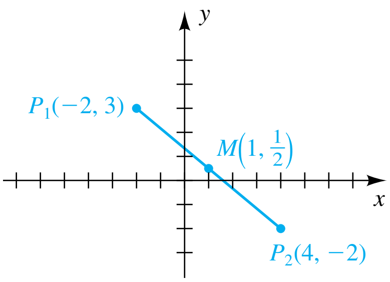
EJEMPLO 5 **Hallar un punto medio**

Encuentre el punto medio M del segmento de recta de $P_1(-2, 3)$ a $P_2(4, -2)$, y verifique que $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

SOLUCIÓN Por la fórmula del punto medio, las coordenadas de M son

(continúa)

FIGURA 8



$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) \quad \text{o} \quad \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Los tres puntos P_1, P_2 y M se grafican en la figura 8. Por la fórmula de la distancia,

$$d(P_1, M) = \sqrt{(1+2)^2 + \left(\tfrac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$

$$d(P_2, M) = \sqrt{(1-4)^2 + \left(\tfrac{1}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}.$$

Por lo tanto, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$. ■

El término **dispositivo de gráficas** se refiere a una calculadora o computadora equipada con paquetes de software apropiados. El **rectángulo de observación** del dispositivo de gráficas es simplemente la porción del plano *xy* mostrado en la pantalla. Las fronteras (lados) del rectángulo de observación se pueden ajustar manualmente si asignamos un valor mínimo *x* (Xmin), un valor máximo *x* (Xmax), la diferencia entre las marcas o subdivisiones sobre el eje *x* (Xscl) y valor mínimo *y* (Ymin), un valor máximo *y* (Ymax) y la diferencia entre las marcas o subdivisiones sobre el eje *y* (Yscl). En ejemplos, muchas veces usamos los valores estándar (o predeterminados) para el rectángulo de observación. Estos valores dependen de las dimensiones (medidas en píxeles) de la pantalla del dispositivo de gráficas. Si deseamos una vista diferente de la gráfica, usamos la frase

"usando [Xmin, Xmax, Xscl] by [Ymin, Ymax, Yscl]"

para indicar el cambio en el rectángulo de observación Si Xscl y/o Yscl se omiten, el valor "predeterminado" es 1.

EJEMPLO 6 **Graficación de puntos en una calculadora de gráficas**

Las estimaciones de la población de Estados Unidos para el 1 de julio de varios años aparecen en la tabla.

(a) Grafique los datos

(b) Use la fórmula del punto medio para estimar la población en 2007.

(c) Encuentre el aumento porcentual en la población de 2008 a 2009.

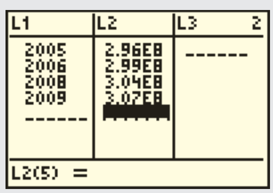
Año	Población
2005	295,753,151
2006	298,593,212
2008	304,374,846
2009	307,006,550

SOLUCIÓN

Ingrese los datos.

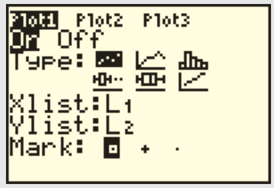
(a) Ponga años en L1 (lista 1), poblaciones en L2.

STAT 1 2005 ENTER
2006 ENTER 2008 ENTER 2009 ENTER
△ (4 veces) ▷ 295,753,151 ENTER
298,593,212 ENTER 304,374,846 ENTER
307,006,550 ENTER



Encienda STAT PLOT.

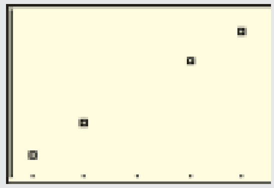
2nd STAT PLOT 1 ENTER



Grafique los datos.

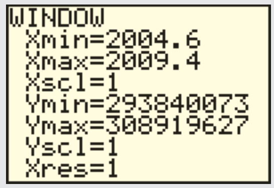
Asegúrese de apagar o borrar todas las asignaciones Y. Si usa ZOOM STAT, la calculadora automáticamente seleccionará el rectángulo de observación para que todos los datos se exhiban.

ZOOM 9



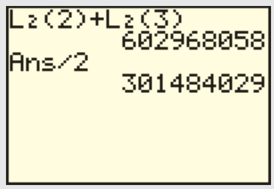
Compruebe los valores en pantalla.

WINDOW



(b) Para estimar la población en 2007, hallaremos el promedio de las estimaciones de población de 2006 y 2008.

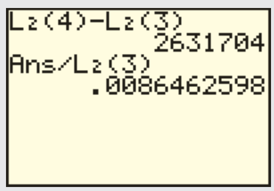
2nd QUIT
2nd L2 (2) + 2nd L2
(3)
ENTER ÷ 2 ENTER



El valor hallado, 301,484,029, es una buena aproximación a la estimación real de 2007, que fue 301,579,895.

(c) Para hallar el aumento porcentual de población de 2008 a 2009, necesitamos dividir la diferencia en las poblaciones entre la población de 2008.

CLEAR 2nd L2 (4)
− 2nd L2 (3) ENTER
÷ 2nd L2 (3) ENTER



Hubo un aumento de alrededor de 0.86% de 2008 a 2009. ■

3.1 Ejercicios

1 Grafique los puntos $A(5, -2)$, $B(-5, -2)$, $C(5, 2)$, $D(-5, 2)$, $E(3, 0)$ y $F(0, 3)$ en un plano de coordenadas.

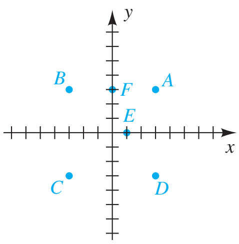
2 Grafique los puntos $A(-3, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(0, 3)$, y $E(2, -3)$ en un plano de coordenadas. Trace los segmentos de recta AB, BC, CD, DE y EA.

3 Grafique los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$, $D(-1, -1)$, y $E(-2, -2)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma (a, a), donde a es un número real.

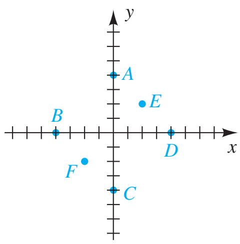
4 Grafique los puntos $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $C(3, -3)$, $D(-1, 1)$, y $E(-3, 3)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma $(a, -a)$, donde a es un número real.

Ejer. 5–6: Encuentre las coordenadas de los puntos A–F.

5



6



Ejer. 7–8: Describa el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en un plano de coordenadas que satisfaga la condición dada.

7 (a) $x = -2$ (b) $y = 5$ (c) $x \geq 0$

(d) $xy > 0$ (e) $y < 0$ (f) $x = 0$

8 (a) $y = -2$ (b) $x = 4$ (c) $x/y < 0$

(d) $xy = 0$ (e) $y > 1$ (f) $y = 0$

Ejer. 9–14: (a) Encuentre la distancia $d(A, B)$ entre A y B. (b) Encuentre el punto medio del segmento AB.

9 $A(4, -3)$, $B(6, 2)$

10 $A(-2, -5)$, $B(4, 6)$

11 $A(-7, 0)$, $B(-2, -4)$

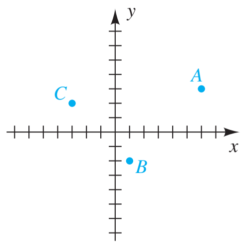
12 $A(5, 2)$, $B(5, -2)$

13 $A(7, -3)$, $B(3, -3)$

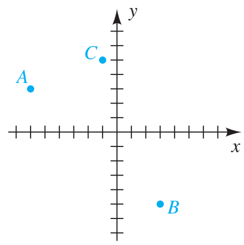
14 $A(-4, 7)$, $B(0, -8)$

Ejer. 15–16: Demuestre que el triángulo con vértices A, B y C es un triángulo rectángulo, y encuentre su área.

15



16



17 Demuestre que $A(-4, 2)$, $B(1, 4)$, $C(3, -1)$ y $D(-2, -3)$ son vértices de un cuadrado.

18 Demuestre que $A(-4, -1)$, $B(0, -2)$, $C(6, 1)$ y $D(2, 2)$ son vértices de un paralelogramo.

19 Dado $A(-3, 8)$, encuentre las coordenadas del punto B tal que $C(5, -10)$ sea el punto medio del segmento AB.

20 Dados $A(5, -8)$ y $B(-6, 2)$, encuentre el punto en el segmento AB que esté a ¾ de la distancia de A a B.

Ejer. 21–22: Demuestre que C está sobre la mediatriz del segmento AB.

21 $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$, $C(3, -6)$

22 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$, $C(7, 7)$

Ejer. 23–24: Encuentre una fórmula que exprese el hecho de que un punto arbitrario $P(x, y)$ está sobre la mediatriz l del segmento AB

23 $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$

24 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$

25 Encuentre una fórmula que exprese el hecho de que $P(x, y)$ está a una distancia 5 del origen. Describa el conjunto de todos esos puntos.

26 Encuentre una fórmula que exprese que $P(x, y)$ está a una distancia $r > 0$ de un punto fijo $C(h, k)$. Describa el conjunto de todos esos puntos.

27 Encuentre todos los puntos sobre el eje y que estén a una distancia 6 de $P(5, 3)$.

28 Encuentre todos los puntos sobre el eje x que estén a una distancia 5 de $P(-2, 4)$.

29 Encuentre el punto con coordenadas de la forma $(2a, a)$ que esté en el tercer cuadrante y a una distancia 5 de $P(1, 3)$.

30 Encuentre todos los puntos con coordenadas de la forma (a, a) que estén a una distancia 3 de $P(-2, 1)$.

31 ¿Para qué valores de a la distancia entre $P(a, 3)$ y $Q(5, 2a)$ es mayor que $\sqrt{26}$?

32 Dados $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$, encuentre una fórmula que no contenga radicales que exprese el hecho de que la suma de las distancias de $P(x, y)$ a A y B, respectivamente, es 5.

33 Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo es equidistante de los vértices. (*Sugerencia:* marque los vértices del triángulo $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ y $B(0, b)$.)

34 Demuestre que las diagonales de cualquier paralelogramo se bisecan entre sí. (*Sugerencia:* marque tres de los vértices del paralelogramo $O(0, 0)$, $A(a, b)$ y $C(0, c)$.)

Ejer. 35–36: Trace la gráfica de los puntos en el rectángulo de observación dado.

35 $A(-5, -3.5)$, $B(-2, 2)$, $C(1, 0.5)$, $D(4, 1)$ y $E(7, 2.5)$ en $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

36 $A(-10, 4)$, $B(-7, -1.1)$, $C(0, -6)$, $D(3, -5.1)$, y $E(9, 2.1)$ en $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

37 **Familias con una computadora** La tabla siguiente indica el número de familias con computadora para los años seleccionados en Estados Unidos.

Año	Familias (en miles)
1984	87,073
1993	98,736
2003	113,126
2009	119,296

(a) Grafique los datos en la pantalla $[1982, 2012]$ por $[80 \times 10^3, 120 \times 10^3, 10 \times 10^3]$.

(b) Examine la forma en que está cambiando el número de familias.

38 **Periódicos publicados** La tabla siguiente indica el número de periódicos publicados en Estados Unidos durante varios años.

(a) Grafique los datos en la pantalla $[1895, 2005, 10]$ por $[0, 3000, 1000]$.

(b) Use la fórmula del punto medio para estimar el número de periódicos en 1930. Compare su respuesta con el verdadero valor, que es 1942.

Año	Periódicos
1900	2226
1920	2042
1940	1878
1960	1763
1980	1745
2000	1480

3.2 Gráficas de ecuaciones

Con frecuencia se usan gráficas para ilustrar cambios en cantidades. Una gráfica en la sección financiera de un periódico puede mostrar la fluctuación del promedio Dow-Jones durante un mes determinado; un meteorólogo podría usar una gráfica para indicar la forma en que varió la temperatura en todo un día; un cardiólogo emplea gráficas (electrocardiogramas) para analizar irregularidades en el corazón; un ingeniero o físico puede recurrir a una gráfica para ilustrar la forma en que la presión de un gas confinado aumenta cuando se calienta el gas. Estas ayudas visuales por lo general revelan el comportamiento de cantidades con más facilidad que una larga tabla de valores numéricos.

Dos cantidades se relacionan a veces por medio de una ecuación o fórmula que contiene dos variables. En esta sección examinamos cómo representar geométricamente una de esas ecuaciones mediante una gráfica en un plano coor-

denado. La gráfica puede entonces usarse para descubrir propiedades de las cantidades que no son evidentes a partir sólo de la ecuación. La tabla siguiente introduce el concepto básico de la gráfica de una ecuación con dos variables x y y. Desde luego, también se pueden usar otras letras para los variables.

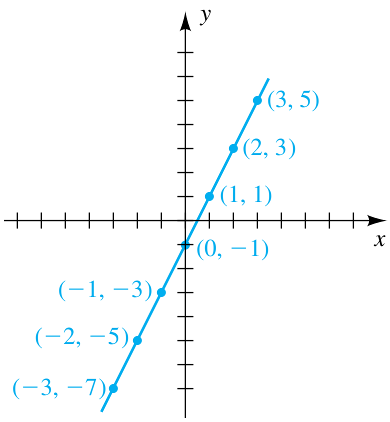
Terminología	Definición	Ilustración
Solución de una ecuación en x y y	Un par ordenado (a, b) que hace verdadero un enunciado si $x = a$ y $y = b$	(2, 3) es una solución de $y^2 = 5x - 1$, porque al sustituir $x = 2$ y $y = 3$ nos da LI: $3^2 = 9$ LD: $5(2) - 1 = 10 - 1 = 9$.

Para cada solución (a, b) de una ecuación con x y y hay un punto $P(a, b)$ en un plano coordenado. El conjunto de todos estos puntos se denomina **gráfica** de la ecuación. Para *trazar la gráfica de una ecuación,* ilustramos las características significativas de la gráfica en un plano coordenado. En casos sencillos, una gráfica se puede trazar al localizar algunos pocos puntos, si acaso. Para una ecuación complicada, localizar los puntos puede dar muy poca información acerca de la gráfica. En estos casos, con frecuencia se emplean métodos de cálculo o de gráficas de computadoras. Empecemos con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 **Trazar una gráfica sencilla localizando los puntos**

Trace la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$.

FIGURA 1



SOLUCIÓN Deseamos hallar los puntos (x, y) en un plano coordenado que corresponde a las soluciones de la ecuación. Es conveniente hacer una lista de las coordenadas de varios de tales puntos en una tabla, donde para cada x obtenemos el valor de y a partir de $y = 2x - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Los puntos con estas coordenadas parecen estar en una recta y podemos trazar la gráfica de la figura 1. Por lo general, los pocos puntos que hemos localizado no serían suficientes para ilustrar la gráfica de una ecuación, pero en este caso elemental podemos estar razonablemente seguros de que la gráfica es una recta. En la siguiente sección estableceremos este hecho. ■

Es imposible trazar toda la gráfica del ejemplo 1 porque podemos asignar valores a x que sean numéricamente tan grandes como se desee. No obstante, al dibujo de la figura 1 lo denominamos *gráfica de la ecuación* o *trazo de la gráfica.* En general, el trazo de una gráfica debería ilustrar sus características esenciales para que las partes restantes (no dibujadas) sean evidentes por sí mismas. Por ejemplo, en la figura 1, el **comportamiento final,** la forma de la gráfica a medida que x toma valores positivos y negativos más grandes (es decir, la forma de los extremos derecho e izquierdo) es evidente para el lector. Para el trabajo escrito, utilice la **notación de flecha** de la siguiente tabla cuando describa las funciones y su comportamiento final.

Notación	Terminología
$x \to a^-$	x se aproxima a a por la izquierda (pasa por valores *menores* que a).
$x \to a^+$	x se aproxima a a por la derecha (pasa por valores mayores que a).
$x \to a$	x se aproxima a a por cada lado de a (x está cada vez más cerca del número a).
$f(x) \to \infty$	$f(x)$ (o y) crece sin límite (puede hacerse tan grande y positivo como se quiera).
$f(x) \to -\infty$	$f(x)$ (o y) decrece sin límite (puede hacerse tan grande y negativo como se quiera)

Los símbolos ∞ (se lee "infinito") y $-\infty$ (se lee "menos infinito") no representan números reales, sino simplemente, determinados tipos de comportamiento de las funciones y variables.

Si una gráfica termina en algún punto (como sería el caso para una semirrecta o segmento de recta), ponemos un punto en el *punto extremo* apropiado de la gráfica. Como observación general final, *si las marcas o subdivisiones en los ejes coordenados no tienen leyenda* (como en la figura 1), *entonces cada marca representa una unidad.* Aplicaremos leyendas sólo cuando se usen diferentes unidades en los ejes. Para gráficas *arbitrarias*, donde las unidades de medida son irrelevantes, omitimos por completo las marcas (vea, por ejemplo las figuras 5 y 6).

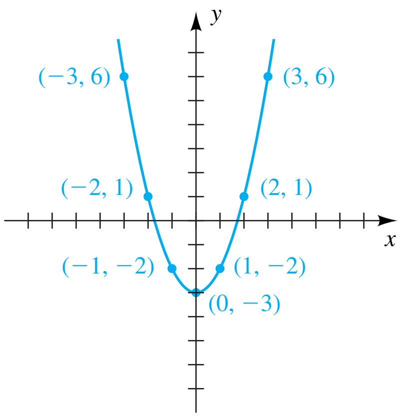
EJEMPLO 2 **Trazar la gráfica de una ecuación**

Trace la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN Sustituyendo valores por x y encontrando los correspondientes valores de y usando $y = x^2 - 3$, obtenemos una tabla de coordenadas de varios puntos en la gráfica:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

FIGURA 2



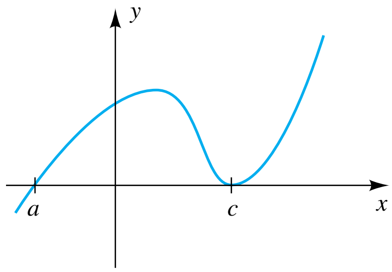
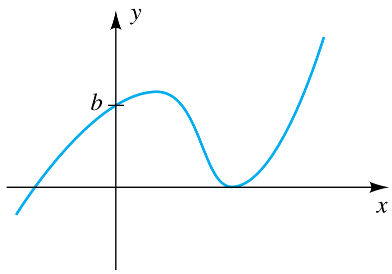
Valores más grandes de $|x|$ producen valores más grandes de y. Por ejemplo, los puntos (4, 13), (5, 22), y (6, 33) están en la gráfica, al igual que $(-4, 13)$, $(-5, 22)$ y $(-6, 33)$. Localizar los puntos dados por la tabla y dibujar una curva suave que pase por estos puntos (en orden de valores crecientes de x) nos da el trazo de la figura 2.

Podemos ver que cuando $x \to 2$, $y \to 1$. (De manera similar, cuando $x \to 2^-$, o cuando $x \to 2^+$, $y \to 1$.) También, vemos que cuando $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \infty$ ya que el valor de y se incrementa sin límite tanto como x sea grande positiva o grande negativa. ■

La gráfica de la figura 2 es una **parábola**, y el eje y es el **eje de la parábola.** El punto más bajo $(0, -3)$ es el **vértice** de la parábola y decimos que la parábola *abre hacia arriba*. Si invertimos la gráfica, entonces la parábola *abre hacia abajo* y el vértice es el punto más alto en la gráfica. En general, la gráfica de *cualquier* ecuación de la forma $y = ax^2 + c$ con $a \neq 0$ es una parábola con vértice $(0, c)$, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$. Si $c = 0$, la ecuación se reduce a $y = ax^2$ y el vértice está en el origen, (0, 0). Las parábolas también pueden abrir a la derecha o a la izquierda (vea el ejemplo 5) o en otras direcciones.

Usaremos la siguiente terminología para describir el lugar donde la gráfica de una ecuación en x y y se cruza con el eje x o el eje y.

Puntos de intersección de la gráfica de una ecuación en *x* y *y*

Terminología	Definición	Interpretación gráfica	Cómo hallar
intersección con eje *x*	Las coordenadas x de puntos donde la gráfica corta al eje x		Sea $y = 0$ y despeje x. Aquí, a y c son intersecciones con el eje x.
intersección con eje *y*	Las coordenadas y de puntos donde la gráfica corta al eje y		Sea $x = 0$ y despeje y. Aquí, b es la intersección con el eje y.

Una intersección con el eje x a veces se conoce como *cero* de la gráfica de una ecuación o como *raíz* de una ecuación. Cuando se use un dispositivo de gráficas para hallar una intersección con el eje x, diremos que estamos usando una *función raíz.*

EJEMPLO 3 Hallar intersecciones con el eje *x* e intersecciones con el eje *y*

Encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN La gráfica está trazada en la figura 2 (ejemplo 2). Encontramos las intersecciones como se indica en la tabla precedente.

(1) intersecciones con el eje x:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 3 && \text{enunciado} \\ 0 &= x^2 - 3 && \text{sea } y = 0 \\ x^2 &= 3 && \text{ecuación equivalente} \\ x &= \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73 && \text{saque la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Así, las intersecciones con el eje x son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$. Los puntos en los que la gráfica cruza el eje x son $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{3}, 0\right)$.

(2) intersecciones con el eje y:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 3 && \text{enunciado} \\ y &= 0 - 3 = -3 && \text{sea } x = 0 \end{aligned}$$

Así, la intersección con el eje y es -3 y el punto en el que la gráfica intersecta el eje y es $(0, -3)$. ■

EJEMPLO 4 **Trazar la gráfica de una ecuación y hallar las intersecciones con los ejes *x* y *y***

Trace la gráfica de $y = x^2 - 3$ y encuentre (o estime) sus intersecciones con los ejes *x* y *y*.

SOLUCIÓN

Apague la función STAT PLOT 1 antes de continuar. Aparece "Done" en la pantalla inicial al terminar la ejecución.

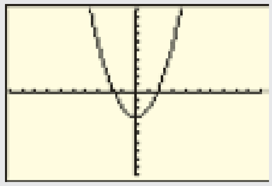
Haga asignaciones Y.

Grafique en una pantalla estándar.

2nd STAT PLOT 4 ENTER

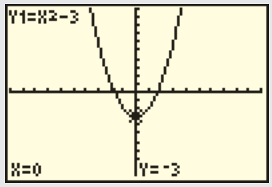
Y= X,T,θ,n x^2 − 3

ZOOM 6



Encuentre la intersección con el eje *y*.

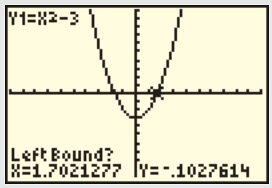
2nd CALC 1 0 ENTER



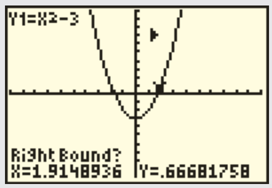
Estime los intersecciones con el eje *x*.

2nd CALC 2

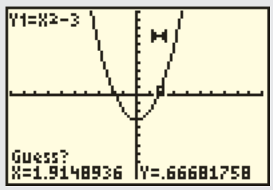
Hallaremos la intersección con el eje *x* positivo. En respuesta a "Left Bound?" mueva el cursor a la derecha para que la coordenada *y* sea un número negativo pequeño y luego pulse ENTER.



En respuesta a "Right Bound?" mueva el cursor a la derecha para que la coordenada *y* sea un número positivo pequeño y luego pulse ENTER.

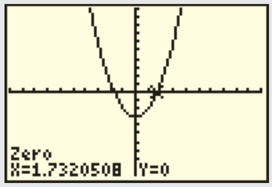


En respuesta a "Guess?" sólo pulse ENTER, porque estamos muy cerca de la intersección con el eje *x*.



(continúa)

Del ejemplo previo sabemos que las intersecciones con el eje x están en aproximadamente ± 1.73.



Nota de calculadora: si el lector conoce una aproximación de la intersección con el eje x, entonces puede introducir valores de x para sus respuestas. Las siguientes respuestas producen el mismo resultado que el de líneas antes.

¿A la izquierda? 1 ENTER

¿A la derecha? 2 ENTER

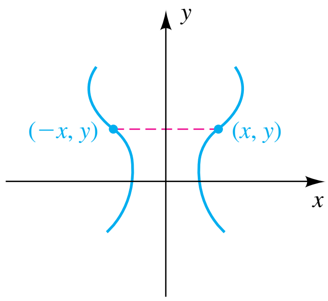
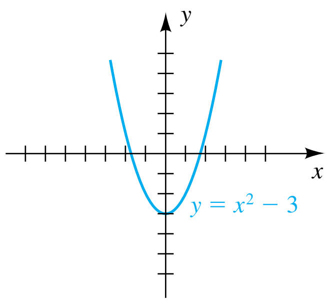
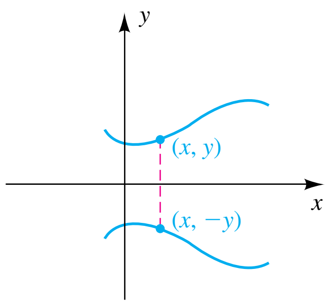
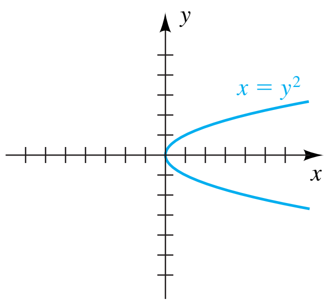
¿Adivinar? 1.5 ENTER ■

Si el plano de coordenadas de la figura 2 se dobla a lo largo del eje y, la gráfica que se encuentra en la mitad izquierda del plano coincide con la de la mitad derecha, decimos que *la gráfica es simétrica con respecto al eje y*. Una gráfica es simétrica con respecto al eje y siempre que el punto $(-x, y)$ esté en la gráfica cuando (x, y) está en la gráfica. La gráfica de $y = x^2 - 3$ del ejemplo 2 tiene esta propiedad, puesto que la sustitución de x por $-x$ da la misma ecuación:

$$y = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3$$

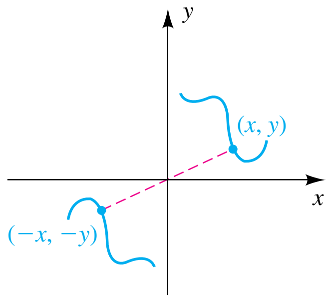
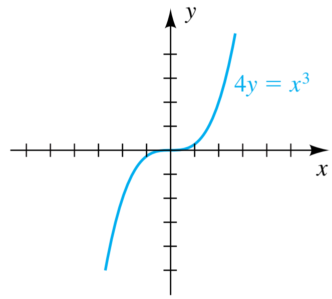
Esta sustitución es una aplicación de la prueba 1 de simetría en la tabla siguiente. Otros dos tipos de simetría y las pruebas apropiadas también se muestran aquí. Las gráficas de $x = y^2$ y $4y = x^3$ de la columna de ilustración se examinan en los ejemplos 5 y 6, respectivamente.

Simetrías de gráficas de ecuaciones en x y y

Terminología	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Ilustración
La gráfica es simétrica con respecto al eje y.		**(1)** La sustitución de x por $-x$ lleva a la misma ecuación.	
La gráfica es simétrica con respecto al eje x.		**(2)** La sustitución de y por $-y$ lleva a la misma ecuación.	

(continúa)

Simetrías de gráficas de ecuaciones *x* y *y*

Terminología	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Ilustración
La gráfica es simétrica con respecto al origen.		**(3)** La sustitución simultánea de $-x$ por x y de $-y$ por y lleva a la misma ecuación.	

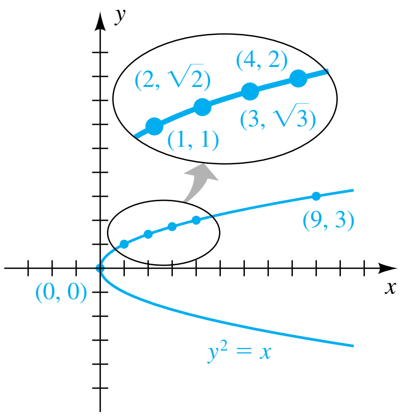
Si la gráfica es simétrica con respecto a un eje, es suficiente determinar la gráfica en la mitad del plano de coordenadas, puesto que podemos trazar el resto de la gráfica al tomar una *imagen de espejo*, o *reflexión*, en el eje apropiado.

EJEMPLO 5 Una gráfica que es simétrica con respecto al eje *x*

Trace la gráfica de la ecuación $y^2 = x$.

SOLUCIÓN Como la sustitución de $-y$ por y no cambia la ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al eje x (vea prueba de simetría 2). En consecuencia, si el punto (x, y) está en la gráfica, entonces el punto $(x, -y)$ está en la gráfica. Por tanto, es suficiente hallar puntos con coordenadas y no negativas y luego reflejarlas en el eje x. La ecuación $y^2 = x$ es equivalente a $y = \pm\sqrt{x}$. Las coordenadas y de puntos *arriba* del eje x (y es *positiva*) están dadas por $y = \sqrt{x}$, mientras que las coordenadas y de puntos *abajo* del eje x (y es *negativa*) están dadas por $y = -\sqrt{x}$. Las coordenadas de algunos puntos sobre la gráfica aparecen a continuación. La gráfica se traza en la figura 3.

FIGURA 3



x	0	1	2	3	4	9
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	3

La gráfica es una parábola que abre a la derecha, con su vértice en el origen. En este caso, el eje x es el eje de la parábola. ■

EJEMPLO 6 Una gráfica que es simétrica con respecto al origen

Trace la gráfica de la ecuación $4y = x^3$.

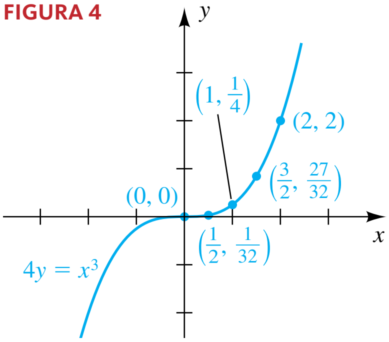
SOLUCIÓN Si simultáneamente sustituimos $-x$ por x y $-y$ por y, entonces

$$4(-y) = (-x)^3 \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad -4y = -x^3.$$

Multiplicando ambos lados por -1, vemos que la última ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación $4y = x^3$. Por lo tanto, de la prueba de simetría 3, la gráfica es simétrica con respecto al origen y si el punto (x, y) está en

(continúa)

FIGURA 4

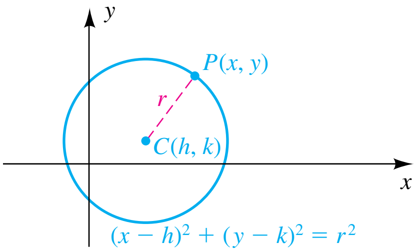


la gráfica, entonces el punto $(-x, -y)$ está en la gráfica. La tabla siguiente contiene coordenadas de algunos puntos en la gráfica.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2	$\frac{125}{32}$

Debido a la simetría, podemos ver que los puntos $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$, $(-2, -2)$, y así sucesivamente, también están en la gráfica. La gráfica aparece en la figura 4. ■

FIGURA 5



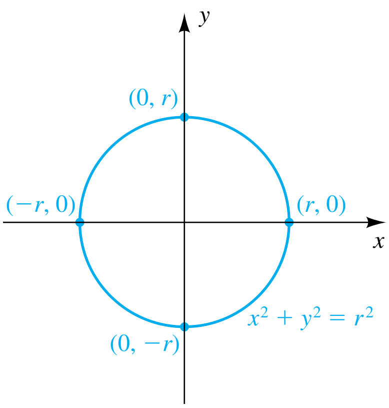
Si $C(h, k)$ es un punto en un plano de coordenadas, entonces una circunferencia con centro C y radio $r > 0$ está formado por todos los puntos en el plano que estén a r unidades de C. Como se ve en la figura 5, un punto $P(x, y)$ está en la circunferencia siempre y cuando $d(C, P) = r$ o bien, por la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Esta ecuación es equivalente a la siguiente, a la que llamaremos **ecuación estándar de una circunferencia.**

Ecuación estándar de una circunferencia con centro (h, k) y radio r	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

FIGURA 6



Si $h = 0$ y $k = 0$, esta ecuación se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$, que es una ecuación de una circunferencia de radio r con centro en el origen (vea figura 6). Si $r = 1$, a la gráfica la llamamos **circunferencia unitaria.**

EJEMPLO 7 **Hallar la ecuación de una circunferencia**

Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro $C(-2, 3)$ y contiene el punto $D(4, 5)$.

SOLUCIÓN La circunferencia se muestra en la figura 7. Como D está en la circunferencia, el radio r es $d(C, D)$. Por la fórmula de la distancia,

$$r = \sqrt{(4 + 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}.$$

Usando la ecuación estándar de una circunferencia con $h = -2$, $k = 3$ y $r = \sqrt{40}$, obtenemos

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 40.$$

Si elevamos al cuadrado términos y simplificamos la última ecuación, podemos escribirla como

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0.$$ ■

Al igual que en la solución del ejemplo 7, elevar al cuadrado términos de una ecuación de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y simplificar lleva a una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

FIGURA 7

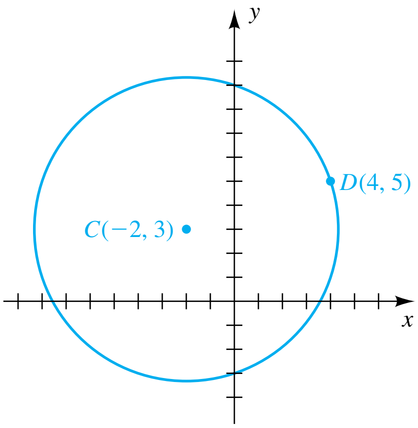
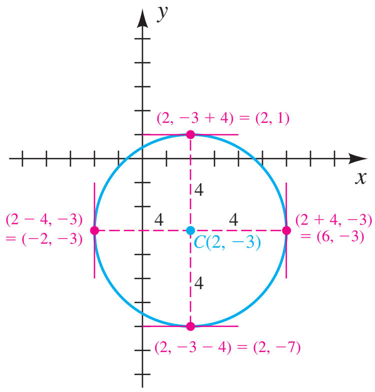
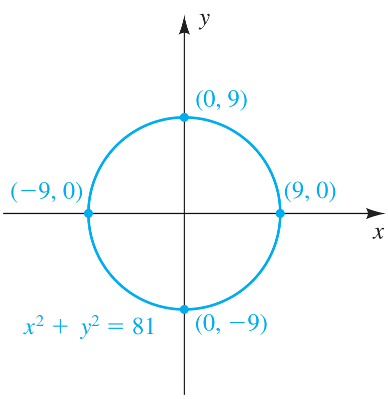


FIGURA 8



Recuerde que una ***recta tangente*** *a una circunferencia es una recta que contiene exactamente un punto de la circunferencia. Toda circunferencia tiene cuatro puntos de tangencia asociados con rectas horizontales y verticales. Es útil localizar estos puntos cuando se trace la gráfica de una circunferencia.*

FIGURA 9



donde a, b y c son números reales. Recíprocamente, si empezamos con esta ecuación, siempre es posible, al *completar cuadrados,* obtener una ecuación de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d.$$

Este método se ilustrará en el ejemplo 8. Si $d > 0$, la gráfica es una circunferencia con centro (h, k) y radio $r = \sqrt{d}$. Si $d = 0$, la gráfica consta de sólo el punto (h, k). Por último, si $d < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y por lo tanto no hay gráfica.

EJEMPLO 8 **Hallar el centro y radio de una circunferencia**

Encuentre el centro y radio de la circunferencia con ecuación

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 18y = 9.$$

SOLUCIÓN Como es más fácil completar el cuadrado si los coeficientes de x^2 y y^2 son 1, empezamos por dividir entre 3 la ecuación dada, obteniendo

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3.$$

Ahora, reescribimos la ecuación como sigue, donde los espacios subrayados representan números por determinar:

$$(x^2 - 4x + \underline{\quad}) + (y^2 + 6y + \underline{\quad}) = 3 + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

Entonces completamos los cuadrados para las expresiones dentro de paréntesis, teniendo cuidado de sumar los números apropiados en *ambos* lados de la ecuación. Para completar el cuadrado para una expresión de la forma $x^2 + ax$, sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x (esto es, $(a/2)^2$) en ambos lados de la ecuación. Del mismo modo, para $y^2 + by$, sumamos $(b/2)^2$ en ambos lados. En este ejemplo, $a = -4$, $b = 6$, $(a/2)^2 = (-2)^2 = 4$ y $(b/2)^2 = 3^2 = 9$. Estas sumas llevan a

$$(x^2 - 4x + \underline{4}) + (y^2 + 6y + \underline{9}) = 3 + \underline{4} + \underline{9} \quad \text{completando los cuadros}$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16. \quad \text{ecuación equivalente}$$

Comparando la última ecuación con la ecuación estándar de una circunferencia, vemos que $h = 2$ y $k = -3$ y concluimos que la circunferencia tiene centro $(2, -3)$ y radio $\sqrt{16} = 4$. Un dibujo de esta circunferencia se ve en la figura 8. ■

En algunas aplicaciones es necesario trabajar con sólo la mitad de una circunferencia, es decir, una **semicircunferencia.** El siguiente ejemplo indica cómo hallar ecuaciones de semicircunferencias con centros en el origen.

EJEMPLO 9 **Hallar ecuaciones de semicircunferencias**

Encuentre ecuaciones para la mitad superior, mitad inferior, mitad derecha y mitad izquierda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 81$.

SOLUCIÓN La gráfica de $x^2 + y^2 = 81$ es una circunferencia de radio 9 con centro en el origen (vea figura 9). Para hallar ecuaciones para las mitades superior e inferior, despejamos y en términos de x:

$$x^2 + y^2 = 81 \quad \text{enunciado}$$
$$y^2 = 81 - x^2 \quad \text{reste } x^2$$
$$y = \pm\sqrt{81 - x^2} \quad \text{saque la raíz cuadrada}$$

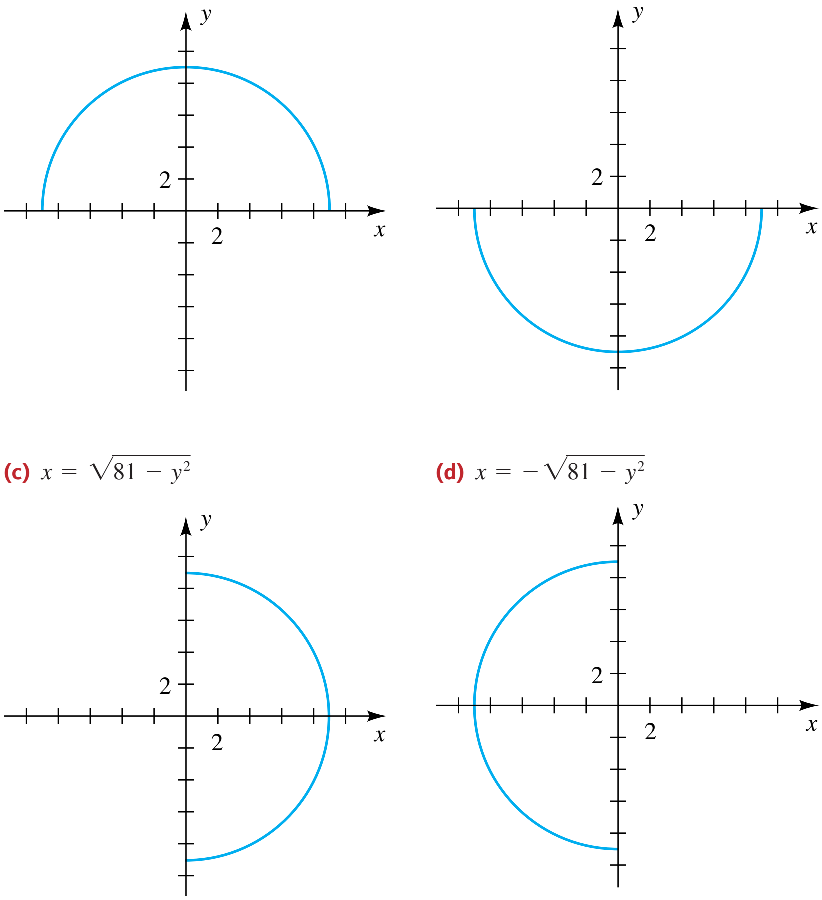
(continúa)

Como $\sqrt{81 - x^2} \geq 0$, se deduce que la mitad superior de la circunferencia tiene la ecuación $y = \sqrt{81 - x^2}$ (y es positiva) y la mitad inferior está dada por $y = -\sqrt{81 - x^2}$ (y es negativa), como se ilustra en la figura 10(a) y (b).

FIGURA 10

(a) $y = \sqrt{81 - x^2}$ **(b)** $y = -\sqrt{81 - x^2}$

(c) $x = \sqrt{81 - y^2}$ **(d)** $x = -\sqrt{81 - y^2}$



Del mismo modo, para hallar ecuaciones para las mitades derecha e izquierda, despejamos x de la ecuación $x^2 + y^2 = 81$ en términos de y, obteniendo

$$x = \pm\sqrt{81 - y^2}.$$

Como $\sqrt{81 - y^2} \geq 0$, se deduce que la mitad derecha de la circunferencia tiene la ecuación $x = \sqrt{81 - y^2}$ (x es positiva) y la mitad izquierda está dada por la ecuación $x = -\sqrt{81 - y^2}$ (x es negativa), como se ilustra en la figura 10(c) y (d). ■

En muchas aplicaciones es esencial hallar los puntos en los que las gráficas de dos ecuaciones en x y y se cruzan. Para aproximar esos puntos de intersección con un dispositivo de gráficas, con frecuencia es necesario despejar y de cada ecuación en términos de x. Por ejemplo, suponga que una ecuación es

$$4x^2 - 3x + 2y + 6 = 0.$$

Si despejamos y tendremos

$$y = \frac{-4x^2 + 3x - 6}{2} = -2x^2 + \frac{3}{2}x - 3.$$

La gráfica de la ecuación se encuentra entonces al hacer la asignación

$$Y_1 = -2x^2 + \tfrac{3}{2}x - 3$$

en el dispositivo de gráficas. (El símbolo Y_1 indica la *primera* ecuación, o el primer valor y). También despejamos y de la segunda ecuación en términos de x y hacemos la asignación

$$Y_2 = \text{una expresión con } x.$$

Al pulsar las teclas apropiadas tendremos dibujos de las gráficas, que llamaremos gráficas de Y_1 y Y_2. A continuación usamos una función de la calculadora de gráficas, por ejemplo *intersect,* para estimar las coordenadas de los puntos de intersección.

En el siguiente ejemplo demostramos esta técnica para las gráficas expuestas en los ejemplos 1 y 2.

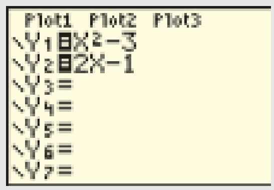
EJEMPLO 10 **Estimar puntos de intersección de gráficas**

Use una calculadora de gráficas para estimar los puntos de intersección de las gráficas de $y = x^2 - 3$ y $y = 2x - 1$.

SOLUCIÓN

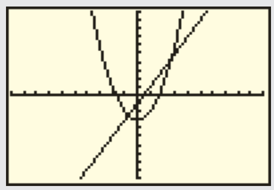
Hacer asignaciones Y.

[Y=] [X,T,θ,n] [x^2] [−] 3 [ENTER]
2 [X,T,θ,n] [−] 1 [ENTER]



Gráfica en una pantalla estándar.

[ZOOM] [6]

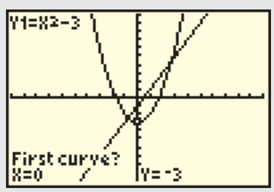


Vemos de las gráficas de Y_1 y Y_2 que hay dos puntos de intersección: P_1 en el primer cuadrante y P_2 en el tercer cuadrante. Encontraremos P_1.

Encuentre un punto de intersección.

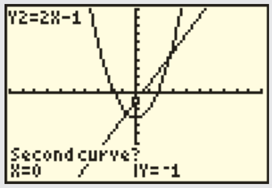
[2nd] [CALC] [5]

En respuesta a “First Curve?” sólo pulse [ENTER] para indicar que Y_1 es la primera curva.

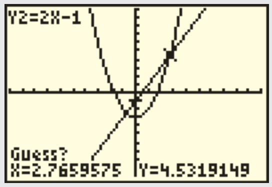


(continúa)

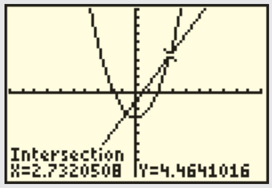
En respuesta a “Second Curve?” sólo pulse ENTER para indicar que Y_2 es la segunda curva.



En respuesta a “Guess?” mueva el cursor cerca de P_1 y luego pulse ENTER.



Estimamos las coordenadas de P_1 como (2.73, 4.46). Luego usamos de nuevo la función de intersección para obtener (−0.73, −2.46) como coordenadas aproximadas de P_2.



Nota de calculadora: Una respuesta alternativa a “Guess?” es introducir una estimación del valor de x del punto de intersección. La siguiente respuesta produce el mismo resultado que en líneas anteriores:

Guess? 3 ENTER ■

EJEMPLO 11 **Estimar puntos de intersección de gráficas**

Use una calculadora de gráficas para estimar los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 - 4y = 12$.

SOLUCIÓN Al igual que en el ejemplo 9, de $x^2 + y^2 = 25$ despejamos x para obtener

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2},$$

y hacemos las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{y} \quad Y_2 = -Y_1$$

(Muchas veces asignamos Y_2 en términos de Y_1 para evitar tecleo repetitivo.)

Podemos considerar la ecuación de la segunda circunferencia como una ecuación cuadrática de la forma $ay^2 + by + c = 0$ en y al reacomodar términos como sigue:

$$y^2 - 4y + (x^2 - 12) = 0$$

La aplicación de la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = -4$ y $c = x^2 - 12$ ($x^2 - 12$ se considera como el término constante, puesto que no contiene una variable y) nos da

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(x^2 - 12)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(x^2 - 12)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{4 - (x^2 - 12)}}{2} = 2 \pm \sqrt{16 - x^2}.$$

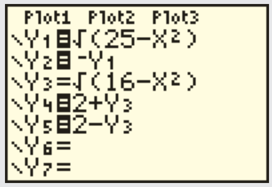
(No es necesario simplificar la ecuación más de lo que ya hemos hecho, pero la forma simplificada es más fácil de introducir en una calculadora de gráficas.)

Ahora hacemos las asignaciones

$$Y_3 = \sqrt{16 - x^2}, \quad Y_4 = 2 + Y_3 \quad \text{y} \quad Y_5 = 2 - Y_3.$$

Hacer asignaciones Y.

Y= 2nd √ 25 − X,T,θ,n x²
) ▽ (−) VARS ▷ 1 1 ▽
2nd √ 16 − X,T,θ,n x²) ▽
2 + VARS ▷ 1 3 ▽
2 − VARS ▷ 1 3



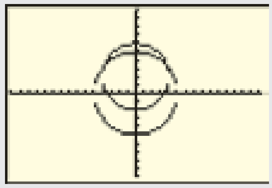
Apagar Y_3.

△ (3 veces) ◁ ENTER

Usaremos una pantalla cuadrada para que las circunferencias se vean como circunferencias en lugar de óvalos.

Graficar en pantalla cuadrada.

ZOOM 5

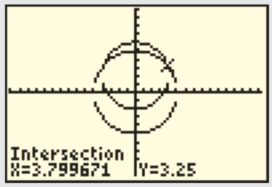


Vemos de las gráficas de las circunferencias que hay dos puntos de intersección: P_1 en el primer cuadrante y P_2 en el segundo. De nuevo, hallaremos P_1.

Hallar un punto de intersección.

2nd CALC 5

En respuesta a "First Curve?" sólo pulse ENTER para indicar que Y_1 es la primera curva. En respuesta a "Second Curve?" presión ▽ para saltarse Y_2 como la selección para la segunda curva, puesto que no se cruza con Y_1. Ahora pulse ENTER para seleccionar Y_4 como la segunda curva. En respuesta a "Guess?" mueva el cursor cerca de P_1 y luego pulse ENTER o escriba 3.5 para un cálculo y pulse ENTER.



Así, estimamos las coordenadas de P_1 como (3.8, 3.25). Como ambas circunferencias son simétricas con respecto al eje y, P_2 es aproximadamente (−3.8, 3.25). ■

Debe observarse que las soluciones aproximadas halladas en los ejemplos 10 y 11 no satisfacen las ecuaciones dadas debido a la imprecisión de las estimaciones hechas a partir de la gráfica. En un capítulo más adelante explicaremos la forma de hallar los valores *exactos* para los puntos de intersección.

3.2 Ejercicios

Ejer. 1–20: Trace la gráfica de la ecuación y marque las intersecciones con los ejes x y y.

1 $y = 2x - 3$

2 $y = 4x + 2$

3 $y = -x + 2$

4 $y = -2x - 3$

5 $y = -2x^2$

6 $y = \frac{1}{3}x^2$

7 $y = 2x^2 - 1$

8 $y = -x^2 + 2$

9 $x = \frac{1}{4}y^2$

10 $x = -2y^2$

11 $x = -y^2 + 5$

12 $x = 2y^2 - 4$

13 $y = -\frac{1}{4}x^3$

14 $y = \frac{1}{2}x^3$

15 $y = x^3 - 8$

16 $y = -x^3 + 1$

17 $y = \sqrt{x}$

18 $y = \sqrt{-x}$

19 $y = \sqrt{x} - 4$

20 $y = \sqrt{x - 4}$

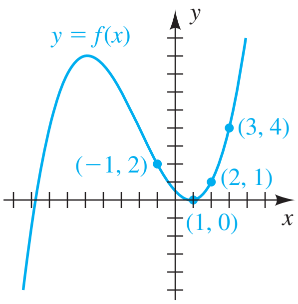
Ejer. 21–22: Use pruebas de simetría para determinar cuáles gráficas de los ejercicios indicados son simétricas con respecto a (a) el eje y, (b) el eje x y (c) el origen.

21 Los ejercicios de número impar en 1–20

22 Los ejercicios de número par en 1–20

Ejer. 23–24: Complete los enunciados.

23



(a) Cuando $x \to -1^-$, $f(x) \to$ ____

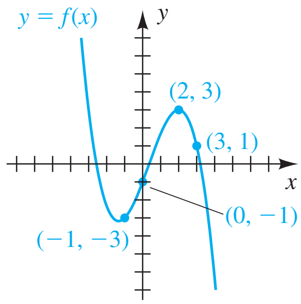
(b) Cuando $x \to 2^+$, $f(x) \to$ ____

(c) Cuando $x \to 3$, $f(x) \to$ ____

(d) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____

(e) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____

24



(a) Cuando $x \to 2^-$, $f(x) \to$ ____

(b) Cuando $x \to -1^+$, $f(x) \to$ ____

(c) Cuando $x \to 0$, $f(x) \to$ ____

(d) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____

(e) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____

Ejer. 25–36: Trace la gráfica de la circunferencia o semicircunferencia.

25 $x^2 + y^2 = 11$

26 $x^2 + y^2 = 5$

27 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

28 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

29 $(x + 3)^2 + y^2 = 16$

30 $x^2 + (y - 2)^2 = 25$

31 $4x^2 + 4y^2 = 1$

32 $9x^2 + 9y^2 = 4$

33 $y = -\sqrt{16 - x^2}$

34 $y = \sqrt{4 - x^2}$

35 $x = \sqrt{9 - y^2}$

36 $x = -\sqrt{25 - y^2}$

Ejer. 37–48: Encuentre una ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones expresadas.

37 Centro $C(2, -3)$, radio 5

38 Centro $C(-5, 1)$, radio 3

39 Centro $C\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, radio $\sqrt{5}$

40 Centro $C\left(\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}\right)$, radio $3\sqrt{2}$

41 Centro $C(-4, 6)$, pasando por el punto $P(3, 1)$

42 Centro en el origen, pasando por el punto $P(4, -7)$

43 Centro $C(-3, 6)$, tangente al eje y

44 Centro $C(4, -3)$, tangente al eje x

45 Tangente a ambos ejes, centro en el segundo cuadrante, radio 2

46 Tangente a ambos ejes, centro en el cuarto cuadrante, radio 3

47 Puntos extremos de un diámetro $A(4, -3)$ y $B(-2, 7)$

48 Puntos extremos de un diámetro $A(-5, 2)$ y $B(3, 6)$

Ejer. 49–58: Encuentre el centro y radio de la circunferencia con la ecuación dada.

49 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

50 $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0$

51 $x^2 + y^2 + 4y - 7 = 0$

52 $x^2 + y^2 - 10x + 18 = 0$

53 $2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 15 = 0$

54 $4x^2 + 4y^2 + 16x + 24y + 31 = 0$

55 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

56 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$

57 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 21 = 0$

58 $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 16 = 0$

Ejer. 59–62: Encuentre ecuaciones para la mitad superior, mitad inferior, mitad derecha y mitad izquierda de la circunferencia.

59 $x^2 + y^2 = 25$

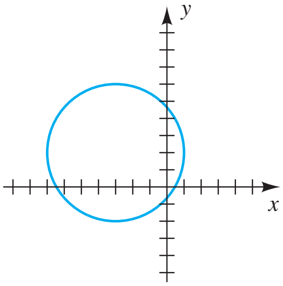
60 $(x + 3)^2 + y^2 = 64$

61 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 49$

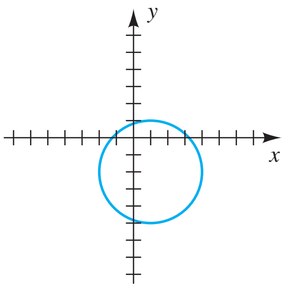
62 $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

Ejer. 63–66: Encuentre una ecuación para la circunferencia o semicircunferencia.

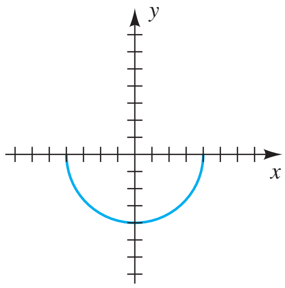
63



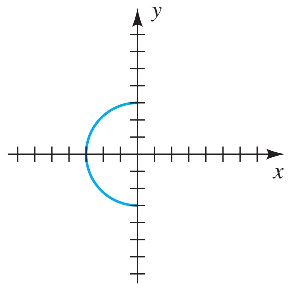
64



65



66



Ejer. 67–68: Determine si el punto *P* está dentro, fuera o sobre la circunferencia con centro *C* y radio *r*.

67 **(a)** $P(2, 3)$, $C(4, 6)$, $r = 4$

(b) $P(4, 2)$, $C(1, -2)$, $r = 5$

(c) $P(-3, 5)$, $C(2, 1)$, $r = 6$

68 **(a)** $P(3, 8)$, $C(-2, -4)$, $r = 13$

(b) $P(-2, 5)$, $C(3, 7)$ $r = 6$

(c) $P(1, -2)$, $C(6, -7)$, $r = 7$

Ejer. 69–70: Para la circunferencia dada, encuentre (a) los puntos de intersección con el eje *x* y (b) los puntos de intersección con el eje *y*.

69 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

70 $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$

71 Encuentre la ecuación de la circunferencia que es concéntrica (tiene el mismo centro) con $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ y pasa por $P(2, 6)$.

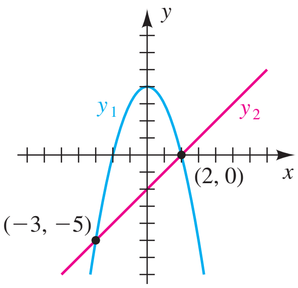
72 **Alcances de transmisores de radio** La señal de una estación de radio tiene un alcance circular de 50 millas. Una segunda estación de radio, situada a 100 millas al este y 80 millas al norte de la primera estación, tiene un alcance de 80 millas. ¿Hay lugares donde se puedan recibir las señales de ambas estaciones de radio? Explique su respuesta.

73 Una circunferencia C_1 de radio 5 tiene su centro en el origen. Dentro de esta circunferencia hay una circunferencia C_2 de radio 2 en el primer cuadrante que es tangente a C_1. La coordenada *y* del centro de C_2 es 2. Encuentre la coordenada *x* del centro de C_2.

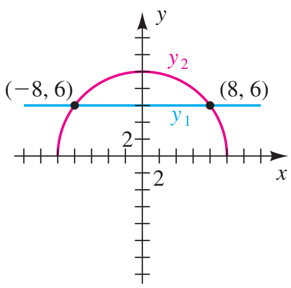
74 Una circunferencia C_1 de radio 5 tiene su centro en el origen. Fuera de esta circunferencia está una circunferencia C_2 de radio 2 en el primer cuadrante que es tangente a C_1. La coordenada *y* del centro de C_2 es 3. Encuentre la coordenada *x* del centro de C_2.

Ejer. 75–78: Exprese, en forma de intervalo, los valores x tales que $y_1 < y_2$. Suponga que todos los puntos de la intersección se muestran en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

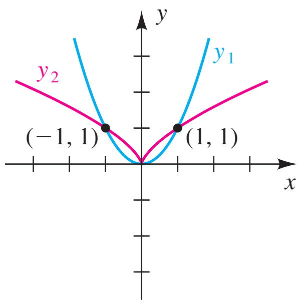
75



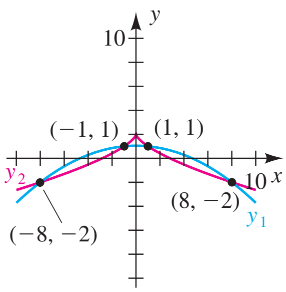
76



77



78



79 Grafique la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ usando las ecuaciones $Y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ y $Y_2 = -Y_1$ en la pantalla dada. A continuación explique cómo es que la pantalla afecta la gráfica y determine la pantalla que resulte en una gráfica que más se parezca a una circunferencia.

(1) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ **(2)** $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

(3) $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$ **(4)** $[-5, 5]$ por $[-2, 2]$

80 Grafique la ecuación $|x| + |y| = 5$, usando las ecuaciones $Y_1 = 5 - |x|$ y $Y_2 = -Y_1$ en la pantalla $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

(a) Encuentre el número de intersecciones con x y y.

(b) Use la gráfica para determinar la región donde $|x| + |y| < 5$.

Ejer. 81–82: Grafique la ecuación y estime las intersecciones con el eje x.

81 $y = x^3 - \frac{9}{10}x^2 - \frac{43}{25}x + \frac{24}{25}$

82 $y = x^4 + 0.85x^3 - 2.46x^2 - 1.07x + 0.51$

Ejer. 83–86: Grafique las dos ecuaciones en el mismo plano de coordenadas y estime las coordenadas de sus puntos de intersección.

83 $y = x^3 + x;$ $x^2 + y^2 = 1$

84 $y = 3x^4 - \frac{3}{2};$ $x^2 + y^2 = 1$

85 $x^2 + (y - 1)^2 = 1;$ $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = 1$

86 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4};$ $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

87 **Distancia entre autos** La distancia D (en millas) entre dos autos que se encuentran en la misma carretera en el tiempo t (en minutos), está descrita por la ecuación $D = |2t - 4|$ en el intervalo $[0, 4]$. Grafique D y describa el movimiento de los autos.

88 **Agua en una piscina** La cantidad de agua A en una piscina en el día x está dada por $A = 12{,}000x - 2000x^2$, donde A está en galones y $x = 0$ corresponde al mediodía de un domingo. Grafique A en el intervalo $[0, 6]$ y describa la cantidad de agua en la piscina.

89 **Velocidad del sonido** La velocidad del sonido v en el aire varía con la temperatura. Se puede calcular en ft/s usando la ecuación $v = 1087\sqrt{\dfrac{T + 273}{273}}$, donde T es la temperatura (en °C).

(a) Aproxime v cuando $T = 20°C$.

(b) Determine la temperatura al grado más cercano, tanto algebraica como gráficamente, cuando la velocidad del sonido es 1000 ft/s.

90 El área A de un triángulo equilátero con un lado de longitud s es $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Suponga que A debe ser igual a 100 ft^2 con un error máximo de ± 1 ft^2. Determine gráficamente con qué precisión debe medirse s para satisfacer este requisito de error. (*Sugerencia:* grafique $y = A$, $y = 99$ y $y = 101$.)

3.3 Rectas

Uno de los conceptos básicos en geometría es el de *recta.* En esta sección restringiremos nuestro análisis a rectas que se encuentran en un plano de coordenadas, lo que nos permitirá usar métodos algebraicos para estudiar sus propiedades. Dos de nuestros principales objetivos pueden expresarse como sigue:

(1) Dada una recta l en un plano de coordenadas, encontrar una ecuación cuya gráfica corresponda a l.

(2) Dada una ecuación de la recta l en un plano de coordenadas, trazar la gráfica de la ecuación.

El siguiente concepto es fundamental para el estudio de las rectas.

Definición de la pendiente de una recta

Sea l una recta que no es paralela al eje y, y sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos distintos en l. La **pendiente m** de l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si l es paralela al eje y, entonces la pendiente de l no está definida.

La letra griega Δ se usa en matemáticas para denotar "cambio en". Así, podemos pensar en la pendiente m como

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}.$$

Los puntos típicos P_1 y P_2 sobre la recta l se muestran en la figura 1. El numerador $y_2 - y_1$ en la fórmula para m es el cambio vertical en dirección de P_1 a P_2 y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador $x_2 - x_1$ es el cambio horizontal de P_1 a P_2, y puede ser positivo o negativo, pero nunca cero, porque l no es paralela al eje y si existe una pendiente. En la figura 1(a) la pendiente es positiva y vemos que la recta *sube*. En la figura 1(b) la pendiente es negativa y la recta *cae*.

En el proceso de hallar la pendiente de una recta, no importa cuál punto marquemos como P_1 y cuál como P_2, porque

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

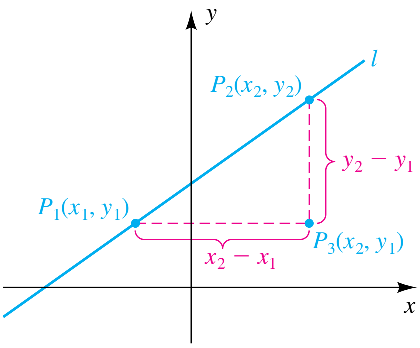
Si los puntos se marcan de modo que $x_1 < x_2$, como en la figura 1, entonces $x_2 - x_1 > 0$, y por lo tanto la pendiente es positiva, negativa o cero, dependiendo de si $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$ o $y_2 = y_1$, respectivamente.

La definición de pendiente es independiente de los dos puntos que se escojan en l. Si se usan otros puntos $P_1'(x_1', y_1')$ y $P_2'(x_2', y_2')$, entonces, como en la figura 2, el triángulo con vértices P_1', P_2', y $P_3'(x_2', y_1')$ es semejante al triángulo con vértices P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$. Como las razones entre lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

FIGURA 1

(a) Pendiente positiva (la recta sube)



(b) Pendiente negativa (la recta cae)

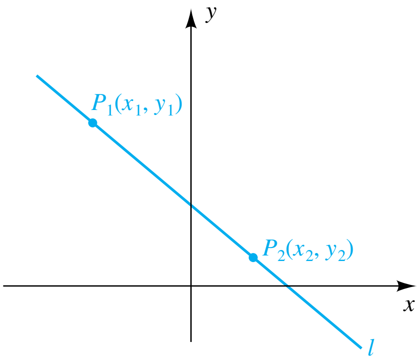
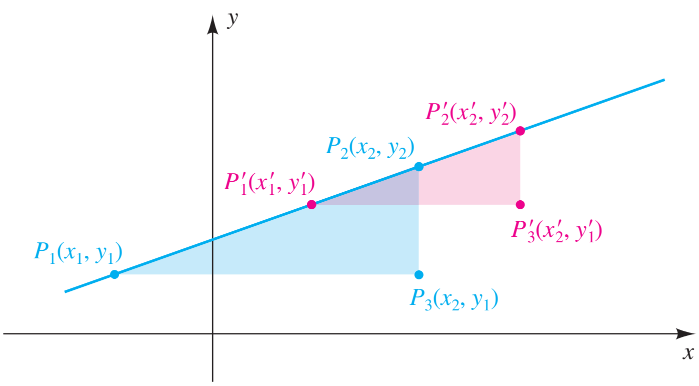


FIGURA 2



EJEMPLO 1 **Hallar pendientes**

Trace la recta que pasa por cada par de puntos y encuentre su pendiente m:

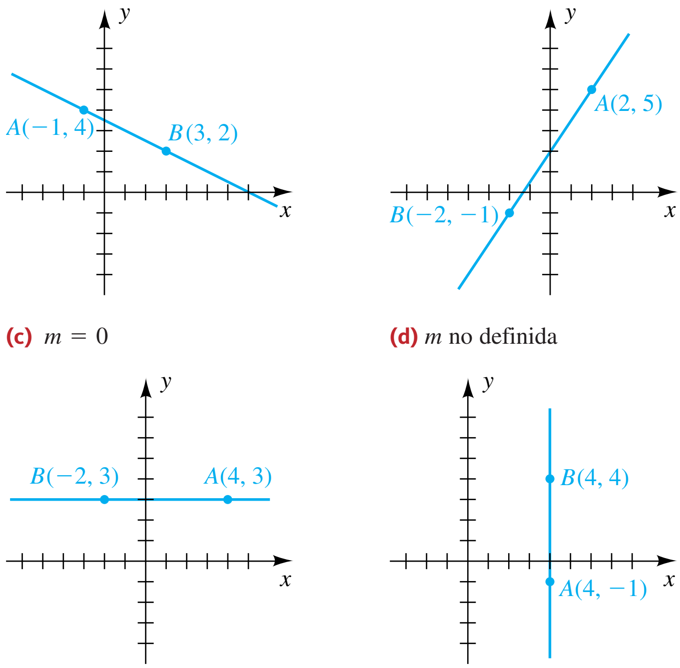
(a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ **(b)** $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$

(c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ **(d)** $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$

SOLUCIÓN Las rectas se trazan en la figura 3. Usamos la definición de pendiente para hallar la pendiente de cada recta.

FIGURA 3

(a) $m = -\frac{1}{2}$ **(b)** $m = \frac{3}{2}$ **(c)** $m = 0$ **(d)** m no definida



(a) $m = \dfrac{2 - 4}{3 - (-1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

(b) $m = \dfrac{5 - (-1)}{2 - (-2)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

(c) $m = \dfrac{3 - 3}{-2 - 4} = \dfrac{0}{-6} = 0$

(d) La pendiente no está definida porque la recta es paralela al eje y. Note que si se usa la fórmula para m, el denominador es cero. ■

EJEMPLO 2 **Trazar una recta con una pendiente determinada**

Trace la recta que pasa por $P(2, 1)$ que tiene

(a) pendiente $\frac{5}{3}$ **(b)** pendiente $-\frac{5}{3}$

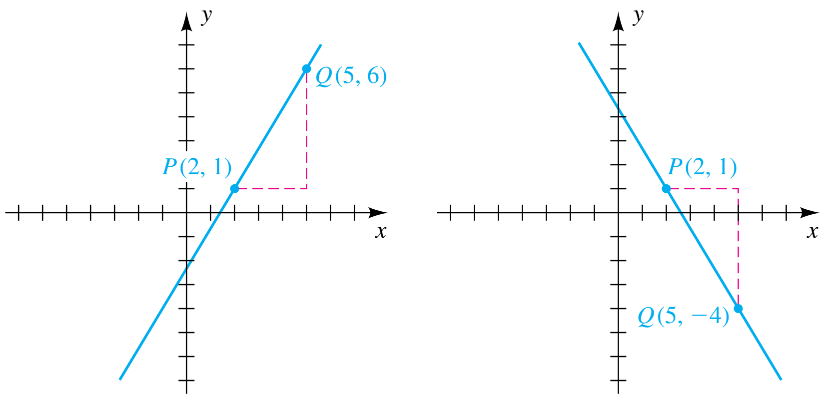
SOLUCIÓN Si la pendiente de una recta es a/b y b es positiva, entonces por cada cambio de b unidades en la dirección horizontal, la recta sube o cae $|a|$ unidades, dependiendo de si a es positiva o negativa, respectivamente.

(a) Si $P(2, 1)$ está en la recta y $m = \frac{5}{3}$, podemos obtener otro punto sobre la recta al iniciar en P y mover 3 unidades a la derecha y 5 unidades *hacia arriba*. Esto nos da el punto $Q(5, 6)$ y la recta está determinada como en la figura 4(a).

(b) Si $P(2, 1)$ está en la recta y $m = -\frac{5}{3}$, nos movemos 3 unidades a la derecha y 5 unidades *hacia abajo*, obteniendo la recta que pasa por $Q(5, -4)$, como en la figura 4(b). ■

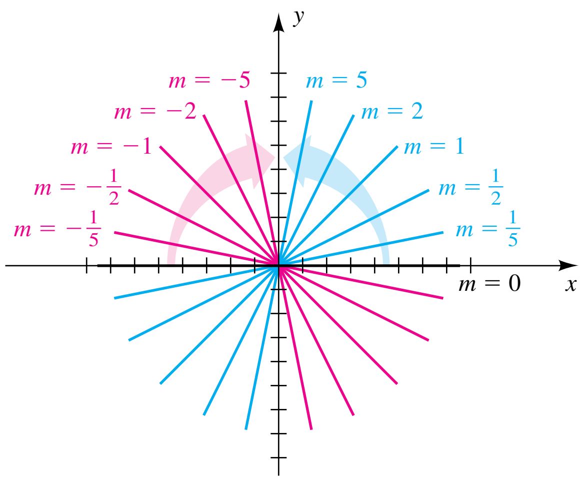
FIGURA 4

(a) $m = \frac{5}{3}$ **(b)** $m = -\frac{5}{3}$



El diagrama de la figura 5 indica las pendientes de varias rectas que pasan por el origen. La recta que se encuentra en el eje x tiene pendiente $m = 0$. Si esta recta se hace girar alrededor de O *en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj* (como se indica con la flecha azul), la pendiente es positiva y aumenta, llegando al valor 1 cuando la recta biseca al primer cuadrante y continúa aumentando a medida que la recta se acerca al eje y. Si hacemos girar la recta de pendiente $m = 0$ *en el sentido de las manecillas de un reloj* (como se indica con la flecha roja), la pendiente es negativa, llegando al valor -1 cuando la recta biseca el segundo cuadrante y se hace grande y negativa a medida que la recta se acerca al eje y.

FIGURA 5



Las rectas que son horizontales o verticales tienen ecuaciones sencillas, como se indica en la tabla siguiente.

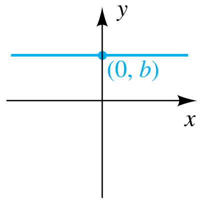
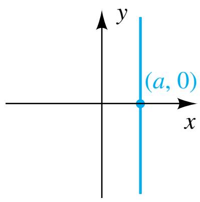
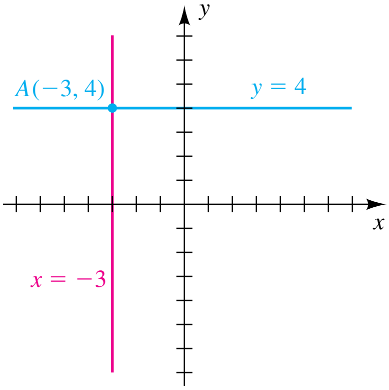
Terminología	Definición	Gráfica	Ecuación	Pendiente
Recta horizontal	Una recta paralela al eje x		$y = b$ la intersección con el eje y es b	La pendiente es 0
Recta vertical	Una recta paralela al eje y		$x = a$ la intersección con el eje x es a	La pendiente no está definida

FIGURA 6



Un error común es considerar que la gráfica de $y = h$ consiste solo de un punto $(0, b)$. Si expresamos la ecuación en la forma $0 \cdot x + y = b$, vemos que el valor de x es inmaterial; así, la gráfica de $y = b$ está formada por los puntos (x, b) para *toda* x y por tanto es una recta horizontal. Del mismo modo, la gráfica de $x = a$ es la recta vertical formada por todos los puntos (a, y), donde y es un número real.

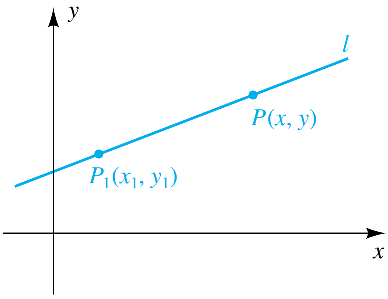
EJEMPLO 3 **Hallar ecuaciones de rectas horizontales y verticales**

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 4)$ y paralela a

(a) el eje x **(b)** el eje y

SOLUCIÓN Las dos rectas están trazadas en la figura 6. Como se indica en la tabla precedente, las ecuaciones son $y = 4$ para el inciso (a) y $x = -3$ para el inciso (b). ■

FIGURA 7



A continuación busquemos una ecuación de una recta l que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m. Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$ (vea figura 7), entonces P está en l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m; es decir, si

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Note que (x_1, y_1) es una solución de la última ecuación, y por tanto los puntos en l son precisamente los puntos que corresponden a las soluciones. Esta ecuación para l se conoce como **forma punto-pendiente.**

Forma punto-pendiente para la ecuación de una recta

Una ecuación para la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La forma punto-pendiente es sólo una posibilidad para una ecuación de una recta. Hay numerosas ecuaciones equivalentes. A veces simplificamos la ecuación obtenida usando la forma punto-pendiente para

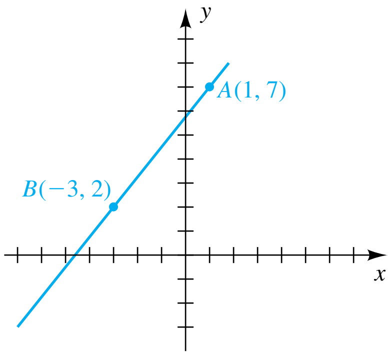
$$ax + by = c \qquad \text{o} \qquad ax + by + d = 0,$$

donde a, b y c son enteros sin factor común, $a > 0$ y $d = -c$.

EJEMPLO 4 **Hallar una ecuación de una recta que pasa por dos puntos**

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

FIGURA 8



SOLUCIÓN La recta está trazada en la figura 8. La fórmula para la pendiente m nos da

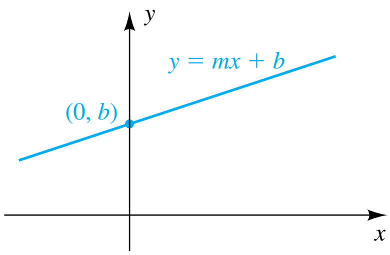
$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}.$$

Podemos usar las coordenadas de A o de B para (x_1, y_1) en la forma punto-pendiente. Con el uso de $A(1, 7)$ tenemos:

$$\begin{aligned} y - 7 &= \tfrac{5}{4}(x - 1) && \text{forma punto-pendiente} \\ 4(y - 7) &= 5(x - 1) && \text{multiplique por 4} \\ 4y - 28 &= 5x - 5 && \text{multiplique factores} \\ -5x + 4y &= 23 && \text{reste } 5x \text{ y sume 28} \\ 5x - 4y &= -23 && \text{multiplique por } -1 \end{aligned}$$

La última ecuación es una de las formas deseadas para una ecuación de una recta. Otra es $5x - 4y + 23 = 0$. ■

FIGURA 9



La forma punto-pendiente para la ecuación de una recta se puede reescribir como $y = mx - mx_1 + y_1$, que es de la forma

$$y = mx + b$$

con $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la intersección de la gráfica con el eje y, como se indica en la figura 9. Como la ecuación $y = mx + b$ muestra la pendiente m y la intersección b con el eje y de l, se denomina **forma pendiente ordenada al origen** para la ecuación de una recta. Recíprocamente, si comenzamos con $y = mx + b$, podemos escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

Comparando esta ecuación con la forma punto-pendiente, vemos que la gráfica es una recta con pendiente m y que pasa por el punto $(0, b)$. Hemos demostrado el siguiente resultado.

Forma de ordenada en el origen para la ecuación de una recta	La gráfica de $y = mx + b$ es una recta que tiene pendiente m e intersección b con el eje y.

EJEMPLO 5 **Expresar una ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen**

Exprese la ecuación $2x - 5y = 8$ en la forma pendiente-ordenada al origen.

SOLUCIÓN Nuestra meta es despejar y de la ecuación dada para obtener la forma $y = mx + b$. Podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 8 && \text{enunciado} \\ -5y &= -2x + 8 && \text{reste } 2x \\ y &= \left(\frac{-2}{-5}\right)x + \left(\frac{8}{-5}\right) && \text{divida entre } -5 \\ y &= \tfrac{2}{5}x + \left(-\tfrac{8}{5}\right) && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última ecuación es la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$ con pendiente $m = \frac{2}{5}$ e intersección con el eje y de $b = -\frac{8}{5}$. ■

Se deduce de la forma punto-pendiente que toda recta es una gráfica de una ecuación

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son números reales y a y b no pueden ser cero ambas. A esta ecuación se le llama **ecuación lineal** en x y y. Demostremos, recíprocamente, que la gráfica de $ax + by = c$, con a y b sin que ambas sean cero, es siempre una recta. Si $b \neq 0$, podemos despejar y y obtener

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{b},$$

que, por la forma pendiente-ordenada al origen, es una ecuación de una recta con pendiente $-a/b$ e intersección c/b con el eje y. Si $b = 0$ pero $a \neq 0$, podemos despejar x, obteniendo $x = c/a$, que es la ecuación de una recta vertical con intersección c/a con el eje x. Esta discusión establece el siguiente resultando.

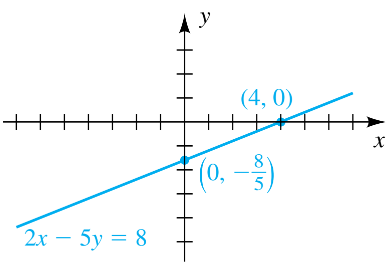
Forma general para la ecuación de una recta	La gráfica de una ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta y, recíprocamente, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Para mayor sencillez, usamos la terminología *la recta* $ax + by = c$ en vez de *la recta con ecuación* $ax + by = c$.

EJEMPLO 6 **Trazar la gráfica de una ecuación lineal**

Trace la gráfica de $2x - 5y = 8$.

FIGURA 10



SOLUCIÓN Sabemos de la exposición precedente que la gráfica es una recta y que es suficiente hallar dos puntos en la gráfica. Encontremos los puntos de intersección con los ejes x y y al sustituir $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, en la ecuación dada $2x - 5y = 8$.

Intersección con el eje x: si $y = 0$, entonces $2x = 8$ o $x = 4$.

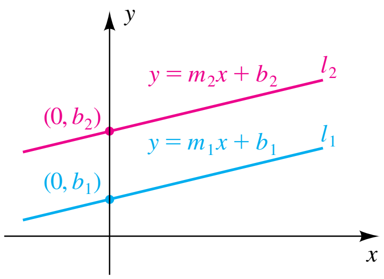
Intersección con el eje y: si $x = 0$. entonces $-5y = 8$ o $y = -\frac{8}{5}$.

Localizando los puntos $(4, 0)$ y $\left(0, -\frac{8}{5}\right)$ y trazando la recta que pase por ellos nos da la gráfica de la figura 10. ■

El siguiente teorema especifica la relación entre **rectas paralelas** (rectas en un plano que no se cruzan) y pendiente.

Teorema de pendientes de rectas paralelas	Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

FIGURA 11



DEMOSTRACIÓN Sean l_1 y l_2 rectas distintas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Si los puntos de intersección con el eje y son b_1 y b_2 (vea la figura 11), entonces, por la forma pendiente-ordenada al origen, las rectas tienen ecuaciones

$$y = m_1x + b_1 \qquad \text{y} \qquad y = m_2x + b_2.$$

Las rectas se cruzan en algún punto (x, y) si y sólo si los valores de y son iguales para alguna x es decir, si

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2,$$

o bien,

$$(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1.$$

De la última ecuación se puede despejar x si y sólo si $m_1 - m_2 \neq 0$. Hemos demostrado que las rectas l_1 y l_2 se cruzan si y sólo si $m_1 \neq m_2$. Por lo tanto, *no se cruzan* (son paralelas) si y sólo si $m_1 = m_2$. ■

EJEMPLO 7 **Hallar una ecuación de una recta paralela a una recta determinada**

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $P(5, -7)$ que es paralela a la recta $6x + 3y = 4$.

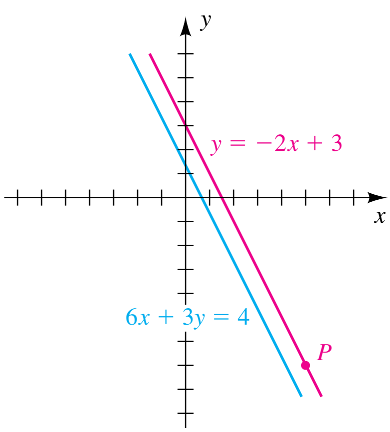
SOLUCIÓN Primero expresamos la ecuación dada en forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 4 && \text{original} \\ 3y &= -6x + 4 && \text{reste } 6x \\ y &= -2x + \tfrac{4}{3} && \text{divida entre 3} \end{aligned}$$

La última ecuación está en la forma pendiente-ordenada al origen, $y = mx + b$, con pendiente $m = -2$ y pendiente-ordenada al origen de $\frac{4}{3}$. Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la recta requerida también tiene pendiente -2. Usando el punto $P(5, -7)$ nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned} y - (-7) &= -2(x - 5) && \text{forma pendiente-ordenada al origen} \\ y + 7 &= -2x + 10 && \text{simplifique} \\ y &= -2x + 3 && \text{reste 7} \end{aligned}$$

FIGURA 12



La última ecuación está en la forma pendiente-ordenada al origen y muestra que la recta paralela que hemos encontrado tiene intersección 3 con el eje y. Esta recta y la recta dada se trazan en la figura 12.

Como solución alternativa, podríamos usar el hecho de que rectas de la forma $6x + 3y = k$ tienen la misma pendiente que la recta dada y por tanto son paralelas a ella. Sustituyendo $x = 5$ y $y = -7$ en la ecuación $6x + 3y = k$ nos da $6(5) + 3(-7) = k$ o bien, lo que es equivalente, $k = 9$. La ecuación $6x + 3y = 9$ es equivalente a $y = -2x + 3$. ■

Si las pendientes de dos rectas no verticales no son iguales, entonces las rectas no son paralelas y se cruzan en exactamente un punto.

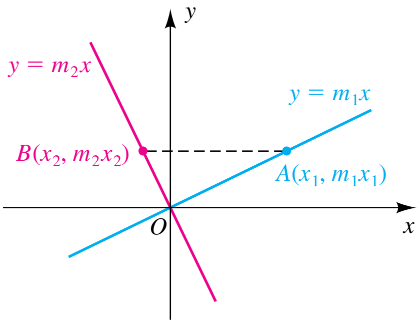
El siguiente teorema nos da información acerca de **rectas perpendiculares** (rectas que se cruzan en un ángulo recto).

Teorema de pendientes de rectas perpendiculares

Dos rectas con pendiente m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si

$$m_1 m_2 = -1.$$

FIGURA 13



DEMOSTRACIÓN Para mayor sencillez, consideremos el caso especial de dos rectas que se cruzan en el origen O, como se ilustra en la figura 13. Las ecuaciones de estas rectas son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Si, como en la figura, escogemos los puntos $A(x_1, m_1x_1)$ y $B(x_2, m_2x_2)$ diferentes de O en las rectas, entonces las rectas son perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es un ángulo recto. Aplicando el teorema de Pitágoras, sabemos que el ángulo AOB es recto si y sólo si

$$[d(A, B)]^2 = [d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2$$

o bien, por la fórmula de la distancia,

$$(x_2 - x_1)^2 + (m_2x_2 - m_1x_1)^2 = x_2^2 + (m_2x_2)^2 + x_1^2 + (m_1x_1)^2.$$

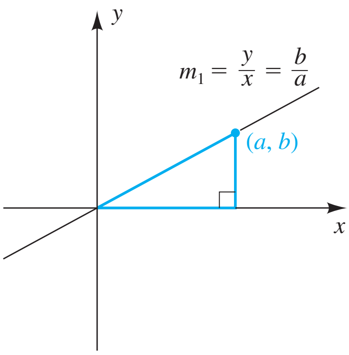
Elevar al cuadrado los términos, simplificar y factorizar nos da

$$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0$$
$$-2x_1x_2(m_1m_2 + 1) = 0.$$

Como x_1 y x_2 no son cero, podemos dividir ambos lados entre $-2x_1x_2$, obteniendo $m_1m_2 + 1 = 0$. Así, las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

El mismo tipo de demostración se puede dar si las rectas se cruzan en *cualquier* punto (a, b). ■

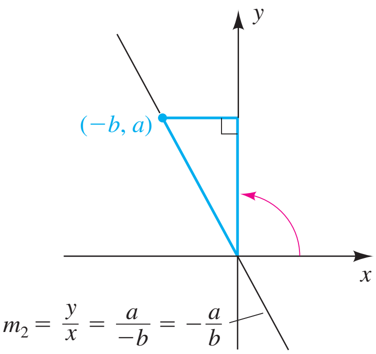
FIGURA 14



Una forma cómoda de recordar las condiciones sobre pendientes de rectas perpendiculares es notar que m_1 y m_2 deben ser *recíprocos negativos* entre sí, es decir, $m_1 = -1/m_2$ y $m_2 = -1/m_1$.

Podemos visualizar el resultado del último teorema como sigue. Trace un triángulo como en la figura 14; la recta que contiene su hipotenusa tiene pendiente $m_1 = b/a$. Ahora haga girar el triángulo 90° como en la figura 15. La recta ahora tiene pendiente $m_2 = a/(-b)$, que es el recíproco negativo de m_1.

FIGURA 15



EJEMPLO 8 **Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta determinada**

Encuentre la forma pendiente-ordenada al origen para la recta que pasa por $P(5, -7)$ que es perpendicular a la recta $6x + 3y = 4$.

SOLUCIÓN Consideramos la recta $6x + 3y = 4$ en el ejemplo 7 y encontramos que su pendiente es -2. En consecuencia, la pendiente de la recta requerida es el recíproco negativo $-[1/(-2)]$, o sea $\frac{1}{2}$. El uso de $P(5, -7)$ nos da lo siguiente:

$$y - (-7) = \tfrac{1}{2}(x - 5) \quad \text{forma punto pendiente}$$
$$y + 7 = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{2} \quad \text{simplifique}$$
$$y = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{19}{2} \quad \text{poner en forma pendiente-ordenada al origen}$$

FIGURA 16

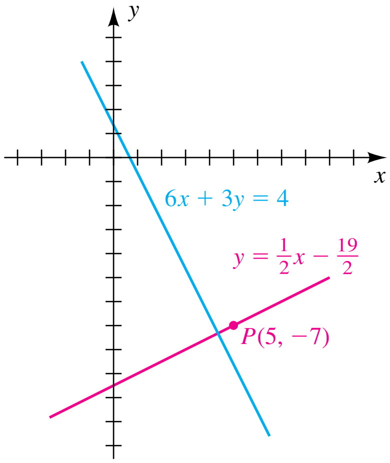
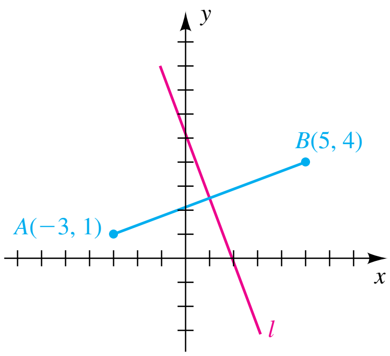


FIGURA 17



La última ecuación está en la forma pendiente-ordenada al origen y muestra que la recta perpendicular tiene intersección $-\frac{19}{2}$ con el eje y. Esta recta y la recta dada se trazan en la figura 16. ■

EJEMPLO 9 **Hallar una ecuación de una mediatriz**

Dados $A(-3, 1)$ y $B(5, 4)$, encuentre la forma general de la mediatriz l del segmento de recta AB.

SOLUCIÓN El segmento de recta AB y su mediatriz l se muestran en la figura 17. Calculamos lo siguiente, donde M es el punto medio de AB:

Coordenadas de M: $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$ fórmula del punto medio

Pendiente de AB: $\frac{4-1}{5-(-3)} = \frac{3}{8}$ fórmula de la pendiente

Pendiente de l: $-\frac{1}{\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$ recíproco negativo de $\frac{3}{8}$

Usando el punto $M\left(1, \frac{5}{2}\right)$ y la pendiente $-\frac{8}{3}$ nos da las siguientes ecuaciones equivalentes de l:

$$y - \tfrac{5}{2} = -\tfrac{8}{3}(x - 1) \quad \text{forma punto-pendiente}$$
$$6y - 15 = -16(x - 1) \quad \text{multiplique por el mcd, 6}$$
$$6y - 15 = -16x + 16 \quad \text{multiplique}$$
$$16x + 6y = 31 \quad \text{ponga en forma general}$$
■

Dos variables x y y están **relacionadas linealmente** si $y = ax + b$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$. Las relaciones lineales entre variables se presentan con frecuencia en problemas de aplicación. El siguiente ejemplo da una ilustración.

EJEMPLO 10 **Relacionar temperatura del aire con la altitud**

La relación entre la temperatura del aire T (en °F) y la altitud h (en pies sobre el nivel del mar) es aproximadamente lineal para $0 \leq h \leq 20{,}000$. Si la temperatura al nivel del mar es 60°, un aumento de 5000 pies en altitud baja la temperatura del aire en alrededor de 18°.

(a) Exprese T en términos de h, y trace la gráfica en un sistema de coordenadas hT.

(b) Aproxime la temperatura del aire a una altitud de 15,000 pies.

(c) Aproxime la altitud a la que la temperatura sea 0°.

SOLUCIÓN

(a) Si T está linealmente relacionada con h, entonces

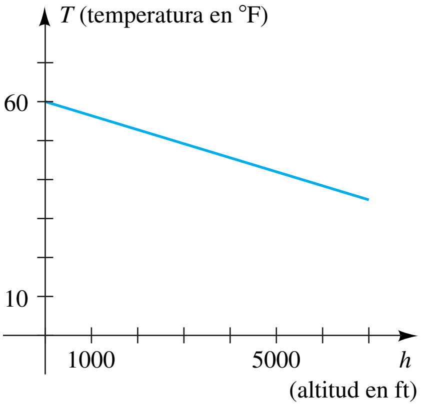
$$T = ah + b$$

para algunas constantes a y b (a representa la pendiente y b el punto de intersección T). Como $T = 60°$ cuando $h = 0$ ft (nivel del mar), el punto de intersección T es 60, y la temperatura T para $0 \leq h \leq 20{,}000$ está dada por

$$T = ah + 60.$$

(continúa)

FIGURA 18



De los datos dados, observamos que cuando la altitud $h = 5000$ ft, la temperatura $T = 60° - 18° = 42°$. En consecuencia, podemos hallar a como sigue:

$$42 = a(5000) + 60 \qquad \text{sea } T = 42 \text{ y } h = 5000$$

$$a = \frac{42 - 60}{5000} = -\frac{9}{2500} \qquad \text{despeje } a$$

Sustituyendo a en $T = ah + 60$ nos da la fórmula siguiente para T:

$$T = -\tfrac{9}{2500}h + 60$$

La gráfica aparece en la figura 18 con diferentes escalas en los ejes.

(b) Usando la última fórmula para T obtenida en el inciso (a), encontramos que la temperatura (en °F) cuando $h = 15{,}000$ es

$$T = -\tfrac{9}{2500}(15{,}000) + 60 = -54 + 60 = 6.$$

(c) Para hallar la altitud h que corresponde a $T = 0°$, procedemos como sigue:

$$T = -\tfrac{9}{2500}h + 60 \qquad \text{del inciso (a)}$$

$$0 = -\tfrac{9}{2500}h + 60 \qquad \text{sea } T = 0$$

$$\tfrac{9}{2500}h = 60 \qquad \text{sume } \tfrac{9}{2500}h$$

$$h = 60 \cdot \tfrac{2500}{9} \qquad \text{multiplique por } \tfrac{2500}{9}$$

$$h = \frac{50{,}000}{3} \approx 16{,}667 \text{ pies} \qquad \text{simplifique y aproxime}$$

■

Un **modelo matemático** es una descripción matemática de un problema. Para nuestros fines, estas descripciones serán gráficas y ecuaciones. En el mejor ejemplo, la ecuación $T = -\frac{9}{2500}h + 60$ *modela* la relación entre temperatura del aire y altitud.

En el siguiente ejemplo encontramos un modelo de la forma $y = mx + b$, llamado *recta de regresión lineal*. Podemos considerar esta recta como *la recta de mejor ajuste*, es decir, la única recta que describe mejor el comportamiento de los datos.

EJEMPLO 11 **Hallar una recta de mejor ajuste**

(a) Encuentre la recta de mejor ajuste que aproxime los datos siguientes de tiempos que fueron récord mundial en carreras de 100 metros planos para mujeres.

Año (x)	Corredora	Tiempo en segundos (y)
1952	Marjorie Jackson	11.4
1960	Wilma Rudolph	11.3
1972	Renate Stecher	11.07
1984	Evelyn Ashford	10.76

(b) Grafique los datos y la recta de regresión.

(c) Wyomia Tyus tenía el récord en 1968 en 11.08 segundos. ¿Qué tiempo pronostica el modelo para 1968? Esta pregunta se llama **interpolación,** puesto que debemos estimar un valor entre valores conocidos. ¿Qué tiempo predice el modelo para 1988? Esta pregunta requiere de **extrapolación**, porque debemos estimar un valor fuera de los valores conocidos.

(d) Interprete la pendiente de la recta.

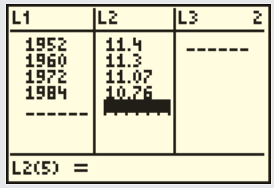
SOLUCIÓN

Introduzca los datos.

(a) Ponga años en L1, tiempos en L2.

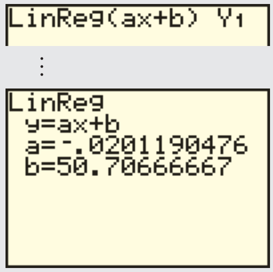
Borre todas las asignaciones y listas Y en este momento. Una lista se puede borrar al poner el cursor en el nombre de la lista y pulsar [CLEAR] y [▽].

[STAT] [1] 1952 [ENTER]
1960 [ENTER] 1972 [ENTER] 1984 [ENTER]
[△ (4 veces)] [▷] 11.4 [ENTER]
11.3 [ENTER] 11.07 [ENTER] 10.76 [ENTER]



Encuentre la recta de mejor ajuste (la ecuación de regresión) y guárdela en Y_1.

[STAT] [▷] [4]
[VARS] [▷] [1] [1] [ENTER]



En la pantalla vemos que la recta de mejor ajuste tiene la ecuación (aproximada) $y = -0.02x + 50.71$. En la TI-83/4 Plus, para ver valores r^2 y r encienda DiagnosticOn desde el CATALOG.

(b)

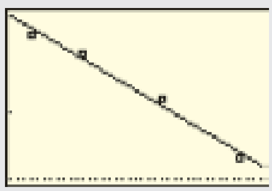
Encienda STAT PLOT 1.

[2nd] [STAT PLOT] [1] [ENTER]



Grafique los datos en la recta de regresión.

[ZOOM] [9]

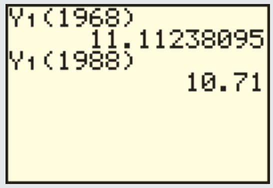


(continúa)

(c)

Encuentre Y_1 (1968). 2nd QUIT CLEAR
VARS ▷ 1 1 (1968) ENTER

Encuentre Y_1 (1988). 2nd ENTRY ◁ (3 veces) 8 ENTER



De acuerdo con el modelo, obtenemos una estimación de 11.11 segundos para 1968; el tiempo real fue 11.08 segundos. Para $x = 1988$, obtenemos $y = 10.71$. En 1988, Florence Griffith-Joyner destrozó el récord mundial con un tiempo de 10.49 segundos (una marca que aún se mantiene) demasiado para esa predicción.

(d) La pendiente de la recta de regresión es alrededor de -0.02, lo cual indica que el tiempo de récord mundial está decreciendo en 0.02 segundos/año. ■

3.3 Ejercicios

Ejer. 1–6: Trace la recta que pasa por *A* y *B*, y encuentre su pendiente *m*.

1 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$

2 $A(4, -1)$, $B(-6, -3)$

3 $A(3, 4)$, $B(-6, 4)$

4 $A(4, -3)$, $B(4, 2)$

5 $A(-3, 2)$, $B(-3, 5)$

6 $A(4, -2)$, $B(-3, -2)$

Ejer. 7–10: Use las pendientes para demostrar que los puntos son vértices del polígono especificado.

7 $A(-2, 1)$, $B(6, 3)$, $C(4, 0)$, $D(-4, -2)$; paralelogramo

8 $A(0, 3)$, $B(3, -1)$, $C(-2, -6)$, $D(-8, 2)$; trapecio

9 $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$, $D(-6, -5)$; rectángulo

10 $A(1, 4)$, $B(6, -4)$, $C(-15, -6)$; triángulo rectángulo

11 Si tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(-1, -3)$, $B(4, 2)$ y $C(-7, 5)$, encuentre el cuarto vértice.

12 Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$ que denotan los vértices de un cuadrilátero arbitrario. Demuestre que los segmentos de recta que unen los puntos medios de lados adyacentes forman un paralelogramo.

Ejer. 13–14: Trace la gráfica de $y = mx$ para los valores dados de *m*.

13 $m = 3, -2, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$

14 $m = 5, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

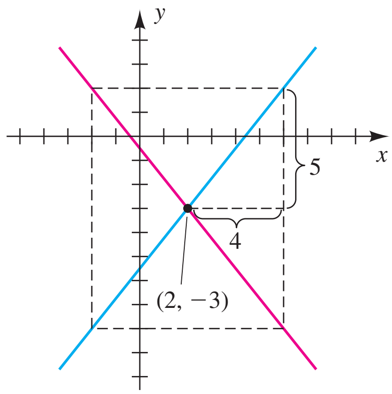
Ejer. 15–16: Trace la gráfica de la recta que pasa por *P* para cada valor de *m*.

15 $P(3, 1)$; $m = \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{5}$

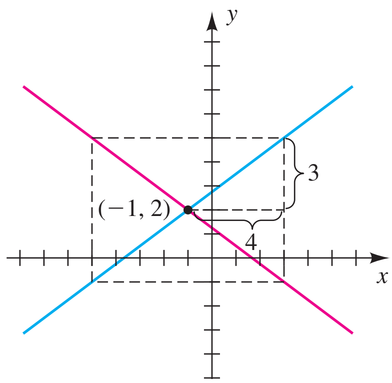
16 $P(-2, 4)$; $m = 1, -2, -\frac{1}{2}$

Ejer. 17–18: Escriba las ecuaciones de las rectas.

17



18



Ejer. 19–20: Trace las gráficas de las rectas en el mismo plano de coordenadas.

19 $y = x + 3,\quad y = x + 1,\quad y = -x + 1$

20 $y = -2x - 1,\quad y = -2x + 3,\quad y = \frac{1}{2}x + 3$

Ejer. 21–32: Encuentre una forma general de una ecuación de la recta que pasa por el punto *A* que satisfaga la condición dada.

21 $A(3, -1)$

(a) paralela al eje y

(b) perpendicular al eje y

22 $A(-4, 2)$

(a) paralela al eje x

(b) perpendicular al eje x

23 $A(5, -3)$; pendiente -4

24 $A(-1, 4)$; pendiente $\frac{2}{5}$

25 $A(4, 1)$; pendiente $-\frac{1}{3}$

26 $A(0, -2)$; pendiente 5

27 $A(4, -5)$; que pase por $B(-3, 6)$

28 $A(-1, 6)$; intersección con el eje x en 5

29 $A(3, -1)$; paralelo a la recta $5x - 2y = 4$

30 $A(-3, 5)$; paralelo a la recta $x + 3y = 1$

31 $A(7, -3)$; perpendicular a la recta $2x - 5y = 8$

32 $A(5, 4)$; perpendicular a la recta $3x + 2y = 7$

Ejer. 33–36: Encuentre la forma pendiente-ordenada al origen de la recta que satisface las condiciones dadas.

33 Intersección con el eje x en 4, intersección con el eje y en -3

34 Intersección con el eje x en -6, intersección con el eje y en -1

35 Que pase por los puntos $A(5, 2)$ y $B(-1, 4)$

36 Que pase por los puntos $A(-3, 1)$ y $B(2, 7)$

Ejer. 37–38: Encuentre la forma general de una ecuación para la mediatriz del segmento *AB*.

37 $A(3, -1), B(-2, 6)$

38 $A(4, 2), B(-2, -6)$

Ejer. 39–40: Encuentre una ecuación para la recta que biseca los cuadrantes dados.

39 II y IV

40 I y III

Ejer. 41–44: Use la forma pendiente-ordenada al origen para hallar la pendiente e intersección con el eje *y* de la recta dada y trace su gráfica.

41 $2x = 15 - 3y$

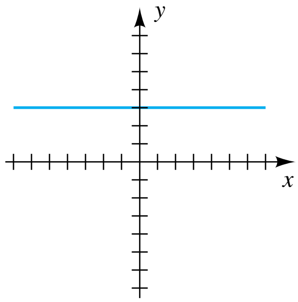
42 $7x = -4y - 8$

43 $4x - 3y = 9$

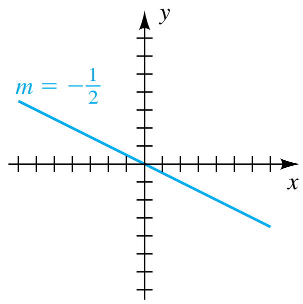
44 $x - 5y = -15$

Ejer. 45–46: Encuentre una ecuación de la recta mostrada en la figura.

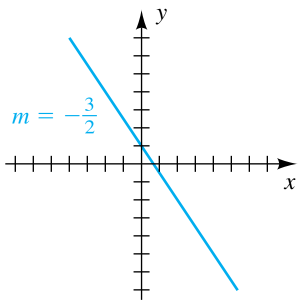
45 (a)



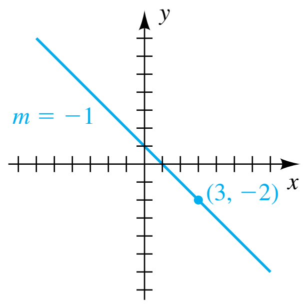
(b)



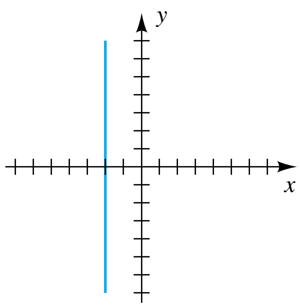
(c)



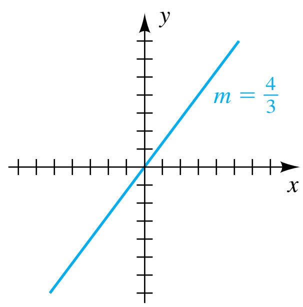
(d)



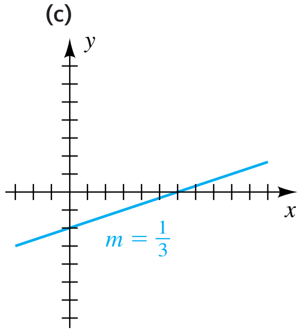
46 (a)



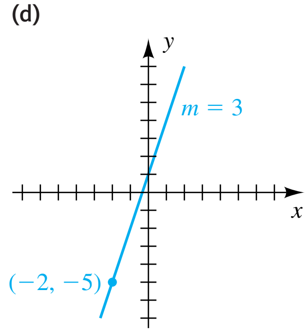
(b)



(c)



(d)



Ejer. 47–48: Si una recta *l* tiene puntos de intersección *a* y *b* distintos de cero con los ejes *x* y *y*, respectivamente, entonces su *forma canónica* (forma de intersección) es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Encuentre la forma de intersección para la recta dada.

47 $4x - 2y = 6$

48 $x - 3y = -2$

49 Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro $C(3, -2)$ y es tangente a la recta $y = 5$.

50 Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $P(3, 4)$.

51 **Crecimiento fetal** El crecimiento de un feto de más de 12 semanas de edad se puede aproximar con la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, donde L es la longitud (en centímetros) y t es la edad (en semanas). La longitud prenatal se puede determinar por ultrasonido. Aproxime la edad de un feto cuya longitud es 28 centímetros.

52 **Estimación de salinidad** La salinidad del océano se refiere a la cantidad de material disuelto encontrado en una muestra de agua de mar. La salinidad S se puede estimar a partir de la cantidad C de cloruro en agua de mar usando $S = 0.03 + 1.805C$, donde S y C son medidos por peso en partes por mil. Aproxime C si S es 0.35.

53 **Peso de una ballena jorobada** El peso esperado E (en toneladas) de una ballena jorobada se puede aproximar a partir de su longitud L (en pies) con la fórmula $W = 1.70L - 42.8$ para $30 \leq L \leq 50$.

(a) Estime el peso de una ballena jorobada de 40 pies.

(b) Si el error al estimar la longitud pudiera ser de hasta 2 pies, ¿cuál es el error correspondiente para el peso estimado?

54 **Crecimiento de una ballena azul** Las ballenas azules recién nacidas miden aproximadamente 24 pies de largo y pesan 3 toneladas. Las ballenas jóvenes son amamantadas durante 7 meses y, llegado el tiempo de destete, con frecuencia miden 53 pies de largo y pesan 23 toneladas. Denotemos con L y W la longitud (en pies) y el peso (en toneladas), respectivamente, de una ballena que tiene t meses de edad.

(a) Si L y t están relacionadas linealmente exprese L en términos de t.

(b) ¿Cuál es el aumento diario en la longitud de un ballenato? (Use 1 mes = 30 días.)

(c) Si W y t están relacionados linealmente exprese W en términos de t.

(d) ¿Cuál es el aumento diario en el peso del ballenato?

55 **Estadísticas de beisbol** Suponga que un jugador de beisbol de las ligas mayores ha conectado 15 cuadrangulares en los primeros 14 juegos, y mantiene este paso en toda la temporada de 162 juegos.

(a) Exprese el número y de cuadrangulares en términos del número x de juegos jugados.

(b) ¿Cuántos cuadrangulares conectará el jugador en la temporada?

56 **Producción de queso** Un fabricante de queso produce 18,000 libras de queso del 1 de enero al 24 de marzo. Suponga que este ritmo de producción continúa para el resto del año.

(a) Exprese el número y de libras de queso producidas en términos del número x del día en un año de 365 días.

(b) Prediga, a la libra más cercana, el número de libras producidas en el año.

57 **Peso en la infancia** Un bebé pesa 10 libras al nacer y tres años más tarde el peso del niño es 30 libras. Suponga que el peso W (en libras) en la infancia está linealmente relacionado con la edad t (en años).

(a) Exprese W en términos de t.

(b) ¿Cuál es W en el sexto cumpleaños del niño?

(c) ¿A qué edad el niño pesará 70 libras?

(d) Trace, en un plano tW, una gráfica que muestre la relación entre W y t para $0 \leq t \leq 12$.

58 **Pago de préstamo** Un estudiante universitario recibe un préstamo sin intereses de \$8250 de un familiar. El estudiante pagará \$125 al mes hasta pagar el préstamo.

(a) Exprese la cantidad P (en dólares) pendiente de pago en términos del tiempo t (en meses).

(b) ¿Después de cuántos meses el estudiante deberá \$5000?

(c) Trace, en un plano tP, una gráfica que muestre la relación entre P y t para la duración del préstamo.

59 **Vaporizar agua** La cantidad H (en joules) necesaria para convertir un gramo de agua en vapor está linealmente relacionada con la temperatura T (en °C) de la atmósfera. A 10°C esta conversión requiere 2480 joules y cada aumento en temperatura de 15°C baja la cantidad de calor necesaria en 40 joules. Exprese H en términos de T.

60 **Potencia aeróbica** En fisiología del ejercicio, la potencia aeróbica P se define en términos de la máxima inhalación de oxígeno. Para altitudes de hasta 1800 metros, la potencia aeróbica es óptima, es decir, 100%. A más de 1800 metros, P disminuye linealmente desde el máximo de 100% a un valor cercano a 40% a 5000 metros.

(a) Exprese la potencia aeróbica P en términos de la altitud h (en metros) para $1800 \leq h \leq 5000$.

(b) Estime la potencia aeróbica en la ciudad de México (altitud 2400 metros), sede de los Juegos Olímpicos de Verano de 1968.

61 **Isla de calor urbano** El fenómeno de una isla de calor urbano se ha observado en Tokio. El promedio de temperatura fue de 13.5°C en 1915 y desde entonces ha subido 0.032°C por año.

(a) Suponiendo que la temperatura T (en °C) está linealmente relacionada con el tiempo t (en años) y que $t = 0$ corresponde a 1915, exprese T en términos de t.

(b) Prediga el promedio de temperatura en el año 2020.

62 **Aumento de temperatura del suelo** En 1870, el promedio de temperatura del suelo en París fue de 11.8°C. Desde entonces, ha subido a un ritmo casi constante, llegando a 13.5°C en 1969.

(a) Exprese la temperatura T (en °C) del tiempo t (en años), donde $t = 0$ corresponde al año 1870 y $0 \leq t \leq 99$.

(b) ¿Durante qué año el promedio de temperatura del suelo fue de 12.5°C ?

63 **Gastos en un negocio** El propietario de una franquicia de helados debe pagar a la casa matriz $1000 por mes más 5% de los ingresos mensuales R. El costo de operación de la franquicia incluye un costo fijo de $2600 por mes por conceptos como utilidades y mano de obra. El costo de helados y abastecimientos es 50% del ingreso.

(a) Exprese el gasto mensual E del propietario en términos de R.

(b) Exprese la utilidad mensual P en términos de R.

(c) Determine el ingreso mensual necesario para no perder ni ganar.

64 **Dosis de medicamento** Los productos farmacéuticos deben especificar dosis recomendada para adultos y niños. Dos fórmulas para modificar los niveles de dosificación para adulto y hacerlos adecuados para niños, son

Regla de Cowling: $y = \frac{1}{24}(t + 1)a$

y Regla de Friend: $y = \frac{2}{25}ta,$

donde a denota dosis de adulto (en miligramos) y t denota la edad del niño (en años).

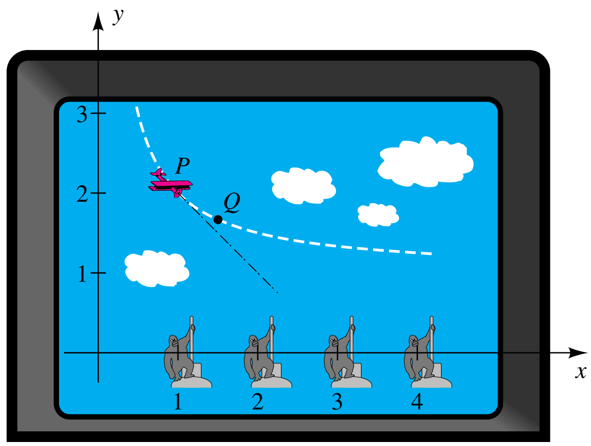
(a) Si $a = 100$, grafique las dos ecuaciones lineales en el mismo plano de coordenadas para $0 \leq t \leq 12$.

(b) ¿Para qué edad las dos fórmulas especifican la misma dosis?

65 **Juego de video** En el juego de video que se muestra en la figura, un avión vuela de izquierda a derecha a lo largo de la trayectoria dada por $y = 1 + (1/x)$ y dispara balas en la dirección tangente a criaturas colocadas sobre el eje x en $x = 1, 2, 3, 4$.

De acuerdo con el cálculo, la pendiente de la recta tangente a la trayectoria en $P(1, 2)$ es $m = -1$ y en $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$ es $m = -\frac{4}{9}$.

EJERCICIO 65



Determine si una criatura será blanco de las balas cuando el avión esté en

(a) P **(b)** Q

66 **Escalas de temperatura** La relación entre la lectura de temperatura F en la escala Fahrenheit y la lectura de temperatura C en la escala Celsius, está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

(a) Encuentre la temperatura a la que la lectura es igual en ambas escalas.

(b) ¿Cuándo es la lectura Fahrenheit el doble de la lectura Celsius?

67 **Cortante de viento vertical** Un cortante de viento vertical se presenta cuando la velocidad del viento varía a alturas diferentes sobre el suelo. El cortante de viento es de gran importancia para pilotos durante despegues y aterrizajes. Si la velocidad del viento es cv_1 a una altura h_1 y v_2 a una altura h_2, entonces el promedio de cortante de viento s está dado por la fórmula de la pendiente

$$s = \frac{v_2 - v_1}{h_2 - h_1}.$$

Si la velocidad del viento al nivel del suelo es 22 mi/h y se ha determinado que s es 0.07, encuentre la velocidad del viento a 185 pies sobre el suelo.

68 **Cortante de viento vertical** En el estudio del cortante de viento vertical, a veces se usa la fórmula

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^P$$

donde P es una variable que depende del terreno y de las estructuras cerca del nivel del suelo. En Montreal, el promedio de valor diurno para P con vientos del norte sobre 29 mi/h se determinó que es 0.13. Si un viento del norte de 32 mi/h se mide a 20 pies sobre el suelo, aproxime el promedio de cortante de viento (vea ejercicio 67) entre 20 y 200 pies.

Los puntos dados se encontraron usando métodos empíricos. Determine si se encuentran en la misma recta $y = ax + b$, y, si es así, encuentre los valores de a y de b.

69 $A(-1.3, -1.3598)$, $B(-0.55, -1.11905)$, $C(1.2, -0.5573)$, $D(3.25, 0.10075)$

70 $A(-0.22, 1.6968)$, $B(-0.12, 1.6528)$, $C(1.3, 1.028)$, $D(1.45, 0.862)$

Ejer. 71–72: Grafique las rectas en el mismo plano de coordenadas y encuentre las coordenadas de los puntos de intersección (las coordenadas son enteros.)

71 $x - 3y = -58$; $3x - y = -70$

72 $x + 10y = 123$; $2x - y = -6$

Ejer. 73–74: Grafique las rectas en el mismo plano de coordenadas y estime las coordenadas de los puntos de intersección. Identifique el polígono determinado por las rectas.

73 $2x - y = -1$; $x + 2y = -2$; $3x + y = 11$

74 $10x - 42y = -7.14$; $8.4x + 2y = -3.8$; $0.5x - 2.1y = 2.73$; $16.8x + 4y = 14$

Ejer. 75–76: Para la tabla de datos, determine una recta en la forma $y = ax + b$ que aproximadamente modele los datos. Trace la recta junto con los datos sobre los mismos ejes de coordenadas. *Nota:* Para ejercicios que requieran un modelo aproximado, las respuestas pueden variar dependiendo de los puntos de datos seleccionados.

75

x	y
0.6	1.3
1.8	3.3
3	6.2
4.6	8.5

76

x	y
0.4	2.88
2.2	1.88
3.6	1.12
4.4	0.68

77 **Distancias récord en el salto triple** Los récords mundiales de distancia (en metros) para el salto triple se muestran en la tabla.

Año	Distancia
1911	15.52
1932	15.72
1955	16.56
1975	17.89
1995	18.29

(a) Grafique los datos.

(b) Determine una recta de la forma $D = aY + b$, que aproxime estos datos, donde D es la distancia y Y es el año. Grafique esta recta junto con los datos en los mismos ejes de coordenadas.

(c) Use esta recta para predecir el récord de distancia en 1985 y compárelo con el récord real de 17.97 metros.

(d) Interprete la pendiente de esta recta.

78 **Tiempos récord en la milla** Los tiempos récord mundiales (en segundos) para la carrera de una milla aparecen en la tabla.

Año	Tiempo
1913	254.4
1934	246.8
1954	238.0
1975	229.4
1999	223.1

(a) Grafique los datos.

(b) Encuentre una recta de la forma $T = aY + b$ que aproxime estos datos, donde T es el tiempo y Y es el año. Grafique esta recta junto con los datos en los mismos ejes de coordenadas.

(c) Use la recta para pronosticar el tiempo récord en 1985, y compárela con el récord real de 226.3 segundos.

(d) Interprete la pendiente de esta recta.

3.4 Definición de función

La noción de **correspondencia** se presenta con frecuencia en nuestra vida diaria. Algunos ejemplos se dan en la ilustración siguiente.

ILUSTRACIÓN **Correspondencia**

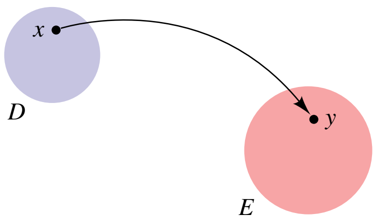
- A cada libro de una biblioteca le corresponde el número de páginas del libro.
- A cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento.

- Si la temperatura del aire se registra durante todo el día, entonces a cada instante la corresponde una temperatura.

Cada correspondencia de la ilustración previa comprende dos conjuntos, D y E. En la primera ilustración, D denota el conjunto de libros de una biblioteca y E es el conjunto de enteros positivos. A cada libro x en D la corresponde un entero positivo y en E, es decir, el número de páginas del libro.

A veces describimos correspondencias por diagramas del tipo que se muestra en la figura 1, donde los conjuntos D y E están representados por puntos dentro de las regiones en un plano. La flecha curvada indica que el elemento y de E corresponde al elemento x de D. Los dos conjuntos pueden tener elementos en común. En realidad, con frecuencia tenemos $D = E$. Es importante observar que *a cada x en D le corresponde exactamente una y en E,* pero el mismo elemento de E puede corresponder a elementos diferentes de D. Por ejemplo, dos libros pueden tener el mismo número de páginas, dos personas pueden tener el mismo cumpleaños y la temperatura puede ser igual a diferentes horas.

FIGURA 1



En casi todo nuestro trabajo, D y E serán conjuntos de números. Para ilustrar, denotemos con D y E al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, y a cada número real x asignémosle su cuadrado x^2. Esto nos da una correspondencia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Cada uno de nuestros ejemplos de una correspondencia es una *función*, que definimos como sigue:

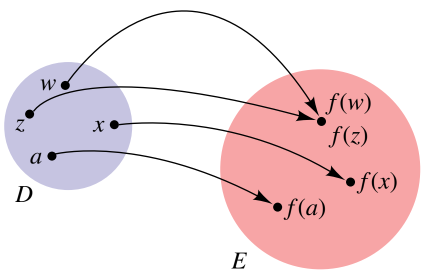
Definición de función	Una **función** f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D exactamente un elemento y de E.

*Para muchos casos, simplemente recordemos que el **dominio** es el conjunto de valores x y el **rango** es el conjunto de valores y.*

El elemento x de D es el **argumento** de f. El conjunto D es el **dominio** de la función. El elemento y de E es el **valor** de f en x (o la **imagen** de x bajo f) y está denotado por $f(x)$, que "f de x". El **rango** de f es el subconjunto R de E formado por todos los posibles valores $f(x)$ para x en D. Note que puede haber elementos en el conjunto E que no están en el rango R de f.

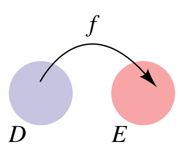
Considere el diagrama de la figura 2. Las flechas curvadas indican que los elementos $f(w)$, $f(z)$, $f(x)$ y $f(a)$ de E corresponden a los elementos w, z, x y a de D. *Para cada elemento de D hay asignado exactamente un valor de función en E;* no obstante, diferentes elementos de D, como por ejemplo w y z en la figura 2, pueden tener el mismo valor en E.

FIGURA 2



Los símbolos

$$D \xrightarrow{f} E, \qquad f\colon D \to E, \qquad \text{y}$$



significan que f es una función de D a E, y decimos que f **mapea** (relaciona) D en E. Inicialmente, las notaciones f y $f(x)$ pueden ser confusas. Recuerde que f se usa para representar la función; no está en D ni en E. Sin embargo, $f(x)$ es un elemento del rango R; el elemento que la función f asigna al elemento x, que está en el dominio D.

Dos funciones f y g de D a E son **iguales,** y escribimos

$$f = g \text{ siempre que } \quad f(x) = g(x) \quad \text{para toda } x \text{ en } D.$$

Por ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3$ y $f(x) = x^2$ para toda x en $\mathbb{R}$, entonces $g = f$.

EJEMPLO 1 **Hallar valores de función**

Sea f la función con dominio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ para toda x en $\mathbb{R}$.

(a) Encuentre $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a + b)$ y $f(a) + f(b)$, donde a y b son números reales.

(b) ¿Cuál es el rango de f?

SOLUCIÓN

(a) Encontramos valores de f al sustituir x en la ecuación $f(x) = x^2$:

$$f(-6) = (-6)^2 = 36$$
$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$
$$f(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$f(a) + f(b) = a^2 + b^2$$

Nótese que, en general, $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$.

(b) Por definición, el rango de f está formado por todos los números de la forma $f(x) = x^2$ para x en $\mathbb{R}$. Como el cuadrado de todo número real es no negativo, el rango está contenido en el conjunto de todos los números reales no negativos. Además, todo número real no negativo c es un valor de f, porque $f(\sqrt{c}) = (\sqrt{c})^2 = c$. En consecuencia, el rango de f es el conjunto de todos los números reales no negativos. ■

Si una función está definida como en el ejemplo 1, los símbolos empleados para la función y variable no importan; es decir, expresiones como $f(x) = x^2$ $f(s) = s^2$, $g(t) = t^2$ y $k(r) = r^2$ definen todas la misma función. Esto es cierto porque si a es cualquier número del dominio, entonces el mismo valor a^2 se obtiene cualquiera que sea la expresión que se use.

En el resto de nuestro trabajo, la frase *f es una función* quiere decir que el dominio y rango son conjuntos de números reales. Si una función está definida por medio de una expresión, como en el ejemplo 1, y el dominio D no se expresa, entonces consideraremos que D es la totalidad de los números reales x tales que $f(x)$ es real. Esto a veces recibe el nombre de **dominio implicado** de f. Para ilustrar, si $f(x) = \sqrt{x - 2}$, entonces el dominio implicado es el conjunto de los números reales x tales que $\sqrt{x - 2}$ es real, esto es, $x - 2 \geq 0$, o $x \geq 2$. Así, el dominio es el intervalo finito $[2, \infty)$. Si x está en el dominio, decimos que *f está definida en x* o que *f(x) existe*. Si un conjunto S está contenido en el dominio, *f está definida sobre S*. La terminología *f no está definida en x* significa que x no está en el dominio de f.

EJEMPLO 2 **Hallar valores de función**

Sea $g(x) = \dfrac{\sqrt{4 + x}}{1 - x}$.

(a) Hallar el dominio de g.

(b) Hallar $g(5)$, $g(-2)$, $g(-a)$ y $-g(a)$.

SOLUCIÓN

(a) La expresión $\sqrt{4+x}/(1-x)$ es un número real si y sólo si el radicando $4 + x$ es no negativo y el denominador $1 - x$ es diferente de 0. Entonces, $g(x)$ existe si y sólo si

$$4 + x \geq 0 \quad \text{y} \quad 1 - x \neq 0$$

o bien, lo que es equivalente,

$$x \geq -4 \quad \text{y} \quad x \neq 1.$$

Podemos expresar el dominio en términos de intervalos como $[-4\ 1) \cup (1\ \infty)$.

(b) Para hallar valores de g, sustituimos por x:

$$g(5) = \frac{\sqrt{4+5}}{1-5} = \frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$g(-2) = \frac{\sqrt{4+(-2)}}{1-(-2)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$g(-a) = \frac{\sqrt{4+(-a)}}{1-(-a)} = \frac{\sqrt{4-a}}{1+a}$$

$$-g(a) = -\frac{\sqrt{4+a}}{1-a} = \frac{\sqrt{4+a}}{a-1}$$

■

FIGURA 3



Las funciones son comunes en la vida diaria y aparecen en gran variedad de formas. Por ejemplo, el menú en un restaurante (figura 3) se puede considerar que es una función f de un conjunto de artículos y un conjunto de precios. Note que f está dado en formato de tabla. Aquí $f(\text{hamburguesa}) = 1.69$, $f(\text{papas fritas}) = 0.99$ y $f(\text{refresco}) = 0.79$.

Un ejemplo de una función dada por una regla se puede hallar en las tablas de impuesto federal (figura 4). Específicamente, en 2009, para un soltero con ingreso gravable de \$120,000, el impuesto pagadero estaba dado por la regla

$$\$16{,}750.00 \text{ más } 28\% \text{ de la cantidad sobre } \$82{,}250.$$

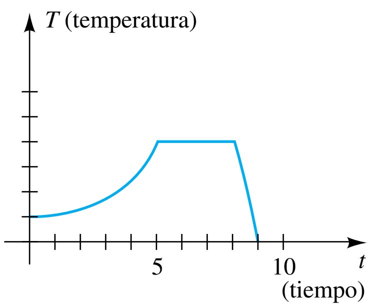
FIGURA 4

Cédula de tasa de impuesto federal 2009

Cédula X –Usar si su estatus de presentación es **soltero**

Si el ingreso gravable es más de–	*Pero no más de–*	*El impuesto es:*	*de la cantidad sobre–*
\$0	\$8,350	-------- **10%**	**\$0**
8,350	33,950	**\$835.00 + 15%**	**8,350**
33,950	82,250	**\$4,675.00 + 25%**	**33,950**
82,250	171,550	**16,750.00 + 28%**	**82,250**
171,550	372,950	**41,754.00 + 33%**	**171,550**
372,950	-------	**108,216.00 + 35%**	**372,950**

FIGURA 5



En este caso, el impuesto sería

$$\$16{,}750.00 + 0.28(\$120{,}000 - \$82{,}250) = \$27{,}320.00.$$

Con frecuencia se usan gráficas para describir la variación de cantidades físicas. Por ejemplo, un científico puede usar la gráfica de la figura 5 para indicar la temperatura T de cierta solución en varios tiempos t durante un experimento.

El diagrama muestra que la temperatura aumentó gradualmente para el tiempo $t = 0$ al tiempo $t = 5$, no cambió entre $t = 5$ y $t = 8$ y luego disminuyó rápidamente de $t = 8$ a $t = 9$.

Del mismo modo, si f es una función, podemos usar una gráfica para indicar el cambio en $f(x)$ a medida que x varía en el dominio de f. Específicamente, tenemos la siguiente definición.

Definición de gráfica de una función

La **gráfica de una función** f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f.

A veces aplicamos la leyenda $y = f(x)$ a un diagrama de la gráfica. Si $P(a, b)$ es un punto en la gráfica, entonces la ordenada al origen b es el valor $f(a)$ de la función, como se ilustra en la figura 6. La figura muestra el dominio de f (el conjunto de posibles valores de x) y el rango de f (los valores correspondientes de y). Aun cuando hemos descrito el dominio y rango de intervalos cerrados, pueden ser intervalos infinitos u otros conjuntos de números reales.

Como hay exactamente un valor $f(a)$ para cada a en el dominio de f, sólo *un* punto de la gráfica de f tiene abscisa a. En general, podemos usar la siguiente prueba gráfica para determinar si una gráfica representa una función.

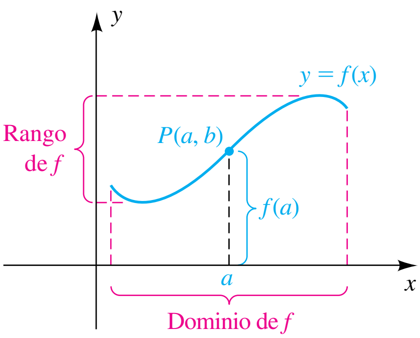
Prueba de la recta vertical

La gráfica de un conjunto de puntos en un plano de coordenadas es la gráfica de una función si toda recta vertical cruza la gráfica en un punto como máximo.

Así, *toda recta vertical cruza la gráfica de una función en un punto como máximo.* En consecuencia, la gráfica de una función no puede ser una figura como una circunferencia, en la que una recta vertical puede cruzar la gráfica en más de un punto.

Las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estos números se denominan **ceros** de la función. La intersección con el eje y de la gráfica es $f(0)$, si existe.

FIGURA 6



EJEMPLO 3 **Trazar la gráfica de una función**

Sea $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

(a) Trace la gráfica de f.

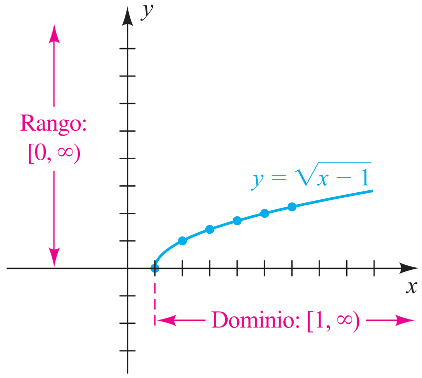
(b) Encuentre el dominio y rango de f.

SOLUCIÓN

(a) Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x - 1}$. La tabla siguiente es una lista de las coordenadas de varios puntos sobre la gráfica.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	$\sqrt{5} \approx 2.2$

FIGURA 7



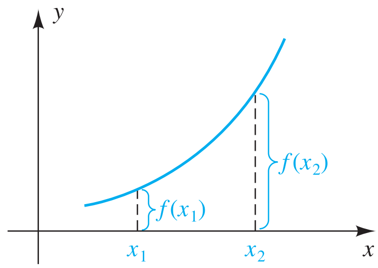
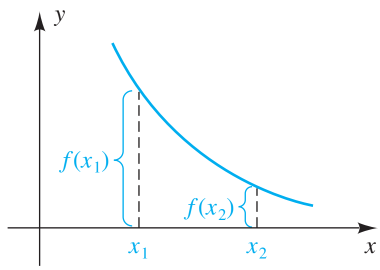
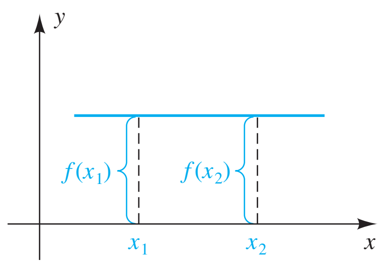
Al graficar los puntos, obtenemos el diagrama que se ve en la figura 7. Note que la intersección con el eje x es 1 y no hay intersección con el eje y

(b) Con respecto a la figura 7, note que el dominio de f está formado por todos los números reales x tales que $x \geq 1$ o bien, lo que es equivalente, el intervalo $[1,\infty)$. El rango de f es el conjunto de todos los números reales y tales que $y \geq 0$ o, lo que es equivalente, $[0, \infty)$. ■

La **función raíz cuadrada**, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, tiene una gráfica semejante a la de la figura 7, pero el punto extremo está en (0, 0). El valor y de un punto sobre esta gráfica es el número que se ve en la pantalla de una calculadora cuando se le pide una raíz cuadrada. Esta relación gráfica puede ayudarle a recordar que $\sqrt{9}$ es 3 y que $\sqrt{9}$ *no es* ± 3. Del mismo modo, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, y $f(x) = \sqrt[3]{x}$ se conocen a veces como la **función elevar al cuadrado,** la **función elevar al cubo** y la **función raíz cúbica,** respectivamente.

En el ejemplo 3, conforme x aumenta, el valor $f(x)$ de la función también aumenta, y decimos que la gráfica de f *sube* (vea figura 7). Una función de este tipo se dice que es *creciente*. Para ciertas funciones, $f(x)$ disminuye cuando x aumenta. En este caso la gráfica *cae* y f es una función *decreciente*. En general, consideraremos funciones que aumentan o disminuyen en un intervalo I, como se describe en la tabla siguiente, donde x_1 y x_2 denotan números en I.

Funciones crecientes, decrecientes y constantes

Terminología	Definición	Interpretación gráfica
f es **creciente** en un intervalo I	$f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$	
f es **decreciente** en un intervalo I	$f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$	
f es **constante** en un intervalo I	$f(x_1) = f(x_2)$ para cada x_1 y x_2	

Un ejemplo de una *función creciente* es la **función identidad,** cuya ecuación es $f(x) = x$ y cuya gráfica es la recta que pasa por el origen con pendiente 1. Un ejemplo de una *función decreciente* es $f(x) = -x$, una ecuación de la recta que pasa por el origen con pendiente -1. Si $f(x) = c$ para todo número real x, entonces f se denomina *función constante*.

Usaremos las frases *f es creciente* y *f(x) es creciente* indistintamente. Haremos lo mismo con los términos *decreciente* y *constante.*

EJEMPLO 4 **Uso de una gráfica para hallar el dominio, rango y dónde una función aumenta o disminuye**

Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

(a) Trace la gráfica de f.

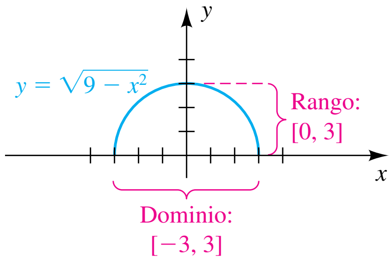
(b) Encuentre el dominio y rango de f.

(c) Encuentre los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

SOLUCIÓN

(a) Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{9 - x^2}$. Sabemos de nuestro trabajo con circunferencias en la sección 3.2 que la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia de radio 3 con centro en el origen. Si despejamos y de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ tendremos $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Se deduce que la gráfica de f es la *mitad superior* de la circunferencia, como se ilustra en la figura 8.

FIGURA 8



(b) De acuerdo con la figura 8, vemos que el dominio de f es el intervalo cerrado $[-3, 3]$, y el rango de f es el intervalo $[0, 3]$.

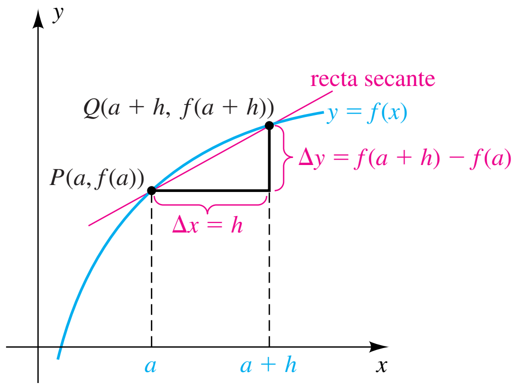
(c) La gráfica sube a medida que x aumenta de -3 a 0, de modo que f es creciente en el intervalo cerrado $[-3, 0]$. Por lo tanto, como se muestra en la gráfica precedente, si $x_1 < x_2$ en $[-3, 0]$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$ (note que *posiblemente* $x_1 = -3$ o $x_2 = 0$).

La gráfica cae conforme x se incrementa de 0 a 3, así que f decrece en el intervalo cerrado $[0, 3]$. En este caso, la tabla indica que si $x_1 < x_2$ en $[0, 3]$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$ (observe que posiblemente $x_1 = 0$ o $x_2 = 3$). ■

Un problema del siguiente tipo es de especial interés en cálculo.

Problema: Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P y Q que se muestran en la figura 9.

FIGURA 9



La pendiente m_{PQ} está dada por

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

La última expresión (con $h \neq 0$) por lo común se denomina **cociente de diferencias.** Echemos una mirada al álgebra involucrada en la simplificación de un cociente de diferencias. (Vea en el ejercicio de análisis 5, al final del capítulo, un problema relacionado.)

EJEMPLO 5 **Simplificar un cociente de diferencias**

Simplifique el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

usando la función $f(x) = x^2 + 6x - 4$.

SOLUCIÓN

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[(x+h)^2 + 6(x+h) - 4] - [x^2 + 6x - 4]}{h} \qquad \text{definición de } f$$

$$= \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + 6x + 6h - 4) - (x^2 + 6x - 4)}{h} \qquad \text{expanda numerador}$$

$$= \frac{(\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{6x} + 6h - \cancel{4}) - (\cancel{x^2} + \cancel{6x} - \cancel{4})}{h} \qquad \text{reste términos}$$

$$= \frac{2xh + h^2 + 6h}{h} \qquad \text{simplifique}$$

$$= \frac{h(2x + h + 6)}{h} \qquad \text{factorice } h$$

$$= 2x + h + 6 \qquad \text{cancele } h \neq 0$$

■

El siguiente tipo de función es uno de los más elementales en álgebra.

Definición de función lineal

Una función f es una **función lineal** si

$$f(x) = ax + b,$$

donde x es cualquier número real y a y b son constantes.

La gráfica de f en la definición precedente es la gráfica de $y = ax + b$, que, por la forma pendiente-ordenada al origen, es una recta con pendiente a e intersección b con el eje y. Así, *la gráfica de una función lineal es una recta.* Como $f(x)$ existe para toda x, el dominio de f es $\mathbb{R}$. Como se ilustra en el ejemplo siguiente, si $a \neq 0$, entonces el rango de f también es $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de una función lineal

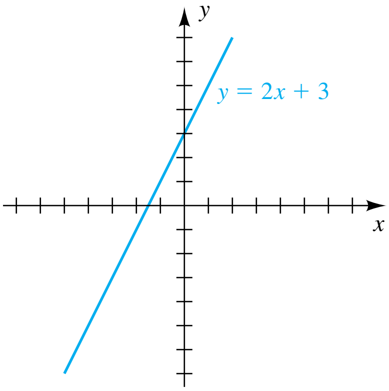
Sea $f(x) = 2x + 3$.

(a) Trace la gráfica de f.

(b) Encuentre el dominio y rango de f.

(c) Determine dónde f es creciente o es decreciente.

FIGURA 10



SOLUCIÓN

(a) Como $f(x)$ tiene la forma $ax + b$, con $a = 2$ y $b = 3$, f es una función lineal. La gráfica de $y = 2x + 3$ es la recta con pendiente 2 y punto de intersección 3 con el eje y, ilustrado en la figura 10.

(b) Vemos de la gráfica que x y y pueden ser cualesquiera números reales, de modo que el dominio y el rango de f son $\mathbb{R}$.

(c) Como la pendiente de a es positiva, la gráfica de f sube cuando x aumenta; esto es, $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$. Así, f es creciente en todo su dominio. ■

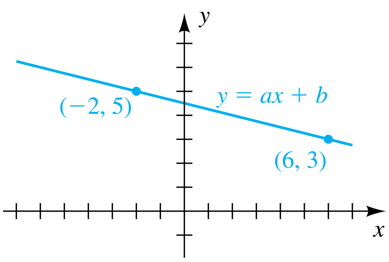
En aplicaciones a veces es necesario determinar una función lineal específica a partir de los datos dados, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 Hallar una función lineal

Si f es una función lineal tal que $f(-2) = 5$ y $f(6) = 3$, encuentre $f(x)$, donde x es cualquier número real.

SOLUCIÓN Por la definición de función lineal, $f(x) = ax + b$, donde a y b son constantes. Además, los valores de la función dada nos dicen que los puntos $(-2, 5)$ y $(6, 3)$ están en la gráfica de f, es decir, sobre la receta $y = ax + b$ ilustrada en la figura 11. La pendiente a de esta recta es

FIGURA 11



$$a = \frac{5 - 3}{-2 - 6} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4},$$

y en consecuencia $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x + b.$$

Para hallar el valor de b, podemos usar el hecho de que $f(6) = 3$, como sigue:

$$\begin{aligned} f(6) &= -\tfrac{1}{4}(6) + b && \text{sea } x = 6 \text{ en } f(x) = -\tfrac{1}{4}x + b \\ 3 &= -\tfrac{3}{2} + b && f(6) = 3 \\ b &= 3 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{9}{2} && \text{despeje } b \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función lineal que satisface $f(-2) = 5$ y $f(6) = 3$ es

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{9}{2}.$$ ■

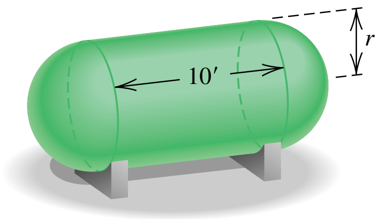
Numerosas fórmulas que se presentan en matemáticas y ciencias determinan funciones. Por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ para el área A de una circunferencia de radio r asigna a cada número real positivo r exactamente un valor de A. Esto determina una función f tal que $f(r) = \pi r^2$, y podemos escribir $A = f(r)$. La letra r, que representa un número arbitrario del dominio de f, se denomina **variable independiente**. La letra A, que representa un número del rango

de f, es una **variable dependiente** porque su valor depende del número asignado a r. Si dos variables r y A están relacionadas de este modo, decimos que *A es una función de r.* En aplicaciones, la variable independiente y la variable dependiente a veces se conocen como la **variable de entrada** y la **variable de salida,** respectivamente. Como otro ejemplo, si un automóvil viaja a un paso uniforme de 50 mi/h, entonces la distancia d (millas) recorrida en un tiempo t (horas) está dada por $d = 50t$, y por lo tanto *la distancia d es una función del tiempo t*.

EJEMPLO 8 **Expresar el volumen de un tanque como función de su radio**

Un tanque de acero para gas propano se va a construir en forma de cilindro circular recto de 10 pies de altura, con una semiesfera unida a cada extremo. El radio r está por determinarse. Exprese el volumen V (en ft^3) del tanque como función de r (en pies).

FIGURA 12



SOLUCIÓN El tanque se ilustra en la figura 12. Podemos hallar el volumen de la parte cilíndrica del tanque al multiplicar su longitud 10 por el área πr^2 de la base del cilindro. Esto nos da

$$\text{volumen del cilindro} = 10(\pi r^2) = 10\pi r^2.$$

Los dos extremos semiesféricos, tomados juntos, forman una esfera de radio r. Usando la fórmula para el volumen de una esfera, obtenemos

$$\text{volumen de los dos extremos} = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Por lo tanto, el volumen V del tanque es

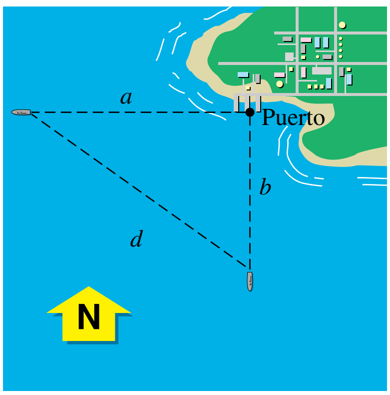
$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 + 10\pi r^2.$$

Esta fórmula expresa V como función de r. En forma factorizada,

$$V(r) = \tfrac{1}{3}\pi r^2(4r + 30) = \tfrac{2}{3}\pi r^2(2r + 15).$$ ■

EJEMPLO 9 **Expresar una distancia como función del tiempo**

FIGURA 13



Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo, uno de ellos navega al oeste a una velocidad de 17 mi/h y el otro al sur a 12 mi/h. Si t es el tiempo (en horas) después de su salida, exprese la distancia d entre los barcos como función de t.

SOLUCIÓN Para ayudar a visualizar el problema, empezamos por hacer un dibujo y marcarlo como se ve en la figura 13. Por el teorema de Pitágoras,

$$d^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{o} \qquad d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Como distancia = (velocidad)(tiempo) y las velocidades son 17 y 12, respectivamente,

$$a = 17t \qquad \text{y} \qquad b = 12t.$$

La sustitución en $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ nos da

$$d = \sqrt{(17t)^2 + (12t)^2} = \sqrt{289t^2 + 144t^2} = \sqrt{433t^2} \approx (20.8)t.$$ ■

Es posible usar pares ordenados para obtener un enfoque alternativo de las funciones. Primero observamos que una función f de D a E determina el siguiente conjunto W de pares ordenados:

$$W = \{(x, f(x)): x \text{ está en } D\}$$

Por lo tanto, W está formado por todos los pares ordenados tales que el primer número x está en D y el segundo número es el valor $f(x)$ de la función. En el ejemplo 1, donde $f(x) = x^2$, W es el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (x, x^2). Es importante observar que, *para cada x, hay exactamente un par ordenado* (x, y) *en W que tiene x en la primera posición.*

En forma recíproca, si empezamos con un conjunto W de pares ordenados tales que cada x en D aparece exactamente una vez en la primera posición de un par ordenado, entonces W determina una función. De manera específica, para cada x en D hay exactamente un par (x, y) en W, y al hacer que y corresponda a x, obtenemos una función con dominio D. El rango está formado por todos los números reales y que aparecen en la segunda posición de los pares ordenados.

Del análisis precedente se deduce que el siguiente enunciado también podría usarse como definición de función.

Definición alternativa de función

Una **función** con dominio D es un conjunto W de pares ordenados tales que, para cada x en D, hay exactamente un par ordenado (x, y) en W que tiene a x en la primera posición.

En términos de la definición precedente, los pares ordenados $\left(x, \sqrt{x-1}\right)$ determinan la función del ejemplo 3 dada por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Note, sin embargo, que si

$$W = \{(x, y): x^2 = y^2\},$$

entonces W *no es* una función, puesto que para una x determinada puede haber más de un par en W con x en la primera posición. Por ejemplo, si $x = 2$, entonces $(2, 2)$ y $(2, -2)$ están en W.

En el siguiente ejemplo ilustramos la forma en que algunos de los conceptos presentados en esta sección se pueden estudiar con ayuda de una calculadora de gráficas. En adelante, cuando hagamos asignaciones en una calculadora de gráficas, con frecuencia nos referiremos a variables como Y_1 y Y_2 como las *funciones* Y_1 y Y_2.

EJEMPLO 10 **Analizar la gráfica de una función**

Sea $f(x) = x^{2/3} - 3$.

(a) Encuentre $f(-2)$.

(b) Trace la gráfica de f.

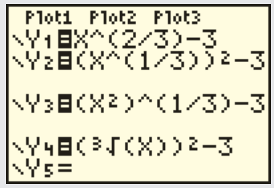
(c) Exprese el dominio y rango de f.

(d) Exprese los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

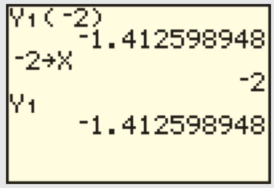
(e) Estime los puntos de intersección con el eje x de la gráfica con una precisión de un lugar decimal.

SOLUCIÓN

(a) A la derecha aparecen cuatro representaciones de f, todas ellas válidas en la TI-83/4 Plus. En algunos otros modelos anteriores de calculadoras de gráficas se puede obtener sólo el lado derecho de la gráfica de la figura 14, que aparece abajo. Si eso ocurre, cambie su representación de f.



A la derecha se muestran dos métodos para hallar un valor de función. En el primero, simplemente encontramos el valor de $Y_1(-2)$. En el segundo, guardamos -2 en X y luego hallamos el valor de Y_1



VARS ▷ 1 1 (−2) ENTER

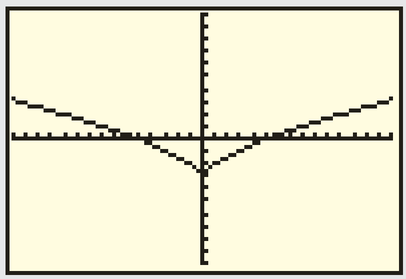
(b) El uso de la pantalla $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$ para graficar Y_1 nos da una pantalla semejante a la de la figura 14. La parte en forma de V de la gráfica de f en $x = 0$ se llama **cúspide.**

(c) El dominio de f es $\mathbb{R}$, porque podemos introducir cualquier valor para x. La figura indica que $y \geq -3$, de modo que concluimos que el rango de f es $[-3, \infty)$.

(d) En la figura vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$.

(e) Con el uso de la función de raíz, encontramos que el punto de intersección positivo con el eje x de la figura 14 es aproximadamente 5.2. Como f es simétrica con respecto al eje y, el punto de intersección con el eje x negativo es alrededor de -5.2.

FIGURA 14 $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$



■

Como ayuda de referencia, algunas gráficas comunes y sus ecuaciones aparecen en el apéndice I. Muchas de éstas son gráficas de funciones.

3.4 Ejercicios

1 Si $f(x) = -x^2 - x - 4$, encuentre $f(-2)$, $f(0)$ y $f(4)$.

2 Si $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$, encuentre $f(-3)$, $f(0)$ y $f(2)$.

3 Si $f(x) = \sqrt{x - 2} + 3x$, encuentre $f(3)$, $f(6)$ y $f(11)$.

4 Si $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$, encuentre $f(-2)$, $f(0)$ y $f(3)$.

Ejer. 5–10: Si a y h son números reales, encuentre

(a) $f(a)$ **(b)** $f(-a)$ **(c)** $-f(a)$ **(d)** $f(a+h)$

(e) $f(a)+f(h)$ **(f)** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, **si** $h \neq 0$

5 $f(x) = 5x - 2$

6 $f(x) = 1 - 4x$

7 $f(x) = -x^2 + 3$

8 $f(x) = 3 - x^2$

9 $f(x) = x^2 - x + 3$

10 $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

Ejer. 11–14: Si a es un número real positivo, encuentre

(a) $g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ **(b)** $\dfrac{1}{g(a)}$ **(c)** $g(\sqrt{a})$ **(d)** $\sqrt{g(a)}$

11 $g(x) = 4x^2$

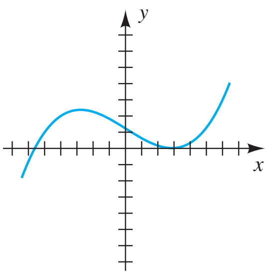
12 $g(x) = 2x - 7$

13 $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

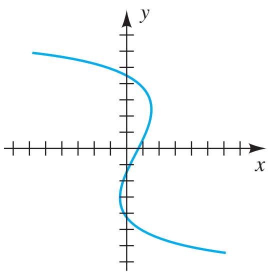
14 $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Ejer. 15–16: Explique por qué la gráfica es o no es la representación de una función.

15

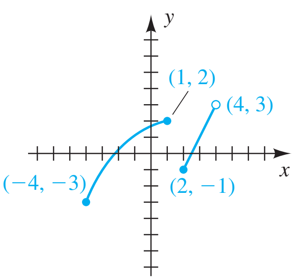


16

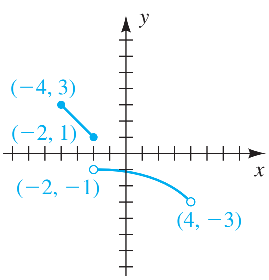


Ejer. 17–18: Determine el dominio D y el rango R de la función que se muestra en la figura.

17



18



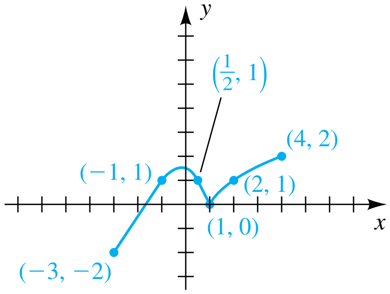
Ejer. 19–20: Para la gráfica de la función f trazada en la figura, determine

(a) el dominio **(b)** el rango **(c)** $f(1)$

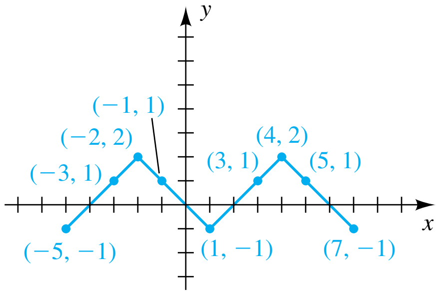
(d) toda x tal que $f(x) = 1$

(e) toda x tal que $f(x) > 1$

19



20



Ejer. 21–32: Encuentre el dominio de f.

21 $f(x) = \sqrt{2x+7}$

22 $f(x) = \sqrt{4-3x}$

23 $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

24 $f(x) = \sqrt{x^2-25}$

25 $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-9x}$

26 $f(x) = \dfrac{4x}{6x^2+13x-5}$

27 $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-5}}{x^2-5x+4}$

28 $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$

29 $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}}$

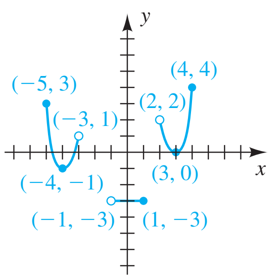
30 $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)\sqrt{x+3}}$

31 $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}$

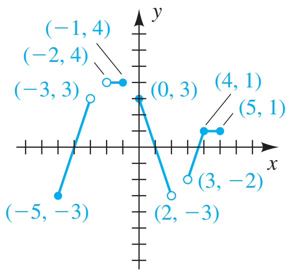
32 $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-6)}$

Ejer. 33–34: (a) Encuentre el dominio D y rango R de f. (b) Encuentre los intervalos en los que f es creciente, decreciente o constante.

33



34



35 Trace la gráfica de una función que sea creciente en $(-\infty, -3]$ y $[2, \infty)$ y sea decreciente en $[-3, 2]$.

36 Trace la gráfica de una función que sea decreciente en $(-\infty, -2]$ y $[1, 4]$ y sea creciente en $[-2, 1]$ y $[4, \infty)$.

Ejer. 37–46: (a) Trace la gráfica de *f*. (b) Encuentre el dominio *D* y rango *R* de *f*. (c) Encuentre los intervalos en los que *f* es creciente, decreciente o constante.

37 $f(x) = -2x + 1$

38 $f(x) = 2x - 1$

39 $f(x) = 4 - x^2$

40 $f(x) = x^2 - 1$

41 $f(x) = \sqrt{x - 1}$

42 $f(x) = \sqrt{4 - x}$

43 $f(x) = -4$

44 $f(x) = 3$

45 $f(x) = -\sqrt{36 - x^2}$

46 $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Ejer. 47–48: Simplifique el cociente de diferencias $\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ **si** $h \neq 0$.

47 $f(x) = x^2 - 6x$

48 $f(x) = -2x^2 + 5$

Ejer. 49–50: Simplifique el cociente de diferencias $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ **si** $h \neq 0$.

49 $f(x) = x^2 + 5$

50 $f(x) = 1/x^2$

Ejer. 51–52: Simplifique el cociente de diferencias $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ **si** $x \neq a$.

51 $f(x) = \sqrt{x - 3}$ (*Sugerencia:* racionalice el numerador.)

52 $f(x) = x^3 - 2$

Ejer. 53–54: Si una función lineal *f* satisface las condiciones dadas, encuentre $f(x)$.

53 $f(-3) = 1$ y $f(3) = 2$

54 $f(-2) = 7$ y $f(4) = -2$

Ejer. 55–64: Determine si el conjunto *W* de pares ordenados es una función en el sentido de la definición alternativa de función de la página 174.

55 $W = \{(x, y): 3y = x^2 + 7\}$

56 $W = \{(x, y): x = 3y + 2\}$

57 $W = \{(x, y): x^2 + y^2 = 4\}$

58 $W = \{(x, y): y^2 - x^2 = 4\}$

59 $W = \{(x, y): y = 5\}$

60 $W = \{(x, y): x = 3\}$

61 $W = \{(x, y): xy = 0\}$

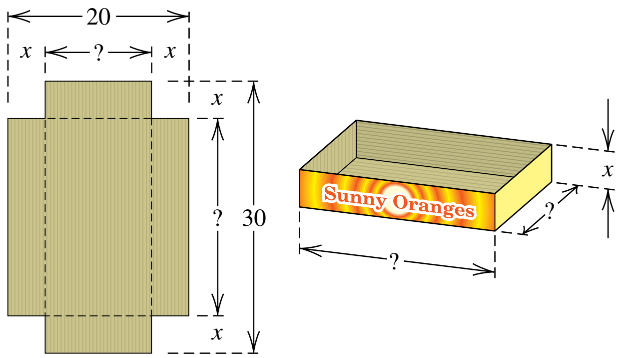
62 $W = \{(x, y): x + y = 0\}$

63 $W = \{(x, y): |y| = |x|\}$

64 $W = \{(x, y): y < x\}$

65 **Construcción de una caja** De una pieza rectangular de cartón que tiene dimensiones de 20 pulgadas × 30 pulgadas, se ha de construir una caja abierta al cortar un cuadrado idéntico de área x^2 de cada esquina y voltear hacia arriba los lados (vea la figura). Exprese el volumen *V* de la caja como función de *x*.

EJERCICIO 65



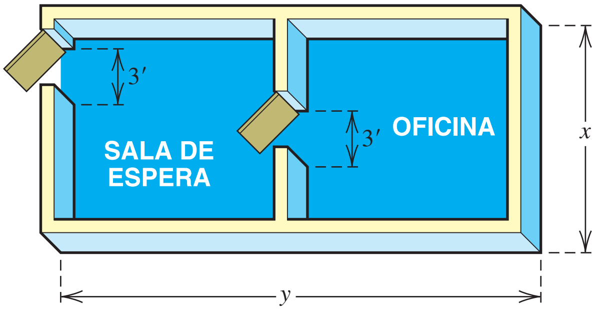
66 **Construcción de un tanque de almacenamiento** Consulte el ejemplo 8. Un tanque de acero para almacenamiento de gas propano se ha de construir en forma de cilindro circular recto de 10 pies de largo con una semiesfera unida en cada extremo. El radio *r* está por determinarse. Exprese el área superficial *S* del tanque como función de *r*.

67 **Dimensiones de un edificio** Una pequeña unidad para oficinas debe contener 500 ft^2 de espacio de piso. Un modelo simplificado se ilustra en la figura.

(a) Exprese la longitud *y* del edificio como función del ancho *x*.

(b) Si las paredes cuestan \$100 por pie lineal de piso, exprese el costo *C* de las paredes como función del ancho *x*. (No considere el espacio de pared arriba de las puertas ni el grosor de las paredes.)

EJERCICIO 67

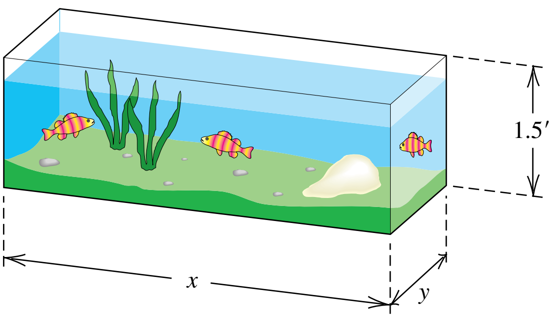


68 **Dimensiones de un acuario** Un acuario de 1.5 pies de altura debe tener un volumen de 6 ft^3. Con x denote la longitud de la base y con y el ancho (vea la figura).

(a) Exprese y como función de x.

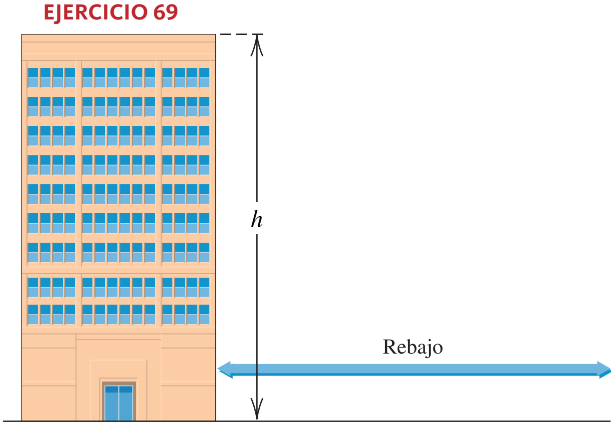
(b) Exprese el número total S de pies cuadrados de vidrio necesario como función de x.

EJERCICIO 68



69 **Reglamento de construcción** El ayuntamiento de una ciudad está proponiendo un nuevo reglamento de construcción, el cual requiere que el rebajo S para cualquier edificio desde una residencia sea un mínimo de 100 pies, más otros 6 pies por cada pie de altura arriba de 25 pies. Encuentre una función lineal para S en términos de h.

EJERCICIO 69



70 **Impuesto de energía** Un impuesto de energía T propuesto a la gasolina, que afectaría el costo de conducir un vehículo, se ha de calcular al multiplicar el número x de galones de gasolina que una persona compra por 125,000 (el número de Btu por galón de gasolina) y luego multiplicar el total de Btu por el impuesto, 34.2 centavos por millón de las Btu. Encuentre una función lineal para T en términos de x.

71 **Crecimiento en la infancia** Para niños entre 6 y 10 años, la estatura y (en pulgadas) es frecuentemente una función lineal de la edad t (en años). La estatura de cierto niño es de 48 pulgadas a los 6 años de edad y 50.5 pulgadas a los 7.

(a) Exprese y como función de t.

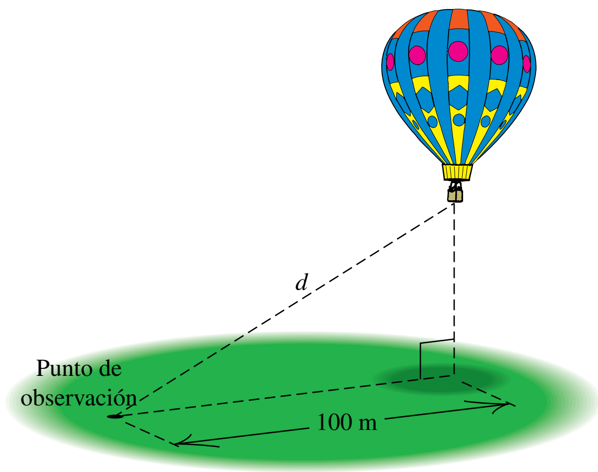
(b) Trace la recta del inciso (a) e interprete la pendiente.

(c) Prediga la estatura del niño a la edad de 10 años.

72 **Contaminación radiactiva** Se ha estimado que 1000 curies de sustancia radiactiva, introducida en un punto en la superficie del mar abierto, se extenderían sobre un área de 40,000 km^2 en 40 días. Suponiendo que el área cubierta por la sustancia radiactiva sea una función lineal del tiempo t y que es siempre de forma circular, exprese el radio r de la contaminación como función de t.

73 **Distancia a un globo de aire caliente** Un globo de aire caliente se lanza a la 1:00 p.m. y sube verticalmente a razón de 2 m/s. Un punto de observación está situado a 100 metros de un punto en el suelo, directamente abajo del globo (vea la figura). Si t denota el tiempo (en segundos) después de la 1:00 p.m., exprese la distancia d entre el globo y el punto de observación como función de t.

EJERCICIO 73

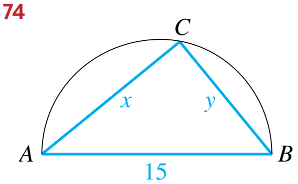


74 El triángulo ABC está inscrito en un semicírculo de diámetro 15 (vea la figura).

(a) Si x denota la longitud del lado AC, exprese la longitud y del lado BC como función de x. (*Sugerencia:* el ángulo ACB es un ángulo recto.)

(b) Exprese el área $\mathscr{A}$ del triángulo ABC como función de x y exprese el dominio de esta función

EJERCICIO 74

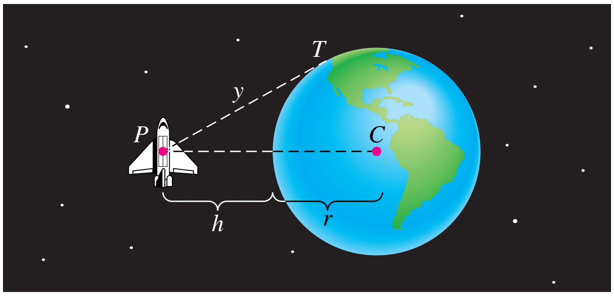


75 **Distancia a la Tierra** Desde un punto exterior P que está a h unidades de una circunferencia de radio r, se traza una recta tangente a la circunferencia (vea la figura). Denote con y la distancia desde el punto P al punto de tangencia T.

(a) Exprese y como función de h. (*Sugerencia:* si C es el centro de la circunferencia, entonces PT es perpendicular a CT.)

(b) Si r es el radio de la Tierra y h es la altitud de un trasbordador espacial, entonces y es la distancia máxima a la Tierra que un astronauta puede ver desde el trasbordador. En particular, si $h = 200$ mi y $r \approx 4000$ mi, aproxime y.

EJERCICIO 75

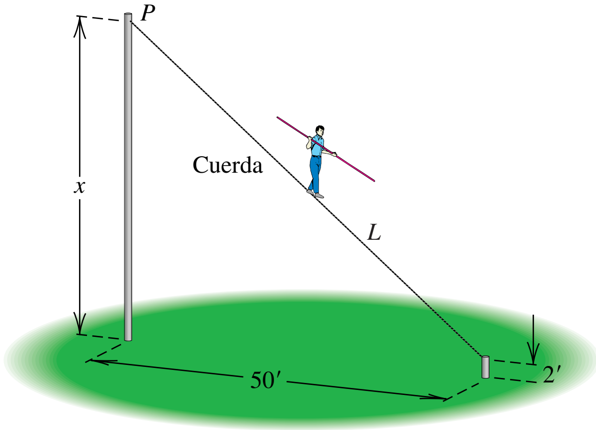


76 **Longitud de una cuerda floja** La figura ilustra el aparato para un equilibrista. Dos postes se colocan a 50 pies uno del otro, pero el punto de unión P para la cuerda no se ha determinado.

(a) Exprese la longitud L de la cuerda como función de la distancia x de P al suelo.

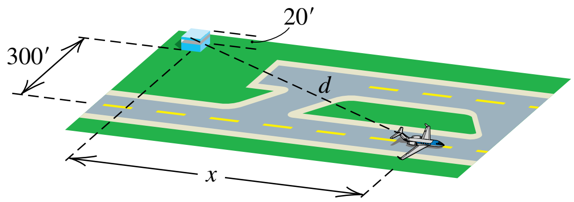
(b) Si la caminata total debe ser de 75 pies, determine la distancia de P al suelo.

EJERCICIO 76



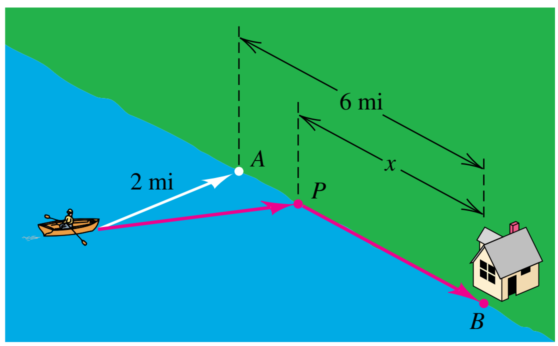
77 **Pista de un aeropuerto** Las posiciones relativas de una pista para aviones y una torre de control de 20 pies de altura se ven en la figura. El principio de la pista está a una distancia perpendicular de 300 pies desde la base de la torre. Si x denota la distancia que un avión se ha movido por la pista, exprese la distancia d entre el avión y la parte superior de la torre de control como función de x.

EJERCICIO 77



78 **Tiempo de llegada a un destino** Un hombre en un bote de remos que está a 2 millas del punto A más cercano en una orilla recta desea llegar a su casa situada en un punto B que está 6 millas más abajo por la orilla (vea la figura). Él planea remar a un punto P que está entre A y B a x millas de la casa, y luego caminará el resto de la distancia. Suponga que puede remar a 3 mi/h y puede caminar a 5 mi/h. Si T es el tiempo total necesario para llegar a la casa, exprese T como función de x.

EJERCICIO 78



Ejer. 79–82: Trace la gráfica de *f* en el intervalo dado [*a*, *b*]. (b) Estime el rango de *f* en [*a*, *b*]. (c) Estime los intervalos en los que *f* es creciente o decreciente.

79 $f(x) = \dfrac{x^{1/3}}{1 + x^4}$; $[-2, 2]$

80 $f(x) = x^4 - 0.4x^3 - 0.8x^2 + 0.2x + 0.1$; $[-1, 1]$

81 $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$; $[-0.7, 1.4]$

82 $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^4}$; $[-4, 4]$

Ejer. 83–84: En los ejercicios 51-52 de la sección 2.5, se usaron métodos algebraicos para hallar soluciones a cada una de las siguientes ecuaciones. Ahora resuelva la ecuación gráficamente, al asignar la expresión del lado izquierdo a Y_1 y el número en el lado derecho a Y_2, y luego encuentre las coordenadas *x* de todos los puntos de intersección de las dos gráficas.

83 (a) $x^{5/3} = 32$ (b) $x^{4/3} = 16$ (c) $x^{2/3} = -64$

(d) $x^{3/4} = 125$ (e) $x^{3/2} = -27$

84 (a) $x^{3/5} = -27$ (b) $x^{2/3} = 25$ (c) $x^{4/3} = -49$

(d) $x^{3/2} = 64$ (e) $x^{3/4} = -8$

85 **Pantalla de calculadora** La pantalla de una calculadora de gráficas particular mide 95 pixeles de ancho y 63 pixeles de alto.

(a) Encuentre el número total de pixeles en la pantalla.

(b) Si una función se grafica en el modo de puntos, determine el número máximo de pixeles que típicamente se oscurecerían en la pantalla de la calculadora para mostrar la función.

86 **Distancias de parada** La tabla siguiente es una lista de distancias de parada prácticas *D* (en pies) para autos a velocidades *S* (en millas por hora) en superficies a nivel, como la usa la American Association of State Highway and Transportation Officials.

S	20	30	40	50	60	70
D	33	86	167	278	414	593

(a) Grafique los datos.

(b) Determine si la distancia de parada es una función lineal de la velocidad.

(c) Examine las implicaciones prácticas de estos datos para conducir con seguridad un auto.

87 **Precios de autos nuevos** En 1993 y 2000, los precios promedio pagados por un auto nuevo fueron $16,871 y $20,356, respectivamente. Suponga que el precio promedio aumentó linealmente.

(a) Encuentre una función *f* que modele el precio pagado promedio por un auto nuevo. Grafique *f* junto con los dos puntos de datos.

(b) Interprete la pendiente de la gráfica de *f*.

(c) Gráficamente aproxime el año cuando el precio pagado promedio sería $25,000.

3.5 Gráficas de funciones

En esta sección estudiamos ayudas para trazar gráficas de ciertos tipos de funciones. En particular, una función *f* se llama **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda *x* en su dominio. En este caso, la ecuación $y = f(x)$ no se cambia si $-x$ es sustituida por *x* y, por lo tanto, por la prueba de simetría de la sección 3.2, la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje *y*.

Una función *f* se denomina **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda *x* en su dominio. Si aplicamos la prueba de simetría 3 de la sección 3.2 a la ecuación $y = f(x)$, vemos que la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Estos datos se resumen en las primeras dos columnas de la tabla siguiente.

Funciones pares e impares

Terminología	Definición	Ilustración	Tipo de simetría de la gráfica
f es una **función *par*.**	$f(-x) = f(x)$ para toda *x* en el dominio.	$y = f(x) = x^2$	con respecto al eje *y*
f es una **función *impar*.**	$f(-x) = -f(x)$ para toda *x* en el dominio.	$y = f(x) = x^3$	con respecto al origen

EJEMPLO 1 **Determinar si una función es par o impar**

Determine si f es par, impar o ninguna de éstas.

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ **(b)** $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$

(c) $f(x) = x^3 + x^2$

SOLUCIÓN En cada caso el dominio de f es $\mathbb{R}$. Para determinar si f es par o impar, empezamos por examinar $f(-x)$ donde x es cualquier número real.

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 && \text{sustituya } x \text{ por } -x \text{ en } f(x) \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 5 && \text{simplifique} \\ &= f(x) && \text{definición de } f \end{aligned}$$

Como $f(-x) = f(x)$, f es una función par.

(b)
$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) && \text{sustituya } x \text{ por } -x \text{ en } f(x) \\ &= -2x^5 + 7x^3 - 4x && \text{simplifique} \\ &= -(2x^5 - 7x^3 + 4x) && \text{factorice } -1 \\ &= -f(x) && \text{definición de } f \end{aligned}$$

Como $f(-x) = -f(x)$, f es una función impar.

(c)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x)^2 && \text{sustituya } x \text{ por } -x \text{ en } f(x) \\ &= -x^3 + x^2 && \text{simplifique} \end{aligned}$$

Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$ (note que $-f(x) = -x^3 - x^2$), la función f no es ni par ni impar. ■

En el siguiente ejemplo consideramos la **función valor absoluto** f, definida por $f(x) = |x|$.

EJEMPLO 2 **Trazar la gráfica de la función valor absoluto**

Sea $f(x) = |x|$.

(a) Determine si f es par o impar.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

SOLUCIÓN

(a) El dominio de f es $\mathbb{R}$, porque el valor absoluto de x existe para todo número real x. Si x está en $\mathbb{R}$, entonces

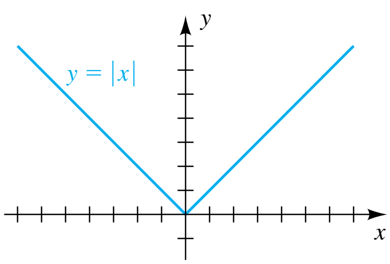
$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Por lo tanto, f es una función par porque $f(-x) = f(x)$.

(b) Como f es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ y por lo tanto la parte del primer cuadrante de la gráfica coincide con la recta $y = x$. Trazar esta semirrecta y usar simetría nos da la figura 1.

(c) Al consultar la gráfica vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y es creciente en $[0, \infty)$. ■

FIGURA 1

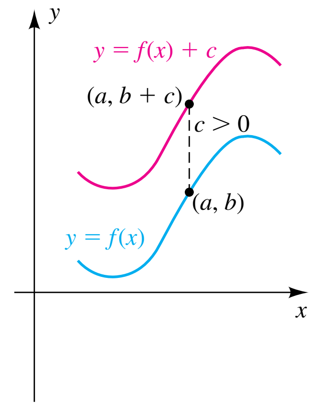
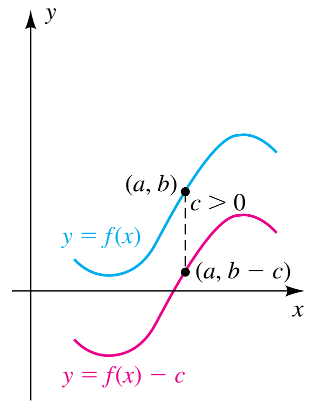


Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, es fácil trazar las gráficas de

$$y = f(x) + c \qquad \text{y} \qquad y = f(x) - c$$

para cualquier número real positivo c. Al igual que en la siguiente gráfica, para $y = f(x) + c$, sumamos c a la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = f(x)$. Esto *desplaza* la gráfica de f *hacia arriba* una distancia c. Para $y = f(x) - c$ con $c > 0$, restamos c de cada coordenada y, por lo tanto se desplaza la gráfica de f una distancia c *hacia abajo*. Éstos se denominan **desplazamientos verticales** de gráficas.

Desplazamiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	$y = f(x) + c$ con $c > 0$	$y = f(x) - c$ con $c > 0$
Efecto en la gráfica	La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia arriba una distancia c.	La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia c.
Interpretación gráfica		

EJEMPLO 3 Desplazamiento vertical de una gráfica

Trace la gráfica de f:

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = x^2 + 4$ **(c)** $f(x) = x^2 - 4$

SOLUCIÓN Trazaremos todas las gráficas en el mismo plano de coordenadas.

(a) Como

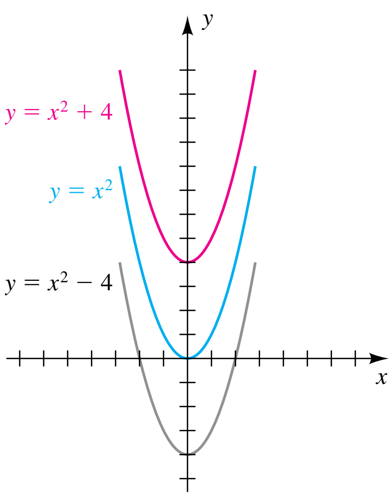
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

la función f es par y por lo tanto su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Varios puntos en la gráfica de $y = x^2$ son (0, 0), (1, 1), (2, 4) y (3, 9). Trazando una curva suave que pase por estos puntos y que se refleje a través del eje y nos da el trazo de la figura 2. La gráfica es una parábola con vértice en el origen y que abre hacia arriba.

(b) Para trazar la gráfica de $y = x^2 + 4$, sumamos 4 a la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = x^2$; esto es, desplazamos la gráfica del inicio (a) hacia arriba 4 unidades, como se ve en la figura.

(c) Para trazar la gráfica de $y = x^2 - 4$, disminuimos las coordenadas y de $y = x^2$ en 4; esto es, desplazamos la gráfica del inciso (a) hacia abajo 4 unidades. ■

FIGURA 2



También consideramos **desplazamientos horizontales** de gráficas. Específicamente, si $c > 0$, considere las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x) = f(x - c)$ trazadas en el mismo plano de coordenadas, como se ilustra en la tabla siguiente. Como

$$g(a + c) = f([a + c] - c) = f(a),$$

vemos que el punto con abscisa a en la gráfica de $y = f(x)$ tiene la misma coordenada y que el punto con abscisa $a + c$ en la gráfica de $y = g(x) = f(x - c)$. Esto implica que la gráfica de $y = g(x) = f(x - c)$ se puede obtener al desplazar la gráfica de $y = f(x)$ *a la derecha* una distancia c. Análogamente, la gráfica de $y = h(x) = f(x + c)$ se puede obtener al desplazar la gráfica de f *a la izquierda* una distancia c, como se muestra en la tabla.

Desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

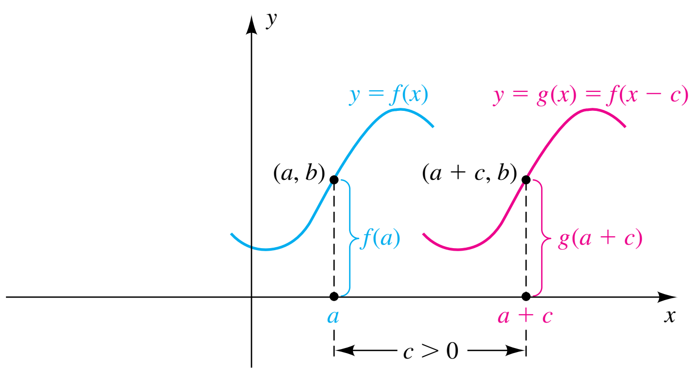
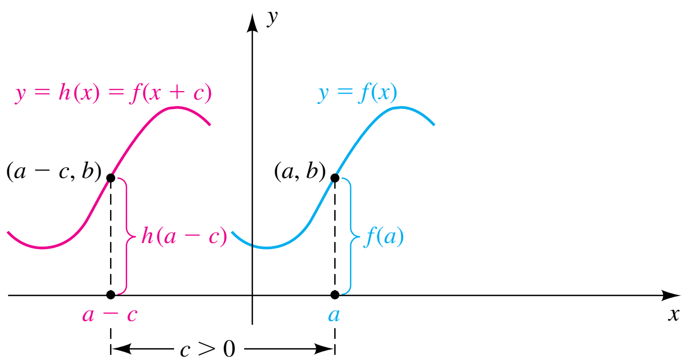
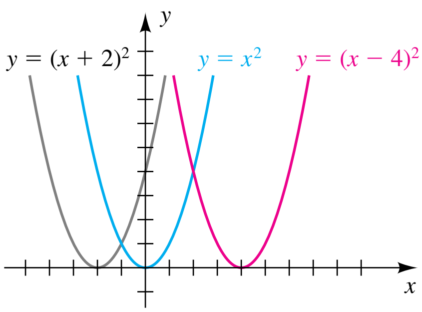
Ecuación	Efecto en la gráfica	Interpretación gráfica
$y = g(x)$ $= f(x - c)$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza horizontalmente a la *derecha* una distancia c.	
$y = h(x)$ $= f(x + c)$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza horizontalmente a la *izquierda* una distancia c.	

FIGURA 3



Los desplazamientos horizontales y verticales también se conocen como *traslaciones.*

EJEMPLO 4 **Desplazamiento horizontal de una gráfica**

Trace la gráfica de f:

(a) $f(x) = (x - 4)^2$ **(b)** $f(x) = (x + 2)^2$

SOLUCIÓN La gráfica de $y = x^2$ se traza en la figura 3.

(a) Desplazar la gráfica de $y = x^2$ a la derecha 4 unidades nos da la gráfica de $y = (x - 4)^2$ mostrada en la figura.

(b) Desplazar la gráfica de $y = x^2$ a la izquierda 2 unidades nos lleva a la gráfica de $y = (x + 2)^2$ mostrada en la figura. ■

Para obtener la gráfica de $y = cf(x)$ para algún número real c, podemos *multiplicar* las coordenadas y de los puntos sobre la gráfica de $y = f(x)$ por c. Por ejemplo, si $y = 2f(x)$, duplicamos las coordenadas y; o si $y = \frac{1}{2}f(x)$, multiplicamos cada coordenada y por $\frac{1}{2}$. Este procedimiento se conoce como **elongación vertical** de la gráfica de f (si $c > 1$) o **compresión vertical** de la gráfica (si $0 < c < 1$) y se resume en la tabla siguiente.

Elongación o compresión vertical de la gráfica de $y = f(x)$

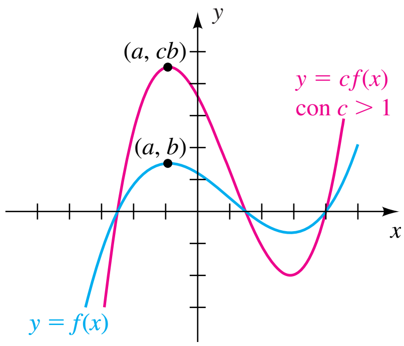
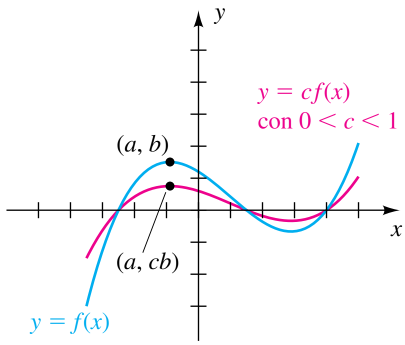
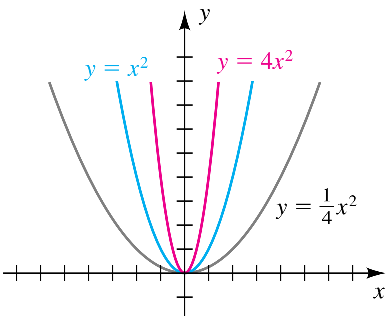
Ecuación	$y = cf(x)$ con $c > 1$	$y = cf(x)$ con $0 < c < 1$
Efecto en la gráfica	La gráfica de f se alarga verticalmente por un factor c.	La gráfica de f se comprime verticalmente por un factor $1/c$.
Interpretación gráfica		

FIGURA 4



EJEMPLO 5 Alargar o comprimir verticalmente una gráfica

Trace la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 4x^2$ **(b)** $y = \frac{1}{4}x^2$

SOLUCIÓN

(a) Para trazar la gráfica de $y = 4x^2$, podemos consultar la gráfica de $y = x^2$ de la figura 4 y multiplicar la coordenada y de cada punto por 4. Esto alarga la gráfica de $y = x^2$ verticalmente por un factor de 4 y nos da una parábola más angosta que es más aguda en el vértice, como se ilustra en la figura.

(b) La gráfica de $y = \frac{1}{4}x^2$ se puede trazar al multiplicar las coordenadas y de los puntos en la gráfica de $y = x^2$ por $\frac{1}{4}$. Esto comprime la gráfica de $y = x^2$ verticalmente por un factor $1/\frac{1}{4} = 4$ y nos da una parábola más ancha que es más plana en el vértice, como se ve en la figura 4. ■

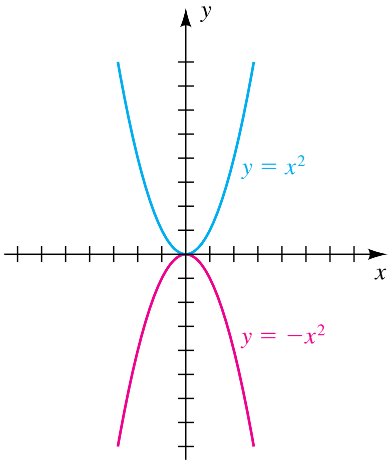
La sustitución de y con –y refleja la gráfica de y = f(x) a través del eje x.

Podemos obtener la gráfica de $y = -f(x)$ al multiplicar la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ por -1. Así, todo punto (a, b) sobre la gráfica de $y = f(x)$ que se encuentre arriba del eje x determina un punto $(a, -b)$ sobre la gráfica de $y = -f(x)$ que se encuentra debajo del eje x. Del mismo modo, si (c, d) está debajo del eje x (esto es, $d < 0$), entonces $(c, -d)$ se encuentra arriba del eje x. La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ a través del eje x.

EJEMPLO 6 Reflejar una gráfica por el eje x

Trace la gráfica de $y = -x^2$.

FIGURA 5



SOLUCIÓN La gráfica puede hallarse al localizar puntos; pero, como la gráfica de $y = x^2$ nos es conocida, la trazamos como en la figura 5 y luego multiplicamos las coordenadas y de los puntos por -1. Este procedimiento nos da la reflexión a través del eje x indicada en la figura. ■

A veces es útil comparar las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$ si $c \neq 0$. En este caso los valores de función $f(x)$ para

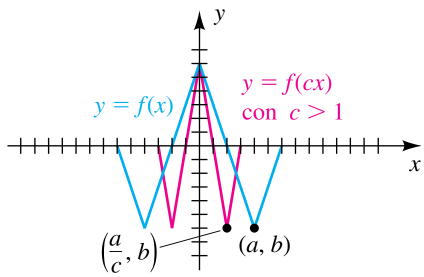
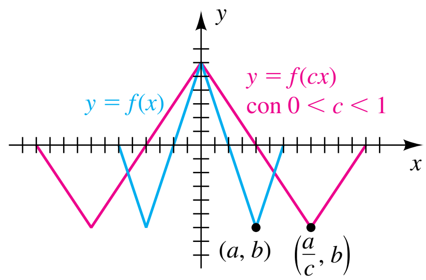
$$a \leq x \leq b$$

son los mismos que los valores de la función $f(cx)$ para

$$a \leq cx \leq b \qquad \text{o bien, en forma equivalente,} \qquad \frac{a}{c} \leq x \leq \frac{b}{c}.$$

Esto implica que la gráfica de f se **comprime horizontalmente** (si $c > 1$) o se **alarga horizontalmente** (si $0 < c < 1$), como se resume en la tabla siguiente.

Compresión o elongación horizontales de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en la gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(cx)$ con $c > 1$	La gráfica de f se comprime horizontalmente por un factor c.	
$y = f(cx)$ con $0 < c < 1$	La gráfica de f se elonga horizontalmente por un factor $1/c$.	

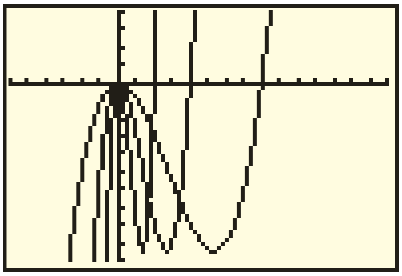
La sustitución de x con –x refleja la gráfica de $y = f(x)$ a través del eje y.

Si $c < 0$, entonces la gráfica de $y = f(cx)$ puede obtenerse por reflexión de la gráfica de $y = f(|c|x)$ a través del eje y. Por ejemplo, para trazar la gráfica de $y = f(-2x)$, reflejamos la gráfica de $y = f(2x)$ por el eje y. Como caso especial, la gráfica de $y = f(-x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ a través del eje y.

EJEMPLO 7 **Elongación o compresión horizontal de una gráfica**

Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, trace las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(2x)$ y $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

FIGURA 6
[−6, 15] por [−10, 4]



SOLUCIÓN Tenemos lo siguiente:

$$y = f(x) = x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4)$$
$$y = f(2x) = (2x)^3 - 4(2x)^2 = 8x^3 - 16x^2 = 8x^2(x - 2)$$
$$y = f\left(\tfrac{1}{2}x\right) = \left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 - 4\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 = \tfrac{1}{8}x^3 - x^2 = \tfrac{1}{8}x^2(x - 8)$$

Note que los puntos de intersección con el eje x de la gráfica de $y = f(2x)$ son 0 y 2, que son $\frac{1}{2}$ de los puntos de intersección con el eje x de 0 y 4 para $y = f(x)$. Esto indica una compresión horizontal por un factor de 2.

Los puntos de intersección con el eje x de la gráfica de $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ son 0 y 8, que son 2 veces los puntos de intersección con el eje x para $y = f(x)$. Esto indica una elongación horizontal por un factor de por $1/\frac{1}{2} = 2$.

Las gráficas, obtenidas con el uso de una calculadora de gráficas con pantalla [−6, 15] por [−10, 4], se muestran en la figura 6. ■

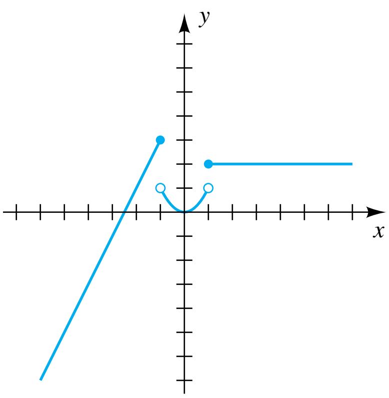
Las funciones se describen a veces con más de una expresión, como en los ejemplos siguientes. A estas funciones se les llama **funciones definidas por tramos.**

EJEMPLO 8 **Trazar la gráfica de una función definida por tramos**

Trace la gráfica de la función f si

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

FIGURA 7



SOLUCIÓN Si $x \leq -1$, entonces $f(x) = 2x + 5$ y la gráfica de f coincide con la recta $y = 2x + 5$ y está representada por la parte de la gráfica a la izquierda de la recta $x = -1$ de la figura 7. El punto pequeño indica que el punto $(-1, 3)$ está en la gráfica.

Si $|x| < 1$ (o bien, lo que es equivalente, $-1 < x < 1$), usamos x^2 para hallar valores de f y por lo tanto esta parte de la gráfica de f que coincide con la parábola $y = x^2$, como se indica en la figura. Note que los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ *no están* en la gráfica.

Por último, si $x \geq 1$, los valores de f son siempre 2. Así, la gráfica de f para $x \geq 1$ es la semirrecta horizontal de la figura 7.

Nota: cuando el lector termine de trazar la gráfica de una función definida por tramos, verifique que pase la prueba de la recta vertical. ■

El siguiente ejemplo muestra la forma en que podemos graficar la función definida por tramos del último ejemplo en una calculadora de gráficas.

EJEMPLO 9 **Trazar la gráfica de una función definida por tramos**

Trace la gráfica de la función f si

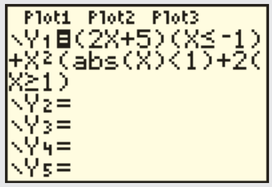
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Empezamos por hacer la asignación

$$Y_1 = \underbrace{(2x + 5)(x \le -1)}_{\text{primera parte}} + \underbrace{x^2(\text{abs}(x) < 1)}_{\text{segunda parte}} + \underbrace{2(x \ge 1)}_{\text{tercera parte}}.$$

Haga asignaciones Y.

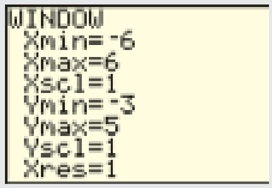
[Y=] [CLEAR]
[(] 2 [X,T,θ,n] [+] 5 [)]
[(] [X,T,θ,n] [2nd] [TEST] [6] −1 [)]
[+] [X,T,θ,n] [x^2]
[(] [MATH] [▷] [1] [X,T,θ,n] [)]
[2nd] [TEST] [5] 1 [)]
[+] 2
[(] [X,T,θ,n] [2nd] [TEST] [4] 1 [)]



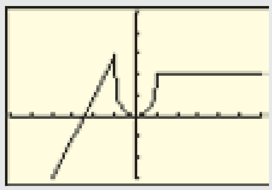
A medida que la variable x toma valores de Xmín a Xmáx, la desigualdad $x \le -1$ en la primera parte tendrá un valor de 1 (si $x \le -1$) o 0 (si $x > -1$). Este valor se multiplica por el valor de $2x + 5$ y se asigna a Y_1. En la segunda parte, note que *tanto* $-1 < x$ *como* $x < 1$ (equivalente a $|x| < 1$) deben ser verdaderos para que el valor de x^2 sea asignado a Y_1. La idea general es que cada parte está "puesta" sólo cuando x toma los valores del dominio asociado.

Ajustar la pantalla.

[WINDOW] −6 [▽] 6 [▽] 1 [▽]
−3 [▽] 5 [▽] 1 [▽]



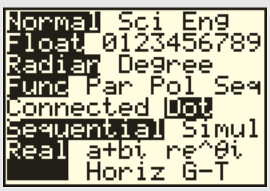
Graficar la función en el *modo conectado* estándar nos permite ver las características más importantes de la gráfica. En modo conectado, la calculadora incluye rectas entre los puntos extremos de las partes. Presione [GRAPH].

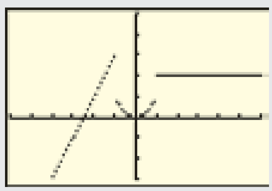


Para eliminar estas rectas, podemos cambiar a *modo de punto* y rehacer la gráfica. Note que la calculadora de gráficas no hace distinción entre incluir y excluir un punto extremo (algunos paquetes de software sí lo hacen).

Cambiar a modo de punto.

[MODE] [▽ (4 veces)] [▷] [ENTER] [GRAPH]





(continúa)

Nota: un método alternativo para representar la función *f* es asignar cada parte a un valor Y como sigue:

$$Y_1 = (2x + 5)(x \le -1),\ Y_2 = x^2(\text{abs}(x) < 1),\ Y_3 = 2(x \ge 1)$$

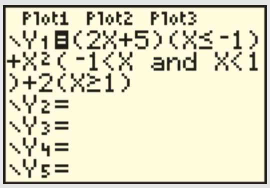
Sin embargo, graficar las tres pantallas es un proceso más bien lento. La rapidez se puede mejorar al graficar $Y_4 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ para obtener la gráfica de *f* (asegúrese de apagar Y_1, Y_2 y Y_3). Para apagar Y_1 en la TI-84/4 Plus, ponga el cursor en el signo = a la derecha de Y_1 y presione ENTER.

Otro método para representar la función *f* es asignar cada parte a un valor Y usando división, como sigue:

$$Y_1 = (2x + 5)/(x \le -1), \quad Y_2 = x^2/(\text{abs}(x) < 1), \quad Y_3 = 2/(x \ge 1)$$

Graficar los tres valores Y nos da la gráfica de *f* una vez más. La ventaja de este método es aparente cuando se usa el modo conectado. ¡Inténtelo!

Nota de calculadora: Recuerde que $|x| < 1$, o bien, $-1 < x < 1$ también se puede escribir como "$-1 < x$ and $x < 1$". Los operadores "and" y "or" se encuentran bajo el menú TEST LOGIC en la TI-83/4 Plus. Podemos usar "and" para hacer una asignación alternativa para la función del ejemplo 9, como se ve en la figura.



Es una mala idea común pensar que si se mueve a un grupo más alto de impuesto, *todo* su ingreso es gravado a una tasa más alta. El siguiente ejemplo de una gráfica de una función definida por tramos ayuda a disipar esa noción.

EJEMPLO 10 **Aplicación usando una función definida por tramos**

Trace una gráfica de la cédula X de tasa de impuesto federal 2009 mostrada en la figura 8. Represente con x el ingreso gravable y con T la cantidad de impuesto. (Suponga que el dominio es el conjunto de los números reales no negativos.)

FIGURA 8

Cédula de tasa de impuesto federal 2009

Cédula X –Usar si su estatus de presentación es **soltero**

Si el ingreso gravable es más de–	*Pero no más de–*	*El impuesto es:*	*de la cantidad sobre–*
$0	$8,350	-------- **10%**	**$0**
8,350	33,950	**$835.00 + 15%**	**8,350**
33,950	82,250	**$4,675.00 + 25%**	**33,950**
82,250	171,550	**16,750.00 + 28%**	**82,250**
171,550	372,950	**41,754.00 + 33%**	**171,550**
372,950	-------	**108,216.00 + 35%**	**372,950**

SOLUCIÓN La tabla de impuesto puede ser representada por una función definida por tramos como sigue:

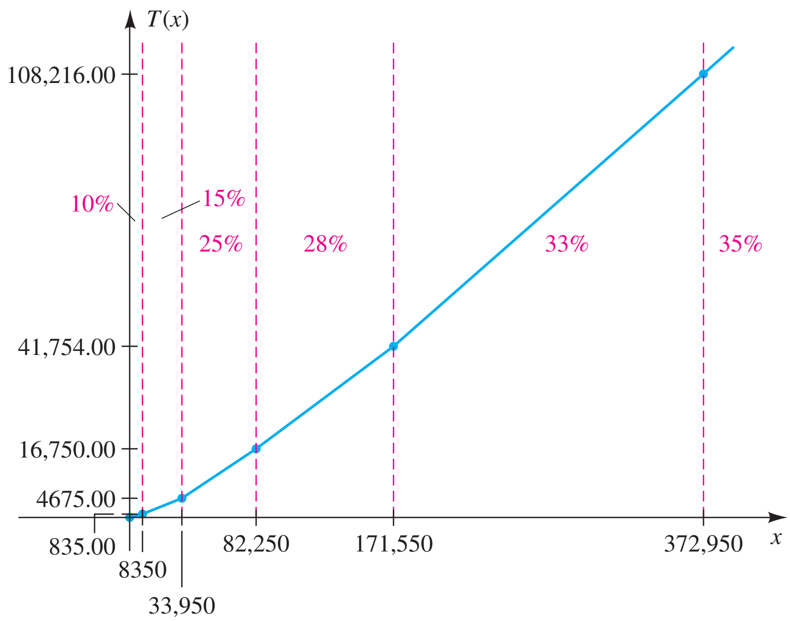
$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 0.10x & \text{si} \quad 0 < x \le 8350 \\ 835.00 + 0.15(x - 8350) & \text{si} \quad 8350 < x \le 33{,}950 \\ 4{,}675.00 + 0.25(x - 33{,}950) & \text{si} \quad 33{,}950 < x \le 82{,}250 \\ 16{,}750.00 + 0.28(x - 82{,}250) & \text{si} \quad 82{,}250 < x \le 171{,}550 \\ 41{,}754.00 + 0.33(x - 171{,}550) & \text{si} \quad 171{,}550 < x \le 372{,}950 \\ 108{,}216.00 + 0.35(x - 372{,}950) & \text{si} \quad x > 372{,}950 \end{cases}$$

Note que la asignación para el grupo de 15% de impuestos *no es* $0.15x$, sino 10% de los primeros \$8350 en ingreso gravable más 15% de la cantidad *que excede a* \$8350; esto es,

$$0.10(8350) + 0.15(x - 8350) = 835.00 + 0.15(x - 8350).$$

Los otros tramos se pueden establecer de un modo semejante. La gráfica de T se ilustra en la figura 9; note que la pendiente de cada tramo representa la tasa de impuesto.

FIGURA 9



■

Si x es un número real, definimos el símbolo $[\![x]\!]$ como sigue:

$$[\![x]\!] = n, \qquad \text{donde } n \text{ es el mayor entero tal que } n \leq x$$

Si identificamos $\mathbb{R}$ con puntos en una recta de coordenadas, entonces n es el primer entero a la *izquierda* de (o *igual* a) x.

ILUSTRACIÓN **El símbolo $[\![x]\!]$**

- $[\![0.5]\!] = 0$
- $[\![1.8]\!] = 1$
- $[\![\sqrt{5}]\!] = 2$
- $[\![3]\!] = 3$
- $[\![-3]\!] = -3$
- $[\![-2.7]\!] = -3$
- $[\![-\sqrt{3}]\!] = -2$
- $[\![-0.5]\!] = -1$

Para graficar $y = [\![x]\!]$, grafique $Y_1 = \text{int}(X)$ *en el modo de punto. En la TI-83/4 Plus y la TI-86,* int *está bajo* MATH, NUM.

La **función entero mayor** f está definida por $f(x) = [\![x]\!]$.

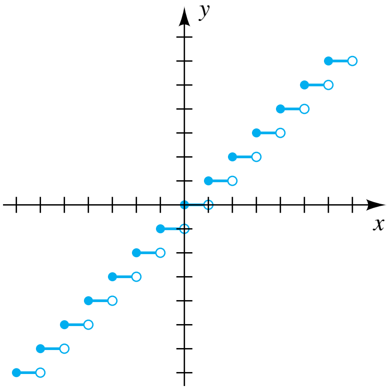
EJEMPLO 11 **Trazar la gráfica de la función entero mayor**

Trace la gráfica de la función de entero mayor.

SOLUCIÓN Las coordenadas x y y de algunos puntos en la gráfica se pueden poner en lista como sigue:

(continúa)

FIGURA 10

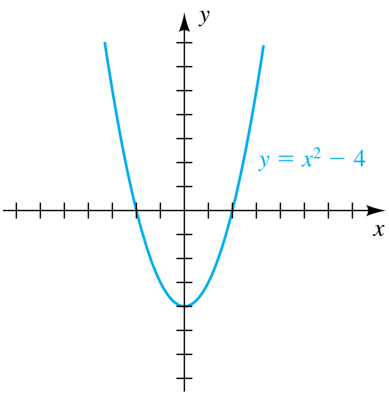


Valores de x	$f(x) = [\![x]\!]$
.	.
.	.
.	.
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
.	.
.	.
.	.

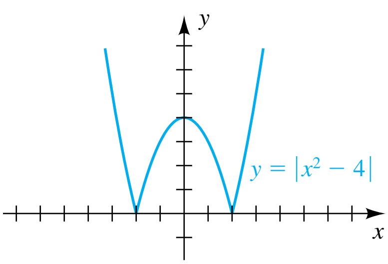
Siempre que x se encuentre entre enteros sucesivos, la parte correspondiente de la gráfica es un segmento de una recta horizontal. Parte de la gráfica se traza en la figura 10. La gráfica continúa indefinidamente a la derecha y a la izquierda. ■

El siguiente ejemplo contiene valores absolutos.

FIGURA 11
(a)



(b)



EJEMPLO 12 **Trazar la gráfica de una ecuación que contiene un valor absoluto**

Trace la gráfica de $y = |x^2 - 4|$.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = x^2 - 4$ se trazó en la figura 2 y se vuelve a trazar en la figura 11(a). Observamos lo siguiente:

(1) Si $x \leq -2$ o $x \geq 2$, entonces $x^2 - 4 \geq 0$ y por tanto $|x^2 - 4| = x^2 - 4$

(2) Si $-2 < x < 2$, entonces $x^2 - 4 < 0$ y por tanto $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$.

Se deduce de (1) que las gráficas de $y = |x^2 - 4|$ y $y = x^2 - 4$ coinciden para $|x| \geq 2$. Vemos de (2) que si $|x| < 2$, entonces la gráfica de $y = |x^2 - 4|$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^2 - 4$ a través del eje x. Esto nos da el trazo de la figura 11(b). ■

En general, si la gráfica de $y = f(x)$ contiene un punto $P(c, -d)$ con d positiva, entonces la gráfica de $y = |f(x)|$ contiene el punto $Q(c, d)$; es decir, Q es la reflexión de P por el eje x. Los puntos con valores y no negativos son los mismos para las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$.

En el capítulo 2 empleamos métodos algebraicos para resolver desigualdades que contenían valores absolutos de polinomios de grado 1, tales como

$$|2x - 5| < 7 \qquad \text{y} \qquad |5x + 2| \geq 3.$$

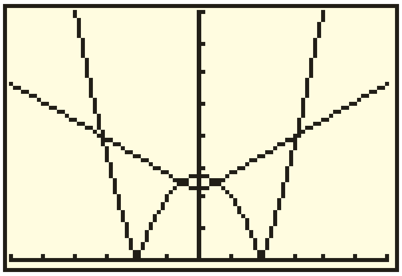
Desigualdades mucho más complicadas se pueden investigar usando una calculadora de gráficas, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 13 **Resolver gráficamente una desigualdad con valor absoluto**

Estime las soluciones de

$$|0.14x^2 - 13.72| > |0.58x| + 11.$$

FIGURA 12
$[-30, 30, 5]$ por $[0, 40, 5]$



SOLUCIÓN Para resolver la desigualdad, hacemos las asignaciones

$$Y_1 = \text{ABS}(0.14x^2 - 13.72) \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \text{ABS}(0.58x) + 11$$

y estimamos los valores de x para los cuales la gráfica de Y_1 está *arriba* de la gráfica de Y_2 (porque deseamos que Y_1 sea *mayor* que Y_2). Después quizá de varios intentos, escogemos la pantalla $[-30, 30, 5]$ por $[0, 40, 5]$, obteniendo gráficas semejantes a las de la figura 12. Como hay simetría con respecto al eje y, es suficiente hallar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas para $x > 0$. Usando la función de intersección, obtenemos $x \approx 2.80$ y $x \approx 15.52$. Por consulta de la figura 12, obtenemos la solución (aproximada)

$$(-\infty, -15.52) \cup (-2.80, 2.80) \cup (15.52, \infty).$$ ■

Graficando $y = f(|x|)$

Más adelante en este texto y en cálculo, el lector encontrará funciones como las siguientes

$$g(x) = \ln |x| \qquad \text{y} \qquad h(x) = \text{sen}\, |x|.$$

Ambas funciones son de la forma $y = f(|x|)$. El efecto de sustituir $|x|$ por x se puede describir como sigue: si la gráfica de $y = f(x)$ contiene un punto $P(c, d)$ con c positiva, entonces la gráfica de $y = f(|x|)$ contiene el punto $Q(-c, d)$, es decir, Q es el reflejo de P por el eje y. Los puntos sobre el eje y ($x = 0$) son los mismos para las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$. Los puntos con valores x negativos sobre la gráfica de $y = f(x)$ no están en la gráfica de $y = f(|x|)$, porque el resultado del valor absoluto es siempre no negativo.

Los procesos de desplazamiento, elongación, compresión y reflexión de una gráfica se pueden llamar de manera colectiva *transformar* una gráfica, y la gráfica resultante recibe el nombre de **transformación** de la original. Un resumen gráfico de los tipos de transformaciones que se encuentran en esta sección aparece en el Apéndice II.

3.5 Ejercicios

Ejer. 1–2: Suponga que f es una función par y g es una función impar. Complete la tabla, si es posible.

1

x	-2	2
$f(x)$		7
$g(x)$		-6

2

x	-3	3
$f(x)$		-5
$g(x)$		6

Ejer. 3–12: Determine si f es par, impar o ninguna de éstas.

3 $f(x) = 5x^3 + 2x$

4 $f(x) = |x| - 3$

5 $f(x) = 3x^4 - 6x^2 - 5$

6 $f(x) = 7x^5 + 2x^3$

7 $f(x) = 8x^3 - 3x^2$

8 $f(x) = \sqrt[3]{5}$

9 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

10 $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$

11 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$

12 $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$

Ejer. 13–26: Trace, en el mismo plano de coordenadas, las gráficas de f para los valores dados de c. (Haga uso de simetría, desplazamiento, elongación, compresión o reflexión.)

13 $f(x) = |x| + c$; $\quad c = -3, 1, 3$

14 $f(x) = |x - c|$; $\quad c = -3, 1, 3$

15 $f(x) = -x^2 + c$; $\quad c = -4, 2, 4$

16 $f(x) = 2x^2 - c$; $\quad c = -4, 2, 4$

17 $f(x) = 2\sqrt{x} + c$; $\quad c = -3, 0, 2$

18 $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + c$; $\quad c = -3, 0, 2$

19 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - c}$; $\quad c = -3, 0, 4$

20 $f(x) = -\frac{1}{2}(x - c)^2$; $\quad c = -3, 0, 4$

21 $f(x) = c\sqrt{4 - x^2}$; $\quad c = -2, 1, 3$

22 $f(x) = (x + c)^3$; $\quad c = -2, 1, 2$

23 $f(x) = cx^3$; $c = -\frac{1}{3}, 1, 2$

24 $f(x) = (cx)^3 + 1$; $c = -1, 1, 4$

25 $f(x) = \sqrt{cx} - 1$; $c = -1, \frac{1}{9}, 4$

26 $f(x) = -\sqrt{16 - (cx)^2}$; $c = 1, \frac{1}{2}, 4$

Ejer. 27–32: Si el punto *P* está sobre la gráfica de una función *f*, encuentre el punto correspondiente sobre la gráfica de la función dada.

27 $P(0, 5)$; $y = f(x + 2) - 1$

28 $P(3, -1)$; $y = 2f(x) + 4$

29 $P(3, -2)$; $y = 2f(x - 4) + 1$

30 $P(-5, 8)$; $y = \frac{1}{2}f(x - 3) + 3$

31 $P(4, 9)$; $y = \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$

32 $P(-2, 1)$; $y = -3f(2x) - 5$

Ejer. 33–40: Explique la forma en que la gráfica de la función se compara con la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, para la ecuación $y = 2f(x + 3)$, la gráfica de *f* está desplazada 3 unidades a la izquierda y elongada verticalmente en un factor de 2.

33 $y = f(x - 2) + 3$

34 $y = 3f(x - 1)$

35 $y = f(-x) - 4$

36 $y = -f(x + 2)$

37 $y = -\frac{1}{2}f(x)$

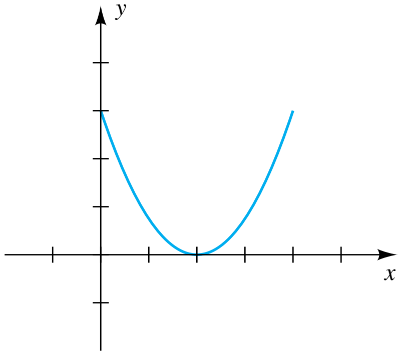
38 $y = f\left(\frac{1}{2}x\right) - 3$

39 $y = -2f\left(\frac{1}{3}x\right)$

40 $y = \frac{1}{3}|f(x)|$

Ejer. 41–42: La gráfica de una función *f* con dominio [0, 4] se muestra en la figura. Trace la gráfica de la ecuación dada.

41



(a) $y = f(x + 3)$ (b) $y = f(x - 3)$

(c) $y = f(x) + 3$ (d) $y = f(x) - 3$

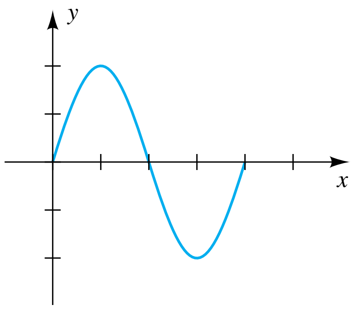
(e) $y = -3f(x)$ (f) $y = -\frac{1}{3}f(x)$

(g) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$ (h) $y = f(2x)$

(i) $y = -f(x + 2) - 3$ (j) $y = f(x - 2) + 3$

(k) $y = |f(x)|$ (l) $y = f(|x|)$

42



(a) $y = f(x - 2)$ (b) $y = f(x + 2)$

(c) $y = f(x) - 2$ (d) $y = f(x) + 2$

(e) $y = -2f(x)$ (f) $y = -\frac{1}{2}f(x)$

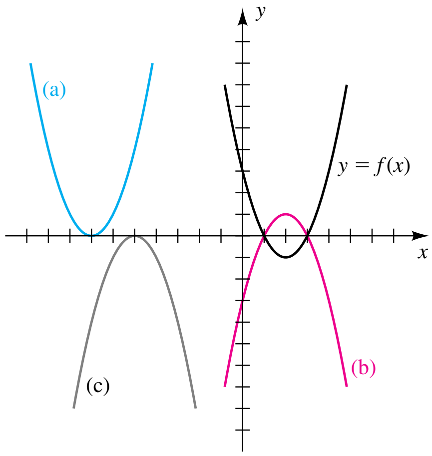
(g) $y = f(-2x)$ (h) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

(i) $y = -f(x + 4) - 2$ (j) $y = f(x - 4) + 2$

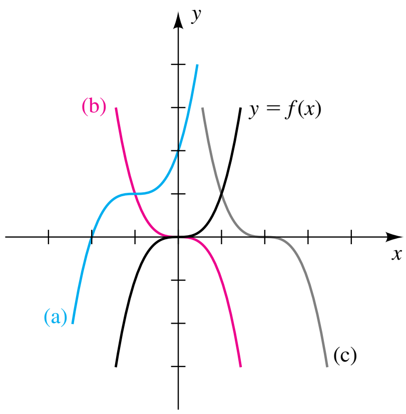
(k) $y = |f(x)|$ (l) $y = f(|x|)$

Ejer. 43–46: La gráfica de una función f se muestra, junto con gráficas de otras tres funciones (a), (b) y (c). Use propiedades de simetría, desplazamientos y reflexiones para hallar ecuaciones para las gráficas (a), (b) y (c) en términos de f.

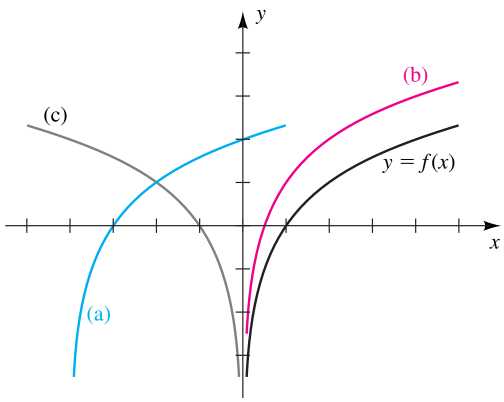
43



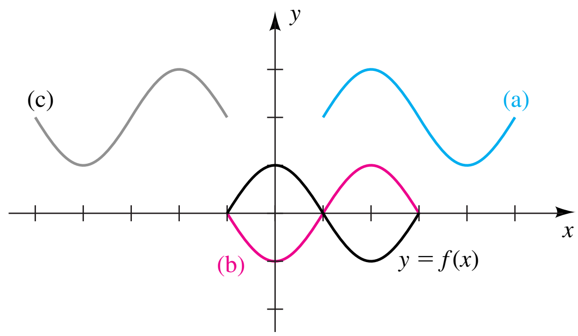
44



45



46



Ejer. 47–52: Trace la gráfica de f.

47 $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -1 \\ -2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

48 $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \text{ es un entero} \\ -2 & \text{si } x \text{ no es un entero} \end{cases}$

49 $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ -x + 1 & \text{si } |x| \leq 2 \\ -4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

50 $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

51 $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 & \text{si } |x| < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

52 $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Ejer. 53–54: El símbolo $[\![x]\!]$ denota valores de la función entero mayor. Trace la gráfica de f.

53 **(a)** $f(x) = [\![x - 3]\!]$ **(b)** $f(x) = [\![x]\!] - 3$

(c) $f(x) = 2[\![x]\!]$ **(d)** $f(x) = [\![2x]\!]$

(e) $f(x) = [\![-x]\!]$

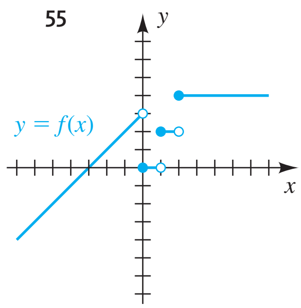
54 **(a)** $f(x) = [\![x + 2]\!]$ **(b)** $f(x) = [\![x]\!] + 2$

(c) $f(x) = \frac{1}{2}[\![x]\!]$ **(d)** $f(x) = [\![\frac{1}{2}x]\!]$

(e) $f(x) = -[\![-x]\!]$

Ejer. 55–56: Complete los enunciados.

55



(a) Cuando $x \to 1^-$, $f(x) \to$ ____

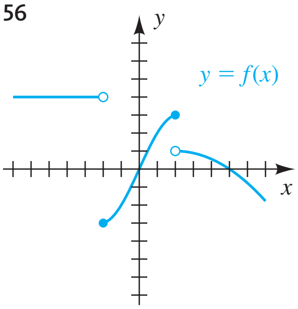
(b) Cuando $x \to 1^+$, $f(x) \to$ ____

(c) Cuando $x \to -2$, $f(x) \to$ ____

(d) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____

(e) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____

56



(a) Cuando $x \to 2^-$, $f(x) \to$ ____

(b) Cuando $x \to 2^+$, $f(x) \to$ ____

(c) Cuando $x \to -1$, $f(x) \to$ ____

(d) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____

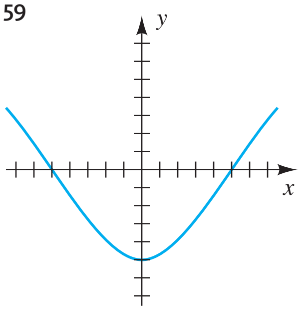
(e) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____

Ejer. 57–58: Explique por qué la gráfica de la ecuación no es la gráfica de una función.

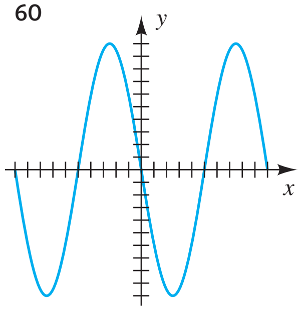
57 $x = y^2$ **58** $x = -|y|$

Ejer. 59–60: Para la gráfica de $y = f(x)$ mostrada en la figura, trace la gráfica de $y = |f(x)|$.

59



60



Ejer. 61–64: Trace la gráfica de la ecuación.

61 $y = |4 - x^2|$ **62** $y = |x^3 - 1|$

63 $y = |\sqrt{x} - 2|$ **64** $y = ||x| - 1|$

65 Sea $y = f(x)$ una función con dominio $D = [-2, 6]$ y rango $R = [-4, 8]$. Encuentre el dominio D y el rango R para cada función. Suponga que $f(2) = 8$ y $f(6) = -4$.

(a) $y = -2f(x)$ (b) $y = f(\frac{1}{2}x)$

(c) $y = f(x - 3) + 1$ (d) $y = f(x + 2) - 3$

(e) $y = f(-x)$ (f) $y = -f(x)$

(g) $y = f(|x|)$ (h) $y = |f(x)|$

66 Sea $y = f(x)$ una función con dominio $D = [-6, -2]$ y rango $R = [-10, -4]$. Encuentre el dominio D y el rango R para cada función.

(a) $y = \frac{1}{2}f(x)$ (b) $y = f(2x)$

(c) $y = f(x - 2) + 5$ (d) $y = f(x + 4) - 1$

(e) $y = f(-x)$ (f) $y = -f(x)$

(g) $y = f(|x|)$ (h) $y = |f(x)|$

67 **Tasas de impuestos** Cierto país grava los primeros \$20,000 del ingreso de una persona a una razón de 15%, y todo el ingreso de más de \$20,000 se grava al 20%. Encuentre una función T definida por tramos que especifique el impuesto total sobre un ingreso de x dólares.

68 **Tasas de impuesto a la propiedad** Cierto estado grava los primeros \$600,000 en valor de propiedad a una tasa de 1%; todo el valor sobre \$600,000 se grava a \$1.25%. Encuentre una función T definida por tramos que especifique el impuesto total sobre la propiedad valuada en x dólares.

69 **Tasas de regalías** Cierto libro en encuadernación rústica se vende en \$12. Al autor se le pagan regalías del 10% en los primeros 10,000 ejemplares vendidos, 12.5% en los siguientes 5,000 ejemplares y 15% en cualquier ejemplar adicional. Encuentre una función R definida por tramos que especifique las regalías totales si se venden x ejemplares.

70 **Tarifas de electricidad** Una compañía generadora de electricidad cobra a sus clientes \$0.0577 por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 1000 kWh consumidos, \$0.0532 por los siguientes 4000 kWh y \$0.0511 por cualquier kWh arriba de 5000. Encuentre una función C definida por tramos para la cuenta de x kWh de un cliente.

Ejer. 71–74: Estime las soluciones de la desigualdad.

71 $|1.3x + 2.8| < 1.2x + 5$

72 $|0.3x| - 2 > 2.5 - 0.63x^2$

73 $|1.2x^2 - 10.8| > 1.36x + 4.08$

74 $|\sqrt{16 - x^2} - 3| < 0.12x^2 - 0.3$

Ejer. 75–80: Grafique f en la pantalla $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$. Use la gráfica de f para predecir la gráfica de g. Verifique su predicción al graficar g en la misma pantalla.

75 $f(x) = 0.5x^3 - 4x - 5;$ $g(x) = 0.5x^3 - 4x - 1$

76 $f(x) = 0.25x^3 - 2x + 1;$ $g(x) = -0.25x^3 + 2x - 1$

77 $f(x) = x^2 - 5;$ $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$

78 $f(x) = |x + 2|;$ $g(x) = |x - 3| - 3$

79 $f(x) = x^3 - 5x;$ $g(x) = |x^3 - 5x|$

80 $f(x) = 0.5x^2 - 2x - 5;$ $g(x) = 0.5x^2 + 2x - 5$

81 **Cargo por renta de autos** Hay dos opciones de renta de autos disponible para un viaje de cuatro días. La Opción I es \$45 por día, con 200 millas gratis y \$0.40 por milla por cada milla adicional. La Opción II es de \$58.75 por día, con un cargo de \$0.25 por milla.

(a) Determine el costo de un viaje de 500 millas para ambas opciones.

(b) Modele los datos con una función de costo para cada opción de cuatro días.

(c) Haga una tabla que contenga una lista del recorrido en millas y el cargo para cada opción en viajes de entre 100 y 1200 millas, usando incrementos de 100 millas.

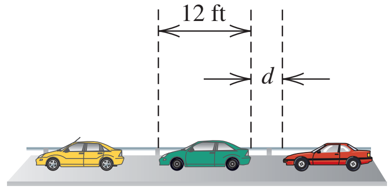
(d) Use la tabla para determinar los recorridos en millas para los cuales cada opción es preferible.

82 **Flujo de tránsito** Los automóviles cruzan un puente que mide 1 milla de largo. Cada auto mide 12 pies de largo y se requiere que conserve una distancia de al menos d pies del auto que esté adelante (vea figura).

(a) Demuestre que el número más grande de autos que puede estar en el puente en un tiempo es $[\![5280/(12 + d)]\!]$, donde $[\![\ ]\!]$ denota la función entero mayor.

(b) Si la velocidad de cada auto es v mi/h, demuestre que el ritmo máximo de flujo de tránsito F (en autos/h) está dado por $F = [\![5280v/(12 + d)]\!]$.

EJERCICIO 82



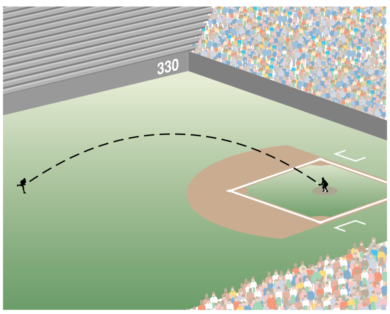
3.6 Funciones cuadráticas

Si $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola con vértice en el origen (0, 0), un eje vertical, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$ (vea, por ejemplo, las figuras 4 y 5 de la sección 3.5). En esta sección demostramos que la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

se puede obtener por desplazamientos vertical y/o horizontal de la gráfica de $y = ax^2$ y por tanto también es una parábola. Una aplicación importante de estas ecuaciones es describir la trayectoria, o recorrido, de un objeto cerca de la superficie de la Tierra cuando la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitacional. Para ilustrar, si un "jardinero" de un equipo de beisbol lanza una pelota hacia el campo corto, como se ilustra en la figura 1 y si la resistencia del aire y otras fuerzas externas son insignificantes, entonces la trayectoria de la pelota es una parábola. Si se introducen ejes de coordenadas apropiados, entonces la trayectoria coincide con la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ para algunas a, b y c. A la función determinada por esta ecuación se la denomina *función cuadrática.*

FIGURA 1



Definición de función cuadrática

Una función f es **cuadrática** si

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Si $b = c = 0$ en la definición precedente, entonces $f(x) = ax^2$ y la gráfica es una parábola con vértice en el origen. Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$f(x) = ax^2 + c,$$

y, de acuerdo con nuestra discusión de desplazamientos verticales de la sección 3.5, la gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0, c)$ sobre el eje y. El siguiente ejemplo contiene ilustraciones específicas.

FIGURA 2

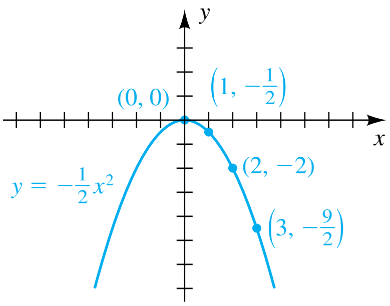
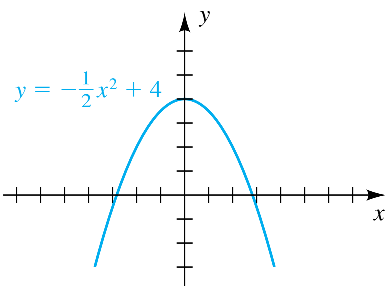


FIGURA 3



EJEMPLO 1 **Trazar la gráfica de una función cuadrática**

Trace la gráfica de f si

(a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ **(b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

SOLUCIÓN

(a) Como f es par, la gráfica de f (es decir, de $y = -\frac{1}{2}x^2$) es simétrica con respecto al eje y. Es semejante en forma pero más ancha que la parábola $y = -x^2$, trazada en la figura 5 de la sección 3.5. Varios puntos sobre la gráfica son (0, 0), $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, (2, −2), y $\left(3, -\frac{9}{2}\right)$. Localizando los puntos y usando simetría, obtenemos el trazo de la figura 2.

(b) Para hallar la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$, desplazamos la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ hacia arriba una distancia 4, obteniendo el trazo de la figura 3. ■

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $b \neq 0$, entonces, al completar el cuadrado, podemos cambiar la forma a

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

para algunos números reales h y k. Esta técnica se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 **Expresar una función cuadrática como $f(x) = a(x - h)^2 + k$**

Si $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$, exprese $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

SOLUCIÓN 1 Antes de completar el cuadrado, *es esencial que factoricemos el coeficiente de x^2 de los dos primeros términos de $f(x)$*, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 && \text{enunciado} \\ &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{factorice 3 de } 3x^2 + 24x \end{aligned}$$

Ahora completamos el cuadrado para la expresión $x^2 + 8x$ dentro de los paréntesis al sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $\left(\frac{8}{2}\right)^2$, o sea 16. No obstante, si sumamos 16 a la expresión dentro de los paréntesis, entonces, debido al factor 3, estamos en realidad sumando 48 a $f(x)$. Por lo tanto, debemos compensar al restar 48:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{enunciado} \\ &= 3(x^2 + 8x + 16) + (50 - 48) && \text{complete el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última expresión tiene la forma $a(x - h)^2 + k$ con $a = 3$, $h = -4$ y $k = 2$.

SOLUCIÓN 2 Empezamos por dividir ambos lados entre el coeficiente de x^2.

$$\left[\frac{1}{2}(8)\right]^2 = 16 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 && \text{enunciado} \\ \frac{f(x)}{3} &= x^2 + 8x + \frac{50}{3} && \text{divida entre 3} \\ &= x^2 + 8x \underline{+\ 16} + \frac{50}{3} \underline{-16} && \text{sume y reste 16, el número que completa el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= (x + 4)^2 + \frac{2}{3} && \text{ecuación equivalente} \\ f(x) &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{multiplique por 3} \end{aligned}$$

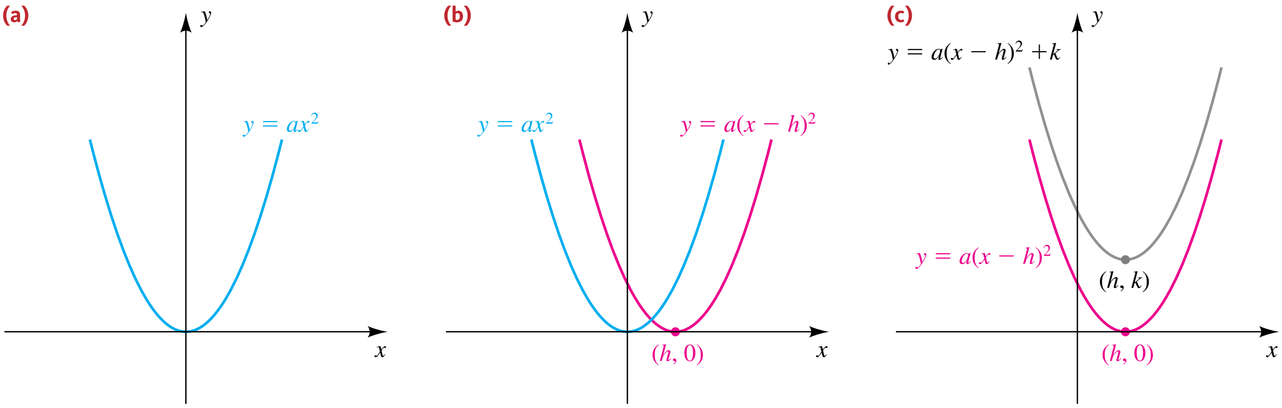
■

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces, al completar el cuadrado como en el ejemplo 2, vemos que la gráfica de f es igual que la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

La gráfica de esta ecuación se puede obtener a partir de la gráfica de $y = ax^2$ que se ve en la figura 4(a) por medio de un desplazamiento horizontal y uno vertical, como sigue. Primero, como en la figura 4(b), obtenemos la gráfica de $y = a(x - h)^2$ al desplazar la gráfica de $y = ax^2$ ya sea a la izquierda o a la derecha, dependiendo del signo de h (la figura ilustra el caso con $h > 0$). A continuación, como en la figura 4(c), desplazamos la gráfica en (b) verticalmente una distancia $|k|$ (la figura ilustra el caso con $k > 0$). Se deduce que *la gráfica de una función cuadrática es una parábola con un eje vertical.*

FIGURA 4



El trazo en la figura 4(c) ilustra una posible gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Si $a > 0$, el punto (h, k) es el punto más bajo en la parábola y la función f tiene un **valor mínimo** $f(h) = k$. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y el punto (h, k) es el punto más alto en la parábola. En este caso, la función f tiene un **valor máximo** $f(h) = k$.

Hemos obtenido el resultado siguiente.

Ecuación estándar de una parábola con eje vertical

La gráfica de la ecuación

$$y = a(x - h)^2 + k$$

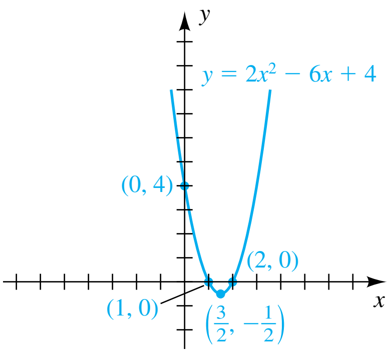
para $a \neq 0$ es una parábola que tiene vértice $V(h, k)$ y un eje vertical. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

Por comodidad, con frecuencia nos referimos a la *parábola* $y = ax^2 + bx + c$ cuando consideramos la gráfica de esta ecuación.

EJEMPLO 3 **Hallar una ecuación estándar de una parábola**

Exprese $y = 2x^2 - 6x + 4$ como la ecuación estándar de una parábola con eje vertical. Encuentre el vértice y trace la gráfica.

FIGURA 5



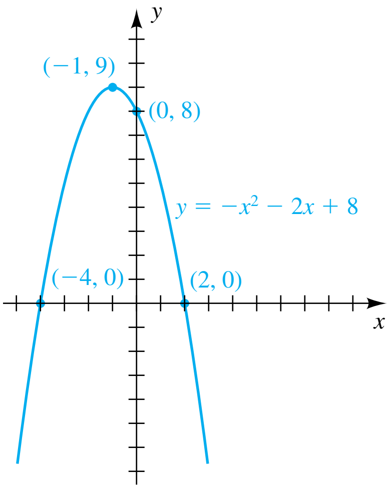
SOLUCIÓN

$y = 2x^2 - 6x + 4$	enunciado
$= 2(x^2 - 3x + \quad) + 4$	factorice 2 de $2x^2 - 6x$
$= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(4 - \frac{9}{2}\right)$	complete el cuadrado para $x^2 - 3x$
$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$	ecuación equivalente

La última ecuación tiene la forma de la ecuación estándar de una parábola con $a = 2$, $h = \frac{3}{2}$ y $k = -\frac{1}{2}$. En consecuencia, el vértice $V(h, k)$ de la parábola es $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Como $a = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba.

Para hallar la intersección con el eje y de la gráfica de $y = 2x^2 - 6x + 4$, hacemos $x = 0$ y obtenemos $y = 4$. Para hallar las intersecciones con el eje x, hacemos $y = 0$ y resolvemos la ecuación $2x^2 - 6x + 4 = 0$ o la ecuación equivalente $2(x - 1)(x - 2) = 0$, obteniendo $x = 1$ y $x = 2$. Localizar el vértice y usar los puntos de intersección con los ejes x y y dará suficientes puntos para un trazo de forma razonablemente preciso (vea la figura 5). ■

FIGURA 6



EJEMPLO 4 Hallar una ecuación estándar de una parábola

Exprese $y = -x^2 - 2x + 8$ como ecuación estándar de una parábola con eje vertical. Encuentre el vértice y trace la gráfica.

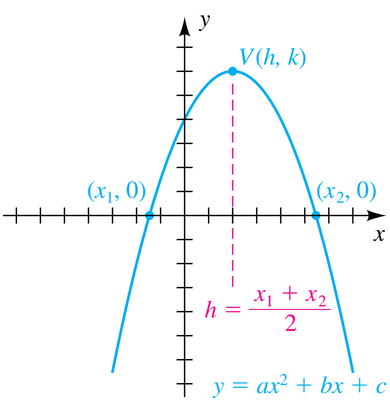
SOLUCIÓN

$y = -x^2 - 2x + 8$	enunciado
$= -(x^2 + 2x + \quad) + 8$	factorice -1 de $-x^2 - 2x$
$= -(x^2 + 2x + 1) + (8 + 1)$	complete el cuadrado para $x^2 + 2x$
$= -(x + 1)^2 + 9$	ecuación equivalente

Ésta es la ecuación estándar de una parábola con $h = -1$, $k = 9$, y por tanto el vértice es $(-1, 9)$. Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo.

El punto de intersección con el eje y de la gráfica de $y = -x^2 - 2x + 8$ es el término constante, 8. Para hallar las intersecciones con el eje x, resolvemos $-x^2 - 2x + 8 = 0$, o bien, lo que es equivalente, $x^2 + 2x - 8 = 0$. La factorización nos da $(x + 4)(x - 2) = 0$ y por tanto los puntos de intersección son $x = -4$ y $x = 2$. Usando esta información nos da el trazo de la figura 6. ■

FIGURA 7



Si una parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene intersecciones x_1 y x_2 con el eje x, como se ilustra en la figura 7 para el caso $a < 0$, entonces el eje de la parábola es la recta vertical $x = (x_1 + x_2)/2$ que pasa por el punto medio de $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. Por lo tanto, la coordenada h sobre el eje x del vértice (h, k) es $h(x_1 + x_2)/2$. Algunos casos especiales se ilustran en las figuras 5 y 6.

En el siguiente ejemplo encontramos una ecuación de una parábola a partir de los datos dados.

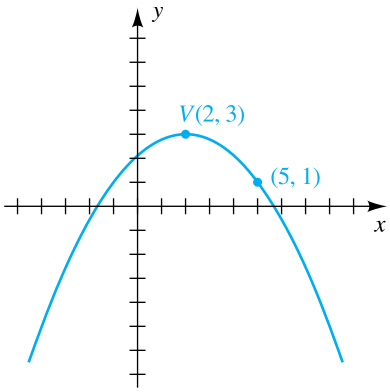
EJEMPLO 5 Hallar una ecuación de una parábola con un vértice dado

Encuentre la ecuación de una parábola que tiene vértice $V(2, 3)$, un eje vertical y pasa por el punto $(5, 1)$.

SOLUCIÓN La figura 8 muestra el vértice V, el punto $(5, 1)$ y una posible posición de la parábola. Usando la ecuación estándar

$$y = a(x - h)^2 + k$$

FIGURA 8



con $h = 2$ y $k = 3$ tendremos

$$y = a(x - 2)^2 + 3.$$

Para hallar a, usamos el hecho de que (5, 1) está en la parábola y por tanto es una solución de la última ecuación. Así,

$$1 = a(5 - 2)^2 + 3, \qquad \text{o} \qquad a = -\tfrac{2}{9}.$$

En consecuencia, una ecuación para la parábola es

$$y = -\tfrac{2}{9}(x - 2)^2 + 3.$$ ■

El siguiente teorema nos da una fórmula sencilla para localizar el vértice de una parábola.

Teorema para localizar el vértice de una parábola

El vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene coordenada x

$$-\frac{b}{2a}.$$

DEMOSTRACIÓN Empecemos por escribir $y = ax^2 + bx + c$ como

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \qquad\right) + c.$$

Ahora completamos el cuadrado al sumar $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$ a la expresión dentro de los paréntesis:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Note que si $b^2/(4a^2)$ se suma *dentro* del paréntesis, entonces, debido al factor a del *exterior*, en realidad hemos sumado $b^2/(4a)$ a y. Por lo tanto, debemos compensar al restar $b^2/(4a)$. La última ecuación se puede escribir como

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Ésta es la ecuación de una parábola que tiene vértice (h, k) con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. ■

No es necesario recordar la fórmula para la coordenada y del vértice de la parábola en el resultado precedente. Una vez hallada la coordenada x, podemos calcular la coordenada y al sustituir $-b/(2a)$ en lugar de x en la ecuación de la parábola.

EJEMPLO 6 **Hallar el vértice de una parábola**

Encuentre el vértice de la parábola $y = 2x^2 - 6x + 4$.

SOLUCIÓN Consideramos esta parábola en el ejemplo 3 y hallamos el vértice al completar el cuadrado. Usaremos la fórmula del vértice con $a = 2$ y $b = -6$ para obtener la coordenada x

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

A continuación encontramos la coordenada y al sustituir $\frac{3}{2}$ en lugar de x en la ecuación dada:

$$y = 2\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\tfrac{3}{2}\right) + 4 = -\tfrac{1}{2}$$

Entonces, el vértice es $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (vea la figura 5). ■

Como la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ para $a \neq 0$ es una parábola, podemos usar la fórmula del vértice para ayudar a encontrar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. Específicamente, como la coordenada x del vértice V es $-b/(2a)$, la coordenada y de V es el valor de la función $f(-b/(2a))$. Además, como la parábola abre hacia abajo si $a < 0$ y hacia arriba si $a > 0$, el valor de esta función es el valor máximo o mínimo, respectivamente, de f. Podemos resumir estos datos como sigue.

Teorema sobre el valor máximo o mínimo de una función cuadrática

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, entonces $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ es

(1) el valor máximo de f si $a < 0$

(2) el valor mínimo de f si $a > 0$

Usaremos este teorema en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 7 **Hallar un valor máximo (o mínimo)**

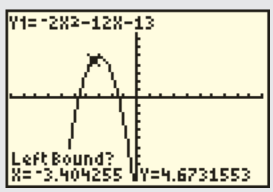
Encuentre el vértice de la parábola $y = f(x) = -2x^2 - 12x - 13$.

SOLUCIÓN Como el coeficiente de x^2 es -2 y $-2 < 0$, la parábola abre hacia abajo y el valor y del vértice es un valor *máximo*. Asignamos $-2x^2 - 12x - 13$ a Y_1 y graficamos Y_1 en una pantalla estándar.

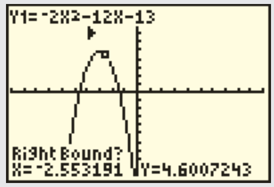
Encuentre un valor máximo.

2nd CALC 4

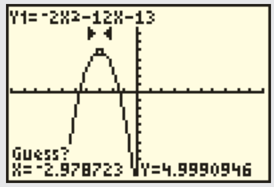
Use la tecla izquierda del cursor para mover el cursor intermitente a la izquierda del vértice y presione ENTER.



Ahora mueva el cursor a la derecha del vértice y presione ENTER.



Como cálculo, ponga el cursor entre los límites izquierdo y derecho y presione ENTER.

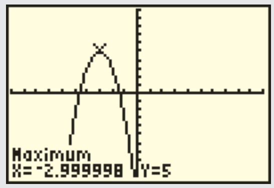


Nota de calculadora: Alternativamente, podemos introducir valores de x para nuestras respuestas. Las siguientes respuestas producen un máximo de 5 en $x = -3$.

¿A la izquierda? -4 ENTER

¿A la derecha? -2 ENTER

¿Cálculo? -3 ENTER



La calculadora indica que el vértice está en alrededor de $(-3, 5)$. (Se pueden obtener resultados diferentes dependiendo de las posiciones del cursor.)

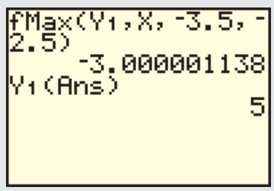
Podemos hallar un valor máximo desde la pantalla inicial como sigue. (Suponga que hemos visto la gráfica y estimado que la coordenada x del vértice se encuentra entre -3.5 y -2.5.) Primero encontramos el valor x del vértice.

Use el operador de máxima función.

MATH 7 VARS ▷ 1 1 ,
X,T,θ,n , -3.5 , -2.5) ENTER

A continuación encontramos el valor y del vértice usando el resultado de fMax (está guardado en ANS).

VARS ▷ 1 1
(2nd ANS) ENTER

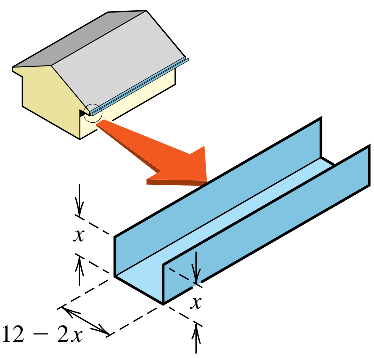


Note los resultados "extraños" dados por fMáx. (El profesor no se impresiona mucho si el alumno dice que el vértice es $(-3.000001138, 5)$.) En este caso una calculadora es útil, pero es fácil calcular que

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2(-2)} = -3 \quad \text{y} \quad f(-3) = 5,$$

que nos da un vértice de $(-3, 5)$ (y una respuesta que agradará al profesor). ■

FIGURA 9



EJEMPLO 8 **Hallar el valor máximo de una función cuadrática**

Una larga hoja rectangular metálica, de 12 pulgadas de ancho, se ha de convertir en canal al doblar hacia arriba dos lados, de modo que sean perpendiculares a la hoja. ¿Cuántas pulgadas deben ser hacia arriba las que den al canal su mayor capacidad?

SOLUCIÓN El canal se ilustra en la figura 9. Si x es el número de pulgadas hacia arriba de cada lado, el ancho de la base del canal es de $12 - 12x$ pulgadas. La capacidad será máxima cuando el área de sección transversal del rectángulo con lados de longitudes x y $12 - 2x$ tiene su valor máximo. Si con $f(x)$ denotamos esta área, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x(12 - 2x) \\ &= 12x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 12x, \end{aligned}$$

que tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a = -2$, $b = 12$ y $c = 0$. Como f es una función cuadrática y $a = -2 < 0$, se deduce del teorema precedente que el valor máximo de f se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-2)} = 3.$$

Por lo tanto, 3 pulgadas deben doblarse hacia arriba en cada lado para lograr máxima capacidad.

Como solución alternativa, podemos observar que la gráfica de la función $f(x) = x(12 - 2x)$ tiene intersecciones con el eje x en $x = 0$ y $x = 6$. En consecuencia, el promedio de las intersecciones,

$$x = \frac{0 + 6}{2} = 3,$$

es la coordenada x del vértice de la parábola y el valor que da la máxima capacidad. ■

En el capítulo 2 resolvimos algebraicamente ecuaciones cuadráticas y desigualdades. El siguiente ejemplo indica la forma en que se pueden resolver con ayuda de una calculadora de gráficas.

EJEMPLO 9 **Análisis del vuelo de un proyectil**

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde una altura de 600 pies sobre el suelo. Su altura $h(t)$ en pies sobre el suelo después de t segundos está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 803t + 600.$$

(a) Determine una pantalla razonable que incluya todas las características pertinentes de la gráfica de h.

(b) Estime cuándo la altura del proyectil será de 5000 pies sobre el suelo.

(c) Determine cuándo la altura del proyectil será más de 5000 pies sobre el suelo.

(d) ¿Cuánto tiempo estará en vuelo el proyectil?

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de h es una parábola que abre hacia abajo. Para estimar Ymax (note que usamos x y y indistintamente con t y h), aproximemos el valor máximo de h. Usando

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{803}{2(-16)} \approx 25.1,$$

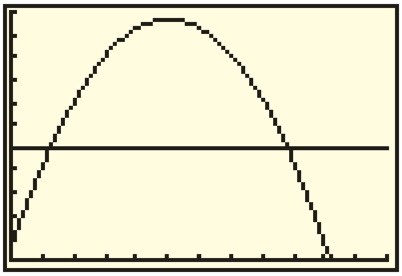
vemos que la altura máxima es aproximadamente $h(25) = 10{,}675$.

El proyectil sube durante aproximadamente los primeros 25 segundos y debido a que su altura en $t = 0$, 600 pies, es pequeña en comparación con 10,675, tomará sólo ligeramente más que 25 segundos adicionales para caer al suelo. Como h y t son positivas, una pantalla razonable es

$$[0, 60, 5] \quad \text{por} \quad [0, 11{,}000, 1000].$$

Nota de calculadora: Una vez que determinemos los valores Xmín y Xmáx, podemos usar la función ZoomFit (acercamiento) para graficar una función sobre el intervalo [Xmín, Xmáx]. En este ejemplo, asignamos 0 a Xmín y 51 a Xmáx y luego seleccionamos ZoomFit bajo el menú ZOOM.

FIGURA 10
[0, 60, 5] por [0, 11,000, 1000]



(b) Deseamos estimar dónde la gráfica de h cruza la recta horizontal $h(t) = 5000$, de modo que hacemos las asignaciones

$$Y_1 = -16x^2 + 803x + 600 \qquad \text{y} \qquad Y_2 = 5000$$

y obtenemos una pantalla semejante a la figura 10. Es importante recordar que la gráfica de Y_1 muestra sólo la altura en el tiempo t; *no es* la trayectoria del proyectil, que es vertical. Usando una función de intersección, encontramos que el valor más pequeño de t para el que $h(t) = 5000$ es alrededor de 6.3 segundos.

Como el vértice está sobre el eje de la parábola, el otro tiempo en el que $h(t)$ es 5000 es aproximadamente $25.1 - 6.3$, o sea 18.8, segundos *después* de $t = 25.1$; es decir, en $t \approx 25.1 + 18.8 = 43.9$ segundos.

(c) El proyectil está a más de 5000 pies sobre el suelo cuando la gráfica de la parábola de la figura 10 está arriba de la recta horizontal, es decir, cuando

$$6.3 < t < 43.9.$$

(d) El proyectil estará en vuelo hasta $h(t) = 0$. Esto corresponde al punto de intersección en el eje x en la figura 10. Usando una función de raíz o cero, obtenemos $t \approx 50.9$ segundos. (Note que como el punto de intersección con el eje y no es cero, es incorrecto simplemente duplicar el valor de t del vértice para hallar el tiempo total de vuelo; no obstante, esto *sería* aceptable para problemas con $h(0) = 0$.) ■

Al trabajar con funciones cuadráticas, con frecuencia estamos más interesados en hallar el vértice y los puntos de intersección con el eje x. Típicamente, una función cuadrática determinada se asemeja mucho a una de las tres formas que se indican en la tabla siguiente.

Relación entre formas de función cuadrática y sus vértices y puntos de intersección con el eje x

Forma	Vértice (h, k)	Puntos de intersección con el eje x (si los hay)
(1) $y = f(x) = a(x - h)^2 + k$	h y k como en la forma	$x = h \pm \sqrt{-k/a}$ (vea el siguiente párrafo)
(2) $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$h = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $k = f(h)$	$x = x_1, x_2$
(3) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$h = -\frac{b}{2a}$, $k = f(h)$	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (vea el siguiente párrafo)

Si los radicandos en (1) y (3) son negativos, entonces no hay puntos de intersección con el eje x. Para hallar éstos con la forma (1), use la ecuación cuadrática especial que aparece en la página 76. Si el lector tiene una función cuadrática en la forma (3) y desea hallar el vértice y los puntos de intersección con el eje x, puede ser mejor primero hallar los puntos de intersección con el eje x con el uso de la fórmula cuadrática. A continuación puede obtener fácilmente la coordenada x del vértice, h, porque

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = h \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Desde luego, si la función en la forma (3) es fácilmente factorizable, no es necesario usar la fórmula cuadrática.

Estudiaremos parábolas más adelante en un capítulo posterior.

3.6 Ejercicios

Ejer. 1–4: Encuentre la ecuación estándar de cualquier parábola que tenga vértice V.

1 $V(-3, 1)$

2 $V(5, -4)$

3 $V(0, -2)$

4 $V(-7, 0)$

Ejer. 5–12: Exprese $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

5 $f(x) = -x^2 - 4x - 5$

6 $f(x) = x^2 - 6x + 11$

7 $f(x) = 2x^2 - 16x + 35$

8 $f(x) = 5x^2 + 20x + 14$

9 $f(x) = -3x^2 - 6x - 5$

10 $f(x) = -4x^2 + 16x - 13$

11 $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 9x - 34$

12 $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{23}{5}$

Ejer. 13–22: (a) Use la fórmula cuadrática para hallar los ceros de f. (b) Encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x)$. (c) Trace la gráfica de f.

13 $f(x) = x^2 - 6x$

14 $f(x) = -x^2 - 6x$

15 $f(x) = -12x^2 + 11x + 15$

16 $f(x) = 6x^2 + 7x - 24$

17 $f(x) = 9x^2 + 24x + 16$

18 $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

19 $f(x) = x^2 + 4x + 9$

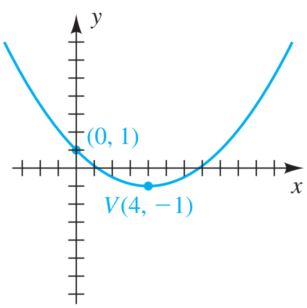
20 $f(x) = -3x^2 - 6x - 6$

21 $f(x) = -2x^2 + 16x - 26$

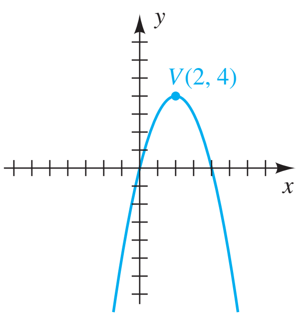
22 $f(x) = 2x^2 - 4x - 11$

Ejer. 23–26: Encuentre la ecuación estándar de la parábola que se muestra en la figura.

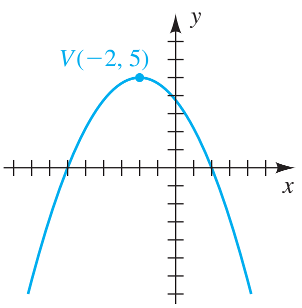
23



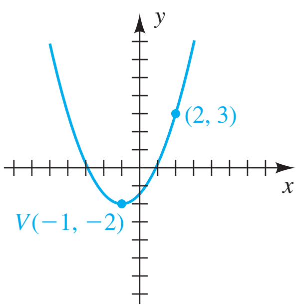
24



25



26

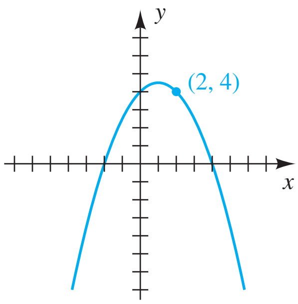


Ejer. 27–28: Encuentre una ecuación de la forma

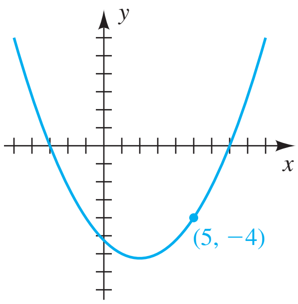
$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

de la parábola que se muestra en la figura. Vea la tabla en la página 203.

27



28



Ejer. 29–34: Encuentre la ecuación estándar de una parábola que tiene un eje vertical y satisface las condiciones dadas.

29 Vértice $(0, -2)$, que pasa por $(3, 25)$

30 Vértice $(0, 7)$, que pasa por $(2, -1)$

31 Vértice $(3, 1)$, intersecta en 0 el eje x

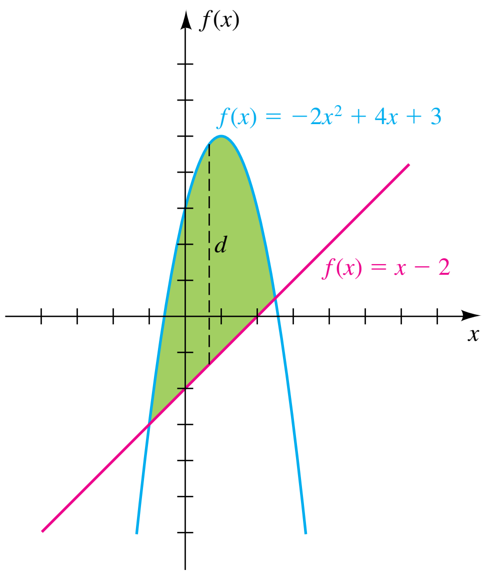
32 Vértice $(4, -7)$, intersecta en -4 el eje x

33 Intersecta el eje x en -3 y 5, el punto más alto tiene coordenada y en 4

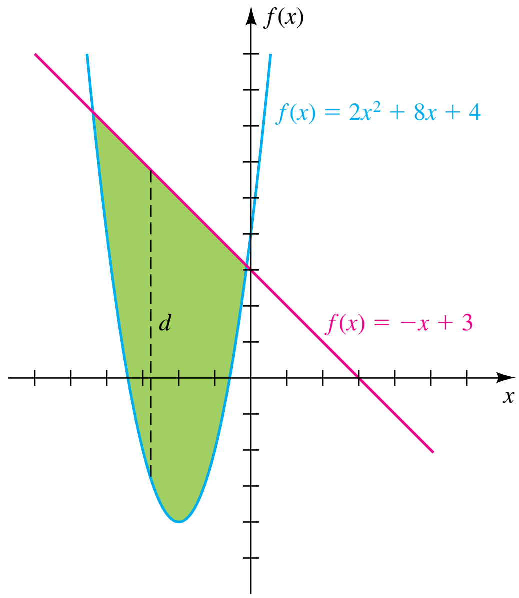
34 Intersecta el eje x en 8 y 0, el punto más bajo tiene coordenada y en -48

Ejer. 35–36: Encuentre la máxima distancia vertical d entre la parábola y la recta para la región de color verde.

35



36



Ejer. 37–38: Existe ozono en todos los niveles de la atmósfera terrestre. La densidad del ozono varía en función de la estación y la latitud. En Edmonton, Canadá, se determinó experimentalmente, la densidad $D(h)$ del ozono (en 10^{-3} cm/km) para altitudes h entre 20 kilómetros y 35 kilómetros . Para cada $D(h)$ y estación, aproxime la altitud a la que la densidad del ozono es máxima.

37 $D(h) = -0.058h^2 + 2.867h - 24.239$ (otoño)

38 $D(h) = -0.078h^2 + 3.811h - 32.433$ (primavera)

39 **Rapidez de crecimiento infantil** La rapidez de crecimiento y (en libras por mes) de un infante está relacionada con el peso actual x (en libras) por la fórmula $y = cx(21 - x)$, donde c es una constante positiva y $0 < x < 21$. ¿A qué peso se presenta la máxima rapidez de crecimiento?

40 **Rendimiento de gasolina** El número de millas M que cierto automóvil puede recorrer con un galón de gasolina, a una velocidad de v mi/h, está dado por

$$M = -\tfrac{1}{30}v^2 + \tfrac{5}{2}v \qquad \text{para } 0 < v < 70.$$

(a) Encuentre la velocidad más económica para un viaje.

(b) Encuentre el máximo valor de M.

41 **Altura de un proyectil** Un objeto se proyecta verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio con una velocidad inicial de 144 ft/s. Su distancia $s(t)$ en pies sobre el suelo después de t segundos está dada por la ecuación

$$s(t) = -16t^2 + 144t + 100.$$

(a) Encuentre su máxima distancia sobre el suelo.

(b) Encuentre la altura del edificio.

42 Vuelo de un proyectil Un objeto es proyectado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 ft/s y su distancia $s(t)$ en pies sobre el suelo después de t segundos está dada por la fórmula $s(t) = -16t^2 + v_0t$.

(a) Si el objeto choca contra el suelo después de 12 segundos, encuentre su velocidad inicial v_0.

(b) Encuentre su distancia máxima sobre el suelo.

43 Encuentre dos números reales positivos cuya suma sea 40 y cuyo producto sea un máximo.

44 Encuentre dos números reales positivos cuya diferencia sea 60 y cuyo producto sea un mínimo.

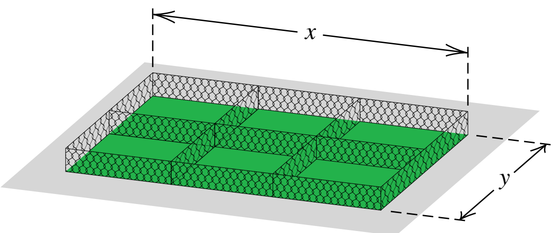
45 Construcción de jaulas Mil pies de cerca de tela de alambre se van a usar para construir seis jaulas para animales, como se ve en la figura.

(a) Exprese el ancho y como función de la longitud x.

(b) Exprese el área encerrada total A de las jaulas como función de x.

(c) Encuentre las dimensiones que maximizan el área encerrada.

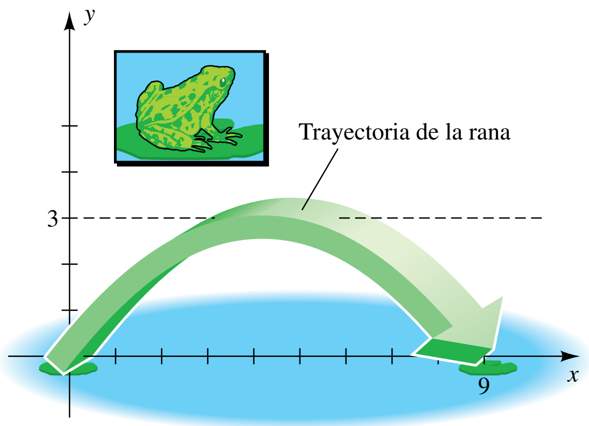
EJERCICIO 45



46 Instalación de una cerca en un campo Un agricultor desea poner una cerca alrededor de un campo rectangular, y luego dividir el campo en tres terrenos rectangulares al poner dos cercas paralelas a uno de los lados. Si el agricultor puede comprar sólo 1000 yardas de cerca, ¿qué dimensiones darán el máximo de área rectangular?

47 Animales saltarines Los vuelos de animales saltarines típicamente tienen trayectorias parabólicas. La figura de la página siguiente ilustra el salto de una rana sobrepuesto en un plano de coordenadas. La longitud del salto es de 9 pies, y la máxima altura desde el suelo es 3 pies. Encuentre una ecuación estándar para la trayectoria de la rana.

EJERCICIO 47

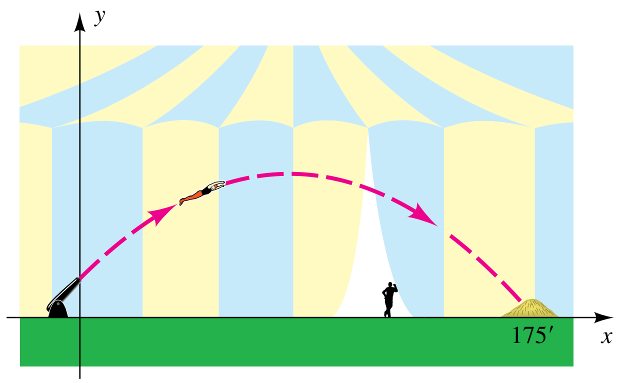


48 La bala de cañón humana En la década de 1940, la exhibición de la bala de cañón humana fue ejecutada regularmente por Emmanuel Zacchini para el circo Ringling Brothers and Barnum & Bailey. La punta del cañón se elevaba 15 pies del suelo y la distancia horizontal total recorrida era de 175 pies. Cuando el cañón se apuntaba a un ángulo de 45°, una ecuación del vuelo parabólico (vea la figura) tenía la forma $y = ax^2 + x + c$.

(a) Use la información dada para hallar una ecuación del vuelo.

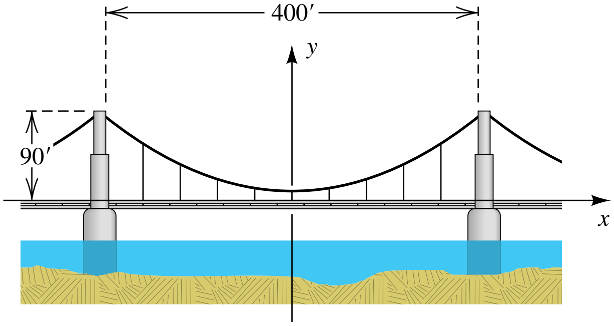
(b) Encuentre la altura máxima alcanzada por la bala de cañón humana.

EJERCICIO 48



49 Forma de un puente colgante Una sección de un puente colgante tiene su peso uniformemente distribuido entre torres gemelas que están a 400 pies entre sí y se elevan 90 pies sobre la calzada horizontal (vea la figura). Un cable tendido entre los remates de las torres tiene la forma de una parábola y su punto central está a 10 pies sobre la calzada. Suponga que se introducen ejes de coordenadas, como se ve en la figura.

EJERCICIO 49



(a) Encuentre una ecuación para la parábola.

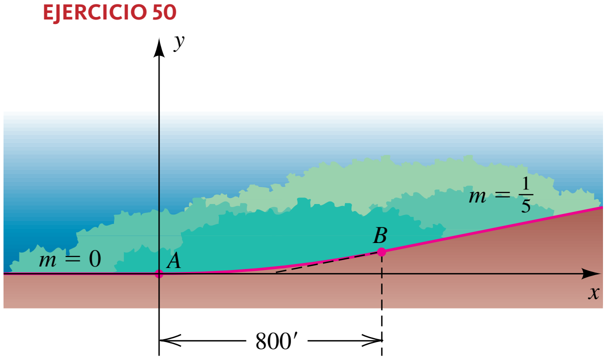
(b) Nueve cables verticales igualmente espaciados se usan para sostener el puente (vea la figura). Encuentre la longitud total de estos soportes.

50 **Diseño de una carretera** Unos ingenieros de tránsito están diseñando un tramo de carretera que conectará una calzada horizontal con una que tiene una pendiente de 20% (es decir, pendiente $\frac{1}{5}$), como se ilustra en la figura. La transición suave debe tener lugar sobre una distancia horizontal de 800 pies, con una pieza parabólica de carretera empleada para conectar los puntos A y B. Si la ecuación del segmento parabólico es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, se puede demostrar que la pendiente de la recta tangente en el punto $P(x, y)$ sobre la parábola está dada por $m = 2ax + b$.

(a) Encuentre una ecuación de la parábola que tiene una recta tangente de pendiente 0 en A y $\frac{1}{5}$ en B.

(b) Encuentre las coordenadas de B.

EJERCICIO 50



51 **Entrada parabólica** Una entrada tiene la forma de un arco parabólico y mide 9 pies de alto en el centro y 6 pies de ancho en la base. Si una caja rectangular de 8 pies de alto debe caber por la entrada, ¿cuál es el ancho máximo que puede tener la caja?

52 **Trayectoria de una pelota de béisbol** Suponga que una pelota de beisbol golpeada en el plato de home sigue una trayectoria que tiene la ecuación

$$y = -\frac{3}{4000}x^2 + \frac{3}{10}x + 3,$$

donde x y y están medidas en pies.

(a) Encuentre la altura máxima de la pelota de beisbol.

(b) ¿La pelota podrá librar una cerca de 8 pies de alto que está a una distancia de 385 pies del plato de home?

53 **Descuento por cantidad** Una compañía vende zapatos deportivos a distribuidores a razón de \$40 el par si su pedido es de menos de 50 pares. Si un distribuidor solicita 50 o más pares (hasta 600), el precio por par se reduce a razón de 4 centavos por el número pedido. ¿De qué cantidad debe ser el pedido para producir la máxima cantidad de dinero para la compañía?

54 **Descuento por grupo** Una agencia de viajes ofrece viajes en grupo a razón de \$60 por persona para los primeros 30 participantes. Para grupos más grandes, de hasta 90, cada persona recibe un descuento de \$0.50 por cada participante que pase de 30. Por ejemplo, si 31 personas participan, entonces el costo por persona es \$59.50. Determine el tamaño del grupo que producirá la máxima cantidad de dinero para la agencia.

55 **Tarifa de TV por cable** Una empresa de televisión por cable actualmente presta servicio a 8000 familias y cobra \$50 por mes. Una encuesta de marketing indica que cada reducción de \$5 en el cobro mensual resultará en 1000 nuevos clientes. Con $R(x)$ denote el ingreso mensual total cuando el cobro mensual es de x dólares.

(a) Determine la función de ingreso R.

(b) Trace la gráfica de R y encuentre el valor de x que resulte en el máximo ingreso mensual.

56 **Renta de un departamento** Una empresa de bienes raíces es propietaria de 218 departamentos en edificios,que están ocupados en su totalidad cuando la renta es de \$940 al mes. La empresa estima que por cada \$25 de aumento en renta, 5 departamentos se desocuparán. ¿Cuál debe ser la renta para que la compañía reciba el máximo ingreso mensual?

Ejer. 57–58: Grafique $y = x^3 - x^{1/3}$ y f en el mismo plano de coordenadas y estime los puntos de intersección.

57 $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{4}$

58 $f(x) = -x^2 + 0.5x + 0.4$

59 Grafique, en el mismo plano de coordenadas, $y = ax^2 + x + 1$ para $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1, 2 y A, describa la forma en que el valor de a afecta la gráfica.

60 Grafique, en el mismo plano de coordenadas, $y = x^2 + bx + 1$ para $b = 0, \pm 1, \pm 2$ y ± 3, y describa la forma en que el valor de b afecta la gráfica.

61 **Precipitación en Seattle** El promedio de precipitación mensual (en pulgadas) en Seattle aparece en la tabla siguiente. (*Nota:* no se da el promedio de abril.)

(a) Grafique los datos del promedio de precipitación mensual.

(b) Modele los datos con una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Grafique f y los datos en los mismos ejes de coordenadas.

(c) Use f para pronosticar el promedio de lluvia en abril. Compare su pronóstico con el valor real de 2.55 pulgadas.

Mes	Precipitación
Ene.	5.79
Feb.	4.02
Mar.	3.71
Abr.	
May	1.70
Jun.	1.46
Jul.	0.77
Ago.	1.10
Sept.	1.72
Oct.	3.50
Nov.	5.97
Dic.	5.81

62 **Homicidios con pistola** Los números anuales de homicidios con pistola (en miles) de 1982 a 1993 aparecen en la tabla siguiente. (Después de este periodo, el número de homicidios con pistola disminuyó y se estabilizó en valores semejantes a los de mediados de la década de 1980.)

Año	Homicidios
1982	8.3
1983	8.0
1984	7.6
1985	7.9
1986	8.3
1987	8.0
1988	8.3
1989	9.2
1990	10.0
1991	11.6
1992	12.5
1993	13.3

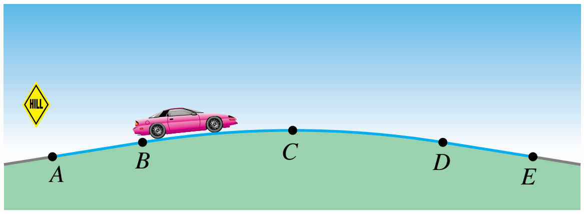
(a) Grafique los datos. Discuta cualesquiera tendencias generales en los datos.

(b) Modele estos datos con una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

(c) Grafique f junto con los datos.

63 **Curvas verticales de cresta** Cuando unos ingenieros diseñan carreteras, deben diseñar cuestas para asegurar una correcta visibilidad para los conductores. Las cuestas se conocen como *curvas verticales de cresta* que cambian la pendiente de una carretera. Los ingenieros usan una forma parabólica para una cuesta de carretera, con el vértice localizado en lo alto de la cresta. Dos carreteras con diferentes pendientes se van a enlazar con una curva de cresta parabólica. La carretera pasa por los puntos $A(-800, -48)$, $B(-500, 0)$, $C(0, 40)$, $D(500, 0)$ y $E(800, -48)$, como se ve en la figura. La carretera es lineal entre A y B, parabólica entre B y D, y luego lineal entre D y E.

EJERCICIO 63

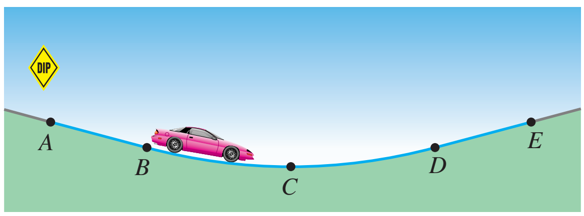


(a) Encuentre una función f definida por tramos que modele la carretera entre los puntos A y E.

(b) Grafique f en la pantalla $[-800, 800, 100]$ por $[-100, 200, 100]$.

64 **Curvas verticales de pandeo** Consulte el ejercicio 63. Los valles o inflexiones en carreteras se conocen como *curvas verticales de pandeo,* que también se modelan usando parábolas. Dos carreteras con diferentes pendientes que se encuentran en una curva de pandeo necesitan enlazarse. La carretera pasa por los puntos $A\left(-500, 243\frac{1}{3}\right)$, $B(0, 110)$, $C(750, 10)$, $D(1500, 110)$, y $E\left(2000, 243\frac{1}{3}\right)$, como se muestra en la figura. La carretera es lineal entre A y B, parabólica entre B y D, y lineal entre D y E.

EJERCICIO 64



(a) Encuentre una función f definida por tramos que modele la carretera entre los puntos A y E.

(b) Grafique f en la pantalla $[-500, 2000, 500]$ por $[0, 800, 100]$.

65 **Trayectoria parabólica** En condiciones ideales, un objeto lanzado desde el nivel del suelo seguirá una trayectoria parabólica de la forma $f(x) = ax^2 + bx$, donde a y b son constantes y x representa la distancia horizontal recorrida por el objeto.

(a) Determine a y b para que el objeto alcance una altura máxima de 100 pies y recorra una distancia horizontal de 150 pies antes de regresar al suelo.

(b) Grafique $f(x) = ax^2 + bx$ en la pantalla [0, 180, 50] por [0, 120, 50].

(c) Grafique $y = kax^2 + bx$, donde $k = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$, en el mismo de [0, 600, 50] por [0, 400, 50]. ¿En qué forma la constante k afecta la trayectoria del objeto?

3.7 Operaciones en funciones

Es frecuente que las funciones se definan usando sumas, diferencias, productos y cocientes de varias expresiones. Por ejemplo, si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1},$$

Podemos considerar $h(x)$ como una suma de valores de las funciones f y g dadas por

$$f(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{5x + 1}.$$

Llamamos h a la *suma* de f y g y la denotamos por $f + g$. Entonces,

$$h(x) = (f + g)(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1}.$$

En general, si f y g son *cualesquiera* funciones, usamos la terminología y notación dadas en la tabla siguiente.

Si bien es cierto que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, recuerde que, en general, $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$.

Suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Terminología	Valor de la función
suma $f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
diferencia $f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
producto fg	$(fg)(x) = f(x)g(x)$
cociente $\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

Los dominios de $f + g$, $f - g$, y fg son la intersección I de los dominios de f y g; es decir, los números que son *comunes* a ambos dominios. El dominio de f/g es el subconjunto de I formado por toda x en I tal que $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 1 **Hallar valores de función de $f + g$, $f - g$, fg y f/g**

Si $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^3$, encuentre $(f + g)(2)$, $(f - g)(2)$, $(fg)(2)$ y $(f/g)(2)$.

SOLUCIÓN Como $f(2) = 3(2) - 2 = 4$ y $g(2) = 2^3 = 8$, tenemos

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + 8 = 12$$
$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 4 - 8 = -4$$
$$(fg)(2) = f(2)g(2) = (4)(8) = 32$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

■

EJEMPLO 2 **Hallar $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$**

Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$, encuentre $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$, y exprese los dominios de las funciones respectivas.

SOLUCIÓN El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ y el dominio de g es $\mathbb{R}$. La intersección de estos dominios es $[-2, 2]$, que es el dominio de $f+g$, $f-g$ y fg. Para el dominio f/g, excluimos cada número x en $[-2, 2]$ de manera que $g(x) = 3x + 1 = 0$ $\left(\text{es decir, } x = -\frac{1}{3}\right)$. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$(f+g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + (3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$
$$(f-g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - (3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$
$$(fg)(x) = \sqrt{4 - x^2}\,(3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}, \qquad -2 \le x \le 2 \text{ y } x \ne -\frac{1}{3}$$ ■

Una función f es una **función polinomial** si $f(x)$ es un polinomio, es decir, si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos. Una función polinomial puede ser considerada como una suma de funciones cuyos valores son de la forma cx^k, donde c es un número real y k es un entero no negativo. Note que las funciones cuadráticas consideradas en la sección previa son funciones polinomiales.

Una **función algebraica** es una función que se puede expresar en términos de sumas finitas, diferencias, productos, cocientes o raíces de funciones polinomiales.

ILUSTRACIÓN **Función algebraica**

■ $f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{x(x^2 + 5)}{\sqrt{x^3 + \sqrt{x}}}$

Las funciones que no son algebraicas son **trascendentales.** Las funciones exponenciales y logarítmicas consideradas en el capítulo 5 son ejemplos de funciones trascendentales.

En el resto de esta sección discutiremos cómo dos funciones f y g se pueden usar para obtener las *funciones compuestas* $f \circ g$ y $g \circ f$ (que se leen "f composición g" y "g composición f", respectivamente). Las funciones de este tipo son muy importantes en cálculo. La función $f \circ g$ se define como sigue.

Definición de función compuesta

La **función compuesta** $f \circ g$ de dos funciones f y g está definida por

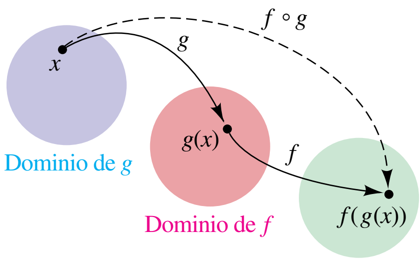
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f.

La figura 1 es un diagrama esquemático que ilustra relaciones entre f, g, y $f \circ g$. Note que para x en el dominio de g, *primero hallamos* $g(x)$ (que debe estar en el dominio de f) y luego, *en segundo término, encontramos* $f(g(x))$.

Un número x está en el dominio de $(f \circ g)(x)$ si y sólo si $g(x)$ **y** *$f(g(x))$ están definidas.*

FIGURA 1



Para la función compuesta $g \circ f$, invertimos este orden, primero hallamos $f(x)$ y en segundo término hallamos $g(f(x))$. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de toda x en el dominio de f tal que $f(x)$ está en el dominio de g.

Como la notación $g(x)$ se lee "g de x," a veces decimos que *g es una función de x*. Para la función compuesta $f \circ g$, la notación $f(g(x))$ se lee "f de g de x", y podríamos considerar una f como una función de $g(x)$. En este sentido, *una función compuesta es una función de una función* o, en forma más precisa, una función de los valores de otra función.

EJEMPLO 3 **Hallar funciones compuestas**

Sea $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x)\ 3x + 5$.

(a) Encuentre $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

(b) Encuentre $(g \circ f)(x)$ y el dominio $g \circ f$.

(c) Encuentre $f(g(2))$ en dos formas diferentes: primero usando las funciones f y g por separado y en segundo término usando la función compuesta $f \circ g$.

SOLUCIÓN

(a)
$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{definición de } f \circ g\\
&= f(3x + 5) && \text{definición de } g\\
&= (3x + 5)^2 - 1 && \text{definición de } f\\
&= 9x^2 + 30x + 24 && \text{simplifique}
\end{aligned}
$$

El dominio de f y g es $\mathbb{R}$. Como para cada x en $\mathbb{R}$ (el dominio de g), el valor de la función $g(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de f), el dominio de $f \circ g$ también es $\mathbb{R}$. Note que $g(x)$ *y* $f(g(x))$ están definidas para todos los números reales.

(b)
$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{definición de } g \circ f\\
&= g(x^2 - 1) && \text{definición de } f\\
&= 3(x^2 - 1) + 5 && \text{definición de } g\\
&= 3x^2 + 2 && \text{simplifique}
\end{aligned}
$$

Como para cada x en $\mathbb{R}$ (el dominio de f), el valor de la función $f(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de g), el dominio de $g \circ f$ es $\mathbb{R}$. Note que $f(x)$ *y* $g(f(x))$ están definidas para todos los números reales.

(c) Para hallar $f(g(2))$ usando $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$ separadamente, podemos continuar como sigue:

$$
\begin{aligned}
g(2) &= 3(2) + 5 = 11\\
f(g(2)) &= f(11) = 11^2 - 1 = 120
\end{aligned}
$$

Para hallar $f(g(2))$ usando $f \circ g$, consultamos el inciso (a), donde hallamos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 9x^2 + 30x + 24.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
f(g(2)) &= 9(2)^2 + 30(2) + 24\\
&= 36 + 60 + 24 = 120.
\end{aligned}
$$

■

Note que en el ejemplo 3, $f(g(x))$ y $g(f(x))$ no son siempre iguales; es decir, $f \circ g \neq g \circ f$.

Si dos funciones f y g tienen ambas un dominio $\mathbb{R}$, entonces el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ también es $\mathbb{R}$. Esto se ilustró en el ejemplo 3. El siguiente ejemplo muestra que el dominio de una función compuesta puede diferir de los de las dos funciones dadas.

EJEMPLO 4 Hallar funciones compuestas

Sea $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

(a) Encuentre $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

(b) Encuentre $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

SOLUCIÓN Primero observamos que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el dominio de g es el conjunto de todos los números reales no negativos, es decir, el intervalo $[0, \infty)$. Podemos continuar como sigue.

(a)
$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{definición of } f \circ g \\
&= f\left(\sqrt{x}\right) && \text{definición of } g \\
&= \left(\sqrt{x}\right)^2 - 16 && \text{definición of } f \\
&= x - 16 && \text{simplifique}
\end{aligned}
$$

Si consideramos sólo la expresión final, $x - 16$, podríamos ser llevados a pensar que el dominio de $f \circ g$ es $\mathbb{R}$, porque $x - 16$ está definido para todo número real x. No obstante, este no es el caso. Por definición, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en $[0, \infty)$ (el dominio de g) tal que $g(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de f). Como $g(x) =\ x$ está en $\mathbb{R}$ para toda x en $[0, \infty)$, se deduce que el dominio de $f \circ g$ es $[0, \infty)$. Note que $g(x)$ y $f(g(x))$ están definidas para x en $[0, \infty)$.

(b)
$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{definición de } g \circ f \\
&= g(x^2 - 16) && \text{definición de } f \\
&= \sqrt{x^2 - 16} && \text{definición de } g
\end{aligned}
$$

Por definición, el dominio de $g \circ f$ es el conjunto de toda x en $\mathbb{R}$ (el dominio de f) tal que $f(x) = x^2 - 16$ está en $[0, \infty)$ (el dominio de g). El enunciado "$x^2 - 16$ está en $[0, \infty)$" es equivalente a cada una de las desigualdades

$$x^2 - 16 \geq 0, \qquad x^2 \geq 16, \qquad |x| \geq 4.$$

Por lo tanto, el dominio de $g \circ f$ es la unión $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. Note que $f(x)$ y $g(f(x))$ están definidas para x en $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. También observe que este dominio es diferente de los dominios de f y de g. ■

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que valores especiales de funciones compuestas pueden a veces obtenerse de tablas.

EJEMPLO 5 Hallar valores de una función compuesta en tablas

Varios valores de dos funciones f y g aparecen en las tablas siguientes.

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	2	1

x	1	2	3	4
$g(x)$	4	1	3	2

Encuentre $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$, $(f \circ f)(2)$ y $(g \circ g)(2)$.

SOLUCIÓN Con el uso de la definición de función compuesta y por consulta de las tablas anteriores, obtenemos

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 3$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 2$$
$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 1$$
$$(g \circ g)(2) = g(g(2)) = g(1) = 4.$$

■

En algunos problemas de aplicación es necesario expresar una cantidad y como función del tiempo t. El ejemplo siguiente ilustra que a veces es más fácil introducir una tercera variable x, expresar x como función de t (es decir, $x = g(t)$), expresar y como función de x (es decir, $y = f(x)$) y finalmente formar la función compuesta dada por $y = f(x) = f(g(t))$.

EJEMPLO 6 **Uso de una función compuesta para hallar el volumen de un globo**

Un meteorólogo está inflando un globo esférico con helio. Si el radio del globo está cambiando a razón de 1.5 cm/s, exprese el volumen V del globo como función del tiempo t (en segundos).

SOLUCIÓN Denotemos con x el radio del globo. Si suponemos que el radio es 0 inicialmente, entonces después de t segundos

$$x = 1.5t. \quad \text{radio del globo después de } t \text{ segundos}$$

Para ilustrar, después de 1 segundo, el radio es 1.5 centímetros; después de 2 segundos, es 3.0 centímetros; después de 3 segundos, es 4.5 centímetros y así sucesivamente.

A continuación escribimos

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3. \quad \text{volumen de una esfera de radio } x$$

Esto nos da una relación de función compuesta en la que V es una función de x y x es una función de t. Por sustitución, obtenemos

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3 = \tfrac{4}{3}\pi(1.5t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi\left(\tfrac{3}{2}t\right)^3 = \tfrac{4}{3}\pi\left(\tfrac{27}{8}t^3\right).$$

Simplificando, obtenemos la fórmula siguiente para V como función de t:

$$V(t) = \tfrac{9}{2}\pi t^3$$

■

Si f y g son funciones tales que

$$y = f(u) \qquad \text{y} \qquad u = g(x),$$

entonces sustituyendo u en $y = f(u)$ dará

$$y = f(g(x)).$$

Para ciertos problemas en cálculo *invertimos* este procedimiento; es decir, dada $y = h(x)$ par alguna función h, encontramos una *forma de función compuesta* $y = f(u)$ y $u = g(x)$ tal que $h(x) = f(g(x))$.

EJEMPLO 7 **Hallar una forma de función compuesta**

Exprese $y = (2x + 5)^8$ como una forma de función compuesta.

SOLUCIÓN Suponga, para un número real x, que deseamos evaluar la expresión $(2x + 5)^8$ usando una calculadora. Primero calcularíamos el valor de $2x + 5$ y luego elevaríamos el resultado a la octava potencia. Esto sugiere que hagamos

$$u = 2x + 5 \qquad \text{y} \qquad y = u^8,$$

que es una forma de función compuesta para $y = (2x + 5)^8$. ■

El método empleado en el ejemplo precedente se puede extender a otras funciones. En general, suponga que nos dan $y = h(x)$. Para escoger la expresión *interior* $u = g(x)$ en una forma de función compuesta, haga la siguiente pregunta: si se usa una calculadora, ¿qué parte de la expresión $h(x)$ se evaluaría primero? Esto con frecuencia nos lleva a una elección apropiada para $u = g(x)$. Después de escoger u, tome como base $h(x)$ para determinar $y = f(u)$. La siguiente ilustración contiene problemas típicos.

ILUSTRACIÓN **Formas de función compuesta**

Valor de la función	Elección para $u = g(x)$	Elección para $y = f(u)$
■ $y = (x^3 - 5x + 1)^4$	$u = x^3 - 5x + 1$	$y = u^4$
■ $y = \sqrt{x^2 - 4}$	$u = x^2 - 4$	$y = \sqrt{u}$
■ $y = \dfrac{2}{3x + 7}$	$u = 3x + 7$	$y = \dfrac{2}{u}$

La forma de función compuesta nunca es única. Por ejemplo, considere la primera expresión de la ilustración precedente:

$$y = (x^3 - 5x + 1)^4$$

Si n es cualquier entero diferente de cero, podríamos escoger

$$u = (x^3 - 5x + 1)^n \qquad \text{y} \qquad y = u^{4/n}.$$

Entonces, hay un número *ilimitado* de formas de función compuesta. Generalmente, nuestro objetivo es escoger una forma tal que la expresión para y sea sencilla, como hicimos en la ilustración.

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que una calculadora de gráficas puede ayudar a determinar el dominio de una función compuesta. Usamos las mismas funciones que aparecieron en el ejemplo 4.

EJEMPLO 8 **Analizar gráficamente una función compuesta**

Sea $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

(a) Encuentre $f(g(3))$.

(b) Trace $y = (f \circ g)(x)$, y use la gráfica para hallar el dominio de $f \circ g$.

SOLUCIÓN

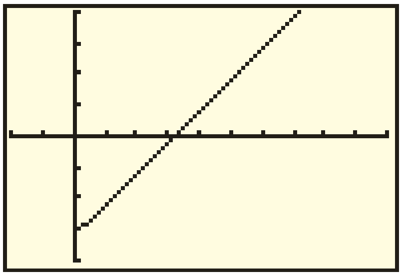
(a) Empezamos por hacer las asignaciones

$$Y_1 = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad Y_2 = (Y_1)^2 - 16.$$

Note que hemos sustituido x por Y_1 en $f(x)$ y asignado esta expresión a Y_2, en forma muy semejante a como sustituimos x por $g(x)$ en el ejemplo 4.

A continuación guardamos el valor 3 en la ubicación de memoria para x y luego pedimos el valor de Y_2. Vemos que el valor de Y_2 en 3 es -13; es decir, $f(g(3)) = -13$.

FIGURA 2
$[-10, 50, 5]$ por $[-20, 20, 5]$



(b) Para determinar una pantalla para la gráfica de $f \circ g$, primero observamos que $f(x) \geq -16$ para toda x y por lo tanto escogemos Ymín *menor* que -16; por ejemplo, Ymín $= -20$. Si deseamos que la pantalla tenga una dimensión vertical de 40, debemos escoger Ymáx $= 20$.

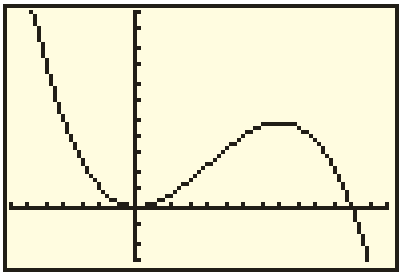
Si su pantalla está en proporción 1:1 (horizontal:vertical), entonces una opción razonable para [Xmín, Xmáx] sería $[-10, 30]$, una dimensión horizontal de 40. Si su pantalla está en proporción 3:2, escoja [Xmín, Xmáx] sea $[-10, 50]$, una dimensión horizontal de 60.

Seleccionar Y_2 y luego exhibir la gráfica de Y_2 usando la pantalla $[-10, 50, 5]$ por $[-20, 20, 5]$ nos da una gráfica semejante a la de la figura 2. Vemos que la gráfica es una semirrecta con punto final $(0, -16)$. Por lo tanto, el dominio de Y_2 es toda $x \geq 0$. ■

El siguiente ejemplo demuestra cómo usar una calculadora de gráficas para graficar funciones compuestas de la forma $af(bx)$. Usaremos la función del ejemplo 7 de la sección 3.5.

EJEMPLO 9 **Graficar funciones compuestas**

FIGURA 3
$[-7, 14]$ por $[-3, 11]$



Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, trace la gráfica de $y = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{3}x\right)$.

SOLUCIÓN De nuestra discusión sobre compresión y elongación de gráficas en la sección 3.5, reconocemos que la gráfica de f estará comprimida verticalmente por un factor de 2 y elongada horizontalmente por un factor de 3. Para relacionar este problema con funciones compuestas, podemos considerar

$$y = -\tfrac{1}{2}f\left(\tfrac{1}{3}x\right) \qquad \text{como} \qquad y = -\tfrac{1}{2}f(g(x)), \qquad \text{donde } g(x) = \tfrac{1}{3}x.$$

La última ecuación para y sugiere las asignaciones

$$Y_1 = \tfrac{1}{3}x, \quad Y_2 = (Y_1)^3 - 4(Y_1)^2, \quad \text{y} \quad Y_3 = -\tfrac{1}{2}Y_2.$$

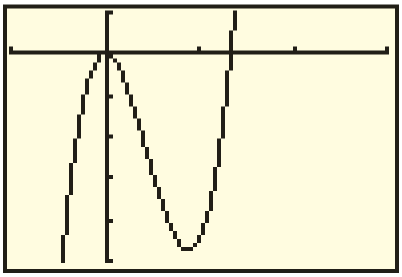
Note que $Y_2 = f(Y_1) = f(g(x))$. Seleccionamos sólo Y_3 por graficar y escogemos una pantalla $[-7, 14]$ por $[-3, 11]$, para obtener la figura 3.

Hay dos ventajas al asignar las funciones en la forma citada líneas antes:

(1) No tuvimos en realidad que calcular la función polinomial por graficar, como hicimos en el ejemplo 7 de la sección 3.5.

(2) Con sólo cambiar los coeficientes en Y_1 y Y_3, fácilmente podemos examinar su efecto sobre la gráfica de Y_3.

FIGURA 4
$[-1, 3]$ por $[-5, 1]$



Como ilustración del párrafo (2), el lector debe intentar graficar $y = \frac{1}{2}f(3x)$ cambiando Y_1 por $3x$, Y_3 por $\frac{1}{2}Y_2$ y la pantalla a $[-1, 3]$ por $[-5, 1]$ y luego graficando Y_3, para obtener la figura 4. ■

3.7 Ejercicios

Ejer. 1–2: Encuentre

(a) $(f + g)(3)$ **(b)** $(f - g)(3)$

(c) $(fg)(3)$ **(d)** $(f/g)(3)$

1 $f(x) = x + 3, \quad g(x) = x^2$

2 $f(x) = -x^2, \quad g(x) = 2x - 1$

Ejer. 3–8: Encuentre

(a) $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, y $(f/g)(x)$

(b) el dominio de $f+g$, $f-g$, y fg

(c) el dominio de f/g

3 $f(x) = x^2 + 2,\quad g(x) = 2x^2 - 1$

4 $f(x) = x^2 + x,\quad g(x) = x^2 - 4$

5 $f(x) = \sqrt{x+5},\quad g(x) = \sqrt{x+5}$

6 $f(x) = \sqrt{5-2x},\quad g(x) = \sqrt{x+3}$

7 $f(x) = \dfrac{2x}{x-4},\quad g(x) = \dfrac{x}{x+5}$

8 $f(x) = \dfrac{x}{x-2},\quad g(x) = \dfrac{7x}{x+4}$

Ejer. 9–10: Encuentre

(a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(g \circ f)(x)$

(c) $(f \circ f)(x)$ (d) $(g \circ g)(x)$

9 $f(x) = 2x - 1,\quad g(x) = -x^2$

10 $f(x) = 3x^2,\quad g(x) = x - 2$

Ejer. 11–20: Encuentre

(a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(g \circ f)(x)$

(c) $f(g(-2))$ (d) $g(f(3))$

11 $f(x) = 2x - 5,\quad g(x) = 3x + 4$

12 $f(x) = 5x + 2,\quad g(x) = 6x - 3$

13 $f(x) = 3x^2 + 4,\quad g(x) = 5x$

14 $f(x) = 3x - 1,\quad g(x) = 4x^2$

15 $f(x) = 2x^2 + 3x - 4,\quad g(x) = 2x - 1$

16 $f(x) = 5x - 7,\quad g(x) = 3x^2 - x + 2$

17 $f(x) = 4x,\quad g(x) = 2x^3 - 5x$

18 $f(x) = x^3 + 2x^2,\quad g(x) = 3x$

19 $f(x) = |x|,\quad g(x) = -7$

20 $f(x) = -5,\quad g(x) = x^2$

Ejer. 21–34: Encuentre (a) $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$ y (b) $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

21 $f(x) = x^2 - 3x,\quad g(x) = \sqrt{x+2}$

22 $f(x) = \sqrt{x-15},\quad g(x) = x^2 + 2x$

23 $f(x) = x^2 - 4,\quad g(x) = \sqrt{3x}$

24 $f(x) = -x^2 + 1,\quad g(x) = \sqrt{x}$

25 $f(x) = \sqrt{x-2},\quad g(x) = \sqrt{x+5}$

26 $f(x) = \sqrt{3-x},\quad g(x) = \sqrt{x+2}$

27 $f(x) = \sqrt{3-x},\quad g(x) = \sqrt{x^2-16}$

28 $f(x) = x^3 + 5,\quad g(x) = \sqrt[3]{x-5}$

29 $f(x) = \dfrac{2x+3}{5},\quad g(x) = \dfrac{5x-3}{2}$

30 $f(x) = \dfrac{1}{x-1},\quad g(x) = x - 1$

31 $f(x) = x^2,\quad g(x) = \dfrac{1}{x^3}$

32 $f(x) = \dfrac{x}{x-2},\quad g(x) = \dfrac{3}{x}$

33 $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2},\quad g(x) = \dfrac{x-3}{x-4}$

34 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1},\quad g(x) = \dfrac{x-5}{x+4}$

Ejer. 35–36: Resuelva la ecuación $(f \circ g)(x) = 0$.

35 $f(x) = x^2 - 2,\quad g(x) = x + 3$

36 $f(x) = x^2 - x - 2,\quad g(x) = 2x - 5$

37 Varios valores de dos funciones f y g aparecen en las tablas siguientes:

x	5	6	7	8	9
$f(x)$	8	7	6	5	4

x	5	6	7	8	9
$g(x)$	7	8	6	5	4

Si es posible, encuentre

(a) $(f \circ g)(6)$ **(b)** $(g \circ f)(6)$ **(c)** $(f \circ f)(6)$

(d) $(g \circ g)(6)$ **(e)** $(f \circ g)(9)$

38 Varios valores de dos funciones T y S aparecen en las tablas siguientes:

t	0	1	2	3	4
$T(t)$	2	3	1	0	5

x	0	1	2	3	4
$S(x)$	1	0	3	2	5

Si es posible, encuentre

(a) $(T \circ S)(1)$ **(b)** $(S \circ T)(1)$ **(c)** $(T \circ T)(1)$

(d) $(S \circ S)(1)$ **(e)** $(T \circ S)(4)$

39 Si $D(t) = \sqrt{400 + t^2}$ y $R(x) = 20x$, encuentre $(D \circ R)(x)$.

40 Si $S(r) = 4\pi r^2$ y $D(t) = 2t + 5$, encuentre $(S \circ D)(t)$.

41 Si f es una función impar y g es una función par, ¿es fg par, impar, o ninguna de éstas?

42 Hay una función con dominio $\mathbb{R}$ que es par e impar. Encuentre esa función.

43 **Funciones de nóminas** Defina la función SSTAX de impuesto al seguro social como $\text{SSTAX}(x) = 0.0765x$, donde $x \geq 0$ es el ingreso semanal. Sea ROUND2 la función que redondea un número a dos lugares decimales. Encuentre el valor de (ROUND2 ∘ SSETAX)(525).

44 **Funciones de ciencias de computadoras** Sea la función CHR definida por CHR(65) = "A", CHR(66) = "B", . . . , CHR(90) = "Z". A continuación, sea la función ORD definida por ORD("A") = 65, ORD("B") = 66, . . . , ORD("Z") = 90. Encuentre

(a) (CHR ∘ ORD)("C") **(b)** CHR(ORD("A") + 3)

45 **Propagación de un incendio** Un incendio se ha iniciado en un campo abierto y seco y se extiende en forma de círculo. Si el radio de este círculo aumenta a razón de 5 ft/minuto, exprese el área total A del incendio como función del tiempo t (en minutos).

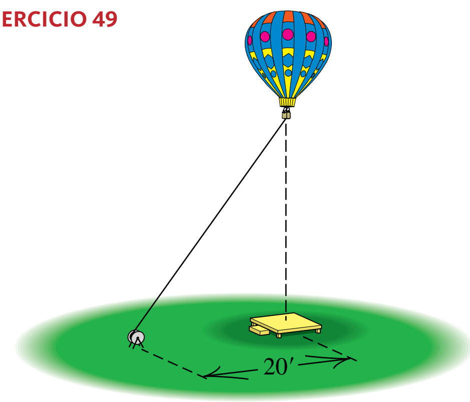
46 **Dimensiones de un globo** Un globo esférico está siendo inflado a razón de $\frac{9}{2}\pi$ ft^3/min. Exprese este radio $r = 0$ cuando $t = 0$.

47 **Dimensiones de una pila de arena** El volumen de una pila cónica de arena está aumentando a razón de 243π ft^3/min, y la altura de la pila siempre es igual al radio r de la base. Exprese r como función del tiempo t (en minutos), suponiendo que $r = 0$ cuando $t = 0$.

48 **Diagonal de un cubo** Una diagonal d de un cubo es la distancia entre dos vértices opuestos. Exprese d como función de la arista x del cubo. (*Sugerencia:* primero exprese la diagonal y de una cara como función de x.)

49 **Altitud de un globo** Un globo de aire caliente asciende verticalmente desde el nivel del suelo cuando una cuerda atada a la base del globo se suelta a razón de 5 ft/s (vea la figura). La polea que suelta la cuerda está a 20 pies de la plataforma donde los pasajeros abordan el globo. Exprese la altitud h del globo como función del tiempo t.

EJERCICIO 49



50 **Equilibrista** Consulte el ejercicio 76 de la Sección 3.4. Comenzando en el punto más bajo, el equilibrista sube por la cuerda a un ritmo constante de 2 ft/s. Si la cuerda está unida a una altura de 30 pies en el poste, exprese la altura h del equilibrista sobre el suelo como función del tiempo t. (*Sugerencia:* denote con d la distancia total recorrida a lo largo del alambre. Primero exprese d como función de t, y luego h como función de d.)

51 **Despegue de un avión** Consulte el ejercicio 77 de la sección 3.4. Cuando el avión avanza 500 pies por la pista, alcanza una velocidad de 150 ft/s (o sea 102 mi/h), que mantendrá hasta el despegue. Exprese la distancia d del avión desde la torre de control como función del tiempo t (en segundos). (*Sugerencia:* en la figura, primero escriba x como función de t.)

52 **Corrosión de un cable** Un cable de 100 pies de largo y diámetro de 4 pulgadas se sumerge en agua de mar. Debido a la corrosión, el área superficial del cable disminuye a razón de 750 pulgadas cuadradas por año. Exprese el diámetro d del cable como función del tiempo t (en años). (No preste atención a la corrosión de los extremos del cable.)

Ejer. 53–60: Encuentre una forma de función compuesta para *y*.

53 $y = (x^2 + 5x)^{1/3}$

54 $y = \sqrt[4]{x^4 - 64}$

55 $y = \dfrac{1}{(x-3)^6}$

56 $y = 4 + \sqrt{x^2 + 1}$

57 $y = (x^4 - 2x^2 + 5)^5$

58 $y = \dfrac{1}{(x^2 + 3x - 5)^3}$

59 $y = \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2}$

60 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

61 Si $f(x) = \sqrt{x} - 1$ y $g(x) = x^3 + 1$, aproxime $(f \circ g)(0.0001)$. Para evitar calcular un valor cero para $(f \circ g)(0.0001)$, reescriba la fórmula para $f \circ g$ como

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^3 + 1} + 1}.$$

62 Si $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + x + 2}$ y $g(x) = \left(\sqrt{3x} - x^3\right)^{3/2}$, aproxime

$$\frac{(f+g)(1.12) - (f/g)(1.12)}{[(f \circ f)(5.2)]^2}.$$

63 Consulte el ejercicio 65 de la Sección 3.5. Haga las asignaciones $Y_1 = x$ y $Y_2 = 3\sqrt{(Y_1 + 2)(6 - Y_1)} - 4$. Determine asignaciones para Y_1 (y Y_3 si es necesario) que hará posible que el estudiante grafique cada función en (a)−(h), y luego grafique la función. (Compruebe el dominio y rango con la respuesta previamente citada.)

(a) $y = -2f(x)$

(b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

(c) $y = f(x - 3) + 1$

(d) $y = f(x + 2) - 3$

(e) $y = f(-x)$

(f) $y = -f(x)$

(g) $y = f(|x|)$

(h) $y = |f(x)|$

64 Consulte el ejercicio 66 de la Sección 3.5. Haga las asignaciones $Y_1 = x$ y $Y_2 = 3\sqrt{(-Y_1 - 6)(Y_1 + 2)} - 10$. Determine asignaciones para Y_1 y Y_3 que harán posible que usted grafique cada función y luego grafique la función.

(a) $y = \frac{1}{2}f(x)$

(b) $y = f(2x)$

(c) $y = f(x - 2) + 5$

(d) $y = f(x + 4) - 1$

(e) $y = f(-x)$

(f) $y = -f(x)$

(g) $y = f(|x|)$

(h) $y = |f(x)|$

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS DE REPASO

1 Escriba el conjunto de todos los puntos (x, y) en un plano de coordenadas tal que $y/x < 0$.

2 Demuestre que el triángulo con vértices $A(3, 1)$, $B(-5, -3)$, y $C(4, -1)$ es un triángulo rectángulo y encuentre su área.

3 Dados $P(-5, 9)$ y $Q(-8, -7)$, encuentre

(a) la distancia $d(P, Q)$

(b) el punto medio del segmento PQ

(c) el punto R tal que Q es el punto medio de PR

4 Encuentre todos los puntos sobre el eje y que estén a una distancia 13 de $P(12, 8)$.

5 ¿Para qué valores de a la distancia entre $P(a, 1)$ y $Q(-2, a)$ es menor que 3?

6 Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro $C(7, -4)$ y pasa por el punto $P(-2, 5)$.

7 Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene puntos extremos de un diámetro $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.

8 Encuentre la ecuación para la mitad izquierda de la circunferencia dada por $(x + 2)^2 + y^2 = 7$.

9 Encuentre la pendiente de la recta que pasa por $C(11, -5)$ y $D(-6, 8)$.

10 Demuestre que $A(-3, 1)$, $B(1, -1)$, $C(4, 1)$ y $D(3, 5)$ son vértices de un trapecio.

11 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ que es

(a) paralela a la recta $6x + 2y + 5 = 0$

(b) perpendicular a la recta $6x + 2y + 5 = 0$

12 Exprese $8x + 3y - 15 = 0$ en la forma pendiente-intersección al origen.

13 Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro $C(-5, -1)$ y es tangente a la recta $x = 4$.

14 Encuentre la ecuación de la recta que intersecta el eje x en -3 y pasa por el centro de la circunferencia que tiene ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 26 = 0$.

15 Encuentre la forma general de una ecuación de la recta que pasa por $P(3, -7)$ con pendiente 4.

16 Dados $A(-1, 2)$ y $B(3, -4)$, encuentre una forma general de la ecuación para la mediatriz del segmento AB.

Ejer. 17–18: Encuentre el centro y radio de la circunferencia con la ecuación dada.

17 $x^2 + y^2 - 12y + 31 = 0$

18 $4x^2 + 4y^2 + 24x - 16y + 41 = 0$

19 Si $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 3}}$, encuentre

(a) $f(1)$ (b) $f(-1)$ (c) $f(0)$ (d) $f(-x)$

(e) $-f(x)$ (f) $f(x^2)$ (g) $[f(x)]^2$

Ejer. 20–21: Encuentre *el signo* de $f(4)$ sin encontrar realmente $f(4)$.

20 $f(x) = \dfrac{-32(x^2 - 4)}{(9 - x^2)^{5/3}}$

21 $f(x) = \dfrac{-2(x^2 - 20)(3 - x)}{(6 - x^2)^{4/3}}$

22 Encuentre el dominio y rango de f si

(a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{(x + 4)^2}$

Ejer. 23–24: Encuentre $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ si $h \neq 0$.

23 $f(x) = -x^2 + x + 5$

24 $f(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

25 Encuentre una función lineal f tal que $f(1) = 3$ y $f(4) = 8$.

26 Determine si f es par, impar o ninguna de éstas.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{\pi x^2 - x^3}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 5}$

Ejer. 27–40: Trace la gráfica de la ecuación y marque los puntos de intersección con los ejes x y y.

27 $x + 5 = 0$

28 $2y - 7 = 0$

29 $2y + 5x - 8 = 0$

30 $x = 3y + 4$

31 $9y + 2x^2 = 0$

32 $3x - 7y^2 = 0$

33 $y = \sqrt{1 - x}$

34 $y = (x - 1)^3$

35 $y^2 = 16 - x^2$

36 $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 64 = 0$

37 $x^2 + y^2 - 8x = 0$

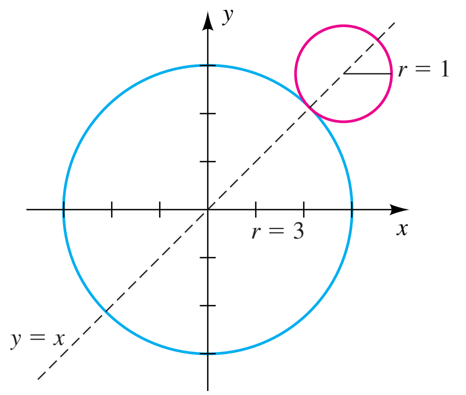
38 $x = -\sqrt{9 - y^2}$

39 $y = (x - 3)^2 - 2$

40 $y = -x^2 - 2x + 3$

41 Encuentre el centro de la circunferencia pequeña.

EJERCICIO 41



42 Explique cómo se compara la gráfica de $y = -f(x - 2)$ con la gráfica de $y = f(x)$.

Ejer. 43–52: (a) Trace la gráfica de f. (b) Encuentre el dominio D y rango R de f. (c) Encuentre los intervalos en los que f es creciente, es decreciente o constante.

43 $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{2}$

44 $f(x) = 1000$

45 $f(x) = |x + 3|$

46 $f(x) = -\sqrt{10 - x^2}$

47 $f(x) = 1 - \sqrt{x + 1}$

48 $f(x) = \sqrt{2 - x}$

49 $f(x) = 9 - x^2$

50 $f(x) = x^2 + 6x + 16$

51 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

52 $f(x) = 1 + 2[\![x]\!]$

53 Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones, haciendo uso de desplazamiento, elongación o reflexión:

(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x + 4}$

(c) $y = \sqrt{x} + 4$ (d) $y = 4\sqrt{x}$

(e) $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ (f) $y = -\sqrt{x}$

54 La gráfica de una función f con dominio $[-3, 3]$ se muestra en la figura. Trace la gráfica de la ecuación dada.

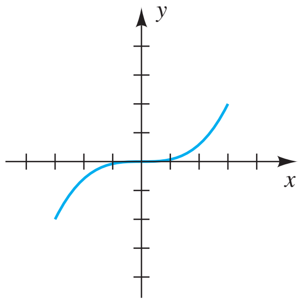
(a) $y = f(x - 2)$ (b) $y = f(x) - 2$

(c) $y = f(-x)$ (d) $y = f(2x)$

(e) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ (f) $y = |f(x)|$

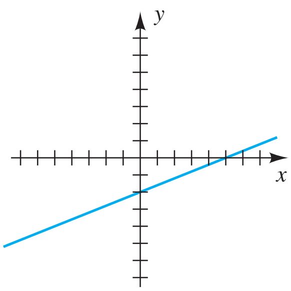
(g) $y = f(|x|)$

EJERCICIO 54

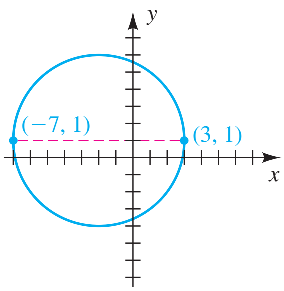


Ejer. 55–58: Encuentre una ecuación para la gráfica mostrada en la figura.

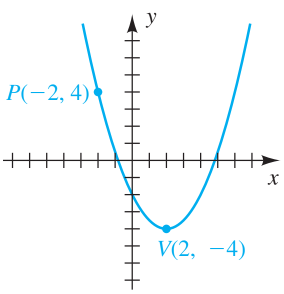
55



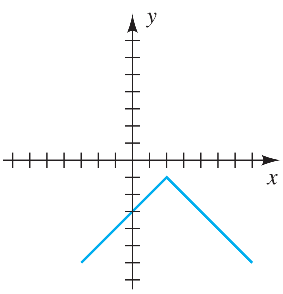
56



57



58



Ejer. 59–62: Encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x)$.

59 $f(x) = 3x^2 - 24x + 46$

60 $f(x) = -2x^2 - 12x - 24$

61 $f(x) = -12(x + 4)^2 + 20$

62 $f(x) = 3(x + 2)(x - 10)$

63 Exprese la función $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

64 Encuentre la ecuación estándar de la parábola con un eje vertical que tiene vértice $V(3, -2)$ y pasa por $(1, -5)$.

65 Si $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentre el dominio de

(a) fg (b) f/g

66 Si $f(x) = 8x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x - 2}$, encuentre de

(a) $(f \circ g)(2)$ (b) $(g \circ f)(2)$

Ejer. 67–68: Encuentre (a) $(f \circ g)(x)$ y (b) $(g \circ f)(x)$.

67 $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, \quad g(x) = 3x + 2$

68 $f(x) = \sqrt{3x + 2}, \quad g(x) = 1/x^2$

Ejer. 69–70: Encuentre (a) $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$ y (b) $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

69 $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$

70 $f(x) = \dfrac{x}{3x + 2}, \quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

71 Encuentre una forma de función compuesta para $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x}$.

72 **Rampa para silla de ruedas** La Americans with Disabilities Act de 1990 garantiza a todas las personas el derecho de accesibilidad a lugares públicos. Dar acceso a un edificio con frecuencia requiere la construcción de una rampa para sillas de ruedas. Las rampas deben tener aproximadamente 1 pulgada de ascenso vertical por cada 12-20 pulgadas de distancia horizontal. Si la base de una puerta exterior está situada a 3 pies sobre una banqueta, determine el rango de longitudes apropiadas para una rampa de silla de ruedas.

73 **Lanzamiento de disco** Con base en récords olímpicos, la distancia ganadora para el lanzamiento de disco se puede aproxima mediante la ecuación $d = 181 + 1.065t$, donde d está en pies y $t = 0$ corresponde al año 1948

(a) Pronostique la distancia ganadora para los Juegos Olímpicos de Verano de 2016.

(b) Estime el año olímpico en el que la distancia ganadora será de 265 pies.

74 **Plusvalía de casas** Hace seis años, una casa fue comprada en $179,000. Este año fue valorada en $215,000. Suponga que el valor V de la casa después de su compra es una función lineal del tiempo t (en años).

(a) Exprese V en términos de t.

(b) ¿Cuántos años después de la fecha de compra la casa valía $193,000?

75 **Escalas de temperatura** El punto de congelación del agua es 0°C o 32°F, y el punto de ebullición es 100°C o 212°F.

(a) Exprese la temperatura Fahrenheit F como función lineal de la temperatura Celsius C.

(b) ¿Qué aumento de temperatura en °F corresponde a un aumento en la temperatura de 1°C?

76 **Rendimiento de gasolina** Suponga que el costo de conducir un automóvil es una función lineal del número x de millas recorridas y que la gasolina cuesta $3 por galón. Cierto automóvil actualmente rinde 20 millas por galón y una afinación que mejorará en 10% su rendimiento cuesta $120.

(a) Exprese el costo C_1 de conducir sin una afinación en términos de x.

(b) Exprese el costo C_2 de conducir con una afinación en términos de x.

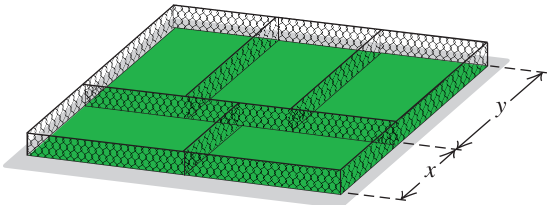
(c) ¿Cuántas millas debe recorrer el automóvil después de afinarlo para que el costo de la afinación se justifique?

77 **Las dimensiones de un corral** Un corral se compone de cinco rectángulos congruentes, como se muestra en la figura.

(a) Exprese la longitud y en función de la longitud x.

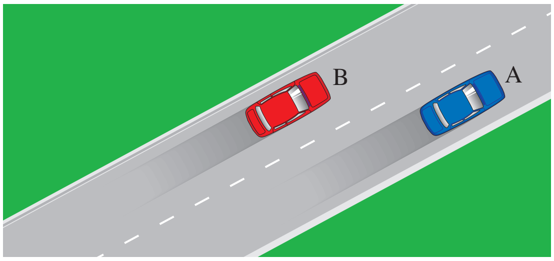
(b) Si los lados tienen un costo de $10 por pie lineal exprese el costo C del corral en función de la longitud x.

EJERCICIO 77



78 **Distancia entre autos** Al mediodía, el coche A está a 10 pies a la derecha y 20 pies adelante del coche B, como se muestra en la figura. Si el coche A continua a 88 pies/seg (o 60 mi/h), mientras que el coche B continúa a 66 pies/seg (o 45 mi/hr), exprese la distancia d entre los coches en función de t, donde t denota el número de segundos después del mediodía.

EJERCICIO 78

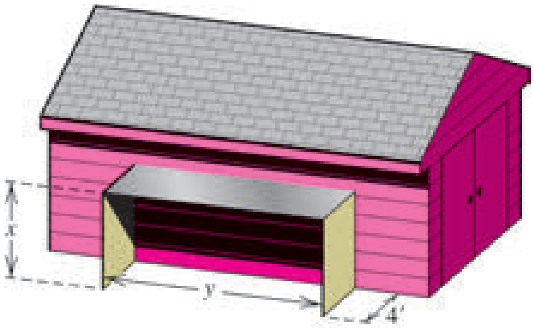


79 **Construcción de un cobertizo-almacén** Un cobertizo almacén rectangular abierto, formado por dos lados verticales de cuatro pies de ancho y un techo plano, se va a construir adjunto a una estructura ya existente, como se ve en la figura. El techo plano está hecho de hojalata y cuesta $5 por pie cuadrado, y los dos lados están hechos de madera contrachapada que cuesta $2 por pie cuadrado.

(a) Si se dispone de $400 para la construcción, exprese la longitud y como función de la altura x.

(b) Exprese el volumen V dentro del cobertizo como función de x.

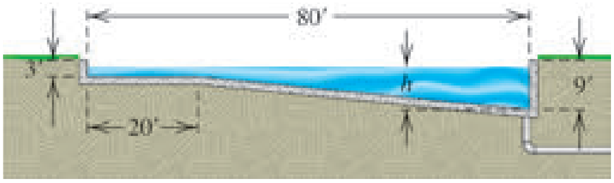
EJERCICIO 79



80 **Construcción de un contenedor cilíndrico** Una compañía planea manufacturar un contenedor que tiene forma de cilindro circular recto, abierto en la parte superior y que tiene capacidad de 24π pulgadas cúbicas. Si el costo del material para el fondo del cilindro es $\$0.30/\text{in}^2$ y el de los costados curvos es $\$0.10/\text{in}^2$, exprese el costo total C del material como función del radio r de la base del contenedor.

81 **Llenado de una piscina** Una sección transversal de una piscina rectangular con dimensiones de 80 pies por 40 pies se muestra en la figura. La piscina se está llenando con agua a razón de 10 ft^3/minuto.

EJERCICIO 81



(a) Exprese el volumen V del agua en la piscina como función del tiempo t.

(b) Exprese V como función de la profundidad h en el extremo profundo para $0 \leq h \leq 6$ y luego para $6 < h \leq 9$.

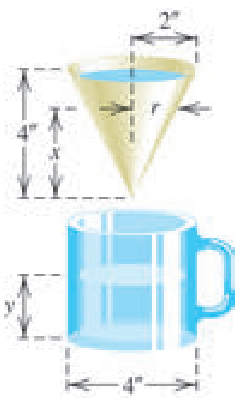
(c) Exprese h como función de t para $0 \leq h \leq 6$ y luego para $6 < h \leq 9$.

82 **Filtración de agua** Suponga que 5 in^3 de agua se vierten en un filtro cónico y que posteriormente se reciben en una taza, como se muestra en la figura. Denote con x la altura del agua en el filtro y con y la altura del agua en la taza.

(a) Exprese el radio r mostrado en la figura como función de x (*Sugerencia:* use triángulos semejantes.)

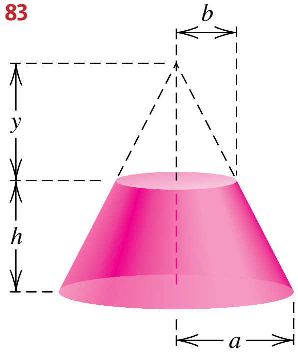
(b) Exprese la altura y del agua en la taza como función de x. (*Sugerencia:* ¿cuál es la suma de los dos volúmenes mostrados en la figura?)

EJERCICIO 82



83 **Tronco de un cono** La forma de la primera nave espacial del programa Apollo era de un cono circular recto, sólido formado al truncar un cono por un plano paralelo a su base. Para el tronco que se muestra en la figura, los radios a y b ya han sido determinados.

EJERCICIO 83



(a) Use triángulos semejantes para expresar y como función de h.

(b) Deduzca una fórmula para el volumen del tronco como función de h.

(c) Si $a = 6$ ft y $b = 3$ ft, ¿para qué valor de h el volumen del tronco es de 600 ft^3?

84 **Tarifas de uso de agua** Cierta ciudad cobra \$3.61 por 1000 galones de agua si se utilizan hasta 5000 galones y \$ 4.17 por cada 1000 galones de agua si se utiliza por de 5000 galones. Busque una función B definida por tramos que especifique el total de la cuenta para el uso del agua de x galones.

85 **Récord de salto largo** en 1991, Mike Powell de Estados Unidos estableció el récord mundial de salto largo en 8.95 metros. Suponga que la ruta de su vuelo fue parabólica y que el punto más alto fue de 1 metro de elevación. Encuentre una ecuación para su trayectoria.

86 **Rectángulo de alambre** Un trozo de alambre de 24 pulgadas de largo se dobla en la forma de un rectángulo que tiene anchura x y longitud y.

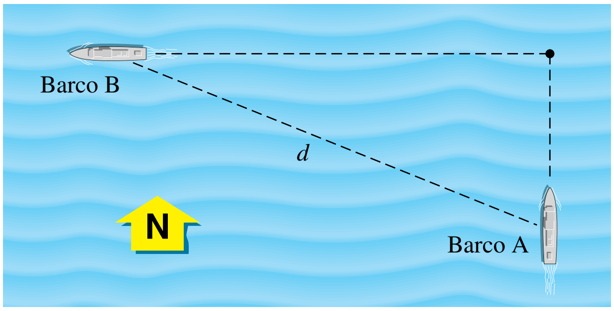
(a) Exprese y como una función de x.

(b) Exprese el área A del rectángulo en función de x.

(c) Demuestre que el área A es mayor si el rectángulo es un cuadrado.

87 **Distancia entre barcos** A la 1:00 p.m. el barco A está a 30 millas al sur del barco B y está navegando al norte a razón de 15 mi/h. Si el barco B está navegando al oeste a razón de 10 mi/h, encuentre el tiempo en el que la distancia d entre los barcos es mínima (vea la figura).

EJERCICIO 87



88 **Dimensiones de una pista de carreras** El interior de una pista de carreras de media milla está formado por un rectángulo con semicírculos en dos extremos opuestos. Encuentre las dimensiones que maximicen el área del rectángulo.

89 **Saltos verticales** Cuando un jugador de baloncesto salta para "clavar" el balón en la canasta, la distancia del jugador $f(t)$ (en pies) desde el piso después de t segundos está dada por la fórmula $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 16t$, donde g es la constante gravitacional.

(a) Si $g = 32$, encuentre el tiempo en que el jugador está colgado, es decir, el número total de segundos que el jugador está en el aire.

(b) Encuentre el salto vertical del jugador, es decir, la máxima distancia entre los pies del jugador y el piso.

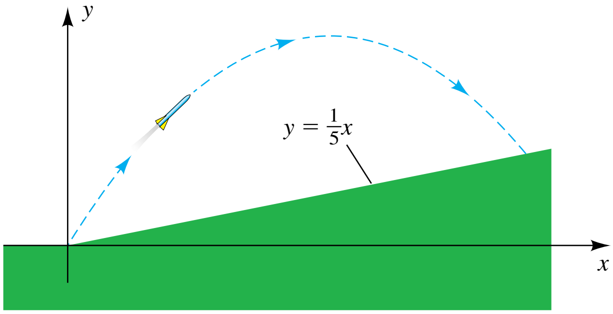
(c) En la Luna, $g = \frac{32}{6}$. Repita los incisos (a) y (b) para el jugador en la Luna.

90 **Trayectoria de un cohete** Un cohete es disparado hacia una colina, siguiendo una trayectoria dada por $y = -0.016x^2 + 1.6x$. La colina tiene pendiente 1/5, como se ilustra en la figura.

(a) ¿En dónde cae el cohete?

(b) Encuentre la máxima altura del cohete *arriba del suelo*.

EJERCICIO 90



CAPÍTULO 3 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 Compare las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $y = x^2$, y $y = x^3$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$. Escriba una generalización basada en lo que investigue acerca de las gráficas de ecuaciones de la forma $y = x^{p/q}$, donde $x \geq 0$ y p y q son enteros positivos.

2 Escriba una expresión para $g(x)$ si la gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ por reflexión de f alrededor de

(a) eje x **(b)** eje y

(c) recta $y = 2$ **(d)** recta $x = 3$

3 Considere la gráfica de $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde f está dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Discuta la forma general de g, incluyendo su dominio y rango. Discuta las ventajas y desventajas de graficar g como una composición de las funciones $h(x) = \sqrt{x}$ y $f(x)$. (*Sugerencia:* puede usar las siguientes expresiones para f: $x^2 - 2x - 8$, $-x^2 + 2x + 8$, $x^2 - 2x + 2$, $-x^2 + 2x - 2$.)

4 Simplifique el cociente de diferencias de los ejercicios 49 y 50 de la sección 3.4 para una función cuadrática arbitraria de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

5 Consulte el ejemplo 5 de la sección 3.4. Geométricamente, ¿qué representa la expresión $2x + h + 6$ en la gráfica de f? ¿qué piensa usted que representa si $h = 0$?

6 La fórmula del punto medio podría considerarse que es la fórmula de "medio camino" porque nos da el punto que está a $\frac{1}{2}$ de la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ al punto $Q(x_2, y_2)$. Desarrolle una fórmula "*m-nésima*" que dé el punto $R(x_3, y_3)$ que esté a m/n de la distancia entre P y Q (suponga que m y n son enteros positivos con $m < n$).

7 Considere las gráficas de ecuaciones de la forma cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que tiene dos puntos de intersección con el eje x. Con d la distancia del eje de la parábola a cualquiera de los puntos de intersección con el eje x y con h el valor de la coordenada y del vértice. Explore la relación entre d y h para varias ecuaciones específicas y luego desarrolle una fórmula para esta relación.

8 **Factura por un servicio** Un método común de expedir una factura por una solicitud de servicio es cobrar una cuota fija más una cuota adicional por cada cuarto de hora empleado en la llamada. Invente una función para una empresa de reparación de lavadoras de ropa que cobra \$40 más \$20 por cada cuarto de hora o fracción; por ejemplo, una llamada de 30 minutos para una reparación costaría \$80, en tanto que una llamada de 31 minutos para una reparación costaría \$100. La entrada a su función es cualquier entero positivo. (*Sugerencia:* vea el ejercicio 54(e) de la sección 3.5.)

9 **Densidad de la capa de ozono** Se determinó experimentalmente que la densidad D (en 10^{-3} cm/km) de la capa de ozono a altitudes x entre 3 y 15 kilómetros durante el invierno en Edmonton, Canadá, era de

$$D = 0.0833x^2 - 0.4996x + 3.5491.$$

Exprese x como una función de D.

10 **Precipitación en Minneapolis** El promedio de precipitación mensual en pulgadas en Minneapolis aparece en la tabla.

Mes	Precipitación
Ene.	0.7
Feb.	0.8
Mar.	1.5
Abr.	1.9
May.	3.2
Jun.	4.0
Jul.	3.3
Ago.	3.2
Sept.	2.4
Oct.	1.6
Nov.	1.4
Dic.	0.9

(a) Grafique el promedio de precipitación mensual.

(b) Modele estos datos con una función f por partes que sea primero cuadrática y luego lineal.

(c) Grafique f junto con los datos.

CAPÍTULO 3 EXAMEN DE CAPÍTULO

1 El punto $B(1, 2)$ es un décimo de la ruta del punto $A(-3, 4)$ al punto $P(x, y)$. Encuentre x y y.

2 ¿Para qué valores de a la distancia entre los puntos $P(2, 3)$ y $Q(6, a)$ es mayor que 5?

3 Encuentre la ecuación normal de la circunferencia con centro en (4, 5) que intersecta al eje x en 0.

4 Encuentre las otras intersecciones de la circunferencia con centro en (4, 5) que intersectan al eje x en 0.

5 Una circunferencia tiene su centro en (4, 5). Encuentre la ecuación pendiente-intersección al origen de la recta tangente a la circunferencia en el origen.

6 Una circunferencia tiene su centro en (4, 5). Encuentre la ecuación pendiente-intersección al origen de la recta que es perpendicular a la recta $2x - 7y = 3$ y que intersecta al eje x en 4.

7 El costo de una pizza es $9.00 más $0.80 por cada ingrediente extra. La tasa de impuesto es de 10%. Encuentre una función para el costo total $T(x)$, donde x es el número de ingredientes extra.

8 Encuentre el dominio de $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{(x+2)(x-2)}$. Escriba su respuesta en notación de intervalos.

9 Simplifique el cociente de diferencias $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ para la función $f(x) = x^2 + 5x - 7$. Luego, prediga el cociente de diferencias para $f(x) = x^2 - 7x + 5$ tomando como base su primera respuesta.

10 Una caja de tapa cerrada tiene una base cuadrada de lado y y 2 pies de altura. Exprese el área S de la superficie de la caja como una función del volumen V de la caja.

11 Si el punto $P(3, -2)$ está en la gráfica de la función f, encuentre el punto correspondiente en la gráfica de $y = 2|f(x - 3)| - 1$.

12 Un vendedor vende cápsulas por $12. Su comisión es de 10% en las primeras 1000 cápsulas vendidas y 15% por cualquier cantidad adicional de cápsulas vendida). Encuentre una función definida por tramos C que especifique la comisión total si x cápsulas son vendidas.

13 Encuentre la ecuación normal de la parábola con eje vertical y vértice $V(-2, 1)$. ¿Qué restricción debe hacerse en el coeficiente a si la gráfica de la parábola no intersecta al eje x?

14 Encuentre el valor mínimo de la parábola que intersecta al eje x en -2 y 4, pasando por el punto $(3, -15)$.

15 Encuentre el valor mínimo del producto p de dos números, uno de los cuales es 9 menos el doble de otro.

16 Un parque ofrece visitas guiadas para grupos de 100 a 300 personas a la vez. Por cada persona adicional a las primeras 100, el costo de cada boleto se reduce en un centavo de los $4 que cuesta por persona. Encuentre el número de personas que produzca el costo total máximo para el grupo y también encuentre el número de personas que produzca el costo total mínimo para el grupo.

17 Encuentre el dominio de $(f \circ g)(x)$ si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x - 3}$.

18 Un fabricante produce 5 artículos por hora. El costo de producir y artículos está dado por $C = y^2 - 2y + 10$, donde C está en miles de dólares. Encuentre una función compuesta C en términos de t horas y luego utilícela para encontrar el costo mínimo.

4

Funciones polinomiales y racionales

Las funciones polinomiales son las más elementales en matemáticas porque están definidas sólo en términos de adición, sustracción y multiplicación. En aplicaciones, a veces es necesario trazar sus gráficas y hallar (o aproximar) sus ceros. En la primera parte de este capítulo discutimos resultados que son útiles para obtener esta información. A continuación llevamos nuestra atención a cocientes de funciones polinomiales; es decir, funciones racionales. La última sección, sobre variaciones, contiene aplicaciones de funciones polinomiales y racionales sencillas.

4.1 Funciones polinomiales de grado mayor que 2

Si f es una función polinomial de grado n con coeficientes reales, entonces

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_n \neq 0$. Los casos especiales que se ven en la tabla siguiente ya se discutieron antes.

Grado de f	Forma de $f(x)$	Gráfica de f (con intersección a_0 con el eje y)
0	$f(x) = a_0$	Una recta horizontal
1	$f(x) = a_1 x + a_0$	Una recta con pendiente a_1
2	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Una parábola con un eje vertical

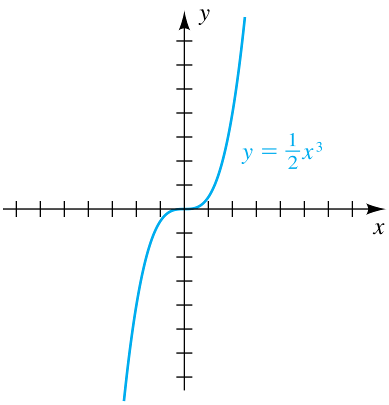
En esta sección estudiaremos gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2. Todas las funciones polinomiales son **funciones continuas**; es decir, sus gráficas se pueden trazar sin ninguna interrupción.

Si f tiene grado n y *todos los coeficientes excepto* a_n *son cero*, entonces

$$f(x) = ax^n \quad \text{para algunas} \quad a = a_n \neq 0.$$

En este caso, si $n = 1$, la gráfica de f es una recta que pasa por el origen. Si $n = 2$, la gráfica es una parábola con vértice en el origen. Dos ilustraciones con $n = 3$ (**polinomios cúbicos**) se dan en el ejemplo siguiente.

FIGURA 1



EJEMPLO 1 Trazar gráficas de $y = ax^3$

Trace la gráfica de f si

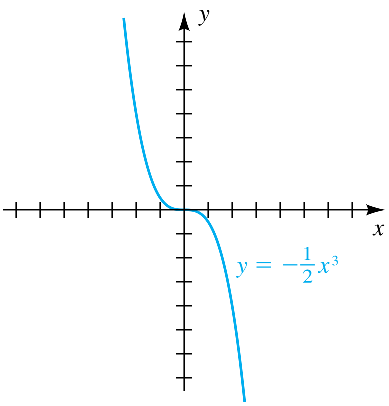
(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ **(b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

SOLUCIÓN

(a) La tabla siguiente contiene varios puntos sobre la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{16} \approx 0.06$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16} \approx 1.7$	4	$\frac{125}{16} \approx 7.8$

FIGURA 2



Como f es una función impar, la gráfica de f es simétrica con respecto al origen y por tanto puntos como $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ y $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ están también sobre la gráfica. La gráfica se traza en la figura 1.

(b) Si $y = -\frac{1}{2}x^3$, la gráfica se puede obtener del inciso (a) al multiplicar todas las coordenadas y por -1 (esto es, reflejando la gráfica del inciso (a) a través del eje x). Esto nos da el dibujo de la figura 2. ■

Si $f(x) = ax^n$ y n es entero positivo *impar*, entonces f es una función impar y la gráfica de f es simétrica con respecto al origen, como se ilustra en las figuras 1 y 2. Para $a > 0$, la gráfica es semejante en forma a la de la figura 1; sin embargo, n o a aumentan, la gráfica sube más rápidamente para $x > 1$. Para el comportamiento final, cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$; y cuando $x \to -\infty$, $y \to -\infty$. Si $a < 0$, reflejamos la gráfica a través del eje x, como en la figura 2.

Si $f(x) = ax^n$ y n es un entero positivo *par*, entonces f es una función par y la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y, como se ilustra en la figura 3 para el caso $a = 1$ y $n = 4$. Note que cuando aumenta el exponente, la gráfica se hace más plana en el origen. También sube más rápidamente para $x > 1$. Para el comportamiento final, como $x \to \pm\infty$, $y \to \infty$. Si $a < 0$, reflejamos la gráfica a través del eje x. También note que la gráfica *intersecta* el eje x en el origen, pero no lo *cruza* (cambia signo).

FIGURA 3

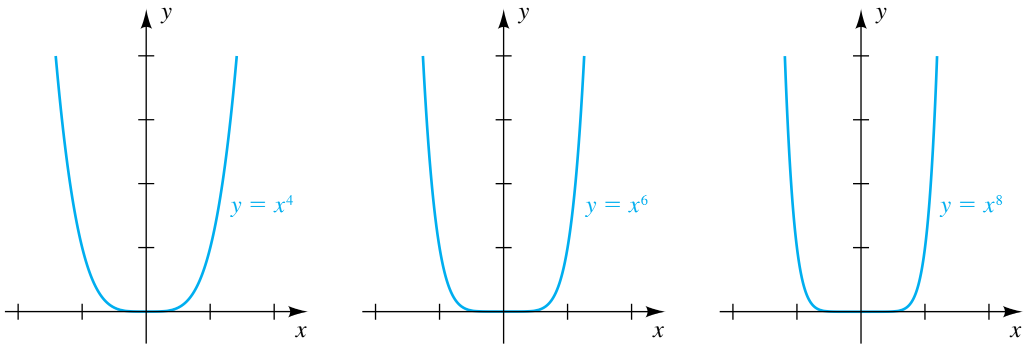
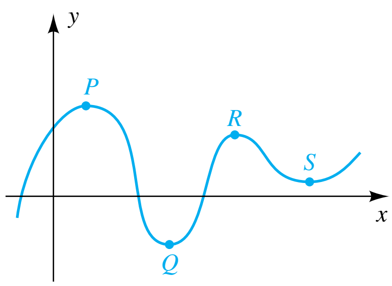


FIGURA 4

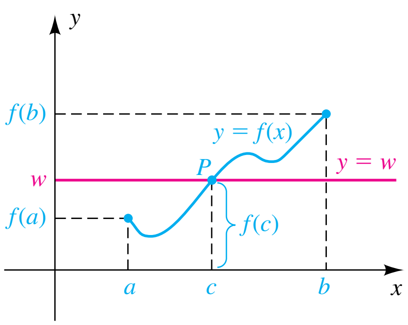


Un análisis completo de las gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2 requiere métodos que se usan en cálculo. A medida que aumenta el grado, las gráficas suelen hacerse más complicadas, aunque tienen un aspecto liso con varios puntos altos y puntos bajos, por ejemplo P, Q, R y S en la figura 4. Esos puntos a veces se denominan **puntos de inflexión** para la gráfica. Debe observarse que un polinomio de grado n tiene a lo más $n - 1$ puntos de inflexión. Cada valor de la función (coordenada y) correspondiente a un punto alto o bajo se denomina **extremo** de una función f. En un extremo, f cambia de una función creciente a una función decreciente o viceversa.

El teorema de valor intermedio especifica otra propiedad importante de las funciones polinomiales.

Teorema del valor intermedio para funciones polinomiales	Si f es una función polinomial y $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, entonces f toma cada valor entre $f(a)$ y $f(b)$ del intervalo $[a, b]$.

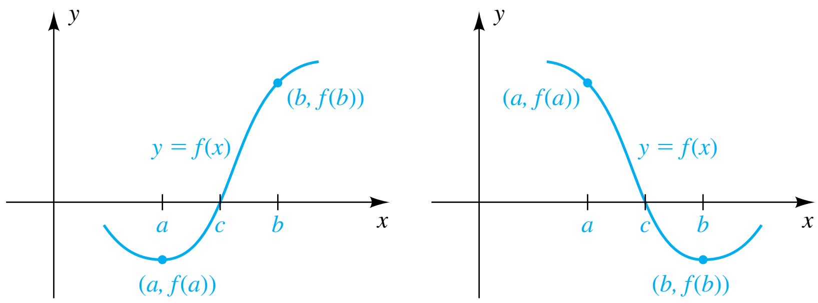
FIGURA 5



El teorema del valor intermedio para funciones polinomiales expresa que si w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, hay al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = w$. Si consideramos que la gráfica de f se extiende continuamente del punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$, como se ilustra en la figura 5, entonces para cualquier número w entre $f(a)$ y $f(b)$, la recta horizontal $y = w$ corta la gráfica en al menos un punto p. La abscisa c de P es un número tal que $f(c) = w$.

Una consecuencia del teorema de valor intermedio es que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios (uno positivo y uno negativo), hay al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = 0$; esto es, *f tiene un* **cero** *en c*. Así, si el punto $(a, f(a))$ se encuentra abajo del eje x y el punto $(b, f(b))$ está arriba del eje x, o viceversa, la gráfica cruza el eje x al menos una vez entre $x = a$ y $x = b$, como se ilustra en la figura 6.

FIGURA 6



EJEMPLO 2 **Uso del teorema del valor intermedio**

Demuestre que $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$ tiene un cero entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sustituyendo 1 y 2 por x nos da los siguientes valores de función:

$$f(1) = 1 + 2 - 6 + 2 - 3 = -4$$
$$f(2) = 32 + 32 - 48 + 4 - 3 = 17$$

Como $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos contrarios ($f(1) = -4 < 0$ y $f(2) = 17 > 0$), vemos que $f(c) = 0$ para al menos un número real c entre 1 y 2. ■

El ejemplo 2 ilustra un método para localizar ceros reales polinomiales. Con el uso de *aproximaciones sucesivas,* podemos aproximar cada cero a cualquier grado de precisión al localizarlo en intervalos cada vez menores.

Si c y d son *sucesivas* en ceros reales de $f(x)$; es decir, no hay otros ceros entre c y d, entonces $f(x)$ *no cambia signo en el intervalo* (c, d). Así, si escogemos cualquier número k tal que $c < k < d$ y si $f(k)$ es positiva, entonces $f(x)$ es positiva en todo (c, d). Del mismo, si $f(k)$ es negativa, entonces $f(x)$ es negativa en todo (c, d). Llamaremos a $f(k)$ un **valor de prueba** para $f(x)$ en el intervalo (c, d). También se pueden usar valores de prueba en intervalos infinitos de la forma $(-\infty, a)$ o (a, ∞), siempre que $f(x)$ no tenga ceros en estos intervalos. El uso de valores de prueba al graficar es semejante a la técnica empleada para desigualdades en la sección 2.7.

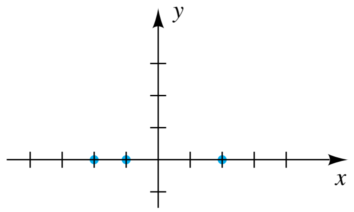
EJEMPLO 3 **Trazar la gráfica de una función polinomial de grado 3**

Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$. Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$, y luego trace la gráfica de f.

SOLUCIÓN Podemos factorizar $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 4x - 4 && \text{enunciado} \\ &= (x^3 + x^2) + (-4x - 4) && \text{agrupe términos} \\ &= x^2(x + 1) - 4(x + 1) && \text{factorice } x^2 \text{ y } -4 \\ &= (x^2 - 4)(x + 1) && \text{factorice } (x + 1) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x + 1) && \text{diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

FIGURA 7



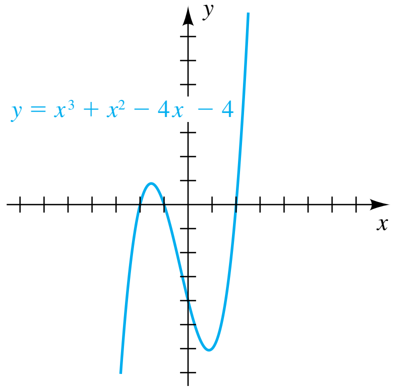
Vemos de la última ecuación que los ceros de $f(x)$ (los puntos de intersección de la gráfica con el eje x) son -2, -1 y 2. Los puntos correspondientes en la gráfica (vea figura 7) dividen el eje x en cuatro partes y consideramos los intervalos abiertos

$$(-\infty, -2), \quad (-2, -1), \quad (-1, 2), \quad (2, \infty).$$

Al igual que con nuestro trabajo con desigualdades en la sección 2.7, el signo de $f(x)$ en cada uno de estos intervalos se puede determinar usando una tabla de signos. La gráfica de f se encuentra arriba del eje x para valores de x tales que $f(x) > 0$ y abajo del eje x para toda x tal que $f(x) < 0$.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Posición de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

FIGURA 8



Al consultar el signo de $f(x)$ en la gráfica, concluimos que

$$f(x) > 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (-2, -1) \cup (2, \infty)$$

y

$$f(x) < 0 \quad \text{si } x \text{ esta en } (-\infty, -2) \cup (-1, 2).$$

El uso de esta información lleva al trazo de la figura 8. Para hallar los puntos de inflexión en la gráfica, sería necesario usar equipo computacional (como lo haremos en el ejemplo 6) o métodos desarrollados en cálculo. ■

La gráfica de toda función con polinomios de grado 3 tiene un aspecto semejante al de la figura 8 o tiene una versión invertida de esa gráfica si el coeficiente de x^3 es negativo, pero a veces la gráfica puede tener sólo un punto de intersección con el eje x o la forma puede esta elongada, como en las figuras 1 y 2.

EJEMPLO 4 **Trazar la gráfica de una función polinomial de grado 4**

Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$. Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$, y luego trace la gráfica de f.

SOLUCIÓN Para iniciar se factoriza $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 + 3x^2 && \text{enunciado} \\ &= x^2(x^2 - 4x + 3) && \text{factorice } x^2 \\ &= x^2(x - 1)(x - 3) && \text{factorice } x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

A continuación, construimos el diagrama de signos de la figura 9, donde las verticales indican los ceros 0, 1 y 3 de los factores. Como el factor x^2 es siempre positivo si $x \neq 0$, no tiene efecto en el signo del producto y por tanto se puede omitir del diagrama.

(continúa)

FIGURA 9

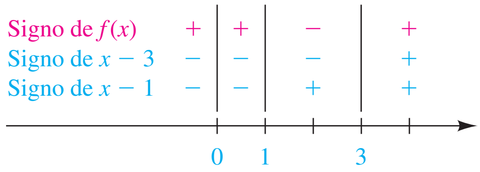
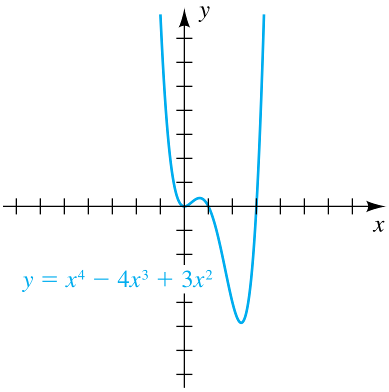


FIGURA 10



Al consultar el signo de $f(x)$ del diagrama, vemos que

$$f(x) > 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$$

y

$$f(x) < 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (1, 3).$$

Note que el signo de $f(x)$ no cambia en $x = 0$. El uso de estos datos lleva al trazo de la figura 10. ■

En el siguiente ejemplo construimos una gráfica de un polinomio conociendo sólo su signo.

EJEMPLO 5 **Trazar la gráfica de un polinomio conociendo su signo**

Dado el diagrama de signos de la figura 11, trace una posible gráfica del polinomio f.

FIGURA 11

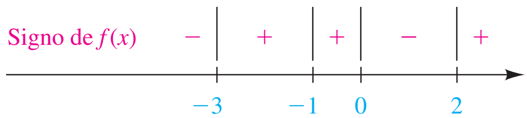
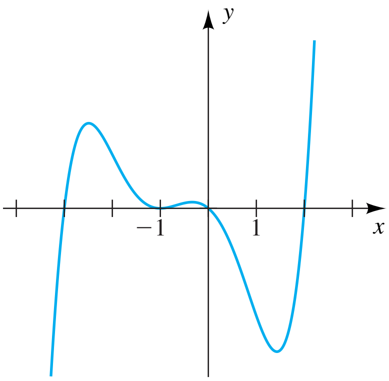


FIGURA 12



SOLUCIÓN Como el signo de $f(x)$ es *negativo* en el intervalo $(-\infty, -3)$, la gráfica de f debe estar *abajo* del eje x, como se ve en la figura 12. En el intervalo $(-3, -1)$, el signo de $f(x)$ es *positivo*, de modo que la gráfica de f está *arriba* del eje x.

El signo de $f(x)$ también es *positivo* en el siguiente intervalo, $(-1, 0)$. Por lo tanto, la gráfica de f debe tocar el eje x en el punto de intersección -1 y luego permanecer *arriba* del eje x. (La gráfica de f es *tangente* al eje x en $x = -1$.)

En el intervalo $(0, 2)$, el signo de $f(x)$ es *negativo*, de modo que la gráfica de f está *abajo* del eje x. Por último, el signo de $f(x)$ es *positivo* en el intervalo $(2, \infty)$ y la gráfica de f está *arriba* del eje x. ■

En el último ejemplo usamos la función

$$f(x) = (x + 3)(x + 1)^2(x)(x - 2).$$

Note la forma en que la gráfica de f se relaciona con las soluciones de las siguientes desigualdades.

Desigualdad	Solución	Posición de la gráfica en relación con el eje x
(1) $f(x) > 0$	$(-3, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$	Arriba
(2) $f(x) \geq 0$	$[-3, 0] \cup [2, \infty)$	Arriba o en él
(3) $f(x) < 0$	$(-\infty, -3) \cup (0, 2)$	Abajo
(4) $f(x) \leq 0$	$(-\infty, -3] \cup \{-1\} \cup [0, 2]$	Abajo o en él

Note que todo número real debe estar en la solución de la desigualdad (1) o la desigualdad (4); lo mismo puede decirse de las desigualdades (2) y (3).

En el siguiente ejemplo usamos una calculadora de gráficas para estimar coordenadas de puntos importantes en una gráfica.

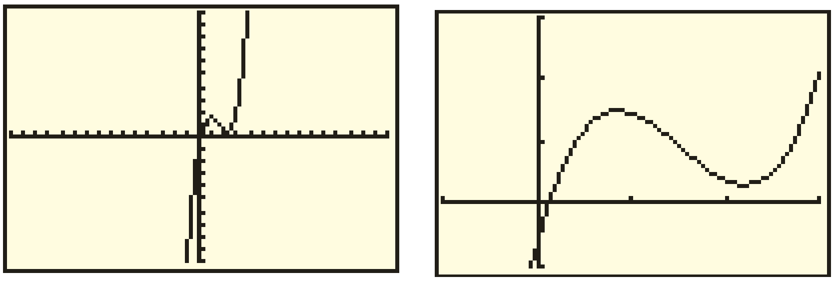
EJEMPLO 6 **Estimar ceros y puntos de inflexión**

(a) Estime los ceros reales de $f(x) = x^3 - 4.6x^2 + 5.72x - 0.656$ a tres lugares decimales.
(b) Estime las coordenadas de los puntos de inflexión en la gráfica.

SOLUCIÓN

(a) Asignamos $f(x)$ a Y_1 y usamos una pantalla estándar para obtener un trazo semejante al de la figura 13(a). Como todas las raíces reales parecen estar entre 0 y 3, hagamos de nuevo la gráfica usando la pantalla $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$. Esto nos da una pantalla semejante a la de la figura 13(b), que muestra que hay sólo un punto de intersección con el eje x y por tanto una sola raíz real. Usando un cero o raíz, estimamos el cero real como 0.127.

FIGURA 13
(a) $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$ **(b)** $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$



(b) Con el uso de una característica máxima, estimamos que el punto alto es (0.867,1.497) y con una característica mínima estimamos que el punto bajo es (2.200, 0.312). ■

En la sección 2.7 resolvimos desigualdades semejantes a la del siguiente ejemplo, pero nos apoyamos en gran medida en el hecho de que podíamos factorizar la expresión de algún modo. Ahora usamos una calculadora de gráficas para resolver una desigualdad que contiene una expresión (un polinomio cúbico) que no se factoriza fácilmente.

EJEMPLO 7 **Resolver gráficamente una desigualdad**

Estime las soluciones de la desigualdad

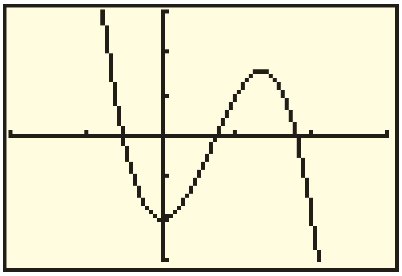
$$6x^2 - 3x^3 < 2.$$

SOLUCIÓN Restemos 2 de ambos lados y consideremos la desigualdad equivalente

$$6x^2 - 3x^3 - 2 < 0.$$

(continúa)

FIGURA 14
$[-2, 3]$ por $[-3, 3]$



Asignamos $6x^2 - 3x^3 - 2$ y Y_1 y usamos la pantalla $[-2, 3]$ por $[-3, 3]$ para obtener una imagen semejante a la figura 14. Vemos que hay tres puntos de intersección con el eje x. Si los denotamos por x_1, x_2 y x_3 (con $x_1 < x_2 < x_3$), entonces las soluciones a la desigualdad están dadas por

$$(x_1, x_2) \cup (x_3, \infty),$$

porque estos son los intervalos donde Y_1 es menor que 0 (la gráfica está abajo del eje x). Usando una característica cero o raíz para cada punto de intersección con el eje x, encontramos que

$$x_1 \approx -0.515, \qquad x_2 \approx 0.722, \qquad x_3 \approx 1.793. \qquad \blacksquare$$

4.1 Ejercicios

Ejer. 1–4: Trace la gráfica de f para el valor indicado de c o a.

1 $f(x) = 2x^3 + c$

(a) $c = 3$ (b) $c = -3$

2 $f(x) = -2x^3 + c$

(a) $c = -2$ (b) $c = 2$

3 $f(x) = ax^3 + 2$

(a) $a = 2$ (b) $a = -\frac{1}{3}$

4 $f(x) = ax^3 - 3$

(a) $a = -2$ (b) $a = \frac{1}{8}$

Ejer. 5–10: Use el teorema del valor intermedio para demostrar que f tiene un cero entre a y b.

5 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2;$ $a = 3,$ $b = 4$

6 $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3;$ $a = -3,$ $b = -2$

7 $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x + 1;$ $a = 2,$ $b = 3$

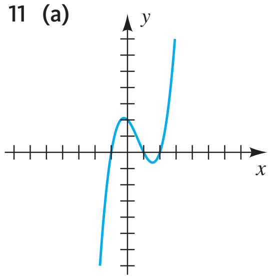
8 $f(x) = 2x^4 + 3x - 2;$ $a = 0,$ $b = 1$

9 $f(x) = x^5 + x^3 - 3x + 1;$ $a = -2,$ $b = -1$

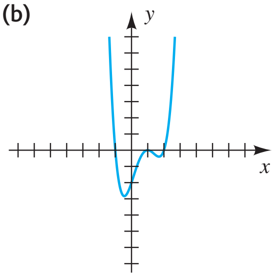
10 $f(x) = x^5 - 3x^4 - 9x - 6;$ $a = 3,$ $b = 4$

Ejer. 11–12: Relacione cada gráfica con una ecuación.

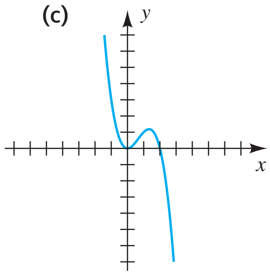
11 (a)



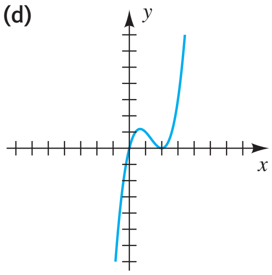
(b)



(c)



(d)



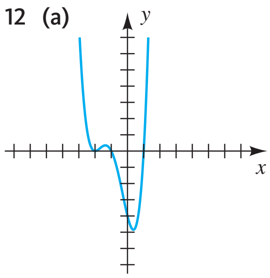
(A) $f(x) = x(x - 2)^2$

(B) $f(x) = -x^2(x - 2)$

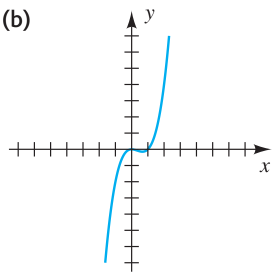
(C) $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$

(D) $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2(x - 2)$

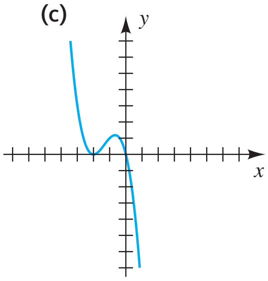
12 (a)



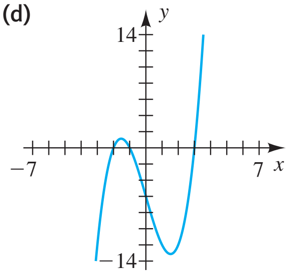
(b)



(c)



(d)



(A) $f(x) = x^2(x - 1)$

(B) $f(x) = -x(x + 2)^2$

(C) $f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 3)$

(D) $f(x) = (x + 2)^2(x + 1)(x - 1)$

Ejer. 13–14: Utilice la notación de flecha para describir el comportamiento final de la función. No dibuje las gráficas.

13 **(a)** $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6$

(b) $f(x) = -3x^5 - x^3 - 8$

(c) $f(x) = 2x^6 + 5x^2 - 3x$

(d) $f(x) = -2x^6 + x^2 - 4$

14 **(a)** $f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 5$

(b) $f(x) = -3x^4 - x^3 + 9$

(c) $f(x) = 2x^5 + 2x^2 - 7x$

(d) $f(x) = -2x^5 + 3x^2 - 6$

Ejer. 15–30: Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$, y trace la gráfica de f.

15 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2$

16 $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 - 3$

17 $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + 1$

18 $f(x) = x^5 + 1$

19 $f(x) = x^4 - 4x^2$

20 $f(x) = 9x - x^3$

21 $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$

22 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$

23 $f(x) = \frac{1}{6}(x + 2)(x - 3)(x - 4)$

24 $f(x) = -\frac{1}{8}(x + 4)(x - 2)(x - 6)$

25 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

26 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

27 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

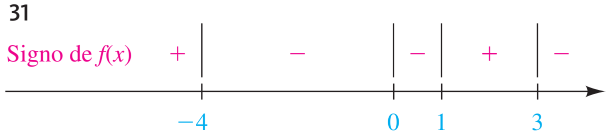
28 $f(x) = -x^4 + 12x^2 - 27$

29 $f(x) = x^2(x + 2)(x - 1)^2(x - 2)$

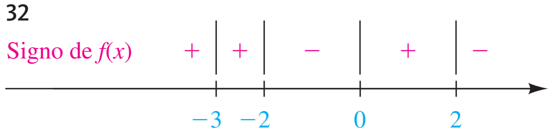
30 $f(x) = x^3(x + 1)^2(x - 2)(x - 4)$

Ejer. 31–32: Trace la gráfica de una polinomial dado el diagrama de signos.

31



32



33 **(a)** Trace una gráfica de

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c),$$

donde $a < 0 < b < c$.

(b) ¿Cuál es la intersección con el eje y?

(c) ¿Cuál es la solución a $f(x) < 0$?

(d) ¿Cuál es la solución a $f(x) \geq 0$?

34 **(a)** Trace la gráfica de

$$f(x) = (x - a)^2(x - b)(x - c),$$

donde $a < b < 0 < c$.

(b) ¿Cuál es la intersección con el eje y?

(c) ¿Cuál es la solución a $f(x) > 0$?

(d) ¿Cuál es la solución a $f(x) \leq 0$?

35 Sea $f(x)$ una polinomial tal que el coeficiente de toda potencia impar de x es 0. Demuestre que f es una función par.

36 Sea $f(x)$ un polinomio tal que el coeficiente de toda potencia par de x es 0. Demuestre que f es una función impar.

37 Si $f(x) = 3x^3 - kx^2 + x - 5k$, encuentre un número k tal que la gráfica de f contenga el punto $(-1, 4)$.

38 Si $f(x) = kx^3 + x^2 - kx + 2$, encuentre un número k tal que la gráfica de f contenga el punto $(2, 12)$.

39 Si un cero de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 16k$ es 2, encuentre otros dos ceros.

40 Si un cero de $f(x) = x^3 - 3x^2 - kx + 12$ is -2, encuentre otros dos ceros.

41 **Un polinomio de Legendre** El polinomio de tercer grado de Legendre $P(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ se presenta en la solución de problemas de transferencia de calor en física e ingeniería. Encuentre todos los valores de x tales que $P(x) > 0$ y toda x tal que $P(x) < 0$, y trace la gráfica de P.

42 Un polinomio de Chebyshev El polinomio de cuarto grado de Chebyshev $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ se presenta en estudios de estadística. Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$. (*Sugerencia:* sea $z = x^2$ y use la fórmula cuadrática.)

43 Construcción de una caja De una pieza rectangular de cartón que tiene dimensiones de 20 pulgadas $\times$ 30 pulgadas se va a fabricar una caja abierta al cortar cuadrados idénticos de área x^2 de cada esquina y voltear hacia arriba los lados (vea ejercicio 65 de la sección 3.4).

(a) Demuestre que el volumen de la caja está dado por la función $V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$.

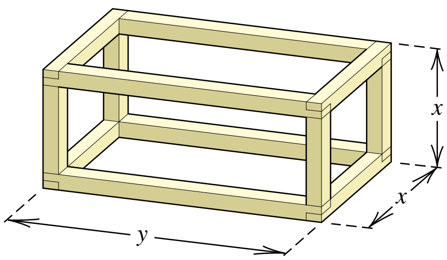
(b) Encuentre todos los valores positivos de x tales que $V(x) > 0$ y trace la gráfica de V para $x > 0$.

44 Construcción de una reja de madera El bastidor para una reja de embarque se va a construir con 24 pies de madera de 2 $\times$ 2 (vea la figura).

(a) Si la reja debe tener extremos cuadrados de x pies de lado, exprese el volumen exterior V de la reja como función de x (no considere el grosor de la madera).

(b) Trace la gráfica de V para $x > 0$.

EJERCICIO 44



45 Determinación de temperaturas Un meteorólogo determina que la temperatura T (en °F) para cierto periodo de 24 horas en invierno estuvo dada por la fórmula $T = \frac{1}{20}t(t - 12)(t - 24)$ para $0 \le t \le 24$, donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6:00 a.m.

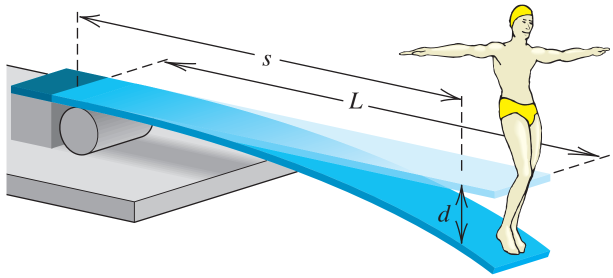
(a) ¿Cuándo fue $T > 0$ y cuándo fue $T < 0$?

(b) Trace la gráfica de T

(c) Demuestre que la temperatura fue de 32°F en algún momento entre las 12 del mediodía y la 1:00 p.m. (*Sugerencia:* use el teorema del valor intermedio.)

46 Flexión de trampolines Un clavadista está de pie en el extremo de un trampolín antes de lanzarse al agua. La flexión d del trampolín en una posición a s pies del extremo estacionario está dada por $d = cs^2(3L - s)$ para $0 \le s \le L$, donde L es la longitud de la tabla y c es una constante positiva que depende del peso del clavadista y de las propiedades físicas de la tabla (vea la figura). Suponga que la tabla mide 10 pies de largo.

EJERCICIO 46



(a) Si la flexión en el extremo de la tabla es 1 pie, encuentre c.

(b) Demuestre que la flexión es $\frac{1}{2}$ pie en algún punto entre $s = 6.5$ y $s = 6.6$.

47 Población de venados Un rebaño de 100 venados se introduce en una pequeña isla. Al principio el rebaño aumenta rápidamente, pero al final los recursos se consumen y la población disminuye. Suponga que el número $N(t)$ de venados después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$, donde $t > 0$.

(a) Determine los valores de t para los cuales $N(t) > 0$ y trace la gráfica de N.

(b) ¿La población se extingue? Si es así, ¿cuándo?

48 Población de venados Consulte el ejercicio 47. Se puede demostrar por medio del cálculo que la tasa R (en venados por año) a la que cambia la población de venados, en el tiempo t, está dada por $R = -4t^3 + 42t$.

(a) ¿Cuándo deja de crecer la población?

(b) Determine los valores positivos de t para los cuales $R > 0$.

49 **(a)** Construya una tabla que contenga los valores de los polinomios de cuarto grado

$$f(x) = 2x^4,$$
$$g(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1,$$
$$h(x) = 2x^4 + 5x^2 - 1,$$

y

$$k(x) = 2x^4 - x^3 + 2x,$$

cuando $x = \pm 20, \pm 40$, y ± 60.

(b) Cuando $|x|$ se hace grande, ¿cómo son los valores para cada función comparables entre sí?

(c) ¿Cuál término tiene la mayor influencia en el valor de cada función cuando $|x|$ es grande?

50 (a) Grafique los polinomios cúbicos

$$f(x) = -3x^3,$$
$$g(x) = -3x^3 - x^2 + 1,$$
$$h(x) = -3x^3 + x^2 - 1,$$

y

$$k(x) = -3x^3 - 2x^2 + 2x$$

en el mismo plano de coordenadas usando cada uno de las siguientes pantallas:

(1) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(2) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(3) $[-50, 50, 10]$ por $[-5000, 5000, 1000]$
(4) $[-100, 100, 10]$ por $[-5 \times 10^5, 5 \times 10^5, 10^5]$

(b) Cuando la pantalla aumenta de tamaño, ¿cómo son las gráficas de las cuatro funciones comparadas entre sí?

(c) ¿Cuál término tiene la mayor influencia sobre el valor de cada función cuando $|x|$ es grande?

51 (a) Grafique cada uno de los siguientes polinomios cúbicos f en la pantalla $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$.

(1) $f(x) = x^3 - x + 1$
(2) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x - 1$
(3) $f(x) = 0.1x^3 - 1$
(4) $f(x) = -x^3 + 4x + 2$

(b) Discuta la forma de la gráfica de f cuando $|x|$ se hace grande.

(c) Haga una generalización acerca del comportamiento final de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

52 (a) Grafique cada una de las siguientes polinomiales f de cuarto grado en la pantalla $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$.

(1) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x - 3$
(2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$
(3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - x + 1$
(4) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{7}{2}x + 3$

(b) Discuta la forma de la gráfica de f cuando $|x|$ se hace grande.

(c) Haga una generalización acerca del comportamiento final de la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Ejer. 53–56: Grafique f y estime sus ceros.

53 $f(x) = x^3 + 0.2x^2 - 2.6x + 1.1$

54 $f(x) = -x^4 + 4x - 1$

55 $f(x) = x^3 - 3x + 1$

56 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

Ejer. 57–60: Grafique f y estime todos los valores de x tales que $f(x) > k$.

57 $f(x) = x^3 + 5x - 2;$ $k = 1$

58 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 5;$ $k = 3$

59 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 10x - 26;$ $k = -1$

60 $f(x) = x^5 - 2x^2 + 2;$ $k = -2$

Ejer. 61–62: Grafique f y g sobre el mismo plano de coordenadas y estime los puntos de intersección.

61 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1.5x + 2.8;$
$g(x) = -x^3 - 1.7x^2 + 2x + 2.5$

62 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4;$
$g(x) = x^4 - 3x^3 - 0.25x^2 + 3.75x$

63 **Beneficiarios de servicio médico** La función f dada por

$$f(x) = -0.000\,015z^3 - 0.005z^2 + 0.75z + 23.5,$$

donde $z = x - 1973$, aproxima el número total de beneficiarios de servicio médico en millones, de $x = 1973$ a $x = 2005$. Hubo 23,545,363 beneficiarios en 1973 y 42,394,926 en 2005.

(a) Grafique f, y discuta la forma en que ha cambiado el número de beneficiarios de servicio médico en este periodo.

(b) Invente un modelo lineal semejante a f que aproxime el número de beneficiarios ¿Cuál modelo es más realista?

64 **Participantes Con Ventaja** La función f dada por

$$f(x) = -0.11x^4 - 46x^3 + 4000x^2 - 76{,}000x + 760{,}000$$

aproxima el número total de niños en edad preescolar que participan en el programa gubernamental Con Ventaja entre 1966 y 2005, donde $x = 0$ corresponde al año 1966.

(a) Grafique f en el intervalo [0, 40]. Discuta cómo ha cambiado el número de participantes entre 1966 y 2005.

(b) Aproxime el número de niños inscritos en 1986.

(c) Estime gráficamente los años en los que hubo 500,000 niños inscritos en Con Ventaja.

4.2 Propiedades de la división

En esta sección empleamos $f(x)$, $g(x)$, etcétera, para denotar polinomios en x. Si $g(x)$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(x)$ es **divisible** entre $g(x)$. Por ejemplo, $x^4 - 16$ es divisible entre $x^2 - 4$, entre $x^2 + 4$, entre $x + 2$ y entre $x - 2$.

El polinomio $x^4 - 16$ no es divisible entre $x^2 + 3x + 1$, pero podemos usar el proceso llamado **división larga** para hallar un *cociente* y un *residuo*, como en la siguiente ilustración, donde hemos insertado términos con coeficientes cero.

ILUSTRACIÓN **División larga de polinomios**

$$
\begin{array}{rll}
 & \overbrace{x^2 - 3x + 8}^{\text{cociente}} & \\
x^2 + 3x + 1 \big) & x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 16 & \\
 & \underline{x^4 + 3x^3 + x^2} & x^2(x^2 + 3x + 1) \\
 & -3x^3 - x^2 & \text{reste} \\
 & \underline{-3x^3 - 9x^2 - 3x} & -3x(x^2 + 3x + 1) \\
 & 8x^2 + 3x - 16 & \text{reste} \\
 & \underline{8x^2 + 24x + 8} & 8(x^2 + 3x + 1) \\
 & \underbrace{-21x - 24}_{\text{residuo}} & \text{reste}
\end{array}
$$

El proceso de división larga termina cuando llegamos a un polinomio (el residuo) que es 0 o tiene un menor grado que el divisor. El resultado de la división larga de la ilustración precedente se puede escribir

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 + 3x + 1} = (x^2 - 3x + 8) + \left(\frac{-21x - 24}{x^2 + 3x + 1}\right).$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $x^2 + 3x + 1$, obtenemos

$$x^4 - 16 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24).$$

Este ejemplo ilustra el siguiente teorema.

Algoritmo de división para polinomios

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo** en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.

Un útil caso especial del algoritmo de división para polinomios se presenta si $f(x)$ se divide entre $x - c$, donde c es un número real. Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

para algún cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ es 0. Si $x - c$ no es un factor de $f(x)$, entonces el grado del residuo $r(x)$ es menor que el grado de $x - c$ y por tanto $r(x)$ debe tener grado 0. Esto significa que el residuo es un número diferente de cero. En consecuencia, para toda $x - c$ tenemos

$$f(x) = (x - c)q(x) + d,$$

donde el residuo d es un número real (posiblemente $d = 0$). Si sustituimos c por x, obtenemos

$$\begin{aligned} f(c) &= (c - c)q(c) + d \\ &= 0 \cdot q(c) + d \\ &= 0 + d = d. \end{aligned}$$

Esto demuestra el siguiente teorema.

Teorema del residuo Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

EJEMPLO 1 **Uso del teorema del residuo**

Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$, use el teorema del residuo para hallar $f(2)$

SOLUCIÓN Según el teorema del residuo, $f(2)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 2$. Por división larga,

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x - 1 \\ x - 2 & x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ & x^3 - 2x^2 \quad \quad \quad x^2(x-2) \\ & -x^2 + x \quad \quad \text{reste} \\ & -x^2 + 2x \quad \quad -x(x-2) \\ & -x + 5 \quad \text{reste} \\ & -x + 2 \quad (-1)(x-2) \\ & 3 \quad \text{reste} \end{array}$$

En consecuencia, $f(2) = 3$. Podemos comprobar este hecho por sustitución directa:

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 + 5 = 3$$

■

Usaremos el teorema del residuo para demostrar el siguiente resultado importante.

Teorema del factor Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Por el teorema del residuo,

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$$

para algún cociente $q(x)$.

Si $f(c) = 0$, entonces $f(x) = (x - c)q(x)$; esto es, $x - c$ es un factor de $f(x)$. Recíprocamente, si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces el residuo de la división de $f(x)$ entre $x - c$ debe ser 0 y, por tanto, por el teorema del residuo, $f(c) = 0$.

■

El teorema del factor es útil para hallar factores de polinomios, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 **Uso del teorema del factor**

Demuestre que $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

SOLUCIÓN Como $f(2) = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$, vemos del teorema del factor que $x - 2$ es un factor de $f(x)$. Otro método de solución sería dividir $f(x)$ entre $x - 2$ y demostrar que el residuo es 0. El cociente de la división sería otro factor de $f(x)$. ■

EJEMPLO 3 **Hallar un polinomio con ceros prescritos**

Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga ceros 2, -1 y 3.

SOLUCIÓN Por el teorema del factor, $f(x)$ tiene factores $x - 2$, $x + 1$, y $x - 3$. Por tanto,

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3),$$

donde cualquier valor diferente de cero puede ser asignado a a. Si hacemos $a = 1$ y multiplicamos, obtenemos

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6. \quad ■$$

Para aplicar el teorema del residuo es necesario dividir un polinomio $f(x)$ entre $x - c$. El método de **división sintética** se puede usar para simplificar este trabajo. Las directrices siguientes expresan cómo hacerlo. El método puede justificarse por medio de una cuidadosa (y prolongada) comparación con el método de división larga.

Directrices para división sintética de $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ entre $x - c$

1 Empiece con lo siguiente, escribiendo ceros para cualesquiera coeficientes faltantes del polinomio dado.

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

2 Multiplique a_n por c y ponga el producto ca_n bajo a_{n-1}, como lo indica la flecha en el diagrama siguiente. (Esta flecha, y otras, se usa sólo para aclarar estas directrices y no aparecerá en divisiones sintéticas *específicas.*) A continuación, encuentre la suma $b_1 = a_{n-1} + ca_n$ y póngala bajo la línea como se indica.

$$\begin{array}{c|cccccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & & a_1 & a_0 \\ & & ca_n & cb_1 & cb_2 & \ldots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & r \end{array}$$

3 Multiplique b_1 por c y ponga el producto cb_1 bajo a_{n-2}, como lo indica la segunda flecha. Continuando, en seguida hallamos la suma $b_2 = a_{n-2} + cb_1$ y póngala bajo la línea como se indica.

4 Continúe este proceso, como lo indican las flechas, hasta obtener la suma final $r = a_0 + cb_{n-1}$. Los números

(continúa)

$$a_n, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{n-2}, \quad b_{n-1}$$

son los coeficientes del cociente $q(x)$; esto es,

$$q(x) = a_n x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

y r es el residuo.

La división sintética no sustituye a una división larga; simplemente es un método más rápido y es aplicable sólo cuando el divisor es de la forma $x - c$.

Los ejemplos siguientes ilustran división sintética para algunos casos especiales.

EJEMPLO 4 **Uso de división sintética para hallar un cociente y un residuo**

Use división sintética para hallar el cociente $q(x)$ y el residuo r si el polinomio $2x^4 + 5x^3 - 2x - 8$ se divide entre $x + 3$.

SOLUCIÓN Como el divisor es $x + 3 = x - (-3)$, el valor de c en la expresión $x - c$ es -3. En consecuencia, la división sintética toma esta forma:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ & & -6 & 3 & -9 & 33 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & -11 & 25 \end{array}$$

coeficientes del cociente — residuo

Como hemos indicado, los primeros cuatro números del tercer renglón son los coeficientes del cociente $q(x)$, y el último número es el residuo r. Así,

$$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 11 \quad \text{y} \quad r = 25.$$

Se puede usar división sintética para hallar valores de funciones polinomiales, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 **Uso de división sintética para hallar valores de un polinomio**

Si $f(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1$, use división sintética para hallar $f(4)$.

SOLUCIÓN Por el teorema del residuo, $f(4)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 4$. Dividiendo sintéticamente, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 4 & 3 & 0 & -38 & 5 & 0 & -1 \\ & & 12 & 48 & 40 & 180 & 720 \\ \hline & 3 & 12 & 10 & 45 & 180 & 719 \end{array}$$

coeficientes del cociente — residuo

En consecuencia, $f(4) = 719$.

Se puede usar división sintética como ayuda para hallar ceros de polinomios. Por el método ilustrado en el ejemplo precedente, $f(c) = 0$ si y sólo si el residuo en la división sintética entre $x - c$ es 0.

EJEMPLO 6 **Uso de división sintética para hallar ceros de un polinomio**

Demuestre que -11 es un cero del polinomio

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 29x + 44.$$

SOLUCIÓN Dividiendo sintéticamente entre $x - (-11) = x + 11$ da

$$\begin{array}{r|rrrr} -11 & 1 & 8 & -29 & 44 \\ & & -11 & 33 & -44 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

$1 \quad -3 \quad 4$: coeficientes del cociente; 0: residuo

Por lo tanto, $f(-11) = 0$, y -11 es un cero de f. ■

El ejemplo 6 muestra que el número -11 es una solución de la ecuación $x^3 + 8x^2 - 29x + 44 = 0$. En la sección 4.4 usaremos división sintética para hallar soluciones racionales de ecuaciones.

En esta etapa el lector debe reconocer que los siguientes tres enunciados son equivalentes para una función polinomial f cuya gráfica es igual que la de la ecuación $y = f(x)$.

enunciados equivalentes para $f(a) = b$

(1) El punto (a, b) está en la gráfica de f.
(2) El valor de f en $x = a$ es igual a b; esto es, $f(a) = b$.
(3) Si $f(x)$ se divide entre $x - a$, entonces el residuo es b.

Además, si b es igual a 0, entonces los siguientes cuatro enunciados también son equivalentes.

enunciados equivalentes adicionales para $f(a) = 0$

(1) El número a es un cero de la función f.
(2) El punto $(a, 0)$ está en la gráfica de f; esto es, a es un punto de intersección con el eje x.
(3) El número a es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.
(4) El binomio $x - a$ es un factor del polinomio $f(x)$.

El estudiante debe familiarizarse con estos enunciados hasta el punto en que si sabe que uno de ellos es verdadero, pueda fácilmente recordar y aplicar cualquier enunciado equivalente apropiado.

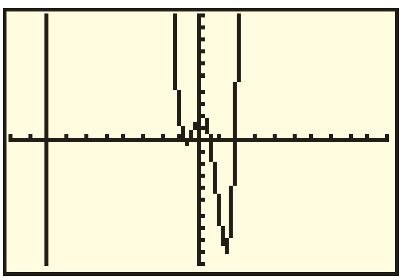
EJEMPLO 7 **Relacionar una gráfica con una división**

Use la gráfica de

$$f(x) = 0.5x^5 + 3.5x^4 - 5.5x^3 - 7.5x^2 + 2x + 2$$

para aproximar (a dos lugares decimales) el residuo si $f(x)$ se divide entre $x + 1.37$.

FIGURA 1
$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$



SOLUCIÓN Asignamos $f(x)$ a Y_1 y graficamos f con una pantalla estándar, como se ve en la figura 1. De la discusión precedente sabemos que para hallar un residuo b mediante una gráfica, debemos hallar el punto (a, b) que corresponde a dividir $f(x)$ entre $x - a$. En este caso $a = -1.37$ y el punto sobre la gráfica -1.37 con coordenada x es aproximadamente $(-1.37, 9.24)$. En consecuencia, el residuo b es aproximadamente 9.24.

La forma más fácil de hallar el residuo usando una calculadora de gráficas es simplemente hallar el valor de función Y_1 cuando $x = -1.37$. Sin embargo, el propósito de este ejemplo era señalar la relación gráfica con el proceso de división. ■

4.2 Ejercicios

Ejer. 1–8: Encuentre el cociente y residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

1 $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 12$; $p(x) = x^2 - 3$

2 $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$; $p(x) = x^2 + 1$

3 $f(x) = 3x^3 + 2x - 4$; $p(x) = 2x^2 + 1$

4 $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4x - 8$; $p(x) = 2x^2 + x$

5 $f(x) = 7x + 2$; $p(x) = 2x^2 - x - 4$

6 $f(x) = -5x^2 + 3$; $p(x) = x^3 - 3x + 9$

7 $f(x) = 10x + 4$; $p(x) = 2x - 5$

8 $f(x) = 7x^2 + 3x - 10$; $p(x) = x^2 - x + 10$

Ejer. 9–12: Use el teorema del residuo para hallar $f(c)$.

9 $f(x) = 3x^3 - x^2 - 4$; $c = 2$

10 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$; $c = 3$

11 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x - 8$; $c = -3$

12 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 12$; $c = -2$

Ejer. 13–18: Use el teorema del factor para demostrar que $x - c$ es un factor de $f(x)$.

13 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 12$; $c = -3$

14 $f(x) = x^3 + x^2 - 11x + 10$; $c = 2$

15 $f(x) = x^{12} - 4096$; $c = -2$

16 $f(x) = x^5 + 1024$; $c = -4$

17 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 36$; $c = 3$

18 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 2$; $c = 2$

Ejer. 19–24: Encuentre un polinomio $f(x)$ con coeficiente principal 1 y que tenga el grado y ceros dados.

19 grado 3; ceros $-2, 0, 5$

20 grado 3; ceros $\pm 2, 3$

21 grado 3; ceros $\pm 3, 1$

22 grado 3; ceros $-3, 0, 4$

23 grado 4; ceros $-2, \pm 1, 4$

24 grado 4; ceros $-3, 0, 1, 5$

Ejer. 25–32: Use división sintética para hallar el cociente y residuo si el primer polinomio se divide entre el segundo.

25 $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; $x - 2$

26 $3x^3 + 10x^2 - 7x + 8$; $x + 4$

27 $x^3 - 8x - 5$; $x + 3$

28 $5x^3 - 18x^2 - 15$; $x - 4$

29 $3x^5 + 6x^2 + 7$; $x + 2$

30 $-2x^4 + 10x - 3$; $x - 3$

31 $4x^4 - 5x^2 + 1$; $x - \frac{1}{2}$

32 $9x^3 - 6x^2 + 3x - 4$; $x - \frac{1}{3}$

Ejer. 33–40: Use división sintética para hallar $f(c)$.

33 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 4$; $c = 3$

34 $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x$; $c = -2$

35 $f(x) = 0.3x^3 + 0.4x$; $c = -0.2$

36 $f(x) = 0.1x^3 + 0.5x$ $c = 0.3$

37 $f(x) = 27x^5 + 2x^2 + 1$ $c = \frac{1}{3}$

38 $f(x) = 8x^5 - 3x^2 + 7$; $c = \frac{1}{2}$

39 $f(x) = x^2 + 3x - 5$; $c = 2 + \sqrt{3}$

40 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8$; $c = 1 + \sqrt{2}$

Ejer. 41–44: Use división sintética para demostrar que c es un cero de $f(x)$.

41 $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 10x + 4$; $c = -2$

42 $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 8x - 3$; $c = 3$

43 $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 3$; $c = \frac{1}{2}$

44 $f(x) = 27x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 6x + 1$; $c = -\frac{1}{3}$

Ejer. 45–46: Encuentre todos los valores de k tales que $f(x)$ sea divisible entre el polinomio lineal dado.

45 $f(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 3k^2 + 11$; $x + 2$

46 $f(x) = k^2x^3 - 4kx + 3$; $x - 1$

Ejer. 47–48: Demuestre que $x - c$ no es un factor de $f(x)$ para algún número real c.

47 $f(x) = 3x^4 + x^2 + 5$

48 $f(x) = -x^4 - 3x^2 - 2$

49 Encuentre el residuo si el polinomio

$$3x^{100} + 5x^{85} - 4x^{38} + 2x^{17} - 6$$

se divide entre $x + 1$.

Ejer. 50–52: Use el teorema del factor para verificar el enunciado.

50 $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo n.

51 $x + y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo par n.

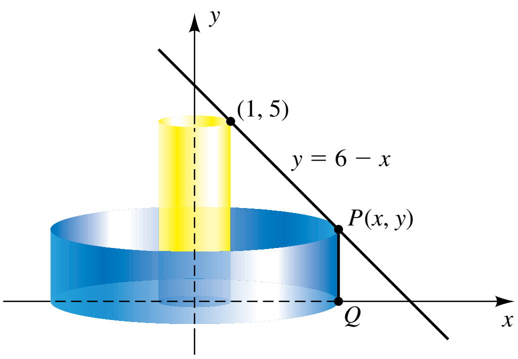
52 $x + y$ es un factor de $x^n + y^n$ para todo entero positivo impar n.

53 Sea $P(x, y)$ un punto en el primer cuadrante en $y = 6 - x$, y considere el segmento de recta vertical PQ que se muestra en la figura.

(a) Si PQ se hace girar alrededor del eje y, determine el volumen V del cilindro resultante.

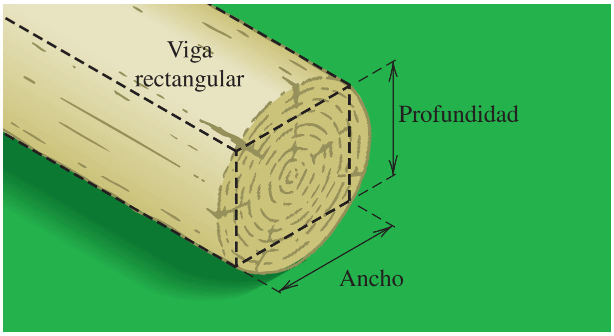
(b) ¿Para qué punto $P(x, y)$ con $x \neq 1$ el volumen V del inciso (a) es igual que el volumen del cilindro de radio 1 y altura 5 mostrado en la figura?

EJERCICIO 53



54 **Resistencia de una viga** La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto de su ancho por el cuadrado de la profundidad de una sección transversal (vea la figura). Una viga de 1.5 pies de ancho se ha cortado de un tronco cilíndrico de radio 1 pie. Encuentre el ancho de una segunda viga rectangular de igual resistencia que pueda haberse cortado del tronco.

EJERCICIO 54

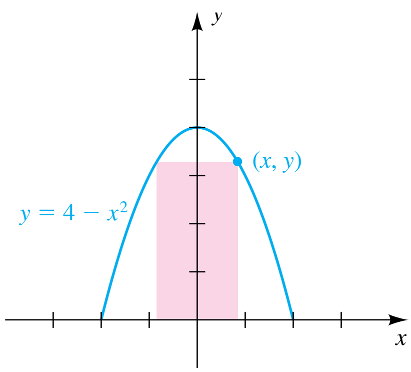


55 **Arco parabólico** Un arco tiene la forma de la parábola $y = 4 - x^2$. Un rectángulo se ajusta bajo el arco al seleccionar un punto (x, y) en la parábola (vea la figura).

(a) Exprese el área A del rectángulo en términos de x.

(b) Si $x = 1$, el rectángulo tiene base 2 y altura 3. Encuentre la base de un segundo rectángulo que tenga la misma área.

EJERCICIO 55

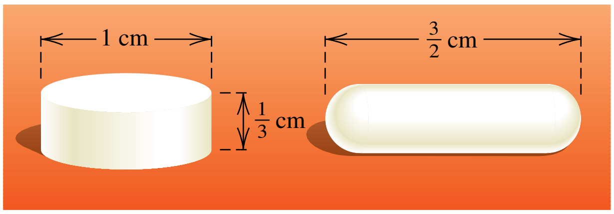


56 **Dimensiones de una cápsula** Una pastilla de aspirina en forma de cilindro circular recto tiene altura de $\frac{1}{3}$ de centímetro y radio de $\frac{1}{2}$ centímetro. El fabricante también desea vender la aspirina en forma de cápsula. La cápsula debe medir $\frac{3}{2}$ centímetros de largo, en forma de cilindro circular recto con semiesferas unidas en ambos extremos (vea la figura).

(a) Si r denota el radio de una hemisferio, encuentre una fórmula para el volumen de la cápsula.

(b) Encuentre el radio de la cápsula para que su volumen sea igual al de la pastilla.

EJERCICIO 56



Ejer. 57–58: Use la gráfica de *f* para aproximar el residuo si *f* se divide entre $x - 0.21$.

57 $f(x) = x^8 - 7.9x^5 - 0.8x^4 + x^3 + 1.2x - 9.81$

58 $f(x) = 3.33x^6 - 2.5x^5 + 6.9x^3 - 4.1x^2 + 1.22x - 6.78$

Ejer. 59–60: Use la gráfica de *f* para aproximar todos los valores de *k* tales que $f(x)$ sea divisible entre el polinomio lineal dado.

59 $f(x) = x^3 + k^3x^2 + 2kx - 2k^4$; $\quad x - 1.6$

60 $f(x) = k^5x^3 - 2.1x^2 + k^3x - 1.2k^2$; $\quad x + 0.4$

4.3 Ceros de polinomios

Los **ceros de un polinomio** $f(x)$ son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Cada cero real es un punto de intersección de la gráfica de f con el eje x. En campos de aplicación, calculadoras y computadoras se suelen emplear para hallar o aproximar ceros. Antes de usar una calculadora es conveniente conocer qué tipo de ceros esperar. Algunas preguntas que podríamos hacer son

(1) ¿Cuántos ceros de $f(x)$ son reales?, ¿e imaginarios?

(2) ¿Cuántos ceros reales de $f(x)$ son positivos?, ¿y negativos?

(3) ¿Cuántos ceros reales de $f(x)$ son racionales?, ¿e irracionales?

(4) ¿Hay ceros reales de $f(x)$ grandes o pequeños en valor?

En esta sección y la siguiente discutiremos resultados que ayudan a contestar algunas de estas preguntas. Estos resultados forman la base de la *teoría de ecuaciones.*

Los teoremas del factor y del residuo se pueden extender al sistema de números complejos. Así, un número complejo $c = a + bi$ es un cero de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $f(x)$. Excepto en casos especiales, los ceros de polinomios son muy difíciles de hallar. Por ejemplo, no hay ceros obvios de $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x - 10$. Aun cuando no tenemos fórmula que pueda usarse para hallar los ceros, el siguiente teorema expresa que hay *al menos* un cero c y, en consecuencia, por el teorema del factor, $f(x)$ tiene un factor de la forma $x - c$.

Teorema fundamental del álgebra

Si un polinomio $f(x)$ tiene grado positivo y coeficientes complejos, entonces $f(x)$ tiene al menos un cero complejo.

La demostración estándar de este teorema requiere resultados de un campo avanzado de las matemáticas llamado *funciones de variable compleja*. Un requisito previo para estudiar este campo es un fuerte antecedente en el cálculo. La primera demostración del teorema fundamental del álgebra fue dada por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado por muchos como el más grande matemático de todos los tiempos.

Como caso especial del teorema fundamental del álgebra, si todos los coeficientes de $f(x)$ son reales, entonces $f(x)$ tiene al menos un cero complejo. Si $a + bi$ es un cero complejo, puede ocurrir que $b = 0$, en cuyo caso el número a es un cero real.

El teorema fundamental del álgebra hace posible que, al menos en teoría, expresemos todo polinomio $f(x)$ de grado positivo como un producto de polinomios de grado 1, como en el siguiente teorema.

Teorema de factorización completa para polinomios

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces existen n números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Cada número c_k es un cero de $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si $f(x)$ tiene grado $n > 0$, entonces, por el teorema fundamental del álgebra, $f(x)$ tiene un cero complejo c_1. En consecuencia, por el teorema del factor, $f(x)$ tiene un factor $x - c_1$; esto es,

$$f(x) = (x - c_1)f_1(x),$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $n - 1 > 0$, entonces, por el mismo argumento, $f_1(x)$ tiene un cero complejo c_2 y por tanto un factor $x - c_2$. Así,

$$f_1(x) = (x - c_2)f_2(x),$$

donde $f_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$. En consecuencia,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)f_2(x).$$

Continuando con este proceso, después de n pasos llegamos a un polinomio $f_n(x)$ de grado 0. Por tanto, $f_n(x) = a$ para algún número a diferente de cero y podemos escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde cada número complejo c_k es un cero de $f(x)$. El coeficiente principal del polinomio en el lado derecho de la última ecuación es a y por tanto a es el coeficiente principal de $f(x)$. ■

ILUSTRACIÓN **Teorema de factorización completa para polinomios**

Un polinomio $f(x)$	Una forma factorizada de $f(x)$	Ceros de $f(x)$
■ $3x^2 - (12 + 6i)x + 24i$	$3(x - 4)(x - 2i)$	$4, 2i$
■ $-6x^3 - 2x^2 - 6x - 2$	$-6\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + i)(x - i)$	$-\frac{1}{3}, \pm i$
■ $5x^3 - 30x^2 + 65x$	$5(x - 0)[x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)]$	$0, 3 \pm 2i$
■ $\frac{2}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x - 8$	$\frac{2}{3}(x + 12)(x + 1)(x - 1)$	$-12, \pm 1$

Ahora podemos demostrar lo siguiente.

Teorema sobre el número máximo de ceros de un polinomio

Un polinomio de grado $n > 0$ tiene a lo sumo n ceros complejos diferentes.

DEMOSTRACIÓN Daremos una demostración indirecta; esto es, supondremos que $f(x)$ tiene *más* de n ceros complejos diferentes y demostraremos que esta suposición lleva a una contradicción. Escojamos $n + 1$ de los ceros y los marcamos como $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y c. Podemos usar el c_k para obtener la factori-

zación indicada en el enunciado del teorema de factorización completa para polinomios. Sustituyendo x por c y usando el hecho de que $f(c) = 0$, obtenemos

$$0 = a(c - c_1)(c - c_2)\cdots(c - c_n).$$

No obstante, cada factor del lado derecho es diferente de cero porque $c \neq c_k$ para toda k. Como el producto de números diferentes de cero no puede ser igual a cero, tenemos una contradicción. ■

EJEMPLO 1 **Hallar un polinomio con ceros prescritos**

Encuentre un polinomio $f(x)$ en forma factorizada que tenga grado 3; tenga ceros 2, -1 y 3; y satisfaga $f(1) = 5$.

SOLUCIÓN Por el teorema del factor, $f(x)$ tiene factores $x - 2$, $x + 1$ y $x - 3$. No existen otros factores de grado 1, porque, por el teorema del factor, otro factor lineal $x - c$ produciría un cuarto cero de $f(x)$, contrario al teorema precedente. Por lo tanto, $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

para algún número a. Como $f(1) = 5$, podemos encontrar a como sigue:

$$5 = a(1 - 2)(1 + 1)(1 - 3) \quad \text{sea } x = 1 \text{ en } f(x)$$
$$5 = a(-1)(2)(-2) \quad \text{simplifique}$$
$$a = \tfrac{5}{4} \quad \text{despeje } a$$

En consecuencia,

$$f(x) = \tfrac{5}{4}(x - 2)(x + 1)(x - 3).$$

Si multiplicamos los factores, obtenemos el polinomio

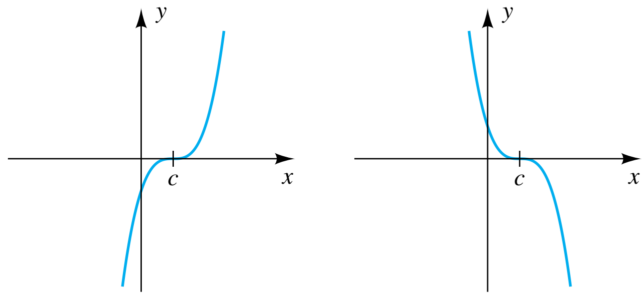
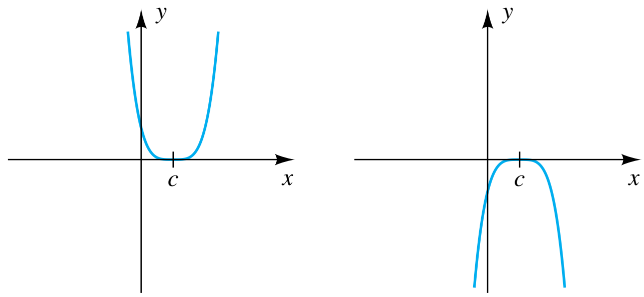
$$f(x) = \tfrac{5}{4}x^3 - 5x^2 + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{15}{2}.$$ ■

Los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en el teorema de factorización completa no son necesariamente todos diferentes. Para ilustrar, $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ tiene la factorización

$$f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 1).$$

Si un factor $x - c$ se presenta m veces en la factorización, entonces c es un **cero de multiplicidad *m*** del polinomio $f(x)$ o una **raíz de multiplicidad *m*** de la ecuación $f(x) = 0$. En la exhibición precedente, 1 es un cero de multiplicidad 2, y -3 es un cero de multiplicidad 1.

Si c es un cero real de $f(x)$ de multiplicidad m, entonces $f(x)$ tiene el factor $(x - c)^m$ y la gráfica de f tiene un punto c de intersección con el eje x. La forma general de la gráfica en $(c, 0)$ depende de si m es entero impar o entero par. Si m es impar, entonces $(x - c)^m$ cambia de signo cuando x aumenta por medio de c, y por tanto la gráfica de f cruza el eje x en $(c, 0)$, como se indica en el primer renglón de la tabla siguiente. Las figuras de la tabla no muestran la gráfica completa de f, sino sólo su forma general cerca de $(c, 0)$. Si m es par, entonces $(x - c)^m$ no cambia de signo en c y la gráfica de f cerca de $(c, 0)$ tiene el aspecto de una de las dos figuras del segundo renglón.

Factor de $f(x)$	Forma general de la gráfica de f cerca de $(c, 0)$
$(x - c)^m$, con m impar y $m \neq 1$	
$(x - c)^m$, con m par	

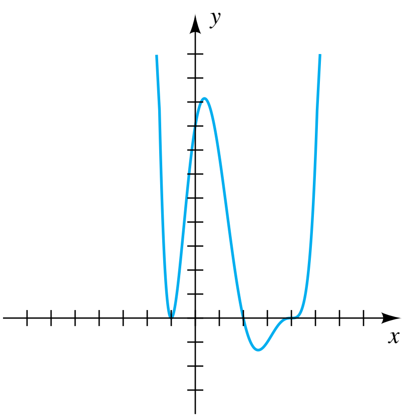
EJEMPLO 2 Hallar multiplicidades de ceros

Encuentre los ceros del polinomio $f(x) = \frac{1}{16}(x - 2)(x - 4)^3(x + 1)^2$, exprese la multiplicidad de cada uno y luego trace la gráfica de f.

SOLUCIÓN Vemos de la forma factorizada que $f(x)$ tiene tres ceros distintos, 2, 3 y -1. El cero 2 tiene multiplicidad 1, el cero 4 tiene multiplicidad 3, y el cero -1 tiene multiplicidad 2. Note que $f(x)$ tiene grado 6.

Los puntos de intersección con el eje x de la gráfica de f son los ceros reales -1, 2 y 4. Como la multiplicidad de -1 es un entero par, la gráfica toca, pero no cruza, el eje x en $(-1, 0)$. Como las multiplicidades de 2 y 4 son impares, la gráfica cruza el eje x en $(2, 0)$ y $(4, 0)$. (Note que la gráfica es "más plana" en 4 que en 2.) El punto de intersección con el eje y es $f(0) = \frac{1}{16}(-2)(-4)^3(1)^2 = 8$. La gráfica se muestra en la figura 1. ■

FIGURA 1



Si $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$ es un polinomio de grado n, entonces los n números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son ceros de $f(x)$. Contando un cero de multiplicidad m como m ceros nos dice que $f(x)$ tiene al menos n ceros (no necesariamente todos diferentes). Combinando este hecho con el hecho de que $f(x)$ tiene a lo más n ceros nos da el siguiente resultado.

Teorema del número exacto de ceros de un polinomio

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

Note la forma en que el polinomio de grado 6 del ejemplo 2 se relaciona con el último teorema. Las multiplicidades son 1, 3 y 2, de modo que f tiene precisamente $1 + 3 + 2 = 6$ ceros.

EJEMPLO 3 **Hallar los ceros de un polinomio**

Exprese $f(x) = x^5 - 4x^4 + 13x^3$ como producto de factores lineales y encuentre los cinco ceros de $f(x)$.

SOLUCIÓN Empezamos por factorizar x^3:

$$f(x) = x^3(x^2 - 4x + 13)$$

Por la fórmula cuadrática, los ceros del polinomio $x^2 - 4x + 13$ son

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

En consecuencia, por el teorema del factor, $x^2 - 4x + 13$ tiene factores $x - (2 + 3i)$ y $x - (2 - 3i)$, y obtenemos la factorización

$$f(x) = x \cdot x \cdot x \cdot (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i).$$

Como $x - 0$ se presenta tres veces como un factor, el número 0 es un cero de multiplicidad 3 y los cinco ceros de $f(x)$ son $0, 0, 0, 2 + 3i$ y $2 - 3i$. ■

A continuación veremos cómo utilizar la *regla de los signos de Descartes* para obtener información relacionada con los ceros de una polinomial $f(x)$ con coeficientes reales. En el enunciado de la regla suponemos que los términos de $f(x)$ están ordenados en potencias de crecientes de x y que no se consideran los términos con coeficiente cero. También suponemos que el **término constante**, es decir, el término que no contiene x, es diferente de cero. Decimos que hay una **variación de signo** en $f(x)$ si dos coeficientes consecutivos tienen signos opuestos. Para ilustrar, la polinomial $f(x)$ en el siguiente ejemplo tiene tres variaciones de signo, como lo indican las llaves, una variación de $2x^5$ a $-7x^4$, una segunda de $-7x^4$ a $3x^2$, y una tercera de $6x$ a -5.

ILUSTRACIÓN **Variaciones de signo en $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$**

	+ a −	− a +	sin variación	+ a −	
■ $f(x) = 2x^5$	$-\ 7x^4$		$+\ 3x^2$	$+\ 6x$	$-\ 5$

La regla de Descartes también se refiere a las variaciones de signo en $f(-x)$. Usando la ilustración previa, note que

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^4 + 3(-x)^2 + 6(-x) - 5 \\ &= -2x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 6x - 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como se indica en la ilustración siguiente, hay *dos* variaciones de signo en $f(-x)$, una de $-7x^4$ a $3x^2$ y una segunda de $3x^2$ a $-6x$.

ILUSTRACIÓN **Variaciones de signo en $f(-x)$ si $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$**

	sin variación	− a +	+ a −	sin variación
■ $f(-x) = -2x^5$	$-\ 7x^4$	$+\ 3x^2$	$-\ 6x$	$-\ 5$

Podemos expresar la regla de Descartes como sigue.

Regla de signos de Descartes

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y un término constante diferente de cero.

(1) El número de ceros reales *positivos* de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$ o es menor que ese número por un entero par.

(2) El número de ceros reales *negativos* de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(-x)$ o es menor que ese número por un entero par.

No se dará una demostración de la regla de Descartes.

EJEMPLO 4 **Uso de la regla de signos de Descartes**

Discuta el número de posibles soluciones positivas y negativas, reales e imaginarias de la ecuación $f(x)$, donde

$$f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5.$$

SOLUCIÓN El polinomio $f(x)$ es el dado en las dos ilustraciones previas. Como hay tres variaciones de signo en $f(x)$, la ecuación tiene tres soluciones reales positivas o una solución real positiva.

Como $f(-x)$ tiene dos variaciones de signo, la ecuación tiene dos soluciones negativas o ninguna solución negativa. Debido a que $f(x)$ tiene grado 5, hay un total de 5 soluciones. Las soluciones que no son números reales positivos o negativos son imaginarias. La tabla siguiente resume las diversas posibilidades de soluciones de la ecuación que se pueden presentar.

Número de soluciones reales positivas	3	3	1	1
Número de soluciones reales negativas	2	0	2	0
Número de soluciones imaginarias	0	2	2	4
Número total de soluciones	5	5	5	5

■

La regla de Descartes estipula que el término constante del polinomio $f(x)$ es diferente de 0. Si el término constante es 0, como en la ecuación

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x = 0,$$

factorizamos la potencia más baja de x, obteniendo

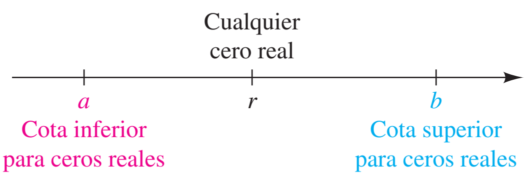
$$x(x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = 0.$$

Así, una solución es $x = 0$, y aplicamos la regla de Descartes al polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ para determinar la naturaleza de las tres soluciones restantes.

Cuando apliquemos la regla de Descartes, contamos las raíces de multiplicidad k como k raíces. Por ejemplo, dado $x^2 - 2x + 1 = 0$, el polinomio $x^2 - 2x + 1$ tiene dos variaciones de signo y por tanto la ecuación o tiene dos raíces reales positivas o ninguna. La forma factorizada de la ecuación es $(x - 1)^2 = 0$ y por tanto 1 es una raíz de multiplicidad 2.

A continuación discutimos las *cotas* para los ceros reales de un polinomio $f(x)$ que tiene coeficientes reales. Por definición, un número real b es una **cota superior** para los ceros si ningún cero es mayor que b. Un número real a es una **cota inferior** para los ceros si ningún cero es menor que a. Así, si r es cualquier cero real de $f(x)$, entonces $a \leq r \leq b$; esto es, r está en el intervalo cerrado $[a, b]$, como se ilustra en la figura 2. Note que las cotas superior e inferior no son únicas, puesto que cualquier número mayor que b también es una cota superior y cualquier número menor que a también es una cota inferior.

FIGURA 2



Podemos usar división sintética para hallar cotas superior e inferior para los ceros de $f(x)$. Recuerde que si dividimos $f(x)$ entre $x - c$, el tercer renglón del proceso de división contiene los coeficientes del cociente $q(x)$ junto con el residuo $f(c)$. El siguiente teorema indica la forma en que este tercer renglón se puede usar para hallar cotas superior e inferior para las soluciones reales.

Primer teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios

Suponga que $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y un coeficiente principal positivo y que $f(x)$ está dividido sintéticamente entre $x - c$.

(1) Si $c > 0$ y si todos los números del tercer renglón del proceso de división son positivos o cero, entonces c es una cota superior para los ceros reales de $f(x)$.

(2) Si $c < 0$ y si los números del tercer renglón del proceso de división son alternadamente positivos y negativos (y un 0 en el tercer renglón se considera positivo o negativo), entonces c es una cota inferior para los ceros reales de $f(x)$.

EJEMPLO 5 **Hallar cotas para las soluciones de una ecuación**

Encuentre las cotas superior e inferior para las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$.

SOLUCIÓN Dividimos $f(x)$ sintéticamente entre $x - 1$ y $x - 2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 2 & 7 & -1 \\ \hline & 2 & 7 & -1 & -8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 4 & 18 & 20 \\ \hline & 2 & 9 & 10 & 13 \end{array}$$

El tercer renglón de la división sintética entre $x - 1$ contiene números negativos y por tanto la parte (1) del teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios no se cumple, pero como todos los números del tercer renglón de la división sintética entre $x - 2$ son positivos, se deduce de la parte (1) que 2 es

(continúa)

un cota superior para las soluciones reales de la ecuación. Este hecho también es evidente si expresamos la división entre $x - 2$ en la forma del algoritmo de la división

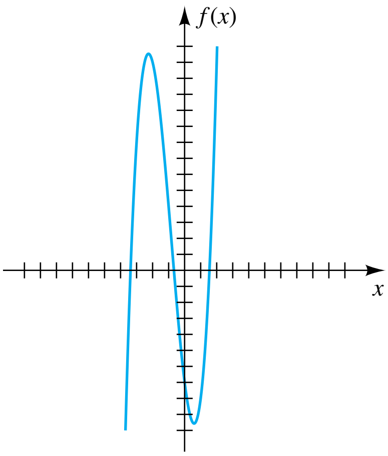
$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x - 2)(2x^2 + 9x + 10) + 13,$$

porque si $x > 2$, entonces el lado derecho de la ecuación es positivo (¿por qué?) y por tanto $f(x)$ no es cero.

Ahora encontramos una cota inferior. Después de algunos intentos de ensayo y error usando $x - (-1)$, $x - (-2)$ y $x - (-3)$, vemos que la división sintética de f entre $x - (-4)$ nos da

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & -8 & 12 & -16 \\ \hline & 2 & -3 & 4 & -23 \end{array}$$

FIGURA 3



$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$

Como los números del tercer renglón son alternadamente positivos y negativos, se deduce de la parte (2) del teorema precedente que -4 es una cota inferior para las soluciones reales. Esto también se puede demostrar al expresar la división entre $x + 4$ en la forma

$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x + 4)(2x^2 - 3x + 4) - 23,$$

porque si $x < -4$, entonces el lado derecho de esta ecuación es negativo (¿por qué?) y por tanto $f(x)$ no es cero.

Como las cotas inferior y superior para las soluciones reales son -4 y 2, respectivamente, se deduce que todas las soluciones reales están en el intervalo cerrado $[-4, 2]$.

La gráfica de f en la figura 3 muestra que los tres ceros de f están en los intervalos $[-4, -3]$, $[-1, 0]$ y $[1, 2]$, respectivamente. ■

Cuando se usa una calculadora de gráficas, el siguiente teorema es útil para hallar una pantalla que muestre todos los ceros de un polinomio.

Segundo teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios

Suponga que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes reales. Todos los ceros reales de $f(x)$ están en el intervalo

$$(-M, M),$$

donde $M = \dfrac{\text{máx}\left(|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\right)}{|a_n|} + 1.$

En palabras, el valor de M es igual a la razón entre el máximo coeficiente (en magnitud) y el valor absoluto del coeficiente principal, más 1. Por ejemplo, usando el polinomio $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ del ejemplo 5, tenemos

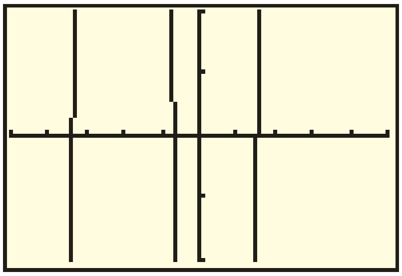
$$M = \frac{|-8|}{|2|} + 1 = 4 + 1 = 5.$$

Cuando se usa una calculadora de gráficas *sólo* para hallar los ceros de un polinomio $f(x)$, no es necesario ver los puntos de inflexión del polinomio. Por lo tanto, se podría empezar a buscar los ceros de $f(x)$ usando las dimensiones de pantalla

$$[-M, M] \text{ por } [-1, 1].$$

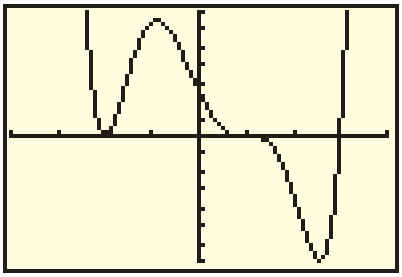
Al graficar $Y_1 = f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ (del ejemplo 5) en la pantalla $[-5, 5]$ por $[-1, 1, 0.5]$ como se ve en la figura 4, casi se pueden "ver muy de cerca" las soluciones aproximadas -3.4, -0.7 y 1.5.

FIGURA 4
$[-5, 5]$ por $[-1, 1, 0.5]$



EJEMPLO 6 **Hallar un polinomio a partir de una gráfica**

FIGURA 5
$[-4, 4]$ por $[-35, 35, 5]$



En la figura 5 se muestran todos los ceros de una función polinomial f.

(a) Encuentre una forma factorizada para f que tenga grado mínimo.

(b) Suponiendo que el coeficiente principal de f sea 1, encuentre el punto de intersección con el eje y

SOLUCIÓN

(a) El cero en $x = -2$ debe tener una multiplicidad que es un número par, porque f no cambia de signo en $x = -2$. El cero en $x = 1$ debe tener una multiplicidad impar de 3 o mayor, porque f cambia de signo en $x = 1$ y se nivela. El cero en $x = 3$ es de multiplicidad 1, porque f cambia de signo y no se nivela. Por lo tanto, una forma factorizada de f es

$$f(x) = a(x + 2)^m(x - 1)^n(x - 3)^1.$$

Como deseamos que la función tenga grado mínimo, hacemos $m = 2$ y $n = 3$, obteniendo

$$f(x) = a(x + 2)^2(x - 1)^3(x - 3),$$

que es un polinomio de sexto grado.

(b) Si el coeficiente principal de f debe ser 1, entonces, del teorema de factorización completa para polinomios, sabemos que el valor de a es 1. Para hallar el punto de intersección con el eje y, hacemos $x = 0$ y calculamos $f(0)$:

$$f(0) = 1(0 + 2)^2(0 - 1)^3(0 - 3) = 1(4)(-1)(-3) = 12$$

Por lo tanto, el punto de intersección con el eje y es 12. ■

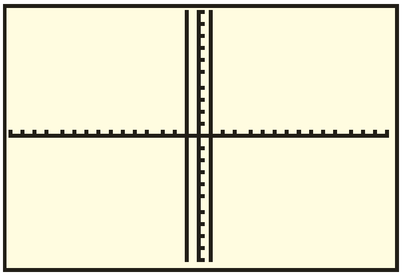
EJEMPLO 7 **Explorar la gráfica de un polinomio**

Encuentre los ceros de $f(x) = x^3 - 1000x^2 - x + 1000$.

SOLUCIÓN Asignamos $f(x)$ a Y_1 y usamos una pantalla estándar para obtener la figura 6. Parece que el 1 es una raíz de f y podemos demostrar este hecho con división sintética:

(continúa)

FIGURA 6
$[-15, 15]$ por $[-10, 10]$



$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1000 & -1 & 1000 \\ & & 1 & -999 & -1000 \\ \hline & 1 & -999 & -1000 & 0 \end{array}$$

Usando la **ecuación degradada,** $x^2 - 999x - 1000 = 0$, podemos también demostrar que -1 es una raíz de f:

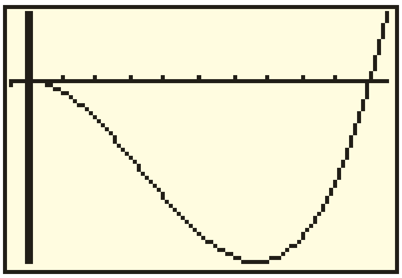
$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & -999 & -1000 \\ & & -1 & 1000 \\ \hline & 1 & -1000 & 0 \end{array}$$

Para la última división sintética, vemos que $x - 1000$ es un factor de f y por lo tanto la tercera raíz es 1000.

Debido a los tamaños relativos de las raíces 1 y 1000, es muy difícil obtener una pantalla que muestre los tres ceros. No obstante, al ajustar Xmín en -50, Xmáx en 1050 y Xscl en 100 y usando ZoomFit (selección 0 en la TI-83/4 Plus), obtenemos el trazo de f en la Figura 7, mostrando sus ceros y puntos de inflexión.

Ahora compruebe los valores de Ymín y Ymáx para ver la pantalla necesaria.

FIGURA 7 Usando ZoomFit
$[-50, 1050, 100]$ por $[?, ?, ?]$



4.3 Ejercicios

Ejer. 1–8: Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga los ceros indicados y satisfaga las condiciones dadas.

1 $-1, 2, 3$; $f(-2) = 80$

2 $-5, 2, 4$; $f(3) = -24$

3 $-4, 3, 0$; $f(2) = -36$

4 $-3, -2, 0$; $f(-4) = 16$

5 $-2i, 2i, 3$; $f(1) = 20$

6 $-3i, 3i, 4$; $f(-1) = 50$

7 $-i, i, 0$; $f(2) = 30$

8 $-4i, 4i, 0$; $f(4) = 1$

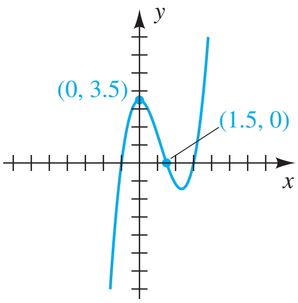
9 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 4 con coeficiente principal 1 tal que -4 y 3 sean ceros de multiplicidad 2, y trace la gráfica de f.

10 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 4 con coeficiente principal 1 tal que -5 y 2 sean ceros de multiplicidad 2, y trace la gráfica de f.

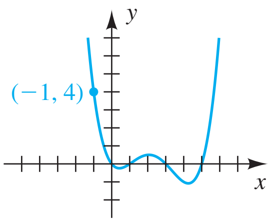
11 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 6 tal que 0 y 3 sean ceros de multiplicidad 3 y $f(2) = -24$. Trace la gráfica de f.

12 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 7 tal que -2 y 2 sean ceros de multiplicidad 2, 0 es un cero de multiplicidad 3 y $f(-1) = 27$. Trace la gráfica de f.

13 Encuentre la función polinomial de tercer grado cuya gráfica se ilustra en la figura.

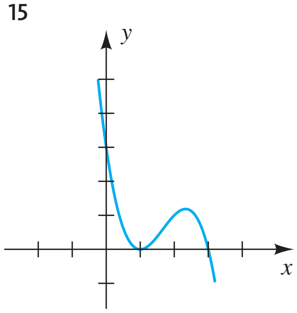


14 Encuentre la función polinomial de cuarto grado cuya gráfica se ilustra en la figura.

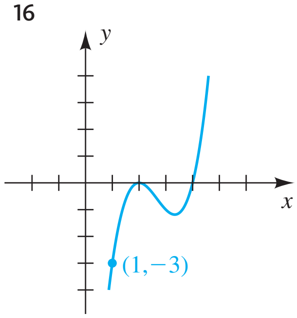


Ejer. 15–16: Encuentre la función polinomial de grado 3 cuya gráfica se muestra en la figura.

15



16



Ejer. 17–26: Encuentre los ceros de $f(x)$ y exprese la multiplicidad de cada cero.

17 $f(x) = x^2(3x + 2)(2x - 5)^3$

18 $f(x) = x(x + 1)^4(3x - 7)^2$

19 $f(x) = 4x^5 + 12x^4 + 9x^3$

20 $f(x) = 16x^5 - 40x^4 + 25x^3$

21 $f(x) = (x^2 - 3)^3$

22 $f(x) = (4x^2 - 5)^2$

23 $f(x) = (x^2 + x - 12)^3(x^2 - 9)^2$

24 $f(x) = (6x^2 + 7x - 5)^4(4x^2 - 1)^2$

25 $f(x) = x^4 + 7x^2 - 144$

26 $f(x) = x^4 + 21x^2 - 100$

Ejer. 27–32: Demuestre que el número es un cero de $f(x)$ de la multiplicidad dada y exprese $f(x)$ como un producto de factores lineales.

27 $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 3x - 18$; -3 (multiplicidad 2)

28 $f(x) = x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$; 4 (multiplicidad 2)

29 $f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$; -2 (multiplicidad 3)

30 $f(x) = x^4 - 11x^3 + 36x^2 - 16x - 64$; 4 (multiplicidad 3)

31 $f(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1$; 1 (multiplicidad 5)

32 $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$; -1 (multiplicidad 4)

Ejer. 33–40: Use la regla de los signos de Descartes para determinar el número de posibles soluciones positivas, negativas y complejas no reales de la ecuación.

33 $4x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$ **34** $5x^3 - 6x - 4 = 0$

35 $4x^3 + 2x^2 + 1 = 0$

36 $3x^3 - 4x^2 + 3x + 7 = 0$

37 $3x^4 + 2x^3 - 4x + 2 = 0$

38 $2x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0$

39 $x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 4x + 2 = 0$

40 $2x^6 + 5x^5 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$

Ejer. 41–46: Aplicando el primer teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios, determine los enteros mínimos y máximos que son cotas superiores e inferiores, respectivamente, para las soluciones reales de la ecuación. Con ayuda de una calculadora de gráficas, discuta la validez de los límites.

41 $x^3 - 4x^2 - 5x + 7 = 0$

42 $2x^3 - 5x^2 + 4x - 8 = 0$

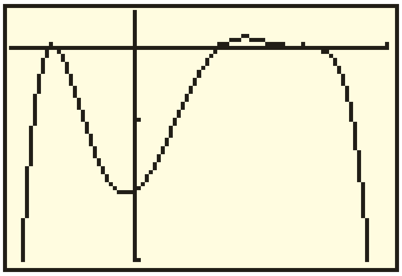
43 $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 6 = 0$

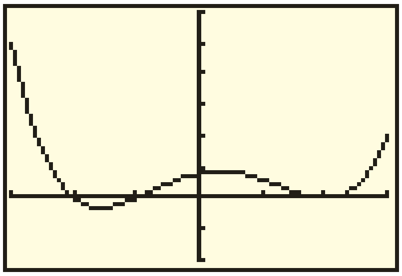
44 $2x^4 - 9x^3 - 8x - 10 = 0$

45 $2x^5 - 13x^3 + 2x - 5 = 0$

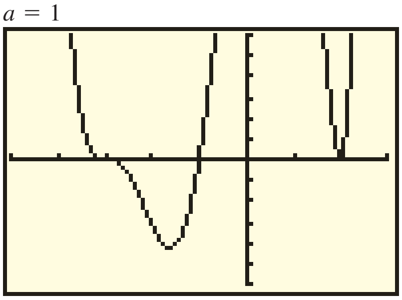
46 $3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7 = 0$

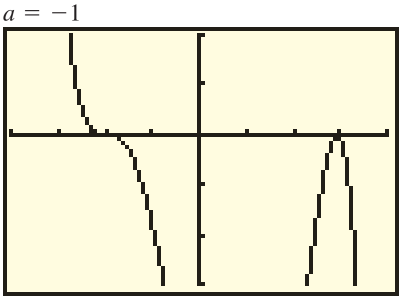
Ejer. 47–48: Encuentre una forma factorizada para una función polinomial *f* que tenga un grado mínimo. Suponga que los valores de los puntos de intersección son enteros y que Xscl = Yscl = 1.

47


48


Ejer. 49–50: (a) Encuentre una forma factorizada para una función polinomial *f* que tenga un grado mínimo. Suponga que los valores de los puntos de intersección son enteros, Xscl = 1 y Yscl = 5. (b) Si el coeficiente principal de *f* es *a*, encuentre el punto de intersección con el eje *y*.

49 $a = 1$


50 $a = -1$


Ejer. 51–52: La función polinomial *f* tiene sólo ceros reales. Use la gráfica de *f* para factorizarla.

51 $f(x) = x^5 - 16.75x^3 + 12.75x^2 + 49.5x - 54$

52 $f(x) = x^5 - 2.5x^4 - 12.75x^3 + 19.625x^2 + 27.625x + 7.5$

Ejer. 53–56: ¿Hay un polinomio del grado dado *n* cuya gráfica contenga los puntos indicados?

53 $n = 4$;
$(-2, 0), (0, -24), (1, 0), (3, 0), (2, 0), (-1, -52)$

54 $n = 5$;
$(0, 0), (-3, 0), (-1, 0), (2, 0), (3, 0), (-2, 5), (1, 2)$

55 $n = 3$;
$(1.1, -49.815), (2, 0), (3.5, 25.245), (5.2, 0), (6.4, -29.304), (10.1, 0)$

56 $n = 4$;
$(1.25, 0), (2, 0), (2.5, 56.25), (3, 128.625), (6.5, 0), (9, -307.75), (10, 0)$

57 **Uso de datos limitados** Un científico tiene datos limitados sobre la temperatura T (en °C) durante un periodo de 24 horas. Si t denota el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a la media noche, encuentre el polinomio de cuarto grado que ajuste la información en la tabla siguiente.

***t* (horas)**	0	5	12	19	24
***T* (°C)**	0	0	10	0	0

58 **Polinomio de interpolación de Lagrange** Un polinomio $f(x)$ de grado 3 con ceros en c_1, c_2 y c_3 y con $f(c) = 1$ para $c_2 < c < c_3$ es un polinomio de interpolación de Lagrange de tercer grado. Encuentre una fórmula explícita para $f(x)$ en términos de c_1, c_2, c_3 y c.

Ejer. 59–60: Grafique *f* para cada valor de *n* en el mismo plano de coordenadas y describa la forma en que la multiplicidad de un cero afecta la gráfica de *f*.

59 $f(x) = (x - 0.5)^n(x^2 + 1)$; $n = 1, 2, 3, 4$

60 $f(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n$; $n = 1, 2, 3, 4$

Ejer. 61–62: Grafique *f*, estime todos los ceros reales y determine la multiplicidad de cada cero.

61 $f(x) = x^3 + 1.3x^2 - 1.2x - 1.584$

62 $f(x) = x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{8}x^3 - \frac{9}{32}x^2 + \frac{405}{256}x + \frac{675}{1024}$

63 **Efecto invernadero** Debido a la quema de combustibles fósiles, la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera está creciendo. Investigaciones realizadas indican que esto resultará en un *efecto invernadero* que cambiará el promedio de temperatura de la superficie terrestre. Suponiendo una vigorosa expansión de uso de carbón, la cantidad futura $A(t)$ de concentración de dióxido de carbono en la atmósfera se puede aproximar (en partes por millón) con

$$A(t) = -\frac{1}{2400}t^3 + \frac{1}{20}t^2 + \frac{7}{6}t + 340,$$

donde t es en años, $t = 0$ corresponde a 1980 y $0 \leq t \leq 60$. Use la gráfica de A para estimar el año cuando la concentración de dióxido de carbono será de 450.

64 **Efecto invernadero** El promedio de aumento en la temperatura de la superficie terrestre debido al efecto invernadero se puede aproximar con

$$T(t) = \frac{21}{5{,}000{,}000}t^3 - \frac{127}{1{,}000{,}000}t^2 + \frac{1293}{50{,}000}t,$$

donde $0 \leq t \leq 60$ y $t = 0$ corresponde a 1980. Use la gráfica de T para estimar el año cuando el promedio de temperatura habrá subido 1°C.

Ejer. 65–66: El promedio de temperaturas mensuales en °F para dos lugares en Canadá aparecen en las tablas siguientes.

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.
Arctic Bay	−22	−26	−18	−4
Trout Lake	−11	−6	7	25

Mes	May.	Jun.	Jul.	Ago.
Arctic Bay	19	36	43	41
Trout Lake	39	52	61	59

Mes	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.
Arctic Bay	28	12	−8	−17
Trout Lake	48	34	16	−4

(a) **Si el 15 de enero corresponde a $x = 1$, el 15 de febrero a $x = 2, \ldots,$ y el 15 de diciembre a $x = 12$, determine gráficamente cuál de los tres polinomios dados modela mejor los datos.**

(b) **Use el teorema del valor intermedio para funciones polinomiales para aproximar un intervalo para x cuando se presenta un promedio de temperatura de 0°F.**

(c) **Use su selección del inciso (a) para estimar x cuando el promedio de temperatura es 0°F.**

65 **Temperaturas en Arctic Bay**

(1) $f(x) = -1.97x^2 + 28x - 67.95$

(2) $g(x) = -0.23x^3 + 2.53x^2 + 3.6x - 36.28$

(3) $h(x) = 0.089x^4 - 2.55x^3 + 22.48x^2 - 59.68x + 19$

66 **Temperaturas en Trout Lake**

(1) $f(x) = -2.14x^2 + 28.01x - 55$

(2) $g(x) = -0.22x^3 + 1.84x^2 + 11.70x - 29.90$

(3) $h(x) = 0.046x^4 - 1.39x^3 + 11.81x^2 - 22.2x + 1.03$

Ejer. 67–68: Una esfera de madera sólida, cuya densidad es menor que la del agua, flotará. La profundidad d a la que la esfera se hundirá en el agua está determinada por la ecuación

$$\frac{4k}{3}\pi r^3 - \pi d^2 r + \frac{1}{3}\pi d^3 = 0,$$

donde r es el radio de la esfera y k es una constante positiva menor o igual a 1. Si $r = 6$ cm, estime gráficamente d para cada constante k.

67 **Esfera de pino en agua** $k = 0.7$

68 **Esfera de roble en agua** $k = 0.85$

69 Consulte los ejercicios 67 y 68. El agua tiene un valor k de 1. Si una esfera de radio 6 tiene un valor k de 1, ¿cuál es el valor resultante de d? Interprete este resultado.

4.4 Ceros complejos y racionales de polinomios

El ejemplo 3 de la sección precedente ilustra un dato importante acerca de polinomios con coeficientes reales: los dos ceros complejos $2 + 3i$ y $2 - 3i$ de $x^5 - 4x^4 + 13x^3$ son conjugados entre sí. La relación no es accidental, puesto que el siguiente resultado general es verdadero.

Teorema sobre ceros de par conjugado de un polinomio

Si un polinomio $f(x)$ de grado $n > 1$ tiene coeficientes reales y si $z = a + bi$ con $b \neq 0$ es un cero complejo de $f(x)$, entonces el conjugado $\bar{z} = a - bi$ es también un cero de $f(x)$.

Una demostración se deja como ejercicio de análisis al final del capítulo.

EJEMPLO 1 **Hallar un polinomio con ceros prescritos**

Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 4 que tenga coeficientes reales y ceros $2 + i$ y $-3i$.

SOLUCIÓN Por el teorema sobre ceros de par conjugado de un polinomio, $f(x)$ también debe tener ceros $2 - i$ y $3i$. Aplicando el teorema del factor, encontramos que $f(x)$ tiene los siguientes factores:

$$x - (2 + i), \quad x - (2 - i), \quad x - (-3i), \quad x - (3i)$$

Multiplicando estos cuatro factores tendremos

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (2 + i)][x - (2 - i)](x + 3i)(x - 3i) \\ &= (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 9) \qquad (*) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 36x + 45. \end{aligned}$$

■

Note que en (*) el símbolo i no aparece. Esto no es coincidencia, porque si $a + bi$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, entonces $a - bi$ es también un cero y podemos multiplicar los factores asociados como sigue:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

En el ejemplo 1 tenemos $a = 2$ y $b = 1$, de modo que $-2a = -4$ y $a^2 + b^2 = 5$ y el factor cuadrático asociado es $x^2 - 4x + 5$. Este factor cuadrático resultante siempre tendrá coeficientes reales, como se indica en el teorema siguiente.

Teorema sobre la expresión de un polinomio como producto de factores lineales y cuadráticos

Todo polinomio con coeficientes reales y de grado positivo n se puede expresar como un producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales tales que los factores cuadráticos son irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN Como $f(x)$ tiene precisamente n ceros complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$, podemos escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Por supuesto, algunos de los ceros pueden ser reales, en cuyos casos obtenemos los factores lineales referidos en el enunciado del teorema.

Si un cero c_k no es real, entonces, por el teorema sobre ceros de par conjugado de un polinomio, el conjugado $\overline{c_k}$ es también un cero de $f(x)$ y por tanto debe ser uno de los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Esto implica que $x - c_k$ y $x - \overline{c_k}$ aparezcan en la factorización de $f(x)$. Si esos factores se multiplican, obtenemos

$$(x - c_k)(x - \overline{c_k}) = x^2 - (c_k + \overline{c_k})x + c_k\overline{c_k},$$

que tiene coeficientes *reales,* porque $c_k + \overline{c_k}$ y $c_k\overline{c_k}$ son números reales. Así, si c_k es un cero complejo, entonces el producto $(x - c_k)(x - \overline{c_k})$ es un polinomio cuadrático que es irreducible sobre $\mathbb{R}$. Esto completa la demostración. ■

EJEMPLO 2 **Expresar un polinomio como producto de factores lineales y cuadráticos**

Exprese $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$ como un producto de

(a) polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales que son irreducibles sobre $\mathbb{R}$

(b) polinomios lineales

SOLUCIÓN

(a) $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$

$$\begin{aligned} &= (x^5 - 4x^3) + (x^2 - 4) && \text{agrupe términos} \\ &= x^3(x^2 - 4) + 1(x^2 - 4) && \text{factorice } x^3 \\ &= (x^3 + 1)(x^2 - 4) && \text{factorice } (x^2 - 4) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 2) && \text{factorice como la suma de cubos y la diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

Usando la fórmula cuadrática, vemos que el polinomio $x^2 - x + 1$ tiene los ceros complejos

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

y por tanto es irreducible sobre $\mathbb{R}$. Entonces, la factorización deseada es

$$(x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 2).$$

(b) Como el polinomio $x^2 - x + 1$ del inciso (a) tiene ceros $\frac{1}{2} \pm \left(\sqrt{3}/2\right)i$, se deduce del teorema del factor que el polinomio tiene factores

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \text{y} \quad x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Sustituyendo en la factorización hallada el inciso (a), obtenemos la siguiente factorización completa en polinomios lineales

$$(x + 1)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x + 2)(x - 2)$$ ■

Previamente señalamos que por lo general es muy difícil hallar los ceros de un polinomio de grado superior. Si todos los coeficientes son enteros, no obstante, hay un método para hallar los ceros *racionales*, si existen. El método es una consecuencia del siguiente resultado.

Teorema sobre ceros racionales de un polinomio

Si el polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

tiene coeficientes enteros y si c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no tienen factor primo común, entonces

(1) el numerador c del cero es un factor del término constante a_0

(2) el denominador d del cero es un factor del coeficiente principal a_n

DEMOSTRACIÓN Suponga que $c > 0$. (La demostración para $c < 0$ es similar.) Demostremos que c es un factor de a_0. El caso $c = 1$ es trivial, porque 1 es un factor de *cualquier* número. Así, suponga que $c \neq 1$. En este caso, $c/d \neq 1$, porque si $c/d = 1$, obtenemos $c = d$, y como c y d no tienen factor primo en común, esto implica que $c = d = 1$, una contradicción. Por lo tanto, en la siguiente discusión tenemos $c \neq 1$ y $c \neq d$.

Como $f(c/d) = 0$,

$$a_n\frac{c^n}{d^n} + a_{n-1}\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{c}{d} + a_0 = 0.$$

Multiplicamos por d^n y luego sumamos $-a_0d^n$ a ambos lados:

$$a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1cd^{n-1} = -a_0d^n$$
$$c(a_nc^{n-1} + a_{n-1}c^{n-2}d + \cdots + a_1d^{n-1}) = -a_0d^n$$

La última ecuación muestra que c es un factor del entero a_0d^n. Como c y d no tienen factor común, c es un factor de a_0. Un argumento similar se puede usar para demostrar que d es un factor de a_n. ■

Como ayuda para hacer una lista de posibles ceros racionales, recuerde el siguiente cociente:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores del término constante } a_0}{\text{factores del coeficiente principal } a_n}$$

El teorema de ceros racionales de un polinomio se puede aplicar a ecuaciones con coeficientes racionales con sólo multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd de todos los coeficientes para obtener una ecuación con coeficientes enteros.

EJEMPLO 3 Mostrar que un polinomio no tiene ceros racionales

Demuestre que $f(x) = x^3 - 4x - 2$ no tiene ceros racionales.

SOLUCIÓN Si $f(x)$ tiene un cero racional c/d tal que c y d no tienen factor primo común, entonces, por el teorema sobre ceros racionales de un polinomio, c es un factor del término constante -2 y por lo tanto es 2 o -2 (que escribimos como ± 2) o ± 1. El denominador d es un factor del coeficiente principal 1 y por lo tanto es ± 1. Entonces, las únicas posibilidades para c/d son

$$\frac{\pm 1}{\pm 1} \quad \text{y} \quad \frac{\pm 2}{\pm 1} \qquad \text{o bien lo que es equivalente,} \qquad \pm 1 \quad \text{y} \quad \pm 2.$$

Sustituyendo x por cada uno de estos números, obtenemos

$$f(1) = -5, \quad f(-1) = 1, \quad f(2) = -2 \quad \text{y} \quad f(-2) = -2.$$

Como $f(\pm 1) \neq 0$ y $f(\pm 2) \neq 0$, se deduce que $f(x)$ no tiene ceros racionales. ■

En la solución del siguiente ejemplo suponemos que no se dispone de una calculadora de gráficas. En el ejemplo 5 volveremos a trabajar el problema para demostrar la ventaja de usar una calculadora de gráficas.

EJEMPLO 4 Hallar las soluciones racionales de una ecuación

Encuentre todas las soluciones racionales de la ecuación

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0.$$

SOLUCIÓN El problema es equivalente a hallar los ceros racionales del polinomio del lado izquierdo de la ecuación. Si c/d es un cero racional y c y d no tienen factor común, entonces c es un factor del término constante -8 y d es un factor del coeficiente principal 3. Todas las opciones posibles aparecen en la tabla siguiente.

Opciones para el numerador *c*	$\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$
Opciones para el denominador *d*	$\pm1, \pm3$
Opciones para *c/d*	$\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}$

Podemos reducir el número de opciones al hallar cotas superior e inferior para las soluciones reales, pero aquí no lo haremos. Es necesario determinar cuál de las selecciones para c/d, si las hay, son ceros. Vemos por sustitución que ni 1 ni -1 es una solución. Si dividimos sintéticamente entre $x + 2$ obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 3 & 14 & 14 & -8 & -8 \\ & & -6 & -16 & 4 & 8 \\ \hline & 3 & 8 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

Este resultado muestra que -2 es un cero. Además, la división sintética da los coeficientes del cociente en la división del polinomio entre $x + 2$. Por lo tanto, tenemos la siguiente factorización del polinomio dado:

$$(x + 2)(3x^3 + 8x^2 - 2x - 4)$$

Las soluciones restantes de la ecuación deben ser ceros del segundo factor, de modo que usamos ese polinomio para comprobar las soluciones. *No use* el polinomio de la ecuación original. (Note que $\pm\frac{8}{3}$ ya no son candidatos, porque el numerador debe ser un factor de 4.) De nuevo procediendo por prueba y error, finalmente hallamos que la división sintética entre $x + \frac{2}{3}$ nos da el siguiente resultado:

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{2}{3} & 3 & 8 & -2 & -4 \\ & & -2 & -4 & 4 \\ \hline & 3 & 6 & -6 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, $-\frac{2}{3}$ también es un cero.

Usando los coeficientes del cociente, sabemos que los ceros restantes son soluciones de la ecuación $3x^2 + 6x - 6 = 0$. Dividiendo ambos lados entre 3 nos da la ecuación equivalente $x^2 + 2x - 2 = 0$. Por la fórmula cuadrática, esta ecuación tiene soluciones

$$\begin{aligned} \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} &= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el polinomio dado tiene dos raíces racionales, -2 y $-\frac{2}{3}$, y dos raíces irracionales, $-1 + \sqrt{3} \approx 0.732$ y $-1 - \sqrt{3} \approx -2.732$.

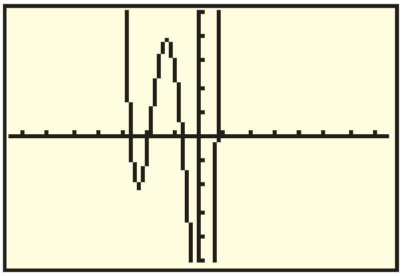
■

EJEMPLO 5 **Hallar las soluciones racionales de una ecuación**

Encuentre todas las soluciones racionales de la ecuación

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0.$$

FIGURA 1
$[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$



SOLUCIÓN Asignando el polinomio indicado a Y_1 y escogiendo la pantalla $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$, obtenemos un trazo semejante a la figura 1. La gráfica indica que -2 es una solución y que hay una solución en cada uno de los intervalos $(-3, -2)$,$(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Del ejemplo 4 sabemos que los posibles ceros racionales son

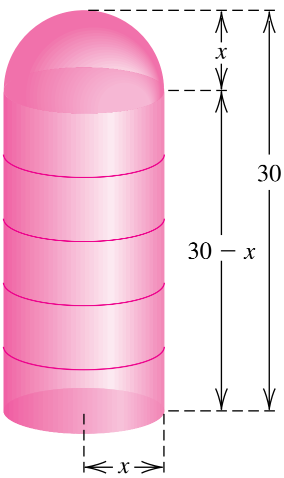
$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \pm 8, \quad \pm \tfrac{1}{3}, \quad \pm \tfrac{2}{3}, \quad \pm \tfrac{4}{3}, \quad \pm \tfrac{8}{3}.$$

Concluimos que las únicas posibilidades son $-\frac{8}{3}$ en $(-3, -2)$, $-\frac{2}{3}$ en $(-1, 0)$, y $\frac{2}{3}$ in $(0, 1)$. Así, al consultar la gráfica, hemos reducido el número de selecciones para ceros de 16 a tres. La división sintética se puede usar ahora para determinar que las únicas soluciones racionales son -2 y $-\frac{2}{3}$. ■

EJEMPLO 6 **Hallar el radio de un silo para granos**

Un silo para granos tiene la forma de un cilindro circular recto con una semiesfera unida en la parte superior. Si la altura total de la estructura es de 30 pies, encuentre el radio del cilindro que resulte en un volumen total de 1008π ft^3.

FIGURA 2



SOLUCIÓN Sea x el radio del cilindro, como se muestra en la figura 2. El volumen del cilindro es $\pi r^2 h = \pi x^2(30 - x)$, y el volumen de la semiesfera es $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi x^3$, de modo que despejamos x como sigue:

$$\begin{aligned} \pi x^2(30 - x) + \tfrac{2}{3}\pi x^3 &= 1008\pi && \text{el volumen total es } 1008\pi \\ 3x^2(30 - x) + 2x^3 &= 3024 && \text{multiplique por } \frac{3}{\pi} \\ 90x^2 - x^3 &= 3024 && \text{simplifique} \\ x^3 - 90x^2 + 3024 &= 0 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

Como el coeficiente principal del polinomio del lado izquierdo de la última ecuación es 1, cualquier raíz racional tiene la forma $c/1 = c$, donde c es un factor de 3024. Si factorizamos 3024 en primos, encontramos que $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$. Se deduce que algunos de los factores positivos de 3024 son

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 12, \quad \ldots .$$

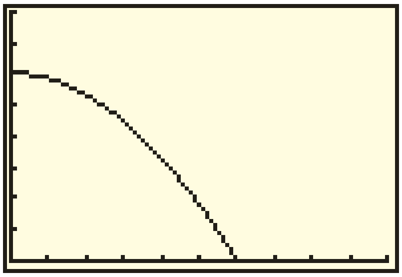
Para ayudar a decidir cuál de estos números probar primero, hagamos una estimación aproximada del radio al suponer que el silo tiene forma de cilindro circular recto de 30 pies de altura. En ese caso, el volumen sería $\pi r^2 h = 30\pi r^2$. Como este volumen debe ser cercano a 1008π, vemos que

$$30r^2 = 1008, \qquad \text{o} \qquad r^2 = 1008/30 = 33.6.$$

Esto sugiere que usaremos 6 en nuestra primera división sintética, como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & -90 & 0 & 3024 \\ & & 6 & -504 & -3024 \\ \hline & 1 & -84 & -504 & 0 \end{array}$$

FIGURA 3



Por lo tanto, 6 es una solución de la ecuación $x^3 - 90x^2 + 3024 = 0$.

Las dos soluciones restantes de la ecuación se pueden hallar al resolver la ecuación degradada $x^2 - 84x - 504 = 0$. Estos ceros son aproximadamente -5.62 y 89.62, ninguno de los cuales satisface las condiciones del problema. En consecuencia, el radio deseado es 6 pies.

La gráfica de $f(x) = x^3 - 90x^2 + 3024$ de la figura 3 muestra el cero $x = 6$. Una gráfica extendida también indicaría los otros dos ceros. ■

4.4 Ejercicios

Ejer. 1–10: Un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales y coeficiente principal 1 tiene el cero (o ceros) y grado dados. Exprese $f(x)$ como un producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales que sean irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

1 $3 + 2i$; grado 2

2 $-4 + 3i$; grado 2

3 $2, -2 - 5i$; grado 3

4 $-3, 1 - 7i$; grado 3

5 $-1, 0, 3 + i$; grado 4

6 $0, 2, -2 - i$; grado 4

7 $4 + 3i, -2 + i$; grado 4

8 $3 + 5i, -1 - i$; grado 4

9 $0, -2i, 1 - i$; grado 5

10 $0, 3i, 4 + i$; grado 5

Ejer. 11–16: Demuestre que la ecuación no tiene raíz racional.

11 $x^3 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$

12 $3x^3 - 4x^2 + 7x + 5 = 0$

13 $5x^4 + 3x^2 - 5$

14 $x^4 - 9x + 7$

15 $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$

16 $2x^5 + 3x^3 + 7 = 0$

Ejer. 17–18:

(a) Haga una lista de todos los posibles ceros racionales de f.

(b) Use esta lista para determinar un rectángulo de observación apropiado y genere una gráfica de f.

(c) Tomando la gráfica como base, recorte la lista de posibles ceros racionales a sólo aquellos que todavía sean candidatos razonables.

17 $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 11x + 6$

18 $f(x) = 8x^3 + 34x^2 + 33x + 9$

Ejer. 19–30: Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

19 $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$

20 $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

21 $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0$

22 $12x^3 + 8x^2 - 3x - 2 = 0$

23 $x^4 + 3x^3 - 30x^2 - 6x + 56 = 0$

24 $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18$

25 $2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + x - 3$

26 $3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6 = 0$

27 $6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$

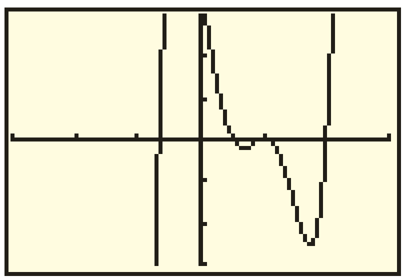
28 $6x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 6x = 0$

29 $8x^3 + 18x^2 + 45x + 27 = 0$

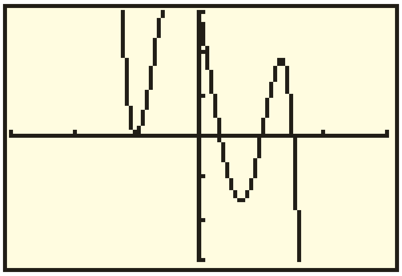
30 $3x^3 - x^2 + 11x - 20 = 0$

Ejer. 31–32: Encuentre una forma factorizada con coeficientes enteros del polinomio f que se muestra en la figura. Suponga que Xscl = Yscl = 1.

31 $f(x) = 6x^5 - 23x^4 + 24x^3 + x^2 - 12x + 4$



32 $f(x) = -6x^5 + 5x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 8x + 3$



Ejer. 33–34: La función polinomial *f* tiene sólo ceros reales. Use la gráfica de *f* para factorizarla.

33 $f(x) = 2x^3 - 25.4x^2 + 3.02x + 24.75$

34 $f(x) = 0.5x^3 + 0.65x^2 - 5.365x + 1.5375$

35 ¿Existe un polinomio de grado 3 con coeficientes reales que tenga ceros 1, -1 e i? Justifique su respuesta.

36 El polinomio $f(x) = x^3 - ix^2 + 2ix + 2$ tiene el número complejo i como cero, pero el conjugado $-i$ de i no es cero. ¿Por qué este resultado no contradice el teorema sobre ceros de par conjugado de un polinomio?

37 Si n es un entero positivo impar, demuestre que un polinomio de grado n con coeficiente real tiene al menos un cero real.

38 Si un polinomio de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

donde cada a_k es un entero, tiene una raíz racional r, demuestre que r es un entero y es factor de a_0.

39 **Construcción de una caja** De una pieza rectangular de cartón que tiene dimensiones 20×30 pulgadas, se ha de hacer una caja abierta al quitarle cuadrados de área a^2 de cada esquina y voltear hacia arriba los lados. (Vea ejercicio 43 de la sección 4.1.)

(a) Demuestre que hay dos cajas que tienen un volumen de 1000 pulgadas cúbicas.

(b) ¿Cuál caja tiene la menor área superficial?

40 **Construcción de una reja de embarque** El bastidor para una reja de embarque se va a construir con madera de 2×2 pulgadas por 24 pies de largo. Suponiendo que la reja debe tener extremos cuadrados de x pies de longitud, determine el (los) valor(es) de x que resulte(n) en un volumen de 4 ft^3. (Vea el ejercicio 43 de la sección 4.1.)

41 Un triángulo rectángulo tiene área de 30 ft^2 y una hipotenusa que mide 1 pie más que uno de sus lados.

(a) Si x denota la longitud de este lado, entonces demuestre que $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$.

(b) Demuestre que hay una raíz positiva de la ecuación en el inciso (a) y que esta raíz es menor que 13.

(c) Encuentre las longitudes de los lados del triángulo.

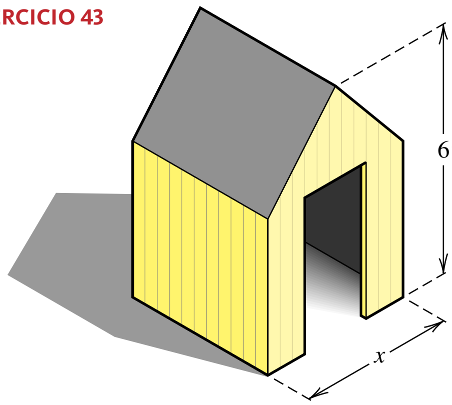
42 **Construcción de un tanque de almacenamiento** Un tanque de almacenamiento para gas propano se va a construir en forma de cilindro circular recto de 10 pies de altura, con una semiesfera unida en cada extremo. Determine el radio x para que el volumen resultante sea de 27π ft^3. (Vea ejemplo 8 de la sección 3.4.)

43 **Construcción de un cobertizo de almacenamiento** Un cobertizo de almacenamiento se va a construir en forma de cubo con un prisma triangular formando el techo (vea la figura). La longitud x de un lado del cubo está por determinarse.

(a) Si la altura total de la estructura es 6 pies, demuestre que su volumen V está dado por $V = x^3 + \frac{1}{2}x^2(6 - x)$.

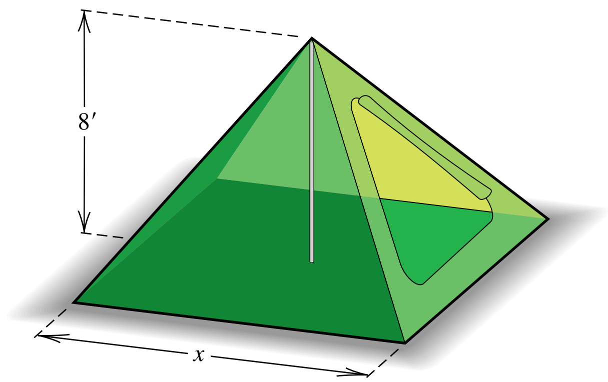
(b) Determine x para que el volumen sea de 80 ft^3.

EJERCICIO 43



44 **Diseño de una tienda** Una tienda de campaña hecha de lona se va a construir en forma de pirámide con base cuadrada. Un poste de 8 pies formará el soporte del centro, como se ilustra en la figura. Encuentre la longitud x de un lado de la base para que la cantidad total de lona necesaria para los costados y fondo sea de 384 ft^2.

EJERCICIO 44



Ejer. 45–46: Use una gráfica para determinar el número de soluciones no reales de la ecuación.

45 $x^5 + 1.1x^4 - 3.21x^3 - 2.835x^2 + 2.7x + 0.62 = -1$

46 $x^4 - 0.4x^3 - 2.6x^2 + 1.1x + 3.5 = 2$

Ejer. 47–48: Use una gráfica y división sintética para hallar todas las soluciones de la ecuación.

47 $x^4 + 1.4x^3 + 0.44x^2 - 0.56x - 0.96 = 0$

48 $x^5 + 1.1x^4 - 2.62x^3 - 4.72x^2 - 0.2x + 5.44 = 0$

49 **Densidad atmosférica** La densidad $D(h)$ (en $\mathrm{kg/m^3}$) de la atmósfera terrestre a una altitud de h metros se puede aproximar con

$$D(h) = 1.2 - ah + bh^2 - ch^3,$$

donde

$$a = 1.096 \times 10^{-4},\ b = 3.42 \times 10^{-9},\ c = 3.6 \times 10^{-14},$$

y $0 \le h \le 30{,}000$. Use la gráfica de D para aproximar la altitud h a la cual la densidad sea 0.4.

50 **Densidad de la Tierra** La densidad de la Tierra $D(h)$ (en $\mathrm{g/cm^3}$) h metros bajo la superficie se puede aproximar con

$$D(h) = 2.84 + ah + bh^2 - ch^3,$$

donde

$$a = 1.4 \times 10^{-3},\ b = 2.49 \times 10^{-6},\ c = 2.19 \times 10^{-9},$$

y $0 \le h \le 1{,}000$. Use la gráfica de D para aproximar la profundidad h a la que la densidad de la Tierra es 3.7.

4.5 Funciones racionales

Una función f es una **función racional** si

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios. El dominio de f está formado por todos los números reales excepto los ceros del denominador $h(x)$.

ILUSTRACIÓN **Funciones racionales y sus dominios**

- $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; *dominio*: toda x excepto $x = 2$
- $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 9}$; *dominio:* toda x excepto $x = \pm 3$
- $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 4}$; *dominio:* todos los números reales x

Previamente simplificamos las expresiones racionales como sigue:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} \overset{\text{si } x \neq 2}{=} \frac{x + 2}{1} = x + 2$$

Si hacemos $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y $g(x) = x + 2$, entonces el dominio de f es toda x excepto $x = 2$ y el dominio de g es todos los números reales. Estos dominios y la simplificación indicada líneas antes sugiere que las gráficas de f y g son iguales excepto para $x = 2$. ¿Qué le ocurre a la gráfica de f en $x = 2$? Hay un *hueco* en la gráfica, es decir, un solo punto está faltante. Para hallar el valor y del hueco, podemos sustituir 2 por x en la función reducida, que es simplemente $g(2) = 4$. Una gráfica de f se muestra en la figura 1.

Para alertar al usuario de la presencia de un hueco en la gráfica, algunas calculadoras de gráficas en realidad dibujan un hueco, como en la figura 1; otras simplemente omiten un píxel, como en la figura 2. La revisión de una tabla de valores para f (figura 3) indica que f está indefinida para $x = 2$.

Ahora llevamos nuestra atención a funciones racionales que no tienen un factor común en el numerador y el denominador.

FIGURA 1

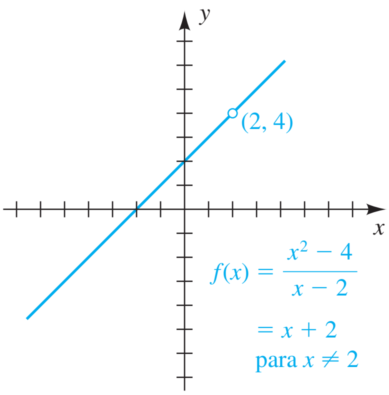


FIGURA 2

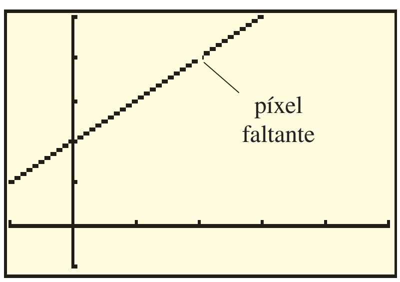
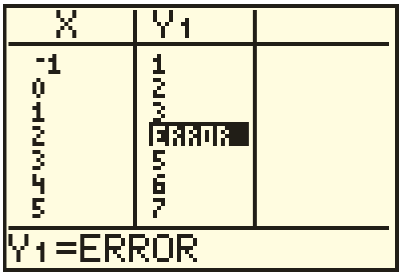


FIGURA 3



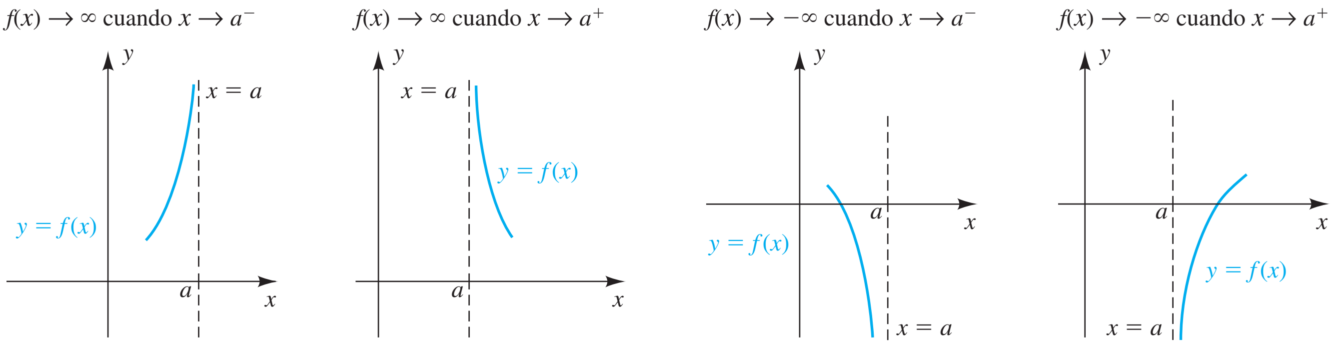
Al trazar la gráfica de una función racional f, es importante contestar las siguientes dos preguntas.

Pregunta 1 ¿Qué se puede decir de los valores de función $f(x)$ cuando x está cercana (pero no es igual) a un cero del denominador?

Pregunta 2 ¿Qué se puede decir de los valores de función $f(x)$ cuando x es positiva grande o cuando x es negativa grande?

Como veremos, si a es un cero del denominador, una de varias situaciones ocurre con frecuencia. Éstas se ven en la figura 4.

FIGURA 4



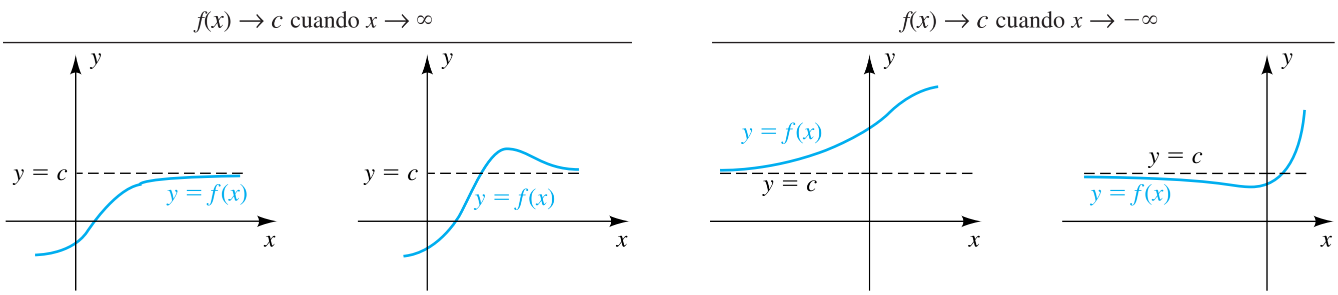
La recta discontinua $x = a$ de la figura 4 se denomina *asíntota vertical*, como en la siguiente definición.

Definición de asíntota vertical	La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si $$f(x) \to \infty \quad \text{o} \quad f(x) \to -\infty$$ cuando x se aproxima a a por la izquierda o por la derecha.

Entonces, la respuesta a la pregunta 1 es que si a es un cero del denominador de una función racional f, entonces la gráfica de f *puede* tener una asíntota vertical $x = a$. Hay funciones racionales donde éste *no es* el caso (como en la figura 1 de esta sección). Si el numerador y denominador no tienen factor común, entonces f *debe* tener una asíntota vertical $x = a$.

Consideremos a continuación la pregunta 2. Para x *grande positiva* o *grande negativa*, la gráfica de una función racional puede verse como cualquiera de la figura 5.

FIGURA 5



A la recta discontinua de la figura 5 se la denomina *asíntota horizontal*, como en la siguiente definición.

Definición de asíntota horizontal

La recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \to c \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{o cuando} \quad x \to -\infty$$

Así, la respuesta a la pregunta 2 es que $f(x)$ *puede* estar muy cerca de algún número c cuando x sea grande positiva o grande negativa; esto es, la gráfica de f puede tener una asíntota horizontal $y = c$. Hay funciones racionales donde éste *no es* el caso (como en los ejemplos 2(c) y 9).

Note que, como en los dibujos segundo y cuarto de la figura 5, la gráfica de f puede cruzar una asíntota horizontal.

En el siguiente ejemplo encontramos las asíntotas para la gráfica de una función racional sencilla.

EJEMPLO 1 **Trazar la gráfica de una función racional**

Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}.$$

SOLUCIÓN Empecemos por considerar la pregunta 1, expresada al principio de esta sección. El denominador $x - 2$ es cero en $x = 2$. Si x es cercana a 2 y $x > 2$, entonces $f(x)$ es grande positiva, como se indica en la tabla siguiente.

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.000 01
$\dfrac{1}{x-2}$	10	100	1000	10,000	100,000

Como podemos hacer $1/(x - 2)$ tan grande como se desee al tomar x cercana a 2 (y $x > 2$), vemos que

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 2^+.$$

Si $f(x)$ es cercana a 2 y $x < 2$, entonces $f(x)$ es grande negativa; por ejemplo, $f(1.9999) = -10{,}000$ y $f(1.99999) = -100{,}000$. Así,

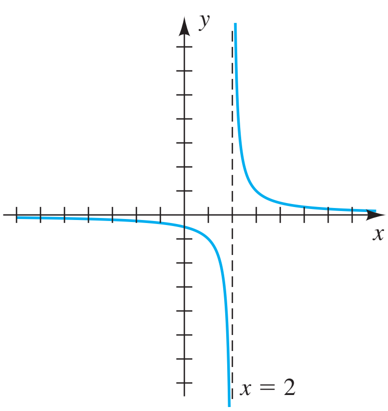
$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 2^-.$$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical para la gráfica de f, como se ilustra en la figura 6.

A continuación consideramos la pregunta 2. La tabla siguiente contiene algunos valores aproximados para $f(x)$ cuando x es grande y positiva.

x	100	1000	10,000	100,000	1,000,000
$\dfrac{1}{x-2}$ (aprox.)	0.01	0.001	0.0001	0.000 01	0.000 001

FIGURA 6



Podemos describir este comportamiento de $f(x)$ al escribir

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty.$$

Del mismo modo, $f(x)$ es cercana a 0 cuando x es grande negativa; por ejemplo, $f(-100{,}000) \approx -0.00001$. Así,

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty.$$

La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal, como se ve en la figura 6.

Ubicar los puntos $(1, -1)$ y $(3, 1)$ ayuda a darnos un trazo aproximado de la gráfica. ■

La función considerada en el ejemplo 1, $f(x)= 1/(x - 2)$, se asemeja con mucho a una de las funciones racionales más sencillas, la **función recíproca.** La función recíproca tiene ecuación $f(x) = 1/x$, asíntota vertical $x = 0$ (el eje y) y asíntota horizontal $y = 0$ (el eje x). La gráfica de la función recíproca (mostrada en el Apéndice I) es la gráfica de una *hipérbola* (que se estudia más adelante en el texto). Note que podemos obtener la gráfica de $y = 1/(x - 2)$ al desplazar la gráfica de $y = 1/x$ 2 unidades a la derecha .

El siguiente teorema es útil para hallar la asíntota horizontal para la gráfica de una función racional.

Teorema sobre asíntotas horizontales

Sea $f(x) = \dfrac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1x + b_0}$, donde $a_n \neq 0$ y $b_k \neq 0$.

(1) Si $n < k$, entonces el eje x (la recta $y = 0$) es la asíntota horizontal para la gráfica de f.

(2) Si $n = k$, entonces la recta $y = a_n/b_k$ (la razón entre coeficientes principales) es la asíntota horizontal para la gráfica de f.

(3) Si $n > k$, la gráfica de f no tiene asíntota horizontal. En cambio, $f(x) \to \infty$ o $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Las demostraciones para cada una de las partes de este teorema se pueden copiar de las soluciones del siguiente ejemplo. Con respecto a la parte (3), si $q(x)$ es el cociente obtenido al dividir el numerador entre el denominador, entonces $f(x) \to \infty$ si $q(x) \to \infty$ o $f(x) \to -\infty$ si $q(x) \to -\infty$.

EJEMPLO 2 **Hallar asíntotas horizontales**

Encuentre la asíntota horizontal para la gráfica de f, si existe.

(a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - x - 6}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{3x^2 - 4}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 + 1}$

SOLUCIÓN

(a) El grado del numerador, 1, es menor que el grado del denominador, 2, de modo que por la parte (1) del teorema sobre asíntotas horizontales, el eje x es una asíntota horizontal. Para verificar esto directamente, dividimos el numera-

dor y el denominador del cociente entre x^2 (porque 2 es la potencia mayor de x en el denominador), para obtener

$$f(x) = \frac{\dfrac{3x - 1}{x^2}}{\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2}} = \frac{\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}} \quad \text{para} \quad x \neq 0.$$

Si x es grande positiva o grande negativa, entonces $3/x$, $1/x^2$, $1/x$ y $6/x^2$ son cercanas a 0 y por lo tanto

$$f(x) \approx \frac{0 - 0}{1 - 0 - 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

En consecuencia,

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{o cuando} \quad x \to -\infty.$$

Como $f(x)$ es la coordenada y de un punto sobre la gráfica, el último enunciado significa que la recta $y = 0$ (esto es, el eje x) es una asíntota horizontal.

(b) Si $f(x) = (5x^2 + 1)/(3x^2 - 4)$, entonces el numerador y el denominador tienen el mismo grado, 2, y los coeficientes principales son 5 y 3, respectivamente. En consecuencia, por la parte (2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{5}{3}$ es la asíntota horizontal. También podríamos demostrar que $y = \frac{5}{3}$ es la asíntota horizontal al dividir el numerador y el denominador de $f(x)$ entre x^2, como en el inciso(a).

(c) El grado del numerador, 4, es mayor que el grado del denominador, 2, de modo que, por la parte (3) del teorema sobre asíntotas horizontales, la gráfica no tiene asíntota horizontal. Si usamos división larga, obtenemos

$$f(x) = 2x^2 - 5 + \frac{10}{x^2 + 1}.$$

Cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, el cociente $2x^2 - 5$ aumenta sin límite y $10/(x^2 + 1) \to 0$. Por lo tanto, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. ■

A continuación presentamos una lista de algunas guías para trazar la gráfica de una función racional. Su uso se ilustrará en los ejemplos 3, 6 y 7.

Directices para trazar la gráfica de una función racional

Suponga que $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios que no tienen factor común.

1 Encuentre los puntos de intersección con el eje x; es decir, los ceros reales del numerador $g(x)$, y localice los puntos correspondientes sobre el eje x.

2 Encuentre los ceros reales del denominador $h(x)$. Para cada cero real a, trace la asíntota vertical $x = a$ con guiones.

3 Encuentre el punto de intersección $f(0)$ con el eje y, si existe, y localice el punto $(0, f(0))$ en el eje y.

4 Aplique el teorema sobre asíntotas horizontales. Si hay una asíntota horizontal $y = c$, trácela con guiones.

(continúa)

Directrices para trazar la gráfica de una función racional (continuación)

5 Si hay una asíntota horizontal $y = c$, determine si cruza la gráfica. Las coordenadas x de los puntos de intersección son las soluciones de la ecuación $f(x) = c$. Localice estos puntos, si existen.

6 Trace la gráfica de f en cada una de las regiones del plano xy determinadas por las asíntotas verticales en la directriz 2. Si es necesario, use el signo de valores de función específicos para saber si la gráfica está arriba o abajo del eje x o de la asíntota horizontal. Use la guía 5 para determinar si la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal desde arriba o desde abajo.

En los ejemplos siguientes, nuestro principal objetivo es determinar la forma general de la gráfica, poniendo especial atención a la forma en que la gráfica se aproxima a las asíntotas. Localizaremos sólo unos pocos puntos, como los correspondientes a los puntos de intersección con los ejes x y y o la intersección de la gráfica con una asíntota horizontal.

EJEMPLO 3 **Trazar la gráfica de una función racional**

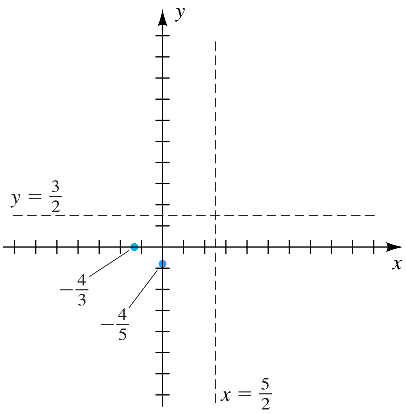
Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{3x + 4}{2x - 5}.$$

SOLUCIÓN Seguimos las directrices.

Directriz 1 Para hallar los puntos de intersección con el eje x buscamos los ceros del numerador. Resolver $3x + 4 = 0$ nos da $x = -\frac{4}{3}$ y localizamos el punto $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ en el eje x, como se ve en la figura 7.

FIGURA 7



Directriz 2 El denominador tiene el cero $\frac{5}{2}$, de modo que la recta $x = \frac{5}{2}$ es una asíntota vertical. Trazamos esta recta con guiones, como en la figura 7.

Directriz 3 El punto de intersección con el eje y es $f(0) = -\frac{4}{5}$ y localizamos el punto $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$ en la figura 7.

Directriz 4 El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado, 1. Los coeficientes principales son 3 y 2, de modo que por la parte (2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{3}{2}$ es una asíntota horizontal. Trazamos la recta con guiones en la figura 7.

Directriz 5 Las coordenadas x de los puntos donde la gráfica cruza la asíntota horizontal $y = \frac{3}{2}$ son soluciones de la ecuación $f(x) = \frac{3}{2}$. Resolvemos esta ecuación como sigue:

$$\frac{3x + 4}{2x - 5} = \frac{3}{2} \qquad \text{sea } f(x) = \frac{3}{2}$$

$$2(3x + 4) = 3(2x - 5) \qquad \text{multiplique por } 2(2x - 5)$$

$$6x + 8 = 6x - 15 \qquad \text{multiplique}$$

$$8 = -15 \qquad \text{reste } 6x$$

Como $8 \neq -15$ para cualquier valor de x, este resultado indica que la gráfica de f *no* cruza la asíntota horizontal. Como ayuda en el trazo, podemos ahora considerar la asíntota horizontal como una frontera que no se puede cruzar.

FIGURA 8

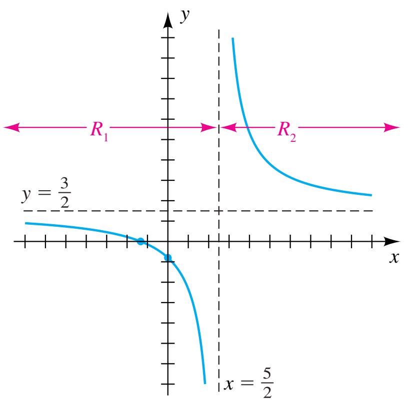
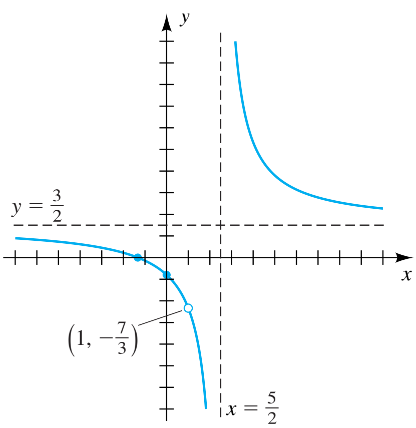


FIGURA 9



Directriz 6 La asíntota vertical de la figura 7 divide el plano xy en dos regiones:

$$R_1: \quad \text{la región a la izquierda de } x = \tfrac{5}{2}$$
$$R_2: \quad \text{la región a la derecha de } x = \tfrac{5}{2}$$

Para R_1 tenemos los dos puntos $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ y $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$ por los que la gráfica de f debe pasar, así como las dos asíntotas a las que la gráfica debe aproximarse. Esta parte de f se muestra en la figura 8.

Para R_2 la gráfica debe aproximarse de nuevo a las dos asíntotas. Como la gráfica no puede cruzar el eje x (no hay punto de intersección con el eje x en R_2), debe estar arriba de la asíntota horizontal, como se ve en la figura 8. ■

EJEMPLO 4 **Trazar una gráfica que tenga un hueco**

Trace la gráfica de g si

$$g(x) = \frac{(3x + 4)(x - 1)}{(2x - 5)(x - 1)}.$$

SOLUCIÓN El dominio de g es todos los números reales excepto $\frac{5}{2}$ y 1. Si g se reduce, obtenemos la función f del ejemplo previo. La única diferencia entre las gráficas de f y g es que g tiene un hueco en $x = 1$. Como $f(1) = -\frac{7}{3}$, sólo necesitamos hacer un hueco en la gráfica de la figura 8 para obtener la gráfica de g en la figura 9. ■

EJEMPLO 5 **Hallar una ecuación de una función racional que satisfaga condiciones prescritas**

Encuentre una ecuación de una función racional f que satisfaga las condiciones siguientes:

punto de intersección con el eje x: 4, asíntota vertical: $x = -2$,
asíntota horizontal: $y = -\frac{3}{5}$ y un hueco en $x = 1$

SOLUCIÓN Un punto de intersección con el eje x de 4 implica que $x - 4$ debe ser un factor en el numerador, y una asíntota vertical de $x = -2$ implica que $x + 2$ es un factor del denominador. Por lo tanto, podemos empezar con la forma

$$\frac{x - 4}{x + 2}.$$

La asíntota horizontal es $y = -\frac{3}{5}$. Podemos multiplicar el numerador por -3 y el denominador por 5 para obtener la forma

$$\frac{-3(x - 4)}{5(x + 2)}.$$

(*No escriba* $(-3x - 4)/(5x + 2)$, porque eso cambiaría el punto de intersección con el eje x y la asíntota vertical.) Por último, como hay un hueco en $x = 1$, debemos tener un factor de $x - 1$ en el numerador y en el denominador. Por lo tanto, una ecuación para f es

$$f(x) = \frac{-3(x - 4)(x - 1)}{5(x + 2)(x - 1)} \quad \text{lo que equivale a,} \quad f(x) = \frac{-3x^2 + 15x - 12}{5x^2 + 5x - 10}.$$

■

EJEMPLO 6 **Trazar la gráfica de una función racional**

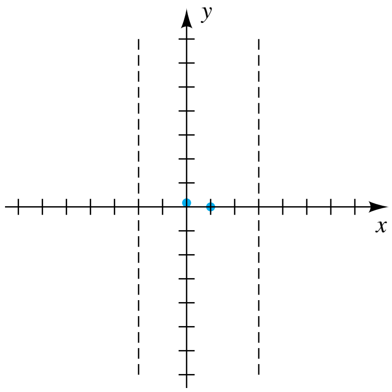
Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}.$$

SOLUCIÓN Es útil expresar el numerador y el denominador en forma factorizada. Así, empezamos por escribir

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6} = \frac{x - 1}{(x + 2)(x - 3)}.$$

FIGURA 10



Directriz 1 Para hallar los puntos de intersección con el eje x encontramos los ceros del numerador. Resolviendo $x - 1 = 0$ nos da $x = 1$ y localizamos el punto $(1, 0)$ en el eje x, como se ve en la figura 10.

Directriz 2 El denominador tiene ceros -2 y 3. Por lo tanto, las rectas $x = -2$ y $x = 3$ son asíntotas verticales; las trazamos con guiones, como en la figura 10.

Directriz 3 El punto de intersección con el eje y es $f(0) = \frac{1}{6}$ y localizamos el punto $\left(0, \frac{1}{6}\right)$, mostrado en la figura 10.

Directriz 4 El grado del numerador de $f(x)$ es menor que el grado del denominador, entonces, por la parte (1) del teorema sobre asíntotas horizontales, el eje x es la asíntota horizontal.

Directriz 5 Los puntos donde la gráfica cruza la asíntota horizontal (el eje x) hallados en la directriz 4 corresponden a los puntos de intersección con el eje x. Ya localizamos el punto $(1, 0)$ en la directriz 1.

Directriz 6 Las asíntotas verticales de la figura 10 dividen el plano xy en tres regiones:

R_1: la región a la izquierda de $x = -2$

R_2: la región entre $x = -2$ y $x = 3$

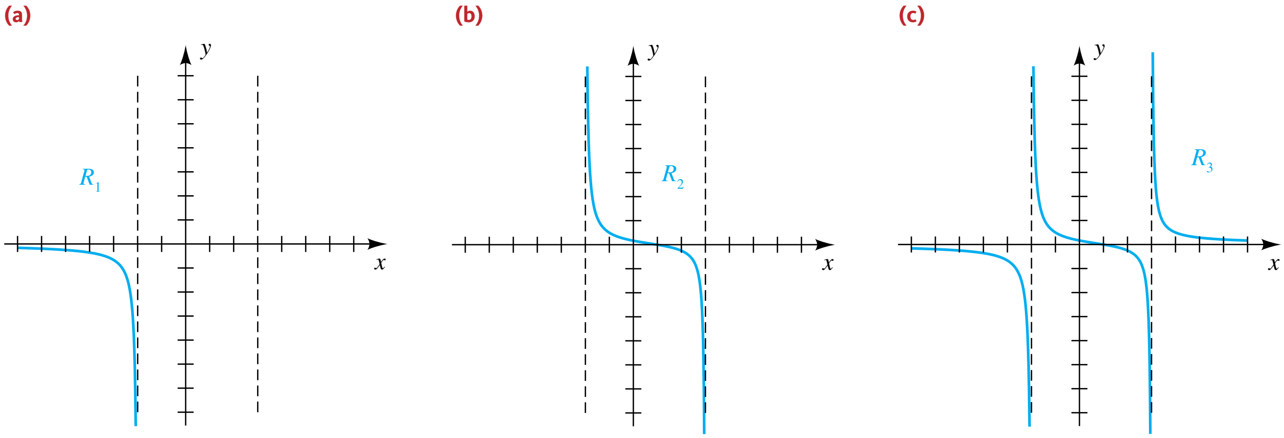
R_3: la región a la derecha de $x = 3$

Para R_1 tenemos $x < -2$. Sólo hay dos opciones para la forma de la gráfica de f en R_1: cuando $x \to -\infty$ la gráfica se aproxima al eje x ya sea por arriba o por abajo. Para determinar cuál opción es correcta, examinaremos el *signo* de un valor típico de la función en R_1. Escogiendo -10 para x, usamos la forma factorizada de $f(x)$ para hallar el signo de $f(-10)$ (este proceso es semejante al empleado en la sección 2.7):

$$f(-10) = \frac{(-)}{(-)(-)} = -$$

El valor negativo de $f(-10)$ indica que la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal por *abajo* cuando $x \to -\infty$. Además, cuando $x \to -2^-$, la gráfica se extiende *hacia abajo;* esto es, $f(x) \to -\infty$. Un trazo de f en R_1 se muestra en la figura 11(a).

FIGURA 11



En R_2 tenemos $-2 < x < 3$ y la gráfica cruza el eje x en $x = 1$. Dado que, por ejemplo, $f(0)$ es positiva, se deduce que la gráfica se encuentra *arriba* del eje x si $-2 < x < 1$. Así, cuando $x \to -2^+$, la gráfica se extiende *hacia arriba*; esto es, $f(x) \to \infty$. Como se puede demostrar que $f(2)$ es negativa, la gráfica se encuentra *abajo* del eje x si $1 < x < 3$. En consecuencia, cuando $x \to 3^-$, la gráfica se extiende *hacia abajo*; esto es, $f(x) \to -\infty$. Un trazo de f en R_2 se muestra en la figura 11(b).

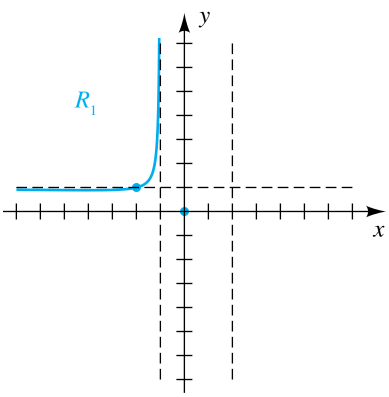
Por último, en R_3, $x > 3$ y la gráfica no cruza el eje x. En vista de que, por ejemplo, se puede demostrar que $f(10)$ es positiva, la gráfica se encuentra *arriba* del eje x. Se deduce que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 3^+$ y que la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal por *arriba* cuando $x \to \infty$. La gráfica de f se traza en la figura 11(c). ■

EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de una función racional

Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}.$$

FIGURA 12



SOLUCIÓN La factorización del denominador nos da

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2}{(x + 1)(x - 2)}.$$

De nuevo seguimos las directrices.

Directriz 1 Para hallar los puntos de intersección con el eje x buscamos los ceros del numerador. Resolviendo $x^2 = 0$ nos da $x = 0$ y trazamos el punto (0, 0) en el eje x, como se muestra en la figura 12.

Directriz 2 El denominador tiene ceros -1 y 2. Por lo tanto, las rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales y las trazamos con guiones, como en la figura 12.

Directriz 3 El punto de intersección con el eje y es $f(0) = 0$. Esto nos da el mismo punto (0, 0) hallado en la directriz 1.

(continúa)

Directriz 4 El numerador y denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado, y los coeficientes principales son ambos 1. Por lo tanto, por la parte (2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{1}{1} = 1$ es una asíntota horizontal. Trazamos la recta con guiones, como en la figura 12.

Directriz 5 Las coordenadas x de los puntos donde la gráfica cruza la asíntota horizontal $y = 1$ son soluciones de la ecuación $f(x) = 1$. Resolvemos esta ecuación como sigue:

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1 \qquad \text{sea } f(x) = 1$$

$$x^2 = x^2 - x - 2 \qquad \text{multiplique por } x^2 - x - 2$$

$$x = -2 \qquad \text{reste } x^2 \text{ y sume } x$$

Este resultado indica que la gráfica cruza la asíntota horizontal $y = 1$ sólo en $x = -2$; por lo tanto, trazamos el punto $(-2, 1)$ mostrado en la figura 12.

Directriz 6 Las asíntotas verticales de la figura 12 dividen el plano xy en tres regiones:

R_1: la región a la izquierda de $x = -1$

R_2: la región entre $x = -1$ y $x = 2$

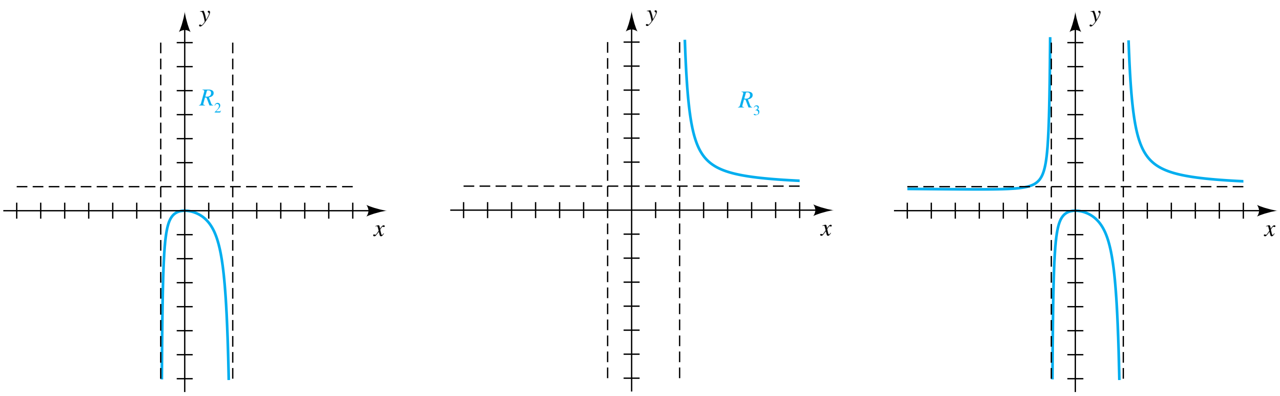
R_3: la región a la derecha de $x = 2$

Para R_1 primero consideremos la parte de la gráfica que corresponde a $-2 < x < -1$. Del punto $(-2, 1)$ en la asíntota horizontal, la gráfica debe extenderse *hacia arriba* cuando $x \to -1^-$ (no puede extenderse hacia abajo, porque no hay punto de intersección con el eje x entre $x = -2$ y $x = -1$). Cuando $x \to -\infty$, habrá un punto bajo en la gráfica entre $y = 0$ y $y = 1$, y entonces la gráfica se aproximará a la asíntota horizontal $y = 1$ por *abajo*. Es difícil ver dónde se presenta el punto bajo en la figura 12 porque los valores de función están muy cercanos entre sí. Usando cálculo, se puede demostrar que el punto bajo es $\left(-4, \frac{8}{9}\right)$.

En R_2 tenemos $-1 < x < 2$ y la gráfica cruza el eje x en $x = 0$. Como la función no cruza la asíntota horizontal en esta región, sabemos que la gráfica se extiende *hacia abajo* cuando $x \to -1^+$ y cuando $x \to 2^-$, como se ve en la figura 13(a).

FIGURA 13

(a) **(b)** **(c)**



En R_3 la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal $y = 1$ (por arriba o por abajo) cuando $x \to \infty$. Además, la gráfica debe extenderse *hacia arriba* cuando $x \to 2^+$ porque no hay puntos de intersección con el eje x en R_3. Esto implica que cuando $x \to \infty$, la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal por *arriba*, como en la figura 13(b).

La gráfica de f se traza en la figura 13(c). ■

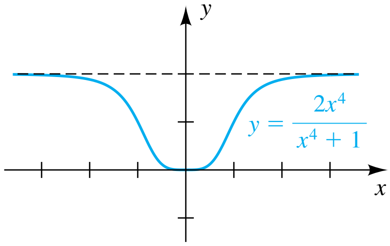
En las soluciones restantes no escribiremos formalmente cada directriz.

EJEMPLO 8 **Trazar la gráfica de una función racional**

Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 1}.$$

FIGURA 14



SOLUCIÓN Note que como $f(-x) = f(x)$, la función es par y por lo tanto la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

La gráfica cruza el eje x en (0, 0). Como el denominador de $f(x)$ no tiene cero real, la gráfica no tiene asíntota vertical.

El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado. Como los coeficientes principales son 2 y 1, respectivamente, la recta $y = \frac{2}{1} = 2$ es la asíntota horizontal. La gráfica no cruza la asíntota horizontal $y = 2$, porque la ecuación $f(x) = 2$ no tiene solución real.

Localizar los puntos (1, 1) y $\left(2, \frac{32}{17}\right)$ y hacer uso de la simetría que lleva al trazo de la figura 14. ■

Una **asíntota oblicua** (o **inclinada**) para una gráfica es una recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, tal que la gráfica se aproxima a esta recta cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. (Si la gráfica es una recta, la consideramos su propia asíntota.) Si la función racional $f(x) = g(x)/h(x)$ para polinomios $g(x)$ y $h(x)$ y *si el grado de* $g(x)$ *es uno mayor que el grado de* $h(x)$, entonces la gráfica de f tiene una asíntota oblicua. Para hallar esta asíntota oblicua podemos usar división larga para expresar $f(x)$ en la forma

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = (ax + b) + \frac{r(x)}{h(x)},$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $h(x)$. De la parte (1) del teorema sobre asíntotas horizontales,

$$\frac{r(x)}{h(x)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \ \text{ o cuando } \quad x \to -\infty.$$

En consecuencia, $f(x)$ se aproxima a la recta $y = ax + b$ cuando x aumenta o disminuye sin límite; esto es, $y = ax + b$ es una asíntota oblicua.

EJEMPLO 9 **Hallar una asíntota oblicua**

Encuentre todas las asíntotas y trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 4}.$$

FIGURA 15

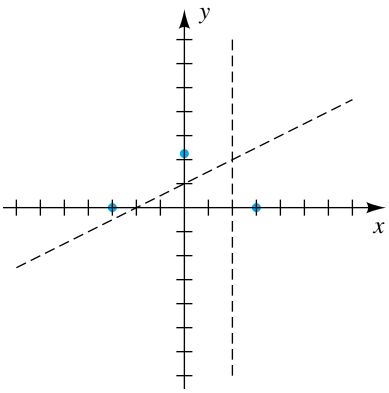
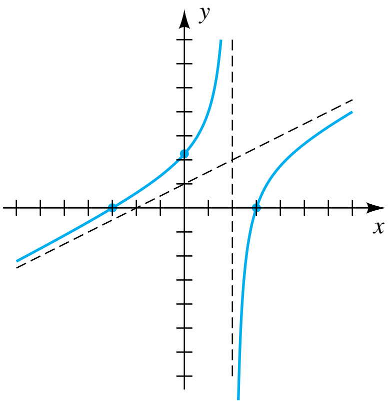


FIGURA 16



SOLUCIÓN Una asíntota vertical se presenta si $2x - 4 = 0$ (esto es, si $x = 2$).

El grado del numerador de $f(x)$ es mayor que el grado del denominador. Por lo tanto, por la parte (3) del teorema sobre asíntotas horizontales, no hay asíntota *horizontal*; pero como el grado del numerador, 2, es *uno* mayor que el grado del denominador, 1, la gráfica tiene una asíntota *oblicua.* Por división larga obtenemos

$$\begin{array}{r l l}
 & \tfrac{1}{2}x + 1 & \\
2x - 4 \,\big) & x^2 \qquad - 9 & \\
 & x^2 - 2x & (\tfrac{1}{2}x)(2x - 4) \\
 & 2x - 9 & \text{reste} \\
 & 2x - 4 & (1)(2x - 4) \\
 & - 5 & \text{reste}
\end{array}$$

Por lo tanto, $$\frac{x^2 - 9}{2x - 4} = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) - \frac{5}{2x - 4}.$$

Como indicamos en la discusión que precede a este ejemplo, la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ es una asíntota oblicua. Esta recta y la asíntota vertical $x = 2$ se trazan con guiones en la figura 15.

Los puntos de intersección de la gráfica con el eje x son las soluciones de $x^2 - 9 = 0$ y por lo tanto son 3 y -3. El punto de intersección con el eje y es $f(0) = \frac{9}{4}$. Los puntos correspondientes se trazan en la figura 15. Ahora podemos demostrar que la gráfica tiene la forma indicada en la figura 16. ■

En el ejemplo 9, la gráfica de f se aproxima a la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ *en forma asintótica* cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. Las gráficas de funciones racionales pueden aproximar tipos diferentes de curvas en forma asintótica. Por ejemplo, si

$$f(x) = \frac{x^4 - x}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x},$$

Entonces para valores grandes de $|x|$, $1/x \approx 0$ y por lo tanto $f(x) \approx x^2$. Así, la gráfica de f se aproxima a la parábola $y = x^2$ en forma asintótica cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. En general, si $f(x) = g(x)/h(x)$ y si $q(x)$ es el cociente obtenido al dividir $g(x)$ entre $h(x)$, entonces la gráfica de f se aproxima a la gráfica de $y = q(x)$ en forma asintótica cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. Nos podemos referir a la función $y = q(x)$ como una asíntota cuadrática, una asíntota cúbica o, en general, una *asíntota curvilínea.*

EJEMPLO 10 Trazar la gráfica de una función racional

Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{9x^3 - 9x^2 - 22x + 8},$$

y encuentre ecuaciones de las asíntotas verticales.

SOLUCIÓN Comenzamos por hacer las asignaciones

$$Y_1 = x^2 - x, \quad Y_2 = 9x^3 - 9x^2 - 22x + 8 \quad \text{y} \quad Y_3 = Y_1/Y_2.$$

FIGURA 17
$[-2, 3]$ por $[-1, 1]$

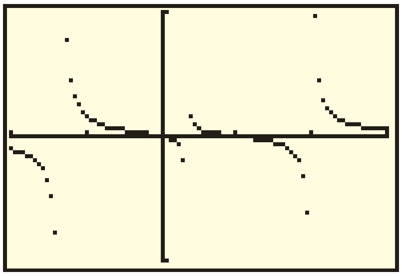
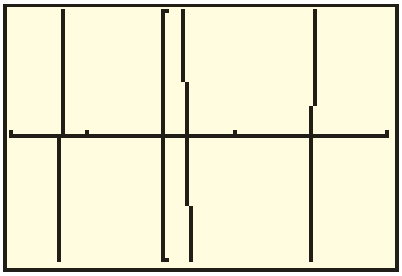


FIGURA 18
$[-2, 3]$ por $[-1, 1]$



Seleccionando sólo Y_3 para ser graficada (apague Y_1 y Y_2) y usando una pantalla estándar, obtenemos una gráfica que no nos da indicación de la verdadera forma de f. Cambiar a una pantalla de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$ nos da una sugerencia de que las asíntotas verticales están confinadas al intervalo $-2 < x < 3$.

Usando una pantalla de $[-2, 3]$ por $[-1, 1]$ y cambiando al *modo de punto* (para no graficar la función al otro lado de las asíntotas verticales) nos lleva al trazo de la figura 17. Como el grado del numerador, 2, es menor que el grado del denominador, 3, sabemos que la asíntota horizontal es el eje x. Los ceros del numerador, 0 y 1, son los únicos puntos de intersección con el eje x.

Para determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales, abandonamos la gráfica de Y_3 y examinamos la gráfica de Y_2, buscando sus ceros. Graficar Y_2 con la misma pantalla, pero usando el *modo conectado*, nos da la figura 18.

Por el teorema sobre ceros racionales de un polinomio, sabemos que las posibles raíces racionales de $9x^3 - 9x^2 - 22x + 8 = 0$ son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\tfrac{1}{3}, \pm\tfrac{2}{3}, \pm\tfrac{4}{3}, \pm\tfrac{8}{3}, \pm\tfrac{1}{9}, \pm\tfrac{2}{9}, \pm\tfrac{4}{9}, \pm\tfrac{8}{9}.$$

En la gráfica vemos que la única opción razonable para el cero en el intervalo $(-2, -1)$ es $-\frac{4}{3}$. El número 2 parece ser un cero, y usando cero o una característica raíz indica que $\frac{1}{3}$ es también buen candidato para un cero. Podemos demostrar que $-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}$ y 2 son ceros de Y_2 con el uso de división sintética. Así, las ecuaciones de las asíntotas verticales son

$$x = -\tfrac{4}{3}, \quad x = \tfrac{1}{3} \quad \text{y} \quad x = 2.$$ ■

Las gráficas de funciones racionales se pueden hacer cada vez más complicadas cuando los grados de los polinomios en el numerador y denominador aumentan. Técnicas desarrolladas en cálculo son muy útiles para lograr un tratamiento más completo de esas gráficas.

Las fórmulas que representan cantidades físicas pueden determinar funciones racionales. Por ejemplo, considere la ley de Ohm en teoría eléctrica, que expresa que $I = V/R$, donde R es la resistencia (en ohms) de un conductor, V es la diferencia de potencial (en volts) en las terminales del conductor, e I es la corriente (en amperes) que circula por el conductor. La resistencia de ciertas aleaciones se aproxima a cero cuando la temperatura se aproxima al cero absoluto (aproximadamente $-273°C$), y la aleación se convierte en *superconductor* de electricidad. Si el voltaje V es fijo, entonces, para ese superconductor

$$I = \frac{V}{R} \to \infty \quad \text{cuando} \quad R \to 0^+;$$

esto es, cuando R se aproxima a 0, la corriente aumenta sin límite. Los superconductores permiten el uso de corrientes muy grandes en plantas generadoras y motores. También tienen aplicaciones en transporte experimental terrestre de alta velocidad, donde los intensos campos magnéticos producidos por imanes superconductores hacen posible que los trenes leviten para que en esencia no haya fricción entre las ruedas y la vía. Quizá el uso más importante de superconductores es en circuitos para computadoras, porque producen muy poco calor.

4.5 Ejercicios

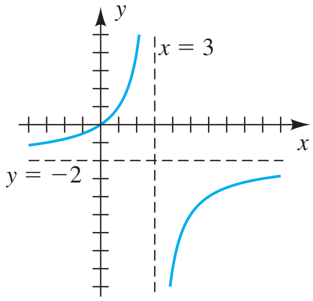
Ejer. 1–2: (a) Trace la gráfica de *f*. (b) Encuentre el dominio *D* y el rango *R* de *f*. (c) Encuentre los intervalos en los que *f* es creciente o decreciente.

1 $f(x) = \dfrac{4}{x}$

2 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ejer. 3–4: Use la gráfica para completar las afirmaciones.

3



(a) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____.

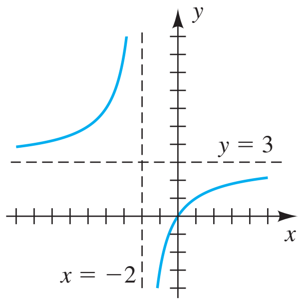
(b) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

(c) Cuando $x \to 3^-$, $f(x) \to$ ____.

(d) Cuando $x \to 3^+$, $f(x) \to$ ____.

(e) Cuando $x \to 0$, $f(x) \to$ ____.

4



(a) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____.

(b) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

(c) Cuando $x \to -2^-$, $f(x) \to$ ____.

(d) Cuando $x \to -2^+$, $f(x) \to$ ____.

(e) Cuando $x \to 0$, $f(x) \to$ ____.

Ejer. 5–6: Utilice notación de flecha para describir el comportamiento final de la función.

5 (a) $f(x) = \dfrac{2}{x - 3}$ (b) $f(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$

6 (a) $f(x) = \dfrac{-3}{x + 2}$ (b) $f(x) = \dfrac{-3x}{x + 2}$

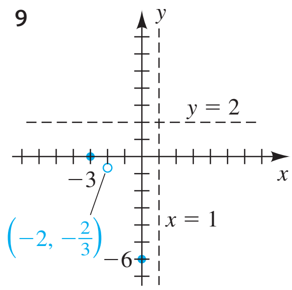
Ejer. 7–8: Identifique cualesquiera asíntotas verticales, horizontales y huecos.

7 $f(x) = \dfrac{-2(x + 5)(x - 6)}{(x - 3)(x - 6)}$

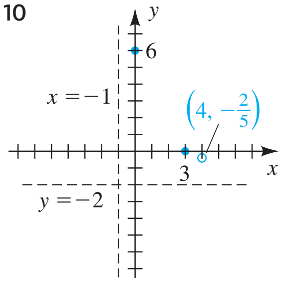
8 $f(x) = \dfrac{2(x + 4)(x + 2)}{5(x + 2)(x - 1)}$

Ejer. 9–10: Todas las asíntotas, puntos de intersección y huecos de una función racional *f* están marcados en la figura. Trace una gráfica de *f* y encuentre una ecuación para *f*.

9



10



Ejer. 11–36: Trace la gráfica de *f*.

11 $f(x) = \dfrac{3}{x - 4}$

12 $f(x) = \dfrac{-3}{x + 3}$

13 $f(x) = \dfrac{-3x}{x + 2}$

14 $f(x) = \dfrac{4x}{2x - 5}$

15 $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

16 $f(x) = \dfrac{5x + 3}{3x - 7}$

17 $f(x) = \dfrac{(4x - 1)(x - 2)}{(2x + 3)(x - 2)}$

18 $f(x) = \dfrac{(5x + 3)(x + 1)}{(3x - 7)(x + 1)}$

19 $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - x - 6}$

20 $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

21 $f(x) = \dfrac{-4}{(x - 2)^2}$

22 $f(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^2}$

23 $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 1}$

24 $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 - 4}$

25 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 + x - 12}$

26 $f(x) = \dfrac{-3x^2 - 3x + 6}{x^2 - 9}$

27 $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x - 4}$

28 $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x - 6}$

29 $f(x) = \dfrac{3(x + 3)(x - 4)}{(x + 2)(x - 1)}$

30 $f(x) = \dfrac{2(x + 6)(x - 4)}{(x + 5)(x - 2)}$

31 $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 10x - 12}{x^2 + x}$

32 $f(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 6}{x^2 - 2x}$

33 $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - 4x}$ **34** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 9x}$

35 $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2 + 1}$ **36** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

Ejer. 37–40: Encuentre la asíntota oblicua y trace la gráfica de *f*.

37 $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 1}$ **38** $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x - 2}$

39 $f(x) = \dfrac{8 - x^3}{2x^2}$ **40** $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 9}$

Ejer. 41–42: Encuentre la asíntota de la curva.

41 $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 - 5}{x^2 - 2}$ **42** $f(x) = \dfrac{x^5 - 3x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 3}$

Ejer. 43–50: Simplifique *f*(*x*) y trace la gráfica de *f*.

43 $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2}$ **44** $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}$

45 $f(x) = \dfrac{x - 1}{1 - x^2}$ **46** $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

47 $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

48 $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x - 2}$

49 $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

50 $f(x) = \dfrac{(x^2 + x)(2x - 1)}{(x^2 - 3x + 2)(2x - 1)}$

Ejer. 51–54: Encuentre una ecuación de una función racional *f* que satisfaga las condiciones dadas.

51 asíntota vertical: $x = 5$
asíntota horizontal: $y = -1$
intersección con el eje x: 2

52 asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 0$
asíntota horizontal: $y = 0$
intersección con el eje x: 2; $f(3) = 1$

53 asíntotas verticales: $x = -3$, $x = 1$
asíntota horizontal: $y = 0$
intersección con el eje x: -1; $f(0) = -2$
hueco en $x = 2$

54 síntotas verticales: $x = -1$, $x = 3$
asíntota horizontal: $y = 2$
puntos de intersección con el eje x: -2, 1
hueco en $x = 0$

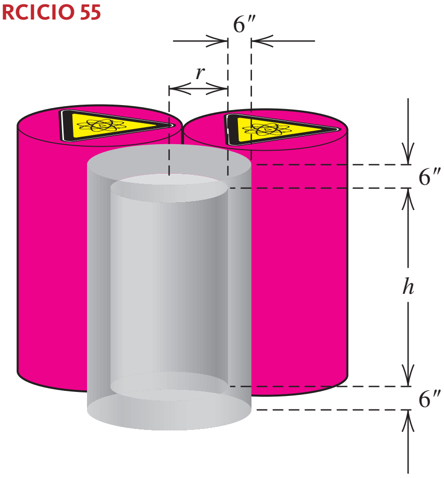
55 **Un recipiente para desechos radiactivos** Un recipiente cilíndrico para almacenar desechos radiactivos se va a construir de plomo. Este recipiente debe tener paredes de 6 pulgadas de grueso. El volumen del cilindro exterior mostrado en la figura debe ser 16π ft^3.

(a) Exprese la altura h del interior del cilindro como función del radio interior r.

(b) Demuestre que el volumen interior $V(r)$ está dado por
$$V(r) = \pi r^2 \left[\frac{16}{(r + 0.5)^2} - 1 \right].$$

(c) ¿Qué valores de r deben excluirse en el inciso (b)?

EJERCICIO 55



56 **Dosis de medicamento** La regla de Young es una fórmula que se usa para adaptar los niveles de dosis de medicamento de adultos para niños. Si a denota la dosis de adultos (en miligramos) y si t es la edad del niño (en años), entonces la dosis y para niño está dada por la ecuación $y = ta/(t + 12)$. Trace la gráfica de esta ecuación para $t > 0$ y $a = 100$.

57 **Concentración de sal** Agua salada de concentración 0.1 libras de sal por galón entra en un gran tanque que inicialmente contiene 50 galones de agua pura.

(a) Si el caudal de agua salada que entra al tanque es 5 gal/min, encuentre el volumen $V(t)$ de agua y la cantidad $A(t)$ de sal en el tanque después de t minutos.

(b) Encuentre una fórmula para la concentración de sal $c(t)$ (en lb/gal) después de t minutos.

(c) Discuta la variación de $c(t)$ cuando $t \to \infty$.

58 **Cantidad de lluvia** El número total de pulgadas $R(t)$ de lluvia durante una tormenta de duración t horas se puede aproximar con

$$R(t) = \frac{at}{t + b},$$

donde a y b son constantes positivas que dependen del lugar geográfico.

(a) Discuta la variación de $R(t)$ cuando $t \to \infty$.

(b) La intensidad I de lluvia (en pulgadas/hora) está definida por $I = R(t)/t$. Si $a = 2$ y $b = 8$, trace la gráfica de R e I en el mismo plano de coordenadas para $t > 0$.

59 **Propagación de salmón** Para una población particular de salmón, la relación entre el número S de reproductores y el número R de crías que sobreviven hasta la madurez está dada por la fórmula

$$R = \frac{4500S}{S + 500}.$$

(a) ¿En qué condiciones es $R > S$?

(b) Encuentre el número de reproductores que darían 90% del mayor número posible de crías que sobrevivan hasta la madurez.

(c) Trabaje el inciso (b) con 80% sustituyendo a 90%.

(d) Compare los resultados para S y R (en términos de aumentos de porcentaje) de los incisos (b) y (c).

60 **Densidad de población** La densidad de población D (en habitantes/mi^2) en una gran ciudad está relacionada con la distancia x (en millas) desde el centro de la ciudad por

$$D = \frac{5000x}{x^2 + 36}.$$

(a) ¿Qué le ocurre a la densidad cuando la distancia desde el centro de la ciudad cambia de 20 a 25 millas?

(b) ¿Qué le ocurre finalmente a la densidad?

(c) ¿En qué áreas de la ciudad es que la densidad de población excede de 400 habitantes/mi^2?

Ejer. 61–64: Grafique f y encuentre las ecuaciones de las asíntotas verticales.

61 $f(x) = \dfrac{20x^2 + 80x + 72}{10x^2 + 40x + 41}$

62 $f(x) = \dfrac{15x^2 - 60x + 68}{3x^2 - 12x + 13}$

63 $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{(x - 0.999)^2}$

64 $f(x) = \dfrac{x^2 - 9.01}{x - 3}$

65 Sea $f(x)$ el polinomio

$$(x + 3)(x + 2)(x + 1)(x)(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

(a) Describa la gráfica de $g(x) = f(x)/f(x)$.

(b) Describa la gráfica de $h(x) = g(x)p(x)$, donde $p(x)$ es una función polinomial.

66 Consulte el ejercicio 65.

(a) Describa la gráfica de $y = f(x)$.

(b) Describa la gráfica de $k(x) = 1/f(x)$.

67 **Promedio de calificación (GPA)**

(a) Un estudiante ha terminado 48 horas-crédito con un GPA de 2.75. ¿Cuántas horas-crédito adicionales y en 4.0 subirán el GPA del estudiante a algún valor x deseado? (Determine y como función de x.)

(b) Escriba una tabla de valores para x y y, empezando con $x = 2.8$ y usando incrementos de 0.2.

(c) Grafique la función en el inciso (a) en la pantalla [2, 4] por [0, 1000, 100].

(d) ¿Cuál es la asíntota vertical de la gráfica del inciso (c)?

(e) Explique la importancia práctica del valor $x = 4$.

4.6 Variación

En algunas investigaciones científicas, la terminología de *variación* o *proporción* se emplea para describir relaciones entre cantidades variables. En la tabla siguiente, k es un número real diferente de cero llamado **constante de variación** o **constante de proporcionalidad.**

Terminología	Fórmula general	Ilustración
y **varía directamente** con x, o y es **directamente proporcional** a x	$y = kx$	$C = 2\pi r$, donde C es la circunferencia de un círculo, r es el radio, y $k = 2\pi$
y **varía inversamente** con x, o y es **inversamente proporcional** a x	$y = \dfrac{k}{x}$	$I = \dfrac{110}{R}$, donde I es la corriente en un circuito eléctrico, R es la resistencia, y $k = 110$ es el voltaje

FIGURA 1

Cuando x aumenta, y aumenta, *o bien*, cuando x disminuye, y disminuye

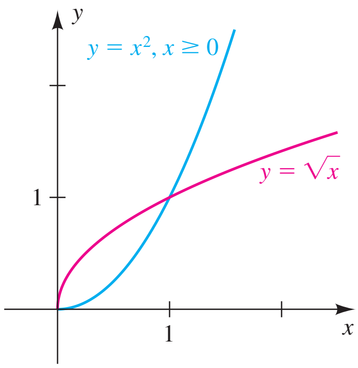
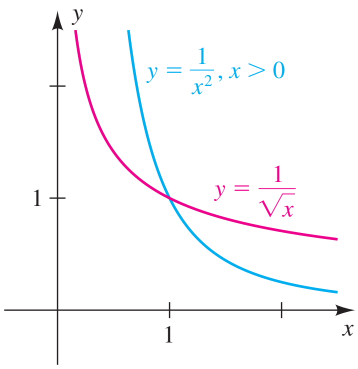


FIGURA 2

Cuando x aumenta, y disminuye, *o bien*, cuando x disminuye, y aumenta



La variable x de la tabla también puede representar una potencia. Por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ expresa que el área A de un círculo varía directamente con el *cuadrado* del radio r, donde π es la constante de variación. Del mismo modo, la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ indica que el volumen V de una esfera es directamente proporcional al *cubo* del radio. En este caso la constante de proporcionalidad es $\frac{4}{3}\pi$.

En general, las gráficas de variables relacionadas por *variación directa* se asemejan a las gráficas de **funciones potencia** de la forma $y = x^n$ con $n > 0$ (tal como $y = \sqrt{x}$ o $y = x^2$ para valores de x no negativos, como se ve en la figura 1). Con variación directa, cuando una variable aumenta, también aumenta la otra variable. Un ejemplo de dos cantidades que están directamente relacionadas es el número de millas recorridas y el número de calorías quemadas.

Las gráficas de variables directamente relacionadas por *variación inversa* se asemejan a las gráficas de funciones potencia de la forma $y = x^n$ con $n < 0$ (como $y = 1/\sqrt{x}$ o $y = 1/x^2$ para valores positivos de x, como se ve en la figura 2). En este caso, cuando una variable aumenta, la otra variable disminuye. Un ejemplo de dos cantidades que están inversamente relacionadas es el número de pulgadas de lluvia y el número de incendios de pastizales.

EJEMPLO 1 Variables directamente proporcionales

Suponga que una variable q es directamente proporcional a una variable z.

(a) Si $q = 12$ cuando $z = 5$, determine la constante de proporcionalidad.

(b) Encuentre el valor de q cuando $z = 7$ y trace una gráfica de esta relación.

SOLUCIÓN Como q es directamente proporcional a z,

$$q = kz,$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

(a) La sustitución de $q = 12$ y $z = 5$ nos da

$$12 = k \cdot 5, \quad \text{o} \quad k = \tfrac{12}{5}.$$

(b) Como $k = \frac{12}{5}$, la fórmula $q = kz$ tiene la forma específica

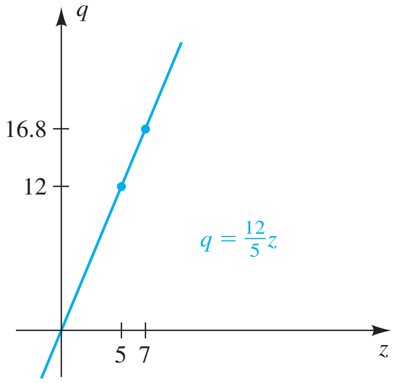
$$q = \tfrac{12}{5}z.$$

Por lo tanto, cuando $z = 7$,

$$q = \tfrac{12}{5} \cdot 7 = \tfrac{84}{5} = 16.8.$$

La figura 3 ilustra la relación de las variables q y z, una relación sencilla.

FIGURA 3



■

Las siguientes directrices se pueden usar para resolver problemas de aplicación que contienen variación o proporción.

Directrices para resolver problemas de variación

1. Escriba una fórmula *general* que contenga las variables y una constante de variación (o proporción) k.
2. Encuentre el valor de k en la directriz 1 mediante los datos iniciales dados en el enunciado del problema.
3. Sustituya el valor de k hallado en la directriz 2 en la fórmula de la directriz 1, obteniendo una fórmula *específica* que contiene las variables.
4. Use los nuevos datos para resolver el problema.

Seguiremos estas guías en la solución del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 **Presión y volumen como cantidades inversamente proporcionales**

Si la temperatura permanece constante, la presión de un gas encerrado es inversamente proporcional al volumen. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de 9 pulgadas de radio es 20 lb/in^2. Si el radio del globo aumenta a 12 pulgadas, aproxime la nueva presión del gas. Trace una gráfica de la relación entre la presión y el volumen.

SOLUCIÓN

Directriz 1 Si denotamos la presión por P (en lb/in^2) y el volumen por V (en in^3), entonces como P es inversamente proporcional a V,

$$P = \frac{k}{V}$$

para alguna constante de proporcionalidad k.

Directriz 2 Encontramos la constante de proporcionalidad k en la directriz 1. Como el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, el volumen inicial del globo es $V = \frac{4}{3}\pi(9)^3 = 972\pi\ \text{in}^3$. Esto lleva a lo siguiente:

$$20 = \frac{k}{972\pi} \qquad P = 20 \text{ cuando } V = 972\pi$$

$$k = 20(972\pi) = 19{,}440\pi \qquad \text{despeje } k$$

Directriz 3 Sustituyendo $k = 19{,}440\pi$ en $P = k/V$, encontramos que la presión correspondiente a cualquier volumen V está dada por

$$P = \frac{19{,}440\pi}{V}.$$

Directriz 4 Si el nuevo radio del globo es 12 pulgadas, entonces

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(12)^3 = 2304\pi \text{ in}^3.$$

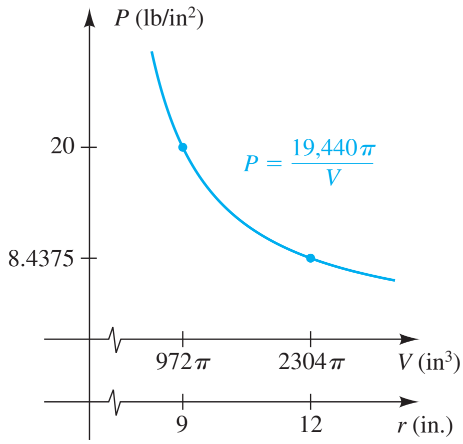
Sustituyendo este número por V en la fórmula obtenida en la directriz 3 nos da

$$P = \frac{19{,}440\pi}{2304\pi} = \frac{135}{16} = 8.4375.$$

Así, la presión disminuye a aproximadamente 8.4 lb/in^2 cuando el radio aumenta a 12 pulgadas.

La figura 4 ilustra la relación de las variables P y V para $V > 0$. Como $P = 19{,}440\pi/V$ y $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, podemos demostrar que $(P \circ V)(r) = 14{,}580/r^3$, de modo que podríamos también decir que P es inversamente proporcional a r^3. Note que ésta es una gráfica de una función racional sencilla.

FIGURA 4



Hay otros tipos de variación. Si x, y y z son variables y $y = kxz$ para algún número real k, decimos que *y varía directamente con el producto de x y z* o que ***y* varía conjuntamente con *x* y *z*.** Si $y = k(x/z)$, entonces *y varía directamente con x e inversamente con z*. Como ilustración final, si una variable w varía directamente con el producto de x y el cubo de y e inversamente con el cuadrado de z, entonces

$$w = k\frac{xy^3}{z^2},$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Las gráficas y ecuaciones para estos tipos de variación no se considerarán en este texto.

EJEMPLO 3 **Combinar varios tipos de variación**

Una variable w varía directamente con el producto de u y v e inversamente con el cuadrado de s.

(a) Si $w = 20$ cuando $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$, encuentre la constante de variación.

(b) Encuentre el valor de w cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$.

SOLUCIÓN Una fórmula general para w es

$$w = k\frac{uv}{s^2},$$

donde k es una constante de variación.

(a) Sustituyendo $w = 20$, $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$ tendremos

$$20 = k\frac{3 \cdot 5}{2^2}, \qquad \text{o} \qquad k = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}.$$

(b) Como $k = \frac{16}{3}$, la fórmula específica para w es

$$w = \frac{16}{3}\frac{uv}{s^2}.$$

Entonces, cuando $u = 7$, $v = 4$, y $s = 3$,

$$w = \frac{16}{3}\frac{7 \cdot 4}{3^2} = \frac{448}{27} \approx 16.6.$$

■

En el siguiente ejemplo de nuevo seguimos las directrices indicadas en esta sección.

EJEMPLO 4 **Hallar la carga de soporte de una viga rectangular**

El peso que con seguridad puede ser soportado por una viga de sección transversal rectangular varía directamente con el producto del ancho y el cuadrado de la profundidad de la sección transversal, e inversamente con la longitud de la viga. Si una viga de 2×4 pulgadas que mide 8 pies de largo soporta con seguridad una carga de 500 libras, ¿qué peso puede ser soportado con seguridad por una viga de 2×8 que mida 10 pies de largo? (Suponga que el ancho es la dimensión *más corta* de la sección transversal.)

SOLUCIÓN

Directriz 1 Si el ancho, profundidad, longitud y peso están denotados por w, d, l y W, respectivamente, entonces una fórmula general para W es

$$W = k\frac{wd^2}{l},$$

donde k es una constante de variación.

Directriz 2 Para hallar el valor de k en la directriz 1, vemos de los datos dados que

$$500 = k\frac{2(4^2)}{8}, \qquad \text{o} \qquad k = 125.$$

Directriz 3 Sustituyendo $k = 125$ en la fórmula de la directriz 1 nos da la fórmula específica

$$W = 125\frac{wd^2}{l}.$$

Directriz 4 Para contestar la pregunta, sustituimos $w = 2$, $d = 8$ y $l = 10$ en la fórmula encontrada en la directriz 3, obteniendo

$$W = 125 \cdot \frac{2 \cdot 8^2}{10} = 1600 \text{ lb.}$$ ■

4.6 Ejercicios

Ejer. 1–16: Exprese el enunciado como una fórmula que contenga las variables dadas y una constante de proporcionalidad k, y luego determine el valor de k a partir de las condiciones dadas.

1 u es directamente proporcional a v. Si $v = 30$, entonces $u = 12$.

2 s varía directamente con t. Si $t = 10$, entonces $s = 18$.

3 V varía directamente con el cubo de r. Si $r = 3$, entonces $V = 36\pi$.

4 S es directamente proporcional al cuadrado de x. Si $x = 2$, entonces $S = 24$.

5 r varía directamente con s e inversamente con t. Si $s = -2$ y $t = 4$, entonces $r = 7$.

6 w varía directamente con z e inversamente con la raíz cuadrada de u. Si $z = 2$ y $u = 9$, entonces $w = 6$.

7 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 5$ y $z = 3$, entonces $y = 25$.

8 y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de z. Si $x = 4$ y $z = 3$, entonces $y = 16$.

9 z es directamente proporcional al producto del cuadrado de x y al cubo de y. Si $x = 7$ y $y = -2$, entonces $z = 16$.

10 z es directamente proporcional al producto de x y y a la raíz cúbica de y. Si $x = 2$ y $y = 8$, entonces $z = 12$.

11 z es directamente proporcional al producto de x y y e inversamente proporcional a la raíz cúbica de w. Si $x = 6$, $y = 4$ y $w = 27$, entonces $z = 16$.

12 r es directamente proporcional al producto de s y v e inversamente proporcional al cubo de p. Si $s = 2$, $v = 3$ y $p = 5$, entonces $r = 40$.

13 q es inversamente proporcional a la suma de x y y. Si $x = 0.5$ y $y = 0.7$, entonces $q = 1.4$.

14 y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a la suma de r y s. Si $x = 3$, $r = 5$ y $s = 7$, entonces $y = 2$.

15 y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 9$ y $z = 2$, entonces $y = 5$.

16 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de z. Si $x = 5$ y $z = 16$, entonces $y = 10$.

17 **Presión de un líquido** La presión P que actúa en un punto en un líquido es directamente proporcional a la distancia d desde la superficie del líquido al punto.

(a) Exprese P como función de d por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k.

(b) En cierto tanque de petróleo, la presión a una profundidad de 2 pies es 118 lb/ft^2. Encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Encuentre la presión a una profundidad de 5 pies para el tanque de petróleo del inciso (b).

(d) Trace una gráfica de la relación entre P y d para $d \geq 0$.

18 **Ley de Hooke** La ley de Hooke expresa que la fuerza F necesaria para estirar un resorte x unidades más que su longitud natural es directamente proporcional a x.

(a) Exprese F como función de x por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k.

(b) Un peso de 4 libras estira cierto resorte a partir de su longitud natural de 10 pulgadas hasta una longitud de 10.3 pulgadas. Encuentre el valor de k en el inciso (a).

(c) ¿Qué peso estira el resorte en el inciso (b) hasta una longitud de 11.5 pulgadas?

(d) Trace una gráfica de la relación entre F y x para $x \geq 0$.

19 **Resistencia eléctrica** La resistencia eléctrica R de un alambre varía directamente con su longitud l e inversamente con el cuadrado de su diámetro d.

(a) Exprese R en términos de l, d y una constante de variación k.

(b) Un alambre de 100 pies de largo y 0.01 pulgadas de diámetro tiene una resistencia de 25 ohms. Encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Trace una gráfica de la relación entre R y d para $l = 100$ and $d > 0$.

(d) Encuentre la resistencia de un alambre hecho del mismo material que tiene un diámetro de 0.015 pulgadas y mide 50 pies de largo.

20 **Intensidad de iluminación** La intensidad de iluminación I de una fuente de luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia d desde la fuente.

(a) Exprese I en términos de d y una constante de variación k.

(b) Un reflector tiene una intensidad de 1,000,000 candelas de potencia a una distancia de 50 pies. Encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Trace una gráfica de la relación entre I y d para $d > 0$.

(d) Aproxime la intensidad del reflector del inciso (b) a una distancia de 1 milla.

21 **Periodo de un péndulo** El periodo P de un péndulo simple, es decir, el tiempo necesario para una oscilación completa, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud l.

(a) Exprese P en términos de l y una constante de proporcionalidad k.

(b) Si un péndulo de 2 pies de largo tiene un periodo de 1.5 segundos, encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Encuentre el periodo de un péndulo de 5 pies de largo.

22 **Dimensiones de un miembro humano** Un cilindro circular se usa a veces en psicología como representación sencilla de un miembro humano.

(a) Exprese el volumen V de un cilindro en términos de su longitud L y el cuadrado de su circunferencia C.

(b) La fórmula obtenida en el inciso (a) se puede usar para aproximar el volumen de un miembro a partir de las medidas de su longitud y circunferencia. Suponga que la circunferencia (promedio) de un antebrazo humano es de 22 centímetros y la longitud promedio es de 27 centímetros. Aproxime el volumen del antebrazo al cm^3 más cercano.

23 **Periodo de un planeta** La tercera ley de Kepler expresa que el periodo T de un planeta (el tiempo necesario para hacer una revolución completa alrededor del Sol) es directamente proporcional a la potencia $\frac{3}{2}$ de su distancia promedio d desde el Sol.

(a) Exprese T como una función de d por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k.

(b) Para el planeta Tierra, $T = 365$ días y $d = 93$ millones de millas. Encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Estime el periodo de Venus si su distancia promedio desde el Sol es de 67 millones de millas.

24 **Alcance de un proyectil** Se sabe, de acuerdo con la física, que el alcance R de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad v.

(a) Exprese R como función de v por medio de una fórmula que involucre una constante de proporcionalidad k.

(b) Un motociclista temerario ha hecho un salto de 150 pies. Si la velocidad a la salida de la rampa fue de 70 mi/h, encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Si el motociclista puede alcanzar una velocidad de 80 mi/h saliendo de la rampa y mantiene un equilibrio apropiado, estime la posible longitud del salto.

25 **Marcas de patinazo de un automóvil** La velocidad V a la que un automóvil corría antes de aplicar los frenos se puede estimar a veces a partir de la longitud L de las marcas de un patinazo. Suponga que V es directamente proporcional a la raíz cuadrada de L.

(a) Exprese V como función de L por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k.

(b) Para cierto automóvil en una superficie seca, $L = 50$ ft cuando $V = 35$ mi/h. Encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Estime la velocidad inicial del automóvil del inciso (b) si las marcas del patinazo fueron de 162 pies de largo.

26 **Ley de Coulomb** La ley de Coulomb en teoría eléctrica expresa que la fuerza F de atracción entre dos partículas con cargas opuestas varía directamente con el producto de las magnitudes Q_1 y Q_2 de las cargas e inversamente con el cuadrado de la distancia d entre las partículas.

(a) Encuentre una fórmula para F en términos de Q_1, Q_2, d y una constante de variación k.

(b) ¿Cuál es el efecto de reducir la distancia entre las partículas por un factor de un cuarto?

27 Umbral de peso El umbral de peso W se define como el peso por encima del cual el riesgo de muerte aumenta considerablemente. Para hombres de edad mediana, W es directamente proporcional a la tercera potencia de la estatura h.

(a) Exprese W como una función de h por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k.

(b) Para un hombre de 6 pies de estatura, W es de alrededor de 200 libras. Encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Estime, a la libra más cercana, el umbral de peso para un hombre que mide 5 pies 6 pulgadas de estatura.

28 La ley de gas ideal La ley de gas ideal expresa que el volumen V que un gas ocupa es directamente proporcional al producto del número n de moles de gas y la temperatura T, en K, y es inversamente proporcional a la presión (en atmósferas).

(a) Exprese V en términos de n, T, P y una constante de proporcionalidad k.

(b) ¿Cuál es el efecto en el volumen si el número de moles se duplica y tanto la temperatura como la presión se reducen por un factor de ½?

29 Ley de Poiseuille La ley de Poiseuille expresa que el caudal de sangre F (en L/min) que pasa por una arteria principal es directamente proporcional al producto de la cuarta potencia del radio r de la arteria y la presión sanguínea P.

(a) Exprese F en términos de P, r y una constante de proporcionalidad k.

(b) Durante un ejercicio intenso, los caudales normales de sangre a veces se triplican. Si el radio de una arteria principal aumenta en 10%, ¿aproximadamente cuánto más debe bombear el corazón?

30 Población de truchas Suponga que se pescan 200 truchas, se marcan y se sueltan en la población general de un lago. Denote con L el número de peces marcados que son recapturados cuando una muestra de n truchas se pesca en una fecha posterior. La validez del método de marca-recaptura, para estimar la población total de truchas del lago está basada en la suposición de que T es directamente proporcional a n. Si 10 truchas marcadas se recuperan de una muestra de 300, estime la población total de truchas del lago.

31 Desintegración radiactiva de un gas radón Cuando el uranio se desintegra en plomo, un paso del proceso es la desintegración radiactiva del radio en el gas radón. El radón entra por el suelo hacia los sótanos de las casas, donde presenta un riesgo para la salud si se inhala. En el caso más sencillo de detección de radón, se toma una muestra de aire con volumen V. Después de establecer un equilibrio, la desintegración radiactiva D del radón se cuenta con una eficiencia E en el tiempo t. La concentración C del radón presente en la muestra de aire varía directamente con el producto de D y E, e inversamente con el producto de V y t. Para una concentración C fija de radón y un tiempo t, encuentre el cambio en la cuenta de desintegración radiactiva D si V se duplica y E se reduce en 20%.

32 Concentración de radón Consulte el ejercicio 31. Encuentre el cambio en la concentración de radón C si D aumenta en 30%, t aumenta en 60%, V disminuye en 10% y E permanece constante.

33 Densidad en un punto Una placa plana y delgada se sitúa en un plano xy, de modo que la densidad d (en lb/ft^2) en el punto $P(x, y)$ es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen. ¿Cuál es el efecto en la densidad en P si las coordenadas x y y se multiplican por $\frac{1}{3}$?

34 Temperatura en un punto Una placa metálica plana se coloca en un plano xy tal que la temperatura T (en °C) en el punto (x, y) es inversamente proporcional a la distancia desde el origen. Si la temperatura en el punto $P(3, 4)$ es 20°C, encuentre la temperatura en el punto $Q(24, 7)$.

Ejer. 35–38: Examine la expresión para el conjunto dado de puntos de datos de la forma (x, y). Encuentre la constante de variación y una fórmula que describa la forma en que y varía con respecto a x.

35 y/x; $\{(0.6, 0.72), (1.2, 1.44), (4.2, 5.04), (7.1, 8.52)\}$

36 xy; $\{(0.2, -26.5), (0.4, -13.25), (0.8, -6.625)\}$

37 x^2y; $\{(0.8, -15.78125), (1.6, -3.9453125), (3.2, -0.986328125)\}$

38 y/x^3; $\{(0.6, 0.5616), (1.2, 4.4928), (2.4, 35.9424)\}$

39 Distancias de frenado Consulte el ejercicio 86 de la sección 3.4. La distancia D (en pies) necesaria para que un auto se detenga con seguridad varía directamente con su velocidad S (en mi/h).

(a) Use la tabla para determinar un valor aproximado para k en la fórmula de variación $D = kS^{2.3}$.

S	20	30	40	50	60	70
D	33	86	167	278	414	593

(b) Compruebe su aproximación al graficar los datos y D en los mismos ejes de coordenadas.

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–6: Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$, y trace la gráfica de f.

1 $f(x) = (x + 2)^3$

2 $f(x) = x^6 - 32$

3 $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 1)^2(x - 3)$

4 $f(x) = 2x^2 + x^3 - x^4$

5 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

6 $f(x) = \frac{1}{15}(x^5 - 20x^3 + 64x)$

7 Si $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$, use el teorema del valor intermedio para funciones polinomiales para demostrar que hay un número real a tal que $f(a) = 100$.

8 Demuestre que la ecuación $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1.

Ejer. 9–10: Encuentre el cociente y residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

9 $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x + 5$; $p(x) = x^3 - 2x + 7$

10 $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x - 1$; $p(x) = x^2$

11 Si $f(x) = -4x^4 + 3x^3 + 20x^2 + 7x - 10$, use el teorema del residuo para hallar $f(-2)$.

12 Use el teorema del factor para demostrar que $x - 3$ es un factor de $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9$.

Ejer. 13–14: Use división sintética para hallar el cociente y residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

13 $f(x) = 6x^5 - 4x^2 + 8$; $p(x) = x + 2$

14 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1$; $p(x) = x - 3$

Ejer. 15–16: Un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales tiene el cero (o ceros) indicado y grado, y satisface la condición dada. Exprese $f(x)$ como producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales que sean irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

15 $-3 + 5i, -1$; grado 3; $f(1) = 4$

16 $1 - i, 3, 0$; grado 4; $f(2) = -1$

17 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 7 con coeficiente principal 1 tal que -3 es un cero de multiplicidad 2 y 0 es un cero de multiplicidad 5, y trace la gráfica de f.

18 Demuestre que 2 es un cero de multiplicidad 3 del polinomio $f(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 52x + 24$ y exprese $f(x)$ como producto de factores lineales.

Ejer. 19–20: Encuentre los ceros de $f(x)$ y exprese la multiplicidad de cada cero.

19 $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^2(x^2 + 2x - 3)$

20 $f(x) = x^6 + 2x^4 + x^2$

Ejer. 21–22: (a) Use la regla de signos de Descartes para determinar el número de posibles soluciones complejas positivas, negativas y no reales de la ecuación. (b) Encuentre los enteros mínimo y máximo que sean cotas superior e inferior, respectivamente, para las soluciones reales de la ecuación.

21 $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x - 7 = 0$

22 $x^5 - 4x^3 + 6x^2 + x + 4 = 0$

23 Demuestre que $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 1$ no tiene cero real.

Ejer. 24–26: Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

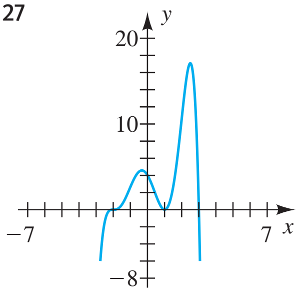
24 $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 49x + 30 = 0$

25 $16x^3 - 20x^2 - 8x + 3 = 0$

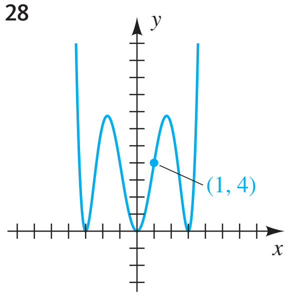
26 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

Ejer. 27–28: Encuentre una ecuación para el polinomio de sexto grado f que se muestra en la figura.

27



28



29 Identifique cualesquiera asíntotas verticales, asíntotas horizontales, puntos de intersección y huecos para $f(x) = \dfrac{4(x + 2)(x - 1)}{3(x + 2)(x - 5)}$.

Ejer. 30–39: Trace la gráfica de f.

30 $f(x) = \dfrac{-2}{(x + 1)^2}$

31 $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^3}$

32 $f(x) = \dfrac{3x^2}{16 - x^2}$

33 $f(x) = \dfrac{x}{(x + 5)(x^2 - 5x + 4)}$

34 $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 8x}{-x^2 + 2x}$

35 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

36 $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 10}{x^2 + 2x}$

37 $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 8x - 6}{x^2 - 6x + 8}$

38 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x + 3}$

39 $f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^3}$

40 Encuentre una ecuación de una función racional f que satisfaga las condiciones dadas.

asíntota vertical: $x = -3$
asíntota horizontal: $y = \frac{3}{2}$
punto de intersección con el eje x: 5
hueco en $x = 2$

41 Suponga que y es directamente proporcional a la raíz cúbica de x e inversamente proporcional al cuadrado de z. Encuentre la constante de proporcionalidad si $y = 6$ cuando $x = 8$ y $z = 3$.

42 Suponga que y es inversamente proporcional al cuadrado de x. Trace una gráfica de esta relación para $x > 0$, dado que $y = 18$ cuando $x = 4$. Incluya un punto para $x = 12$.

43 **Flexión de una viga** Una viga horizontal de l pies de largo está apoyada en un extremo y no apoyada en el otro extremo (vea la figura). Si la viga se somete a una carga uniforme y si f denota la flexión de la viga en una posición a x pies del extremo con apoyo, entonces se puede demostrar que

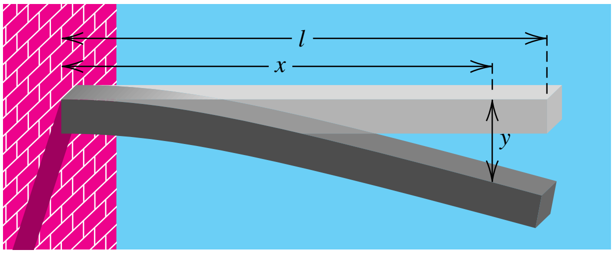
$$y = cx^2(x^2 - 4lx + 6l^2),$$

donde c es una constante positiva que depende del peso de la carga y de las propiedades físicas de la viga.

(a) Si la viga mide 10 pies de largo y la flexión en el extremo no apoyado de la viga es de 2 pies, encuentre c.

(b) Demuestre que la flexión es de 1 pie en algún punto entre $x = 6.1$ y $x = 6.2$.

EJERCICIO 43

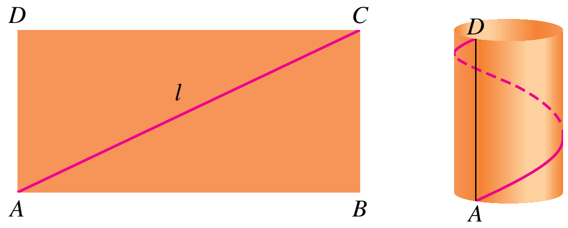


44 **Cilindro elástico** Un rectángulo hecho de material elástico se va a convertir en cilindro al unir el lado AD con el lado BC, como se ve en la figura. Un alambre de longitud fija l se pone a lo largo de la diagonal del rectángulo para dar apoyo a la estructura. Denote con x la altura del cilindro.

(a) Exprese el volumen V del cilindro en términos de x.

(b) ¿Para qué valores positivos de x es $V > 0$?

EJERCICIO 44



45 **Determinar temperaturas** Un meteorólogo determina que la temperatura T (en °F) para cierto periodo de 24 horas en invierno se da con la fórmula $T = \frac{1}{20}t(t - 12)(t - 24)$ para $0 \leq t \leq 24$, donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6:00 a.m. ¿En qué tiempo(s) la temperatura fue de 32°F?

46 **Propagación de venados** Un rebaño de 100 venados se introduce en una pequeña isla. Suponiendo que el número $N(t)$ de venados después de t años está dada por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$ (para $t > 0$), determine cuándo el tamaño del rebaño pasa de 180.

47 **Curva de umbral de respuesta** En bioquímica, la curva general de umbral de respuesta es la gráfica de una ecuación

$$R = \frac{kS^n}{S^n + a^n},$$

donde R es la respuesta química cuando el nivel de la sustancia sobre la que se actúa es S y a, k y n son constantes positivas. Un ejemplo es la tasa de remoción R de alcohol del torrente sanguíneo por el hígado, cuando la concentración de alcohol en la sangre es S.

(a) Encuentre una ecuación de la asíntota horizontal para la gráfica.

(b) En el caso de la remoción de alcohol, $n = 1$ y un valor típico de k es 0.22 gramos por litro por minuto. ¿Cuál es la interpretación de k en esta situación?

48 **Limpieza de un derrame de petróleo** El costo $C(x)$ de limpiar x por ciento de un derrame de petróleo que ha llegado a la costa aumenta grandemente cuando x se aproxima a 100. Suponga que

$$C(x) = \frac{0.3x}{101 - x} \quad \text{(millones de dólares).}$$

(a) Compare $C(100)$ con $C(90)$.

(b) Trace la gráfica de C para $0 < x < 100$.

49 **Llamadas telefónicas** En cierto condado, el número promedio de llamadas telefónicas por día, entre dos ciudades cualesquiera, es directamente proporcional al producto de sus poblaciones e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Las ciudades A y B están a 25 millas una de otra y tienen poblaciones de 10,000 y 5000, respectivamente. Los registros telefónicos indican un promedio de 2000 llamadas por día entre las dos ciudades. Estime el número promedio de llamadas por día entre la ciudad A y otra ciudad de 15,000 habitantes que está a 100 millas de A.

50 **Potencia de un rotor de viento** La potencia P generada por un rotor de viento es directamente proporcional al producto del cuadrado del área A recorrida por las palas y la tercera potencia de la velocidad v del viento. Suponga que el diámetro del área circular recorrida por las palas es de 10 pies y $P = 3000$ watts cuando $v = 20$ mi/h. Encuentre la potencia generada cuando la velocidad del viento es de 30 mi/h.

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 Compare el dominio, rango, número de intersecciones con el eje x y forma general de los polinomios de grado par y de grado impar.

2 Cuando usa división sintética, ¿podría usar un número complejo c en vez de un número real en $x - c$?

3 Discuta la forma en que la división sintética se puede usar para ayudar a hallar el cociente y residuo cuando $4x^3 - 8x^2 - 11x + 9$ se divide entre $2x + 3$. Discuta cómo se puede usar división sintética con cualquier factor lineal de la forma $ax + b$.

4 Trace (a mano) una gráfica de una función polinomial de grado 3 que tenga intersecciones en 1, 2 y 3 con el eje x, tenga una intersección con el eje y en 6 y pase por el punto $(-1, 25)$. ¿Puede tener realmente la gráfica que acaba de trazar?

5 ¿Cuántos puntos diferentes se necesitan para especificar un polinomio de grado n?

6 Demuestre el teorema sobre ceros de par conjugado de un polinomio (*Sugerencia:* para un polinomio f arbitrario, examine los conjugados de ambos lados de la ecuación $f(z) = 0$.)

7 Dé un ejemplo de una función racional que tenga un factor común en el numerador y el denominador, pero que *no tenga* un hueco en su gráfica. Discuta, en general, la forma en que esto ocurre.

8 **(a)** ¿Puede la gráfica de $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ (donde $ax + b \neq cx + d$) cruzar su asíntota horizontal? Si es así, ¿dónde es?

(b) ¿Puede la gráfica de $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ (suponga que no hay factores semejantes) cruzar su asíntota horizontal? Si es así, ¿dónde es?

9 **Fórmula de supervivencia en juegos de azar** Una fórmula empírica para la cantidad de dinero B (en dólares), que se necesita para sobrevivir a una sesión de juegos de azar con confianza C (porcentaje expresado como decimal), está dada por la fórmula

$$B = \frac{GW}{29.3 + 53.1E - 22.7C},$$

donde G es el número de juegos jugados en la sesión, W es la apuesta por juego y E es la ventaja del jugador en el juego (expresada como decimal).

(a) Aproxime la cantidad de dinero necesaria para un jugador que juega 500 juegos por hora, durante 3 horas, a \$5 por juego y ventaja de -5%, siempre que el jugador desee un 95% de probabilidad de sobrevivir la sesión de 3 horas.

(b) Discuta la validez de la fórmula; una tabla y una gráfica pueden ayudar.

10 Multiplique entre sí tres enteros consecutivos y luego sume el segundo entero a ese producto. Use división sintética para ayudar a demostrar que la suma es el cubo de un entero y determine qué entero.

11 **Tasa personal de impuesto** Suponga que la cantidad total de impuesto estatal pagada está formada por una cantidad P por propiedad personal y S por ciento del ingreso I.

(a) Encuentre una función que calcule la tasa R de impuesto estatal de una persona, es decir, el porcentaje del ingreso de esa persona que se paga en impuestos. (Es útil considerar valores específicos para crear la función.)

(b) ¿Qué le ocurre a R cuando I se hace muy grande?

(c) Discuta la frase: "La gente rica paga un porcentaje más bajo de sus ingresos en impuestos estatales que cualquier otro grupo".

12 **Calificación de un pasador de la NFL** La Nacional Football League clasifica a sus pasadores al asignar una calificación R de pasador con base en los números de pases completos C, intentos A, yardas Y, touchdowns T e intercepciones I. En una situación normal, se puede demostrar que la calificación del pasador se puede calcular usando la fórmula

$$R = \frac{25(A + 40C + 2Y + 160T - 200I)}{12A}.$$

(a) En 2004, Peyton Manning completó 336 pases de 497 intentos para 4557 yardas y tuvo 49 pases para touchdown, así como 10 intercepciones. Calcule su calificación que estableció un récord.

(b) ¿Cuántas yardas más hubiera necesitado para obtener una calificación de pasador de al menos 121.5?

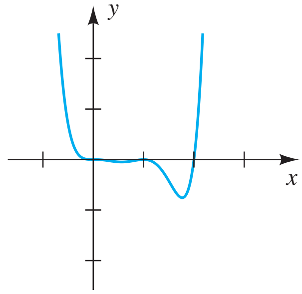
(c) Si hubiera podido hacer un pase de touchdown más, ¿de qué largo hubiera tenido que ser para que él obtuviera una calificación de pasador de al menos 122?

CAPÍTULO 4 EXAMEN DE CAPÍTULO

1 Trace la gráfica de $f(x) = \frac{1}{6}(x + 3)(x - 2)(x - 4)$. ¿Cuál es la intersección con el eje y?

2 La gráfica de la función f intersecta al eje x en $x = 0{,}1$ y 2. Escriba una posible ecuación para f.

EJERCICIO 2



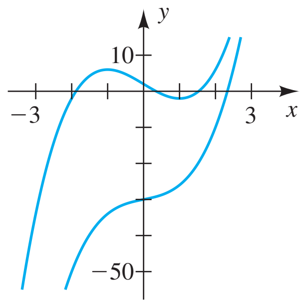
3 Use el teorema del valor intermedio para demostrar que $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$ tiene un cero entre 0 y 2.

4 ¿Cuál es la solución para $f(x) < 0$, donde $f(x) = (x - a)(x - b)^2(x - c)$ y $a < 0 < b < c$?

5 Suponga que el número $N(t)$ de cierto tipo de animal después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 48t^2 + 49$, donde $t > 0$. De acuerdo con el modelo, ¿en qué momento se extinguirá la población?

6 La figura muestra la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$ y $g(x) = 2x^3 + 2x - 30$. ¿Qué pasaría con las gráficas si se cambiara el rango de $-50 \leq y \leq 10$ a $-2000 \leq y \leq 2000$?

EJERCICIO 6



7 Use el teorema del factor para demostrar que $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.

8 Dado que la gráfica de $f(x) = a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ pasa por el punto $(4, b)$, encuentre el valor de a en términos de b.

9 Encuentre todos los valores de k para que $f(x) = k^2x^4 - kx^3 - 6$ sea divisible entre $x - 1$.

10 Un polinomio f tiene 3 como un cero de multiplicidad 1, -1 como un cero de multiplicidad 2 y pasa por el punto $(2, -27)$. Encuentre f en la forma factorizada.

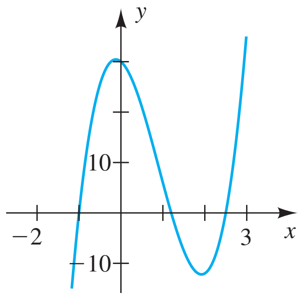
11 Un polinomio f de tercer grado pasa por los siguientes puntos: $(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(4, b)$. Encuentre todos los valores posibles de b.

12 ¿Es posible tener un polinomio f de tercer grado que tenga ceros 0, 1 e i? Si es así, encuentre f.

13 Explique por qué $\frac{5}{2}$ podría ser una raíz racional de $f(x) = 702x^4 - 57x^3 - 5227x^2 - 163x + 6545$.

14 La función $f(x) = 10x^3 - 27x^2 - 7x + 30$ tiene posibles raíces racionales en ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{5}$, $\pm\frac{1}{10}$, ± 2, $\pm\frac{2}{5}$, ± 3, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{3}{5}$, $\pm\frac{3}{10}$, ± 5, $\pm\frac{5}{2}$, ± 6, $\pm\frac{6}{5}$, ± 10, ± 15, $\pm\frac{15}{2}$ y ± 30. La gráfica dada muestra todos los ceros de f. Use esta información para hacer una lista de todos los ceros de f.

EJERCICIO 14



15 La función $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 13}{x^2 + 2x + 1}$ intersecta su asíntota horizontal. Encuentre el punto (x, y) de la intersección.

16 Encuentre las coordenadas x y y del hueco de $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 2}{3x^2 - 8x + 4}$.

17 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{2(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)} = \dfrac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 4x + 3}$. Marque las intersecciones con los ejes x y x, las asíntotas horizontales y verticales y cualquier hueco.

18 Encuentre una ecuación de una función racional f que intersecte al eje x en 4, una asíntota vertical de $x = 2$, una asíntota horizontal de $y = -3$ y un hueco en $x = -1$. proporcione su respuesta en forma factorizada.

19 z es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a y. Si $z = 6$ cuando $x = 3$ y $y = 2$, encuentre z cuando $x = 6$ y $y = 12$.

5

Funciones inversas, exponenciales y logarítmicas

Las funciones exponenciales y logarítmicas son funciones trascendentales, porque no pueden ser definidas en términos sólo de adición, sustracción, multiplicación y potencias racionales de una variable x, como es el caso para las funciones algebraicas consideradas en capítulos previos. Esas funciones son de la mayor importancia en matemáticas y tienen aplicaciones en casi todos los campos del saber humano. Son especialmente útiles en los campos de química, biología, física e ingeniería, donde ayudan a describir la forma en que las cantidades en la naturaleza crecen o disminuyen. Como veremos en el capítulo, hay una estrecha relación entre funciones exponenciales y logarítmicas específicas; es decir, son funciones inversas entre sí.

5.1 Funciones inversas

Una función f puede tener el mismo valor para diferentes números en su dominio. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$. Para que *la función inversa de una función* se defina, es esencial que números diferentes del dominio *siempre* den valores diferentes de f. Esas funciones se denominan *funciones biunívocas*.

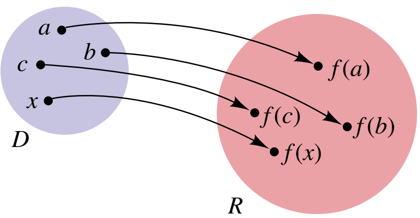
Definición de función biunívoca

Una función f con dominio D y rango R es una **función biunívoca** si cualquiera de las dos condiciones equivalentes siguientes se satisface:

(1) Siempre que $a \neq b$ en D, entonces $f(a) \neq f(b)$ en R.

(2) Siempre que $f(a) = f(b)$ en R, entonces $a = b$ en D.

FIGURA 1



El diagrama de flechas de la figura 1 ilustra una función biunívoca. Note que el valor de cada función del rango R corresponde a *exactamente un* elemento del dominio D. La función ilustrada en la figura 2 de la sección 3.4 no es biunívoca, porque $f(w) = f(z)$, pero $w \neq z$.

EJEMPLO 1 Determinar si una función es biunívoca

(a) Si $f(x) = 3x + 2$, demuestre que f es biunívoca.

(b) Si $g(x) = x^2 - 3$, demuestre que g no es biunívoca.

SOLUCIÓN

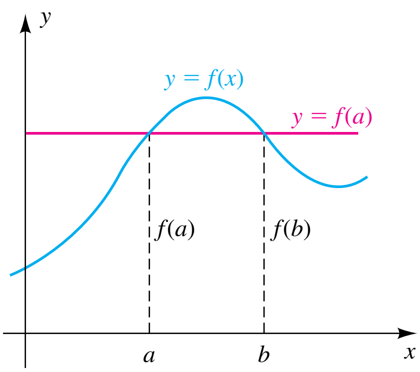
(a) Usaremos la condición 2 de la definición precedente. Por lo tanto, suponga que $f(a) = f(b)$ para algunos números a y b en el dominio de f. Esto nos da

$$3a + 2 = 3b + 2 \quad \text{definición de } f(x)$$
$$3a = 3b \quad \text{reste 2}$$
$$a = b \quad \text{divida entre 3}$$

Como hemos concluido que a debe ser igual a b, f es biunívoca.

(b) Demostrar que una función *es* biunívoca requiere una demostración *general*, como en la parte (a). Para demostrar que g *no es* biunívoca sólo necesitamos hallar dos números reales distintos en el dominio que produzcan el mismo valor de función. Por ejemplo $-1 \neq 1$, pero $g(-1) = g(1)$. De hecho, como g es una función par, $g(-a) = g(a)$ para todo número real a. ■

FIGURA 2



Si conocemos la gráfica de una función f, es fácil determinar si f es biunívoca. Por ejemplo, la función cuya gráfica se traza en la figura 2 no es biunívoca porque $a \neq b$, pero $f(a) = f(b)$. Note que la recta horizontal $y = f(a)$ (o $y = f(b)$) cruza la gráfica en más de un punto. En general, podemos usar la siguiente prueba gráfica para determinar si una función es biunívoca.

Prueba de la recta horizontal

Una función f es biunívoca si y sólo si toda recta horizontal cruza la gráfica de f a lo más en un punto.

Apliquemos la prueba de la recta horizontal a las funciones del ejemplo 1.

EJEMPLO 2 **Uso de la prueba de la recta horizontal**

Use la prueba de la recta horizontal para determinar si la funcion es biunívoca

(a) $f(x) = 3x + 2$ **(b)** $g(x) = x^2 - 3$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $f(x) = 3x + 2$ es una recta con punto de intersección 2 con el eje y y pendiente 3, como se ve en la figura 3. Vemos que cualquier recta horizontal cruza la gráfica de f a lo más en un punto. Entonces, f es biunívoca.

FIGURA 3

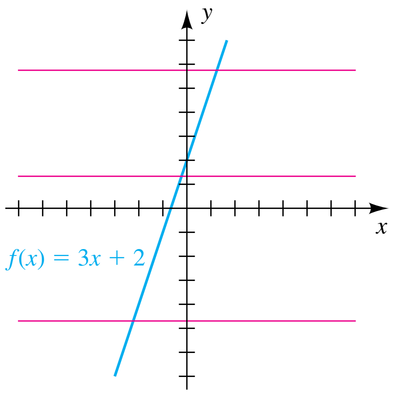
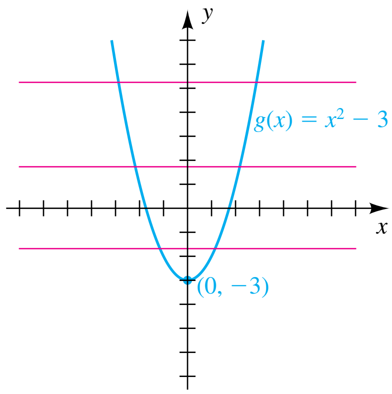


FIGURA 4



(b) La gráfica de $g(x) = x^2 - 3$ es una parábola que abre hacia arriba con vértice $(0, -3)$, como se ve en la figura 4. En este caso, cualquier recta horizontal con ecuación $y = k$, donde $k > -3$, cruzará la gráfica de g en dos puntos. Por lo tanto, g *no es* biunívoca. ■

Podemos suponer del ejemplo 2 que toda función creciente o decreciente pasa la prueba de la recta horizontal. En consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema: las funciones crecientes o decrecientes son biunívocas

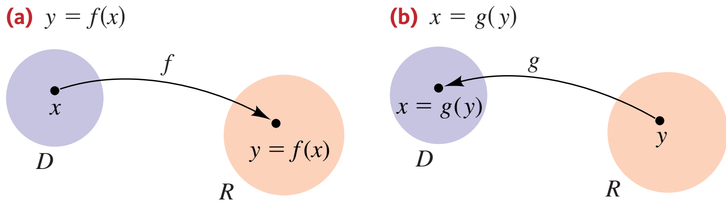
(1) Una función que es creciente en todo su dominio es biunívoca.
(2) Una función que es decreciente en todo su dominio es biunívoca.

Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R. Así, para cada número y en R, hay *exactamente un* número x en D tal que $y = f(x)$, como lo ilustra la flecha de la figura 5(a). Podemos, por lo tanto, definir una función g de R a D por medio de la siguiente regla:

$$x = g(y)$$

Como en la figura 5(b), *g invierte la correspondencia dada por f.* Denominamos g a la *función inversa* de f, como en la siguiente definición.

FIGURA 5



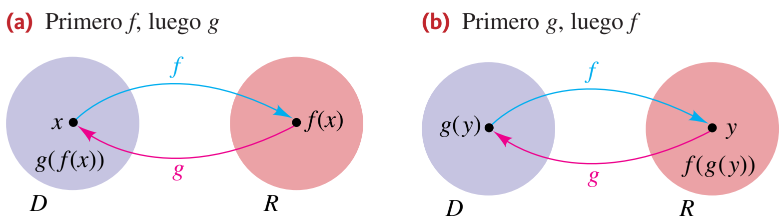
Definición de función inversa	Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R. Una función g con dominio R y rango D es la **función inversa** de f, siempre que la condición siguiente sea verdadera para toda x en D y toda y en R: $$y = f(x) \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = g(y)$$

Recuerde que para definir la inversa de una función f, *es absolutamente esencial que f sea biunívoca*. El siguiente teorema, expresado sin demostración, es útil para verificar que una función g es la inversa de f.

Teorema de funciones inversas	Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R. Si g es una función con dominio R y rango D, entonces g es la función inversa de f si y sólo si son verdaderas las dos condiciones siguientes: **(1)** $g(f(x)) = x$ para toda x en D **(2)** $f(g(y)) = y$ para toda y in R

Las condiciones 1 y 2 del teorema precedente están ilustradas en la figura 6(a) y (b), respectivamente, donde la flecha azul indica que f es una función de D a R y la flecha roja indica que g es una función de R a D.

FIGURA 6



Note que en la figura 6(a) primero aplicamos f al número x en D, obteniendo el valor de función $f(x)$ en R, y luego aplicamos g a $f(x)$, obteniendo el número $g(f(x))$ en D. La condición 1 del teorema expresa que $g(f(x)) = x$ para toda x; esto es, g *invierte* la correspondencia dada por f.

En la figura 6(b) usamos el orden opuesto para las funciones. Primero aplicamos g al número y en R, obteniendo el valor de función $g(y)$ en D y luego aplicamos f a $g(y)$, obteniendo el número $f(g(y))$ en R. La condición 2 del teorema expresa que $f(g(y)) = y$ para toda y; esto es, f *invierte* la correspondencia dada por g.

Si una función f tiene una función inversa g, con frecuencia denotamos g por f^{-1}. El -1 empleado en esta notación no debe confundirse con un exponente; esto es,

$$f^{-1}(y) \text{ no significa } 1/[f(y)].$$

El recíproco $1/[f(y)]$ puede ser denotado por $[f(y)]^{-1}$. Es importante recordar los datos siguientes acerca del dominio y rango de f y f^{-1}.

Dominio e imagen de f y f^{-1}

$$\text{dominio of } f^{-1} = \text{rango de } f$$
$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Cuando estudiamos funciones, a veces denotamos con x a un número arbitrario en el dominio. Así, para la función inversa f^{-1}, podemos considerar $f^{-1}(x)$, *donde x está en el dominio R de f^{-1}*. En este evento, las dos condiciones del teorema sobre funciones inversas se escriben como sigue:

(1) $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f

(2) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

La figura 6 contiene una sugerencia para hallar la inversa de una función biunívoca en ciertos casos: si es posible, *de la ecuación $y = f(x)$ despejamos x en términos de y,* obteniendo una ecuación de la forma $x = g(y)$. Si las dos condiciones $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$ son verdaderas para toda x en los dominios de f y g, respectivamente, entonces g es la función inversa f^{-1} requerida. Las directrices siguientes resumen este procedimiento; en la directriz 2, en anticipación a hallar f^{-1}, escribimos $x = f^{-1}(y)$ en lugar de $x = g(y)$.

Directrices para hallar f^{-1} en casos simples

1 Verifique que f sea una función biunívoca en todo su dominio.

2 De la ecuación $y = f(x)$ despeje x en términos de y, obteniendo una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$.

3 Verifique las dos condiciones siguientes

(a) $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f

(b) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

El éxito de este método depende de la naturaleza de la ecuación $y = f(x)$, porque debemos estar en aptitud de despejar x en términos de y. Por esta razón, incluimos la frase *en casos simples* en el título de las directrices. Seguiremos éstas en los siguientes tres ejemplos.

EJEMPLO 3 Hallar la inversa de una función

Sea $f(x) = 3x - 5$. Encuentre la función inversa de f.

SOLUCIÓN

Directriz 1 La gráfica de la función lineal f es una recta de pendiente 3 y por lo tanto f es creciente de principio a fin en $\mathbb{R}$. Así, f es biunívoca y existe la

(continúa)

función inversa f^{-1} Además, como el dominio y rango de f son $\mathbb{R}$, lo mismo es cierto para f^{-1}.

Directriz 2 De la ecuación $y = f(x)$ despeje x:

$$y = 3x - 5 \quad \text{sea } y = f(x)$$
$$x = \frac{y + 5}{3} \quad \text{despeje } x \text{ en términos de } y$$

Ahora formalmente hacemos $x = f^{-1}(y)$; es decir,

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 5}{3}.$$

Como el símbolo empleado para la variable no tiene importancia, también podemos escribir

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3},$$

donde x está en el dominio de f^{-1}.

Directriz 3 Como el dominio y rango de f y de f^{-1} son $\mathbb{R}$, debemos verificar las condiciones (a) y (b) para todo número real x. Procedemos como sigue:

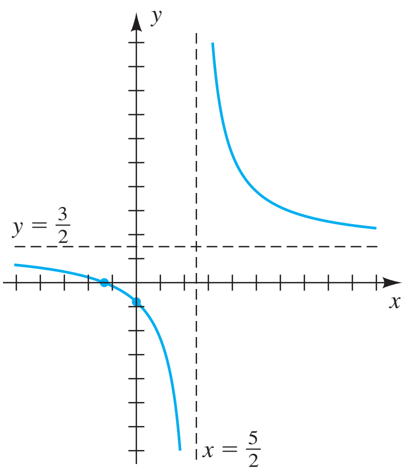
(a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 5)$ — definición de f
$= \dfrac{(3x - 5) + 5}{3}$ — definición de f^{-1}
$= x$ — simplifique

(b) $f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{x + 5}{3}\right)$ — definición de f^{-1}
$= 3\left(\dfrac{x + 5}{3}\right) - 5$ — definición de f
$= x$ — simplifique

Estas verificaciones demuestran que la función inversa de f está dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3}.$$ ■

FIGURA 7



EJEMPLO 4 **Hallar la inversa de una función**

Sea $f(x) = \dfrac{3x + 4}{2x - 5}$. Encuentre la función inversa de f.

SOLUCIÓN

Directriz 1 La gráfica de la función racional f aparece en la figura 7 (refiérase al ejemplo 3 de la sección 4.5). Esta es decreciente a lo largo de su dominio $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$. Por lo tanto, f es biunívoca y existe la función inversa f^{-1}. También sabemos que el dominio mencionado es el rango de f^{-1} y que el rango de f, $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, es el dominio de f^{-1}.

Directriz 2 Despeje x de la ecuación $y = f(x)$.

$$y = \frac{3x + 4}{2x - 5} \qquad \text{sea } y = f(x)$$
$$y(2x - 5) = 3x + 4 \qquad \text{multiplique por } 2x - 5$$
$$2xy - 5y = 3x + 4 \qquad \text{multiplique}$$
$$2xy - 3x = 5y + 4 \qquad \text{agrupe todos los términos de } x \text{ en un solo lado}$$
$$x(2y - 3) = 5y + 4 \qquad \text{saque como factor a } x$$
$$x = \frac{5y + 4}{2y - 3} \qquad \text{divida entre } 2y - 3$$

Por tanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{5y + 4}{2y - 3} \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad f^{-1}(x) = \frac{5x + 4}{2x - 3}.$$

Directriz 3 Verificamos las condiciones (a) y (b) para x en los dominios de f y f^{-1}, respectivamente.

Para un ejemplo específico de la directríz 3, si $x = 3$, entonces $f(3) = \frac{13}{1} = 13$ y $f^{-1}(13) = \frac{69}{23} = 3$. Por lo tanto, $f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(13) = 3$ y $f(f^{-1}(13)) = f(3) = 13$.

Sugerencia: *después de encontrar una función inversa f^{-1}, escoja un número arbitrario en el dominio de f (como 3 arriba) y verifique las condiciones (a) y (b) en la directriz 3. Es muy probable que si estas condiciones "se verifican", entonces la inversa correcta ha sido encontrada.*

(a) $$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3x + 4}{2x - 5}\right) = \frac{5\left(\frac{3x + 4}{2x - 5}\right) + 4}{2\left(\frac{3x + 4}{2x - 5}\right) - 3} = \frac{\frac{5(3x + 4) + 4(2x - 5)}{2x - 5}}{\frac{2(3x + 4) - 3(2x - 5)}{2x - 5}}$$
$$= \frac{15x + 20 + 8x - 20}{6x + 8 - 6x + 15} = \frac{23x}{23} = x$$

(b) $$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{5x + 4}{2x - 3}\right) = \frac{3\left(\frac{5x + 4}{2x - 3}\right) + 4}{2\left(\frac{5x + 4}{2x - 3}\right) - 5} = \frac{\frac{3(5x + 4) + 4(2x - 3)}{2x - 3}}{\frac{2(5x + 4) - 5(2x - 3)}{2x - 3}}$$
$$= \frac{15x + 12 + 8x - 12}{10x + 8 - 10x + 15} = \frac{23x}{23} = x$$

Entonces, la función inversa está dada por

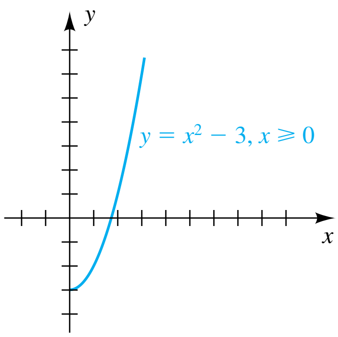
$$f^{-1}(x) = \frac{5x + 4}{2x - 3}.$$

■

EJEMPLO 5 **Hallar la inversa de una función**

Sea $f(x) = x^2 - 3$ para $x \geq 0$. Encuentre la función inversa de f.

FIGURA 8



SOLUCIÓN

Directriz 1 La gráfica de f aparece en la figura 8. El dominio de f es $[0, \infty)$, y el rango es $[-3, \infty)$. Como f es creciente, es biunívoca y por tanto tiene una función inversa f^{-1} con dominio $[-3, \infty)$ y rango $[0, \infty)$.

Directriz 2 Consideremos la ecuación

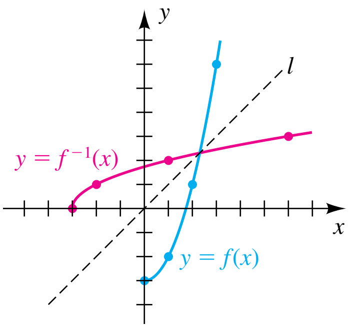
$$y = x^2 - 3$$

y despejamos x, para obtener

$$x = \pm\sqrt{y + 3}.$$

(continúa)

FIGURA 9



Note que las gráficas de f y f^{-1} se cruzan en la recta $y = x$.

Como x es no negativa, rechazamos $x = -\sqrt{y+3}$ y hacemos

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y+3} \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}.$$

(Note que si la función f tuviera dominio $x \le 0$ hubiéramos escogido la función $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+3}$.)

Directriz 3 Verificamos las condiciones (a) y (b) para x en los dominios de f y f^{-1}, respectivamente.

(a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 - 3)$

$$= \sqrt{(x^2-3)+3} = \sqrt{x^2} = x \text{ para } x \ge 0$$

(b) $f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt{x+3}\right)$

$$= \left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 3 = (x+3) - 3 = x \text{ para } x \ge -3$$

Entonces, la función inversa está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{para } x \ge -3.$$

■

Hay una relación interesante entre la gráfica de una función f y la gráfica de su función inversa f^{-1}. Primero observamos que $b = f(a)$ es equivalente a $a = f^{-1}(b)$. Estas ecuaciones implican que *el punto* (a, b) *está sobre la gráfica de* f *si y sólo si el punto* (b, a) *está sobre la gráfica de* f^{-1}.

Como ilustración, en el ejemplo 5 encontramos que las funciones f y f^{-1} dadas por

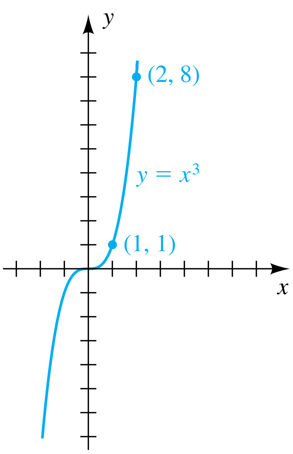
$$f(x) = x^2 - 3 \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$$

son funciones inversas entre sí, siempre que x se restrinja de modo apropiado. Algunos puntos sobre la gráfica de f son $(0, -3)$,$(1, -2)$,$(2, 1)$ y $(3, 6)$. Los puntos correspondientes sobre la gráfica de f^{-1} son $(-3, 0)$,$(-2, 1)$,$(1, 2)$ y $(6, 3)$. Las gráficas de f y f^{-1} se trazan en el mismo plano de coordenadas en la figura 9. Si la página se dobla a lo largo de la recta $y = x$ que corta los cuadrantes I y III (como se indica con la línea interrumpida de la figura), entonces las gráficas de f y f^{-1} coinciden. Las dos gráficas son *reflexiones* una de la otra a través de la recta $y = x$, o son *simétricas* con respecto a esta recta. Esto es típico de la gráfica de toda función f que tiene una función inversa f^{-1} (vea el ejercicio 56)

EJEMPLO 6 La relación entre las gráficas de f y f^{-1}

Sea $f(x) = x^3$. Encuentre la función inversa f^{-1} de f, y trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano de coordenadas.

FIGURA 10



SOLUCIÓN La gráfica de f se traza en la figura 10. Note que f es una función impar y por tanto la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Directriz 1 Como f es creciente en todo su dominio, $\mathbb{R}$, es biunívoca y por lo tanto tiene una función inversa f^{-1}.

Directriz 2 Consideremos la ecuación

$$y = x^3$$

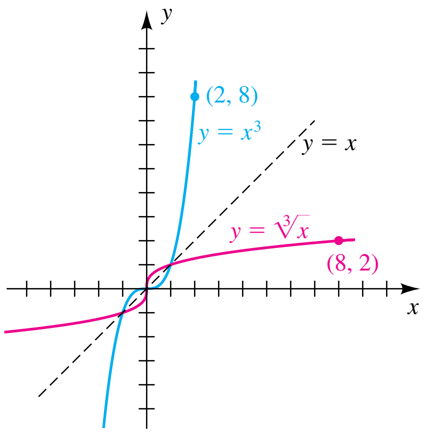
y despejamos x al sacar la raíz cúbica de cada lado, obteniendo

$$x = y^{1/3} = \sqrt[3]{y}.$$

A continuación hacemos

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \qquad \text{o, bien lo que es equivalente,} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

FIGURA 11



Directriz 3 Verificamos las condiciones (a) and (b):

(a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ para toda x en $\mathbb{R}$

(b) $f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ para toda x en $\mathbb{R}$

La gráfica de f^{-1} (esto es, la gráfica de la ecuación $y = \sqrt[3]{x}$) puede obtenerse por reflexión de la gráfica de la figura 10 a través de la recta $y = x$, como se ve en la figura 11. Tres puntos sobre la gráfica de f^{-1} son (0, 0), (1, 1) y (8, 2). ■

El siguiente ejemplo muestra cómo graficar la inversa de una función usando una calculadora de gráficas.

EJEMPLO 7 **Graficar la inversa de una función**

(a) Trace la gráfica de la función inversa de

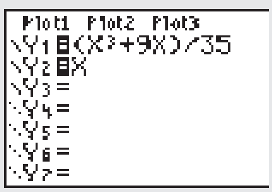
$$f(x) = \frac{1}{35}(x^3 + 9x).$$

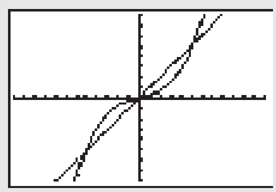
(b) Aproxime las soluciones de la ecuación $f(x) = f^{-1}(x)$.

SOLUCIÓN

(a) Asignaremos $(x^3 + 9x)/35$ a Y_1, asignamos x a Y_2, ajustamos la pantalla a $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$, y graficamos las funciones.

Haga asignaciones Y.
Grafique las funciones.

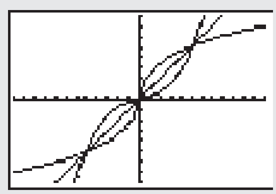




Grafique la inversa.

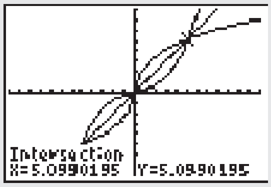
Como f es creciente en todo su dominio, es biunívoca y tiene una inversa. Si f no fuera biunívoca e hiciéramos el siguiente tecleo, entonces la calculadora trazaría la relación inversa, pero no sería una función.

[2nd] [DRAW] [8]
[VARS] [▷] [1] [1] [ENTER]



(continúa)

(b) $f(x) = f^{-1}(x)$ en la recta $y = x$. Usando la función de intersección con Y_1 y Y_2 da la solución $x \approx 5.1$. Por la simetría de las gráficas, tenemos las soluciones $x = 0$ y $x \approx \pm 5.1$.



5.1 Ejercicios

Ejer. 1–2: Si es posible, encuentre (a) $f^{-1}(5)$ (b) $g^{-1}(6)$

1

x	2	4	6
$f(x)$	3	5	9

x	1	3	5
$g(x)$	6	2	6

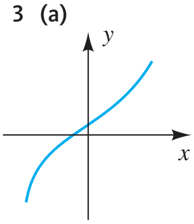
2

t	0	3	5
$f(t)$	2	5	6

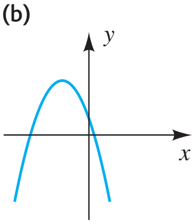
t	1	2	4
$g(t)$	3	6	6

Ejer. 3–4: Determine si la gráfica corresponde a una función biunívoca.

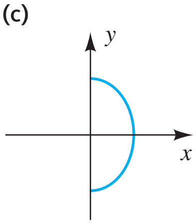
3 (a)



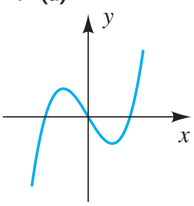
(b)



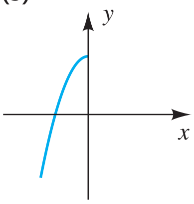
(c)



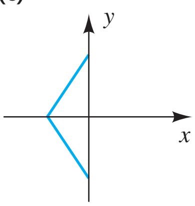
4 (a)



(b)



(c)



Ejer. 5-16: Determine si la función f es biunívoca.

5 $f(x) = 2x + 5$

6 $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

7 $f(x) = x^2 - 5$

8 $f(x) = x^2 + 3$

9 $f(x) = \sqrt{x}$

10 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

11 $f(x) = |x|$

12 $f(x) = 3$

13 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

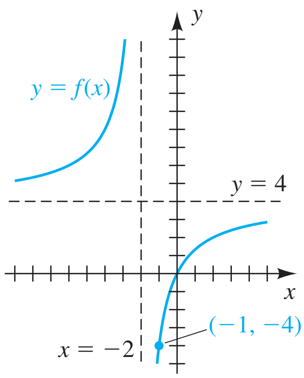
14 $f(x) = 2x^3 - 4$

15 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

16 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ejer. 17-18 Use la gráfica de f junto con la relación dominio-rango de f y f^{-1} para completar las declaraciones. (Sugerencia: si x se aproxima a 2 en f, entonces y se aproxima a 2 en f^{-1}.)

17



(a) Cuando $x \to -4$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

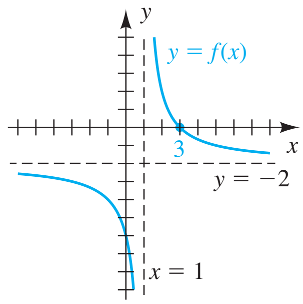
(b) Cuando $x \to \infty$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

(c) Cuando $x \to -\infty$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

(d) Cuando $x \to 4^{+}$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

(e) Cuando $x \to 4^{-}$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

18



(a) Cuando $x \to 0, f^{-1}(x) \to$ ____.

(b) Cuando $x \to \infty, f^{-1}(x) \to$ ____.

(c) Cuando $x \to -\infty, f^{-1}(x) \to$ ____.

(d) Cuando $x \to -2^{+}, f^{-1}(x) \to$ ____.

(e) Cuando $x \to -2^{-}, f^{-1}(x) \to$ ____.

Ejer. 19-22: Use el teorema sobre funciones inversas para demostrar que *f* y *g* son funciones inversas una de otra, y trace las gráficas de *f* y *g* en el mismo plano de coordenadas.

19 $f(x) = 3x - 2;$ $\quad g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

20 $f(x) = x^2 + 5, x \leq 0;$ $\quad g(x) = -\sqrt{x-5}, x \geq 5$

21 $f(x) = -x^2 + 3, x \geq 0;$ $\quad g(x) = \sqrt{3-x}, x \leq 3$

22 $f(x) = x^3 - 4;$ $\quad g(x) = \sqrt[3]{x+4}$

Ejer. 23-26: Determine el dominio y rango de f^{-1} para la función dada sin hallar en realidad f^{-1}. *Sugerencia:* primero encuentre el dominio y rango de *f*

23 $f(x) = -\dfrac{2}{x-1}$

24 $f(x) = \dfrac{5}{x+3}$

25 $f(x) = \dfrac{4x+5}{3x-8}$

26 $f(x) = \dfrac{2x-7}{9x+1}$

Ejer. 27–48: Encuentre la función inversa de *f*.

27 $f(x) = 3x + 5$

28 $f(x) = 7 - 2x$

29 $f(x) = \dfrac{3}{2x-5}$

30 $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

31 $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-5}$

32 $f(x) = \dfrac{4x}{x-2}$

33 $f(x) = 2 - 3x^2, x \leq 0$

34 $f(x) = 5x^2 + 2, x \geq 0$

35 $f(x) = 2x^3 - 5$

36 $f(x) = -x^3 + 2$

37 $f(x) = \sqrt{3-x}$

38 $f(x) = \sqrt{x+4}$

39 $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

40 $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4$

41 $f(x) = (x^5 - 6)^3$

42 $f(x) = (x^3 + 1)^5$

43 $f(x) = x$

44 $f(x) = -x$

45 $f(x) = -\sqrt{9-x^2}, -3 \leq x \leq 0$

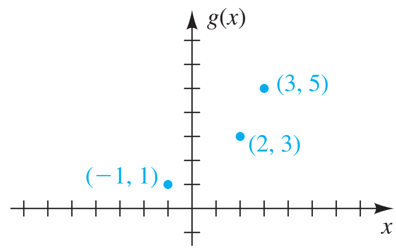
46 $f(x) = \sqrt{4-x^2}, 0 \leq x \leq 2$

47 $f(x) = x^2 - 6x, x \geq 3$

48 $f(x) = x^2 - 4x + 3, x \leq 2$

Ejer. 49-50: Sea $h(x) = 4 - x$. Use *h*, la tabla y la gráfica para evaluar la expresión.

x	2	3	4	5	6
f(x)	−1	0	1	2	3



49 **(a)** $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$ **(b)** $(g^{-1} \circ h)(3)$

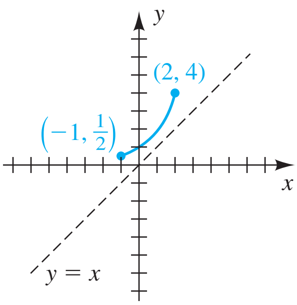
(c) $(h^{-1} \circ f \circ g^{-1})(3)$

50 **(a)** $(g \circ f^{-1})(-1)$ **(b)** $(f^{-1} \circ g^{-1})(3)$

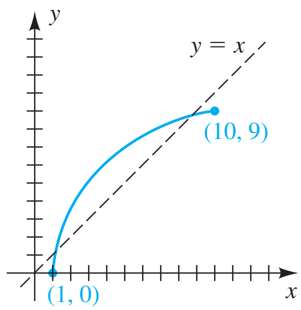
(c) $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(6)$

Ejer. 51-54: Se ilustra la gráfica de una función biunívoca *f*. (a) Utilice la propiedad de reflexión para trazar la gráfica de f^{-1}. (b) Encuentre el dominio *D* y el rango *R* de la función *f*. (c) Encuentre el dominio D_1 y el rango R_1 de la función inversa f^{-1}.

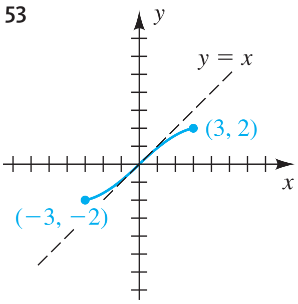
51



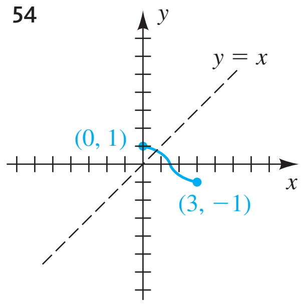
52



53



54



55 **(a)** (a) Demuestre que la función definida por $f(x) = ax + b$ (una función lineal) para $a \neq 0$ tiene una función inversa y encuentre $f^{-1}(x)$.

(b) ¿Una función constante tiene inversa? Explique.

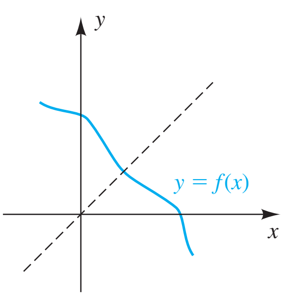
56 Demuestre que la gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f a través de la recta $y = x$ verificando las siguientes condiciones:

(1) Si $P(a, b)$ está sobre la gráfica de f, entonces $Q(b, a)$ está sobre la gráfica de f^{-1}.
(2) El punto medio del segmento de recta PQ está sobre la recta $y = x$.
(3) La recta PQ es perpendicular a la recta $y = x$.

57 Verifique que $f(x) = f^{-1}(x)$ si

(a) $f(x) = -x + b$ **(b)** $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$ para $c \neq 0$

(c) $f(x)$ tiene la gráfica siguiente



58 Sea n cualquier entero positivo. Encuentre la función inversa de f si

(a) $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$

(b) $f(x) = x^{m/n}$ para $x \geq 0$ y m cualquier entero positivo

Ejer. 59–60: Use la gráfica de f para determinar si f es biunívoca.

59 $f(x) = 0.4x^5 - 0.4x^4 + 1.2x^3 - 1.2x^2 + 0.8x - 0.8$

60 $f(x) = \dfrac{x - 8}{x^{2/3} + 4}$

Ejer. 61-62: Grafique f sobre el intervalo dado. (a) Estime el intervalo más grande $[a, b]$ con $a < 0 < b$ sobre el cual f es biunívoca. (b) Si g es la función con dominio $[a, b]$ tal que $g(x) = f(x)$ para $a \leq x \leq b$, estime el dominio y rango de g^{-1}.

61 $f(x) = 2.1x^3 - 2.98x^2 - 2.11x + 3;$ $[-1, 2]$

62 $f(x) = 0.05x^4 - 0.24x^3 - 0.15x^2 + 1.18x + 0.24;$ $[-2, 2]$

Ejer. 63-64: Grafique f en la pantalla dada. Use la gráfica de f para predecir la forma de la gráfica de f^{-1}. Verifique su predicción al graficar f^{-1} y la recta $y = x$ en la misma pantalla.

63 $f(x) = \sqrt[3]{x - 1};$ $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

64 $f(x) = 2(x - 2)^2 + 3, x \geq 2;$ $[0, 12]$ por $[0, 8]$

65 **Necesidades de ventilación** La ventilación es una forma eficiente de mejorar la calidad del aire en interiores. En restaurantes donde no se permite fumar, las necesidades de circulación de aire (en ft^3/min) están dadas por la función $V(x) = 35x$, donde x es el número de personas en el área de comedor.

(a) Determine las necesidades de ventilación para 23 personas.

(b) Encuentre $V^{-1}(x)$. Explique el significado de V^{-1}.

(c) Use V^{-1} para determinar el número máximo de personas que deben estar en un restaurante que tenga capacidad de ventilación de 2350 ft^3/min.

66 **Estaciones radioemisoras** La tabla siguiente es una lista de números totales de radioemisoras en Estados Unidos para ciertos años

Año	Número
1950	2773
1960	4133
1970	6760
1980	8566
1990	10,770
2000	12,717

(a) Grafique los datos

(b) Determine una función lineal $f(x) = ax + b$ que modele estos datos, donde x es el año. Grafique f y los datos en los mismos ejes de coordenadas.

(c) Encuentre $f^{-1}(x)$. Explique el significado de f^{-1}.

(d) Use f^{-1} para predecir el año en el que hubo 11,987 radioemisoras. Compárelo con el verdadero valor, que es 1995.

5.2 Funciones exponenciales

Previamente, consideramos funciones que tenían términos de la forma

$$\text{base variable}^{\text{potencia constante}},$$

como tales x^2, $0.2x^{1.3}$ y $8x^{2/3}$. Ahora llevemos nuestra atención a funciones que tienen términos de la forma

$$\text{base constante}^{\text{potencia variable}},$$

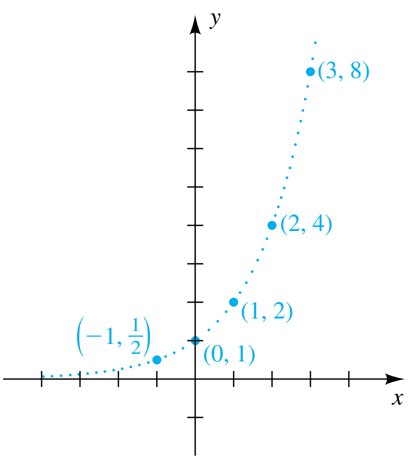
como tales 2^x, $(1.04)^{4x}$ y 3^{-x}. Empecemos por considerar la función f definida por

$$f(x) = 2^x,$$

donde x está restringida a números *racionales.* (Recuerde que si $x = m/n$ para enteros m y n con $n > 0$, entonces $2^x = 2^{m/n} = \left(\sqrt[n]{2}\right)^m$.) Las coordenadas de varios puntos sobre la gráfica de $y = 2^x$ se dan en la tabla siguiente.

x	-10	-3	-2	-1	0	1	2	3	10
$y = 2^x$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	1024

FIGURA 1



Otros valores de y para x racional, tales como $2^{1/3}$, $2^{-9/7}$ y $2^{5.143}$ se pueden aproximar con una calculadora. Podemos demostrar algebraicamente que si x_1 y x_2 son números racionales tales que $x_1 < x_2$, entonces $2^{x_1} < 2^{x_2}$. Así, f es una función creciente y su gráfica sube. Localizar puntos lleva al trazo de la figura 1, donde los puntos pequeños indican que sólo los puntos con coordenadas x *racionales* están sobre la gráfica. Hay un *hueco* en la gráfica siempre que la coordenada x de un punto es irracional.

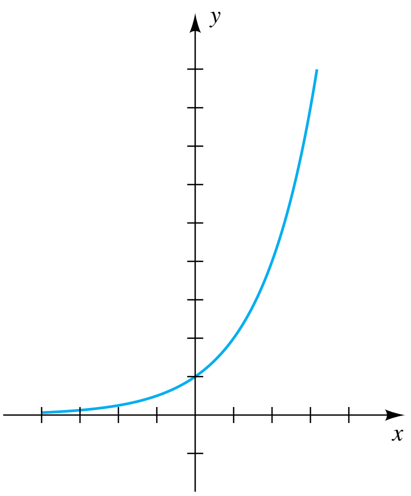
Para entender el dominio de f a todos los números reales, es necesario definir 2^x para todo exponente irracional x. Para ilustrar, si deseamos definir 2^π podríamos utilizar el decimal no periódico 3.1415926 . . . para representar π y considerar las siguientes potencias racionales de 2:

$$2^3, \quad 2^{3.1}, \quad 2^{3.14}, \quad 2^{3.141}, \quad 2^{3.1415}, \quad 2^{3.14159}, \quad \ldots$$

Utilizando cálculo, se puede demostrar que cada potencia sucesiva se acerca a un único número real, denotado por 2^π. Así,

$$2^x \to 2 \quad \text{cuando} \quad x \to \pi, \quad \text{con } x \text{ racional.}$$

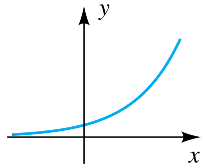
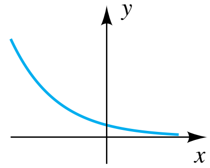
FIGURA 2



La misma técnica se puede usar para cualquier otra potencia irracional de 2. Para trazar la gráfica de $y = 2^x$ con x *real*, sustituimos los huecos de la gráfica de la figura 1 con puntos, y obtenemos la gráfica de la figura 2. La función f definida por $f(x) = 2^x$ para todo número real x se denomina **función exponencial** *con base* 2.

Consideremos a continuación *cualquier* base a, donde a es un número real positivo diferente de 1. Al igual que en la exposición precedente, a cada

número real x le corresponde exactamente un número positivo a^x tal que las leyes de los exponentes son verdaderas. Así, como en la tabla siguiente, podemos definir una función f cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y el rango es el conjunto de los números reales positivos.

Terminología	Definición	Gráfica de f para $a > 1$	Gráfica de f para $0 < a < 1$
Función exponencial f con base a	$f(x) = a^x$ para toda x en $\mathbb{R}$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$		

Note que si $a > 1$, entonces $a = 1 + d\ (d > 0)$ y la base a en $y = a^x$ puede considerarse como que representa una multiplicación por más de 100% a medida que x aumenta en 1, de modo que la función es creciente. Por ejemplo, si $a = 1.15$, entonces $y = (1.15)^x$ puede considerarse como una función de crecimiento de 15% por año. Más detalles sobre este concepto aparecen más adelante.

Las gráficas de la tabla muestran que si $a > 1$, entonces f es creciente en $\mathbb{R}$, y si $0 < a < 1$, entonces f es decreciente en $\mathbb{R}$. (Estos hechos se pueden demostrar usando cálculo.) Las gráficas simplemente indican el aspecto *general*; la forma *exacta* depende del valor de a. Note, sin embargo, que como $a^0 = 1$, el punto de intersección con el eje y es 1 para toda a.

Si $a > 1$, entonces cuando x *disminuye* pasando por valores negativos, la gráfica de f se aproxima al eje x (vea la tercera columna de la tabla). Así, el eje x es una *asíntota horizontal*. Cuando x aumenta pasando por valores positivos, la gráfica sube rápidamente. Este tipo de variación es característica de la **ley exponencial de crecimiento,** y f a veces recibe el nombre de **función de crecimiento**.

Si $0 < a < 1$, entonces, cuando x *aumenta*, la gráfica de f se aproxima al eje x en forma asintótica (vea la última columna de la tabla). Este tipo de variación se conoce como **decaimiento exponencial.**

Al considerar a^x excluimos los casos $a \leq 0$ y $a = 1$. Note que si $a < 0$, entonces a^x no es un número real para muchos valores de x como por ejemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{11}{6}$. Si $a = 0$, entonces $a^0 = 0^0$ no está definida. Por último, si $a = 1$, entonces $a^x = 1$ para toda x y la gráfica de $y = a^x$ es una recta horizontal.

La gráfica de una función exponencial f es creciente en todo su dominio o decreciente en todo su dominio. Por lo tanto, f es biunívoca por el teorema de la página 295. Combinando este resultado con la definición de una función biunívoca (vea la página 294) nos da las partes (1) y (2) del siguiente teorema.

Teorema: Las funciones exponenciales son biunívocas

La función exponencial f dada por

$$f(x) = a^x \quad \text{para} \quad 0 < a < 1 \quad \text{o} \quad a > 1$$

es biunívoca. Por lo tanto, las siguientes condiciones equivalentes quedan satisfechas para números reales x_1 y x_2.

(1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

(2) Si $a^{x_1} = a^{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$.

Cuando usemos este teorema como justificación para un paso en la solución de un ejemplo, indicaremos que las *funciones exponenciales son biunívocas*.

ILUSTRACIÓN **Las funciones exponenciales son biunívocas**

- Si $7^{3x} = 7^{2x+5}$, entonces $3x = 2x + 5$ o $x = 5$.

En el siguiente ejemplo resolveremos una *ecuación exponencial* sencilla, es decir, una en la que la variable aparece en un exponente.

EJEMPLO 1 **Resolver una ecuación exponencial**

Resuelva la ecuación $3^{5x-8} = 9^{x+2}$.

SOLUCIÓN

$3^{5x-8} = 9^{x+2}$	enunciado
$3^{5x-8} = (3^2)^{x+2}$	exprese ambos lados con la misma base
$3^{5x-8} = 3^{2x+4}$	ley de exponentes
$5x - 8 = 2x + 4$	las funciones exponenciales son biunívocas
$3x = 12$	reste $2x$ y sume 8
$x = 4$	divida entre 3

■

Note que la solución en el ejemplo 1 dependió del hecho que la base 9 podría escribirse como 3 a alguna potencia. Consideraremos sólo ecuaciones exponenciales de este tipo por ahora, pero resolveremos ecuaciones exponenciales más generales más adelante en este capítulo.

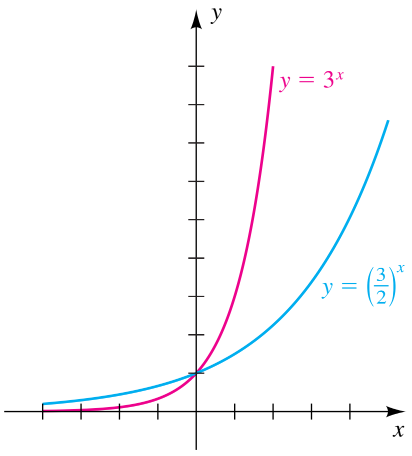
En los siguientes dos ejemplos trazamos las gráficas de varias funciones exponenciales diferentes.

EJEMPLO 2 **Trazar gráficas de funciones exponenciales**

Si $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ y $g(x) = 3^x$, trace las gráficas de f y g en el mismo plano de coordenadas.

SOLUCIÓN Como $\frac{3}{2} > 1$ y $3 > 1$, cada gráfica *sube* cuando x aumenta. La tabla siguiente muestra coordenadas para varios puntos sobre las gráficas.

FIGURA 3

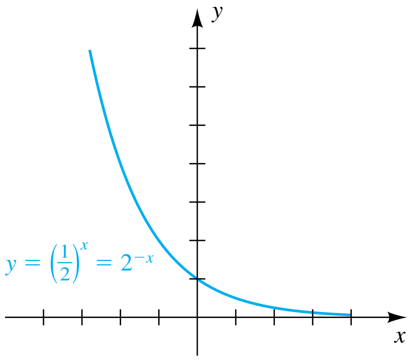


x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	$\frac{4}{9} \approx 0.4$	$\frac{2}{3} \approx 0.7$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} \approx 2.3$	$\frac{27}{8} \approx 3.4$	$\frac{81}{16} \approx 5.1$
$y = 3^x$	$\frac{1}{9} \approx 0.1$	$\frac{1}{3} \approx 0.3$	1	3	9	27	81

Localizar puntos y estar familiarizado con la gráfica general de $y = a^x$ lleva a las gráficas de la figura 3. ■

El ejemplo 2 ilustra el hecho de que si $1 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ para valores positivos de x y $b^x < a^x$ para valores negativos de x. En particular, como $\frac{3}{2} < 2 < 3$, la gráfica de $y = 2^x$ en la figura 2 se encuentra entre las gráficas de f y g en la figura 3.

FIGURA 4



EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de una función exponencial

Trace la gráfica de la ecuación $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

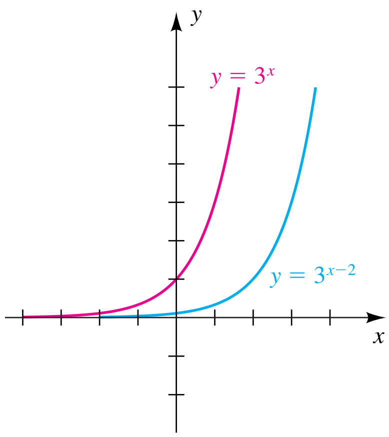
SOLUCIÓN Como $0 < \frac{1}{2} < 1$, la gráfica *cae* cuando x aumenta. Las coordenadas de algunos puntos en la gráfica se indican en la tabla siguiente

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

La gráfica se traza en la figura 4. Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$, la gráfica es igual que la gráfica de la ecuación $y = 2^{-x}$. Note que la gráfica es una reflexión a través del eje y de la gráfica de $y = 2^x$ en la figura 2. ■

Ecuaciones de la forma $y = a^u$, donde u es alguna expresión en x, se presentan en aplicaciones. Los siguientes dos ejemplos ilustran ecuaciones de esta forma.

FIGURA 5



EJEMPLO 4 Desplazamiento de gráficas de funciones exponenciales

Trace la gráfica de la ecuación

(a) $y = 3^{x-2}$ **(b)** $y = 3^x - 2$

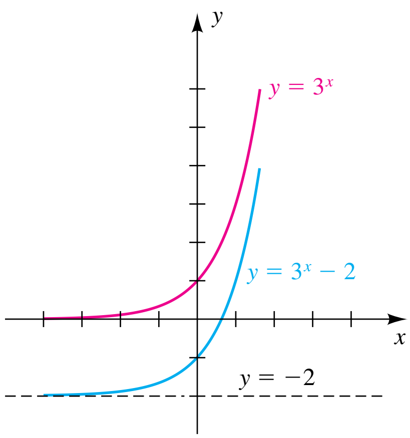
SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = 3^x$, trazada en la figura 3, se vuelve a trazar en la figura 5. Del análisis de desplazamientos horizontales en la sección 3.5, podemos obtener la gráfica de $y = 3^{x-2}$ al desplazar la gráfica de $y = 3^x$ dos unidades a la derecha, como se muestra en la figura 5.

La gráfica de $y = 3^{x-2}$ también se puede obtener al localizar varios puntos y usarlos como guía para trazar una curva tipo exponencial.

(b) De la exposición de desplazamientos verticales de la sección 3.5, podemos obtener la gráfica de $y = 3^x - 2$ al desplazar la gráfica de $y = 3^x$ dos unidades hacia abajo, como se muestra en la figura 6. Note que el punto de intersección con el eje y es -1 y la recta $y = -2$ es una asíntota horizontal para la gráfica. ■

FIGURA 6



EJEMPLO 5 Hallar una ecuación de una función exponencial que satisfaga condiciones prescritas

Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x} + c$ que tiene asíntota horizontal $y = -2$, punto de intersección 16 con el eje y y punto de intersección 2 con el eje x

SOLUCIÓN La asíntota horizontal de la gráfica de una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x}$ es el eje x; es decir, $y = 0$. Como la asíntota horizontal deseada es $y = -2$, debemos tener $c = -2$, de modo que $f(x) = ba^{-x} - 2$.

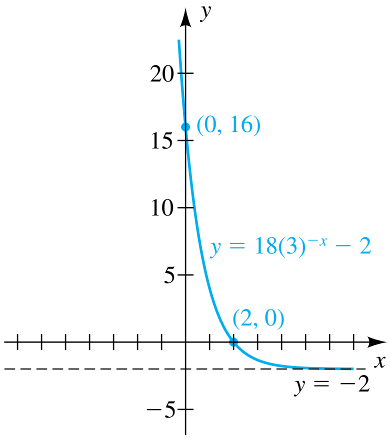
Como el punto de intersección con el eje y es 16, $f(0)$ debe ser igual a 16. Pero $f(0) = ba^{-0} - 2 = b - 2$, de modo $b - 2 = 16$ y $b = 18$. Por lo tanto, $f(x) = 18a^{-x} - 2$.

Por último, encontramos el valor de a:

$$f(x) = 18a^{-x} - 2 \quad \text{forma dada de } f$$

$$0 = 18(a)^{-2} - 2 \quad f(2) = 0 \text{ porque 2 es el punto de intersección con el eje } x$$

FIGURA 7



$$2 = 18 \cdot \frac{1}{a^2} \qquad \text{sume 2; definición de exponente negativo}$$

$$a^2 = 9 \qquad \text{multiplique por } a^2/2$$

$$a = \pm 3 \qquad \text{saque la raíz cuadrada}$$

Como a debe ser positiva, tenemos

$$f(x) = 18(3)^{-x} - 2.$$

La figura 7 muestra una gráfica de f que satisface todas las condiciones del enunciado del problema. Note que $f(x)$ podría escribirse en la forma equivalente

$$f(x) = 18\left(\tfrac{1}{3}\right)^x - 2.$$ ■

La gráfica en forma de campana de la función del siguiente ejemplo es semejante a una *curva de probabilidad normal* empleada en estudios de estadística.

EJEMPLO 6 **Trazar una gráfica en forma de campana**

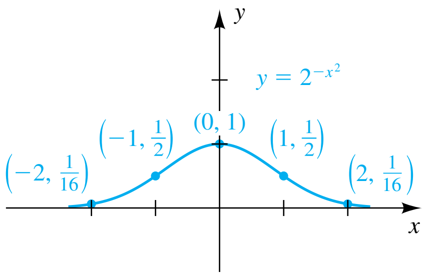
Si $f(x) = 2^{-x^2}$, trace la gráfica de f.

SOLUCIÓN Si escribimos de nuevo $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{1}{2^{(x^2)}},$$

vemos que cuando x aumenta con valores positivos, $f(x)$ disminuye rápidamente; en consecuencia, la gráfica se aproxima al eje x en forma asintótica. Como x^2 es mínima cuando $x = 0$, el máximo valor de f es $f(0) = 1$. Como f es una función par, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Algunos puntos en la gráfica son (0,1), $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(2, \frac{1}{16}\right)$. Localizar puntos y usar simetría nos da el trazo de la figura 8. ■

FIGURA 8



APLICACIÓN **Crecimiento de bacterias**

Las funciones exponenciales pueden usarse para describir el crecimiento de ciertas poblaciones. Como ilustración, suponga que se observa experimentalmente que el número de bacterias en un cultivo se duplica al día. Si 1000 bacterias están presentes al inicio, entonces obtenemos la tabla siguiente, donde t es el tiempo en días y $f(t)$ es la cantidad de bacterias en el tiempo t.

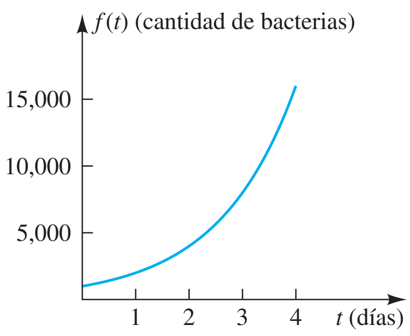
t (tiempo de días)	0	1	2	3	4
$f(t)$ (cant. de bacterias)	1000	2000	4000	8000	16,000

Parece que $f(t) = (1000)2^t$. Con esta fórmula podemos predecir el número de bacterias presentes en cualquier tiempo t. Por ejemplo, en $t = 1.5 = \frac{3}{2}$,

$$f(t) = (1000)2^{3/2} \approx 2828.$$

La gráfica de f se ve en la figura 9.

FIGURA 9

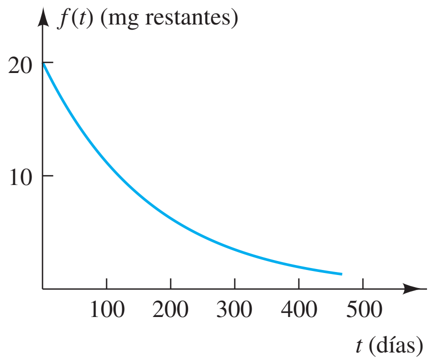


APLICACIÓN **Decaimiento radiactivo**

Ciertas cantidades físicas *decrecen* exponencialmente. En tales casos, si a es la base de la función exponencial, entonces $0 < a < 1$. Uno de los ejemplos más comunes de decrecimiento exponencial es el decaimiento de una sustancia ra-

diactiva o isótopo. La **vida media** de un isótopo es el tiempo que tarda la mitad de la cantidad original de una muestra determinada en desintegrarse. La vida media es la característica principal empleada para distinguir una sustancia radiactiva de otra. El isótopo del polonio ^{210}Po tiene una vida media de aproximadamente 140 días; esto es, dada cualquier cantidad, la mitad se desintegrará en 140 días. Si 20 miligramos de ^{210}Po están presentes inicialmente, entonces la tabla siguiente indica la cantidad restante después de varios intervalos.

FIGURA 10



***t* (tiempo en días)**	0	140	280	420	560
***f*(*t*) (mg restantes)**	20	10	5	2.5	1.25

El trazo de la figura 10 ilustra la naturaleza exponencial de la desintegración.

Otras sustancias radiactivas tienen vidas medias mucho más largas. En particular, un producto derivado de los reactores nucleares es el isótopo de plutonio radiactivo ^{239}Pu, que tiene una vida media de alrededor de 24,000 años. Es por esta razón que la eliminación de desechos radiactivos es un problema muy grande en la sociedad moderna.

APLICACIÓN Interés compuesto

El *interés compuesto* da una buena ilustración del crecimiento exponencial. Si una cantidad de dinero P, el *capital inicial*, se invierte a una tasa de interés r *simple,* entonces el interés al final de un periodo de interés es el producto Pr cuando r se expresa como decimal. Por ejemplo, si $P = \$1000$ y la tasa de interés es 9% al año, entonces $r = 0.09$ y el interés al final de un año es $1000(0.09), o sea $90.

Si el interés se reinvierte con el principal al final del periodo de interés, entonces el nuevo capital es

$$P + Pr \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad P(1 + r).$$

Note que para hallar el nuevo capital podemos multiplicar el capital inicial por $(1 + r)$. En el ejemplo precedente, el nuevo capital es $1000(1.09), o sea $1090.

Después de que haya transcurrido otro periodo de interés, el nuevo capital puede hallarse al multiplicar $P(1 + r)$ por $(1 + r)$. Así, el capital después de dos periodos de interés es $P(1 + r)^2$. Si continuamos reinvirtiendo, el capital después de tres periodos es $P(1 + r)^3$; después de cuatro es $P(1 + r)^4$; y, en general, la cantidad A acumulada después de k periodos de interés es

$$A = P(1 + r)^k.$$

El interés acumulado por medio de esta fórmula es **interés compuesto.** Note que A se expresa en términos de una función exponencial con base $1 + r$. El periodo de interés puede medirse en años, meses, semanas, días o cualquier otra unidad apropiada de tiempo. Cuando aplique la fórmula para A, recuerde que *r es la tasa de interés por periodo de interés expresado como decimal.* Por ejemplo, si la tasa se expresa como 6% *por año capitalizado mensualmente,* entonces la tasa por mes es 6/12%, o bien, lo que es equivalente, 0.5%. Entonces, $r = 0.005$ y k es el número de meses. Si $100 se invierten a esta tasa, entonces la fórmula para A es

$$A = 100(1 + 0.005)^k = 100(1.005)^k.$$

En general, tenemos la fórmula siguiente.

Fórmula de interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

donde P = capital inicial
r = tasa de interés anual expresada como decimal
n = número de periodos de interés por año
t = número de años que P se invierte
A = cantidad después de t años

El siguiente ejemplo ilustra el uso de la fórmula de interés compuesto.

EJEMPLO 7 **Uso de la fórmula de interés compuesto**

Suponga que $1000 se invierten a una tasa de interés de 9% capitalizado mensualmente. Encuentre la nueva cantidad acumulada después de 5 años, después de 10 años y después de 15 años. Ilustre gráficamente el crecimiento de la inversión.

SOLUCIÓN Aplicando la fórmula de interés compuesto con $r = 9\% = 0.09$, $n = 12$ y $P = \$1000$, encontramos que la cantidad después de t años es

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12t} = 1000(1.0075)^{12t}.$$

Sustituyendo $t = 5$, 10 y 15 y usando calculadora, obtenemos la tabla siguiente.

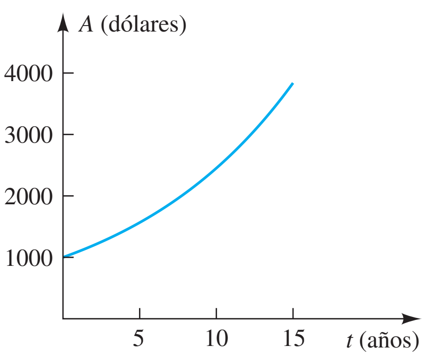
Note que cuando se trabaje con valores monetarios, usamos = en lugar de ≈ y redondeamos a dos lugares decimales.

Número de años	Cantidad
5	$A = \$1000(1.0075)^{60} = \$1565.68$
10	$A = \$1000(1.0075)^{120} = \$2451.36$
15	$A = \$1000(1.0075)^{180} = \$3838.04$

La naturaleza exponencial del aumento está indicada por el hecho de que durante los primeros cinco años, el crecimiento en la inversión es $565.68; durante el segundo periodo de cinco años, el crecimiento es $885.68; y durante el último periodo de cinco años, es $1386.68.

El trazo de la figura 11 ilustra el crecimiento de $1000 invertidos en un periodo de 15 años. ■

FIGURA 11
Interés compuesto: $A = 1000(1.0075)^{12t}$



EJEMPLO 8 **Hallar un modelo exponencial**

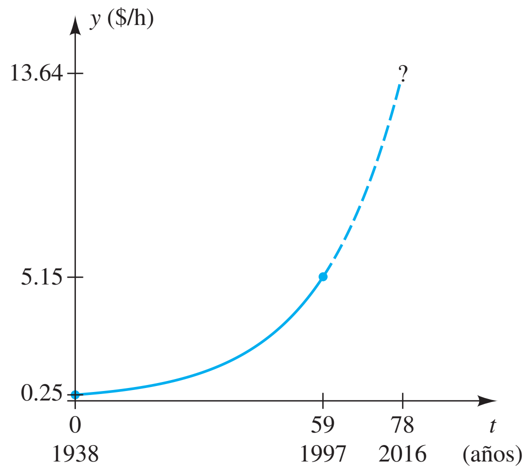
En 1938 se promulgó una ley federal que establecía un salario mínimo y éste fue de $0.25 por hora; el salario había subido a $5.15 por hora en 1997. Encuentre una función exponencial sencilla de la forma $y = ab^t$ que modele el salario mínimo federal para 1938-1997.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
y &= ab^t && \text{enunciado} \\
0.25 &= ab^0 && \text{sea } t = 0 \text{ para 1938} \\
0.25 &= a && b^0 = 1 \\
y &= 0.25b^t && \text{sustituya } a \text{ con 0.25} \\
5.15 &= 0.25b^{59} && t = 1997 - 1938 = 59 \\
b^{59} &= \frac{5.15}{0.25} = 20.6 && \text{divida entre 0.25} \\
b &= \sqrt[59]{20.6} && \text{saque la raíz 59} \\
b &\approx 1.0526 && \text{aproxime}
\end{aligned}
$$

Obtenemos el modelo $y = 0.25(1.0526)^t$, que indica que el salario mínimo federal aumentó alrededor de 5.26% por año de 1938 a 1997. Una gráfica del modelo se muestra en la figura 12. ¿Piensa el lector que este modelo se cumplirá hasta el año 2016?

FIGURA 12



■

Concluimos esta sección con un ejemplo que involucra una calculadora de gráficas.

EJEMPLO 9 **Estimar cantidades de un medicamento en el torrente sanguíneo**

Si un adulto toma por vía oral una pastilla de 100 miligramos de cierto medicamento, la rapidez R a la cual el medicamento entra al torrente t minutos después se pronostica que será

$$R = 5(0.95)^t \text{ mg/min.}$$

Se puede demostrar mediante cálculo que la cantidad A del medicamento en el torrente sanguíneo en el tiempo t se puede aproximar con

$$A = 97.4786[1 - (0.95)^t] \text{ mg.}$$

(a) Estime el tiempo que tarden 50 miligramos del medicamento en entrar al torrente sanguíneo.

(b) Estime el número de miligramos del medicamento presentes en el torrente sanguíneo cuando entra a razón de 3 mg/min.

FIGURA 13
[0, 100, 10] por [0, 100, 10]

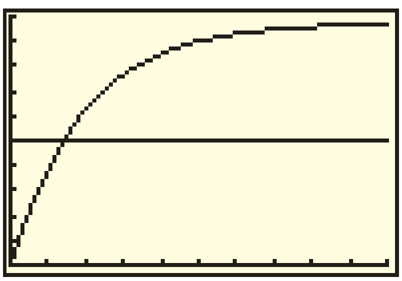
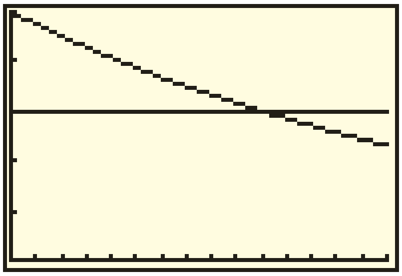


FIGURA 14
[0, 15] por [0, 5]



SOLUCIÓN

(a) Deseamos determinar t cuando A es igual a 50. Como el valor de A no puede exceder de 97.4786, escogemos que la pantalla sea [0,100,10] por [0, 100, 10].

A continuación asignamos $97.4786[1 - (0.95)^x]$ a Y_1, asignamos 50 a Y_2 y graficamos Y_1 y Y_2, obteniendo una pantalla semejante a la de la figura 13 (note que $x = t$). Usando la función de intersección, estimamos que $A = 50$ mg cuando $x \approx 14$ minutos.

(b) Deseamos determinar t cuando R sea igual a 3. Primero asignemos $5(0.95)^x$ a Y_3 y 3 a Y_4. Como el valor máximo de Y_3 es 5 (en $t = 0$), usamos una pantalla de dimensiones [0, 15] por [0, 5] y obtenemos una pantalla semejante a la de la figura 14. Usando de nuevo la función de intersección, encontramos que $y = 3$ cuando $x \approx 9.96$. Entonces, después de casi 10 minutos, el medicamento estará entrando en el torrente sanguíneo a razón de 3 mg/minuto. (Note que la rapidez inicial, en $t = 0$, es 5 mg/min.) Al hallar el valor de Y_1 en $x = 10$, vemos que hay casi 39 miligramos del medicamento en el torrente sanguíneo después de 10 minutos. ■

5.2 Ejercicios

Ejer . 1–10: Resuelva la ecuación.

1 $7^{x+6} = 7^{3x-4}$

2 $6^{7-x} = 6^{2x+1}$

3 $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$

4 $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$

5 $2^{-100x} = (0.5)^{x-4}$

6 $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} = 2$

7 $25^{x-3} = 125^{4-x}$

8 $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

9 $4^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} = 8 \cdot (2^x)^2$

10 $9^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 27 \cdot (3^x)^{-2}$

11 Complete las declaraciones para $f(x) = a^x + c$ con $a > 1$.

(a) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

(b) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____.

12 Complete las declaraciones para $f(x) = a^{-x} + c$ con $a > 1$.

(a) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

(b) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____.

13 Trace la gráfica de f si $a = 2$.

(a) $f(x) = a^x$

(b) $f(x) = -a^x$

(c) $f(x) = 3a^x$

(d) $f(x) = a^{x+3}$

(e) $f(x) = a^x + 3$

(f) $f(x) = a^{x-3}$

(g) $f(x) = a^x - 3$

(h) $f(x) = a^{-x}$

(i) $f(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

(j) $f(x) = a^{3-x}$

14 Trabaje el ejercicio 13 si $a = \frac{1}{2}$.

Ejer. 15–28: Trace la gráfica de *f*.

15 $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

16 $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

17 $f(x) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$

18 $f(x) = 8(4)^{-x} - 2$

19 $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$

20 $f(x) = -3^{-x} + 9$

21 $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 8$

22 $f(x) = -3^x + 9$

23 $f(x) = 2^{|x|}$

24 $f(x) = 2^{-|x|}$

25 $f(x) = 3^{1-x^2}$

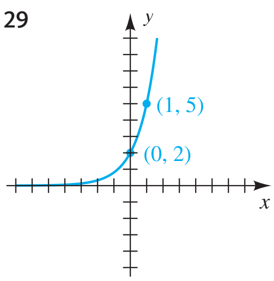
26 $f(x) = 2^{-(x+1)^2}$

27 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$

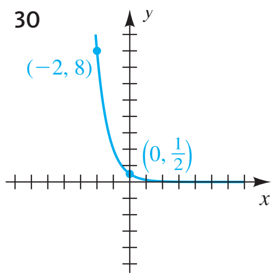
28 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

Ejer. 29-32: Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^x$ o $f(x) = ba^x + c$ que tenga la gráfica dada.

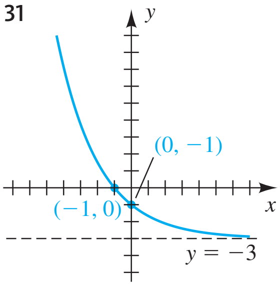
29



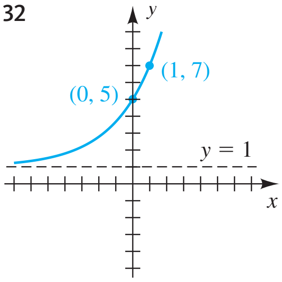
30



31



32



Ejer. 33-34: Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^x$ que tiene el punto dado de intersección con el eje *y* y pasa por el punto *P*.

33 punto de intersección con el eje *y*: 8; $P(3, 1)$

34 punto de intersección con el eje *y*: 5; $P\left(2, \frac{5}{16}\right)$

Ejer. 35-36: Encuentre una función exponencial de la forma $f(x)= ba^{-x} + c$ que tiene la asíntota horizontal y el punto de intersección con el eje *y* dados y que pasa por el punto *P*.

35 $y = 32$; punto de intersección con el eje *y*: 212; $P(2, 112)$

36 $y = 72$; punto de intersección con el eje *y*: 425; $P(1, 248.5)$

37 **Población de renos** Cien renos, cada uno de ellos de 1 año de edad, se introducen en una reserva de caza. El número $N(t)$ de animales vivos después de *t* años se pronostica que es $N(t) = 100(0.9)^t$.

(a) Estime el número de animales vivos después de 5 años.

(b) ¿Qué porcentaje de la manada muere cada año?

38 **Dosis de medicamento** Un medicamento es eliminado del cuerpo por la orina. Suponga que para una dosis inicial de 10 miligramos, la cantidad $A(t)$ en el cuerpo *t* horas después está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$.

(a) Estime la cantidad del medicamento en el cuerpo 8 horas después de la dosis inicial.

(b) ¿Qué porcentaje del medicamento remanente en el cuerpo es eliminado cada hora?

39 **Crecimiento de bacterias** El número de bacterias en cierto cultivo aumentó de 600 a 1800 entre las 7:00 a.m. y las 9:00 a.m. Suponiendo que el crecimiento es exponencial, el número $f(t)$ de bacterias *t* horas después de las 7:00 a.m. está dado por $f(t) = 600(3)^{t/2}$.

(a) Estime el número de bacterias en el cultivo a las 8:00 a.m., 10:00 a.m. y 11:00 a.m.

(b) Trace la gráfica de *f* para $0 \leq t \leq 4$.

40 **Ley de Newton del enfriamiento** Según la ley de Newton del enfriamiento, la rapidez a la que un cuerpo se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea. La cara de una plancha doméstica se enfría de 125° a 100° en 30 minutos en un cuarto que permanece a una temperatura constante de 75°. De acuerdo con cálculo integral, la temperatura $f(t)$ de la cara después de *t* horas de enfriamiento está dada por $f(t) = 50(2)^{-2t} + 75$.

(a) Suponiendo que $t = 0$ corresponde a la 1:00 p.m., aproxime al décimo de grado más cercano, la temperatura de la cara a las 2:00 p.m., 3:30 p.m. y 4:00 p.m.

(b) Trace la gráfica de *f* para $0 \leq t \leq 4$.

41 **Decaimiento radiactivo** El isótopo de bismuto radiactivo ^{210}Bi tiene una vida media de 5 días. Si hay 100 miligramos de ^{210}Bi presentes en el tiempo $t = 0$, entonces la cantidad $f(t)$ restante después de *t* días está dada por $f(t) = 100(2)^{-t/5}$.

(a) ¿Cuánto ^{210}Bi permanece después de 5 días? ¿10 días? ¿12.5 días?

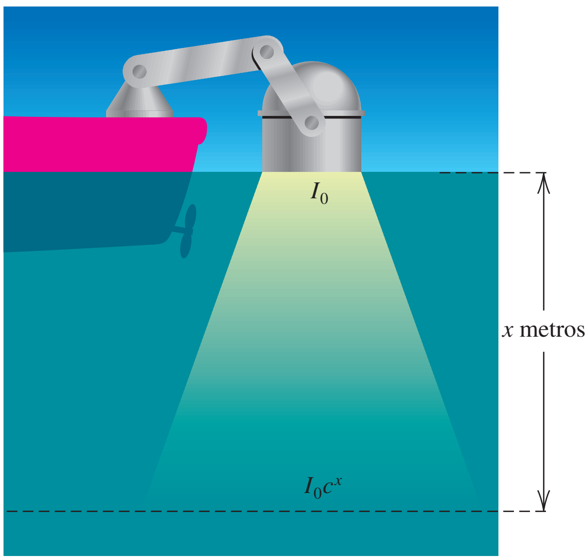
(b) Trace la gráfica de *f* para $0 \leq t \leq 30$.

42 **Penetración de la luz en el océano** Un problema importante en oceanografía es determinar la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La ley de Beer-Lambert expresa que la función exponencial dada por $I(x) = I_0c^x$ es un modelo para este fenómeno (vea la figura). Para cierto lugar, $I(x) = 10(0.4)^x$ es la cantidad de luz (en calorías/cm²/s) que llega a una profundidad de *x* metros.

(a) Encuentre la cantidad de luz a una profundidad de 2 metros.

(b) Trace la gráfica de *I* para $0 \leq x \leq 5$.

EJERCICIO 42



43 **Decaimiento de radio** La vida media del radio es de 1600 años. Si la cantidad inicial es q_0 miligramos, entonces la cantidad $q(t)$ restante después de *t* años está dada por $q(t) = q_0 2^{kt}$. Encuentre *k*.

44 **Disolución de sal en agua** Si 10 gramos de sal se agregan a cierta cantidad de agua, entonces la cantidad $q(t)$ que no se disuelve después de t minutos está dada por $q(t) = 10(4/5)^t$. Trace una gráfica que muestre el valor $q(t)$ en cualquier tiempo de $t = 0$ a $t = 10$.

45 **Interés compuesto** Si se invierten $1000 a una tasa de 7% por año capitalizado mensualmente, encuentre el capital después de

(a) 1 mes **(b)** 6 meses

(c) 1 año **(d)** 20 años

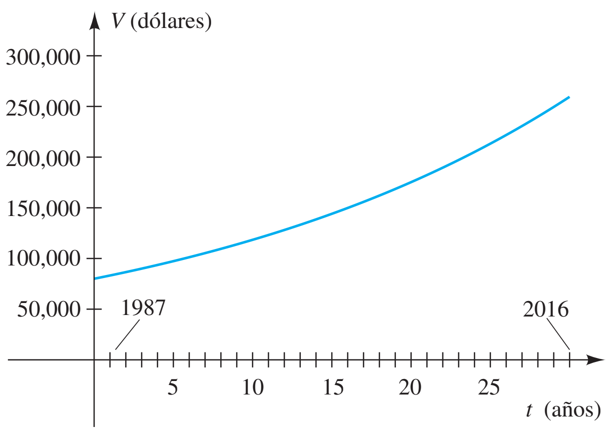
46 **Interés compuesto** Si un fondo de ahorros paga interés a razón de 3% por año capitalizado semestralmente, ¿cuánto dinero invertido ahora llegará a $5000 después de 1 año?

47 **Valor comercial de un automóvil** Si cierta marca de automóvil se compra en C dólares, su valor comercial $V(t)$ al final de t años está dado por $V(t) = 0.78C(0.85)^{t-1}$. Si el costo original es $25,000, calcule, al dólar más cercano, el valor después de

(a) 1 año **(b)** 4 años **(c)** 7 años

48 **Plusvalía de un bien raíz** Si el valor de una finca aumenta a razón de 4% por año, después de t años el valor V de una casa comprada en P dólares es $V = P(1.04)^t$. En la figura se ilustra una gráfica del valor de una casa comprada en $80,000 en 1986. Aproxime el valor de la casa a los $1000 dólares más cercanos, en el año 2016.

EJERCICIO 48



49 **Isla de Manhattan** La isla de Manhattan fue vendida en $24 en 1626. ¿A cuánto habría crecido esta cantidad en 2012 si se hubiera invertido al 6% por año capitalizado trimestralmente?

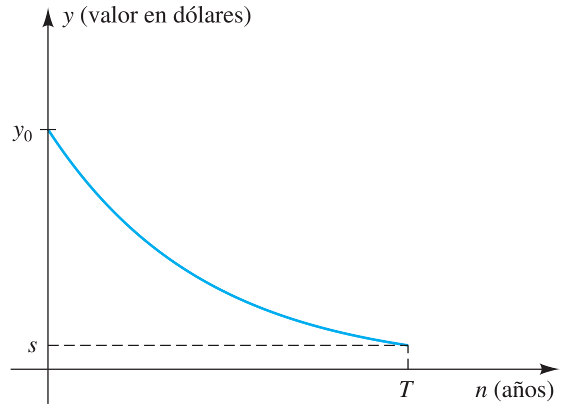
50 **Interés de una tarjeta de crédito** Cierta tienda de departamentos exige que sus clientes de tarjeta de crédito paguen interés por cuentas no pagadas a razón de 24% por año capitalizado mensualmente. Si un cliente compra un televisor en $500 a crédito y no paga durante un año, ¿cuánto debe al finalizar el año?

51 **Depreciación** El método de saldo a la baja es un método de contabilidad en el que la cantidad de depreciación tomada cada año es un porcentaje fijo del valor presente del artículo. Si y es el valor del artículo en un año dado, la depreciación tomada es ay para alguna tasa de depreciación a con $0 < a < 1$, y el nuevo valor es $(1 - a)y$.

(a) Si el valor inicial del artículo es y_0, demuestre que el valor después de n años de depreciación es $(1 - a)^n y_0$.

(b) Al final de T años, el artículo tiene un valor de salvamento de s dólares. El contribuyente desea escoger una tasa de depreciación tal que el valor del artículo después de T años sea igual al valor de salvamento (vea la figura). Demuestre que $a = 1 - \sqrt[T]{s/y_0}$.

EJERCICIO 51



52 **Datación de un lenguaje** La glotocronología es un método de datar la antigüedad de un lenguaje en una etapa particular, con base en la teoría de que en un largo periodo ocurren cambios lingüísticos a un ritmo más bien constante. Suponga que un lenguaje originalmente tenía N_0 palabras básicas y que en el tiempo t, medido en milenios (1 milenio = 1000 años), el número $N(t)$ de palabras básicas que restan en uso común está dado por $N(t) = N_0(0.805)^t$.

(a) Aproxime el porcentaje de palabras básicas perdidas cada 100 años.

(b) Si $N_0 = 200$, trace la gráfica de N para $0 \leq t \leq 5$.

Ejer. 53–56: Algunas instituciones de préstamos calculan el pago mensual M sobre un préstamo de L dólares a una tasa de interés r (expresada como decimal) mediante la fórmula

$$M = \frac{Lrk}{12(k - 1)},$$

donde $k = [1 + (r/12)]^{12t}$ y t es el número de años que el préstamo está en efecto.

53 **Hipoteca para vivienda**

(a) Encuentre el pago mensual sobre una hipoteca de vivienda de $250,000 a 30 años si la tasa de interés es 8%.

(b) Encuentre el interés total pagado en el préstamo del inciso (a).

54 **Hipoteca para vivienda** Encuentre la máxima hipoteca de 25 años que se pueda obtener a una tasa de interés de 7%, si el pago mensual ha de ser \$1500.

55 **Préstamo para automóvil** Un distribuidor de automóviles ofrece a sus clientes préstamos sin enganche y a 3 años a una tasa de 10%. Si un cliente puede pagar \$500 por mes, encuentre el precio del auto más costoso que puede comprarse.

56 **Préstamo financiero** El propietario de un pequeño negocio decide financiar una nueva computadora y pide prestados \$3000 a 2 años a una tasa de interés de 7.5%.

(a) Encuentre el pago mensual.

(b) Encuentre el interés total pagado sobre el préstamo.

Ejer. 57-58: Aproxime la función al valor de x a cuatro lugares decimales.

57 **(a)** $f(x) = 13^{\sqrt{x+1.1}}$, $\quad x = 3$

(b) $h(x) = (2^x + 2^{-x})^{2x}$, $\quad x = 1.06$

58 **(a)** $f(x) = 2^{\sqrt{1-x}}$, $\quad x = 0.5$

(b) $h(x) = \dfrac{3^{-x} + 5}{3^x - 16}$, $\quad x = 1.4$

Ejer. 59-60: Trace la gráfica de la ecuación. (a) Estime y si $x = 40$. (b) Estime x si $y = 2$

59 $y = (1.085)^x$ 60 $y = (1.0525)^x$

Ejer. 61-62: Utilice una gráfica para estimar las raíces de la ecuación.

61 $1.4x^2 - 2.2^x = 1$

62 $1.21^{3x} + 1.4^{-1.1x} - 2x = 0.5$

Ejer. 63-64: Grafique f en el intervalo dado. (a) Determine si f es biunívoca. (b) Estime los ceros de f.

63 $f(x) = \dfrac{3.1^x - 2.5^{-x}}{2.7^x + 4.5^{-x}}$; $\quad [-3, 3]$

64 $f(x) = \pi^{0.6x} - 1.3^{(x^{1.8})}$; $\quad [-4, 4]$

(*Sugerencia:* Cambié $x^{1.8}$ a una forma equivalente que está definida para $x < 0$.)

Ejer. 65-66: Grafique f en el intervalo dado. (a) Estime donde f es creciente o decreciente. (b) Estime el rango de f.

65 $f(x) = 0.7x^3 + 1.7^{(-1.8x)}$; $\quad [-4, 1]$

66 $f(x) = \dfrac{3.1^{-x} - 4.1^x}{4.4^{-x} + 5.3^x}$; $\quad [-3, 3]$

67 **Población de truchas** Mil truchas, cada una de ellas de 1 año de edad, se introducen en un gran estanque. Se pronostica que el número $N(t)$ de truchas vivas después de t años estará dado por la ecuación $N(t) = 1000(0.9)^t$. Use la gráfica de N para aproximar cuándo estarán vivas 500 truchas.

68 **Poder de compra** Un economista predice que el poder adquisitivo $B(t)$ de un dólar de aquí a t años estará dado por $B(t) = (0.95)^t$. Use la gráfica de B para aproximar cuándo el poder adquisitivo será la mitad de lo que es hoy.

69 **Función de Gompertz** La **función de Gompertz,**

$$y = ka^{(b^x)} \quad \text{con } k > 0,\ 0 < a < 1, \text{ y } 0 < b < 1,$$

se usa a veces para describir las ventas de un nuevo producto cuyas ventas son inicialmente grandes pero luego se nivelan hacia un nivel máximo de saturación. Grafique, en el mismo plano de coordenadas, la recta $y = k$ y la función de Gompertz con $k = 4$, $a = \frac{1}{8}$ y $b = \frac{1}{4}$. ¿Cuál es el significado de la constante k?

70 **Función logística** La **función logística,**

$$y = \frac{1}{k + ab^x} \quad \text{con } k > 0,\ a > 0, \text{ y } 0 < b < 1,$$

se usa a veces para describir las ventas de un nuevo producto que inicialmente experimenta ventas más lentas, seguido por un crecimiento hacia un nivel máximo de saturación. Grafique, en el mismo plano de coordenadas, la recta $y = 1/k$ y la función logística con $k = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{8}$ y $b = \frac{5}{8}$. ¿Cuál es la importancia del valor de $1/k$?

Ejer. 71-72: Si p pagos mensuales se depositan en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual r, entonces la cantidad A en la cuenta después de n años está dada por

$$A = \frac{p\left(1 + \frac{r}{12}\right)\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right]}{\frac{r}{12}}.$$

Grafique A para cada valor de p y r, y estime n para $A = \$100,000$.

71 $p = 100, \quad r = 0.05$ 72 $p = 250, \quad r = 0.09$

73 **Recaudación del gobierno** Las recaudaciones del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para años seleccionados aparecen en la tabla siguiente.

Año	1910	1930	1950	1970
Recaudaciones	0.7	4.1	39.4	192.8

Año	1980	1990	2000
Recaudaciones	517.1	1032.0	2025.2

(a) Sea $x = 0$ correspondiente al año 1910. Grafique los datos junto con las funciones f y g:

(1) $f(x) = 0.786(1.094)^x$
(2) $g(x) = 0.503x^2 - 27.3x + 149.2$

(b) Determine si la función exponencial o cuadrática modela mejor los datos.

(c) Use su selección del inciso (b) para estimar gráficamente el año en el que el gobierno federal recolectó $1 billón

74 **Epidemia** En 1840, Gran Bretaña experimentó una epidemia bobina (vacas y bueyes) llamada epizootia. El número estimado de nuevos casos cada 28 días aparece en la tabla. En ese tiempo, el *London Daily* hizo la terrible predicción de que el número de nuevos casos continuaría hasta aumentar de manera indefinida. William Farr predijo correctamente que el número de nuevos casos llegaría a un máximo. De las dos funciones

$$f(t) = 653(1.028)^t$$

y

$$g(t) = 54{,}700e^{-(t-200)^2/7500}$$

una de ellas modela la predicción del periódico y la otra la de Farr, donde t está en días con $t = 0$ correspondiente al 12 de agosto de 1840.

Fecha	Nuevos costos
Ago. 12	506
Sept. 9	1289
Oct. 7	3487
Nov. 4	9597
Dic. 2	18,817
Dic. 30	33,835
Ene. 27	47,191

(a) Grafique cada función, junto con los datos, en la pantalla [0, 400, 100] por [0, 60,000, 10,000].

(b) Determine cuál función modela mejor la predicción de Farr.

(c) Determine la fecha en la que el número de nuevos casos llegó a su máximo.

75 **Costo de una estampilla** El precio de una estampilla de primera clase era de 44¢ en 2009 (fue de 2¢ en 1919). Encuentre una función exponencial sencilla de la forma $y = ab^t$ que modele el costo de una estampilla de primera clase para 1958-2009, y prediga su valor para 2020.

76 **Costos de TV para el Súper tazón** La siguiente tabla muestra el costo (en miles de dólares) para un anuncio televisivo de 30 segundos durante el Súper Tazón por varios años.

Año	Costo
1967	42
1977	125
1987	600
1997	1200
2007	2600

(a) Grafique los datos en el plano xy

(b) Determine una curva de la forma $y = ab^x$, donde $x = 0$ es el primer año y y es el costo y modela los datos. Grafique esta curva junto con los datos en el mismo eje de coordenadas. Las respuestas pueden variar.

(c) Utilice esta curva para predecir el costo de un comercial de 30 segundos en el año 2002. Compare su respuesta con el valor real de $1,900,000.

77 **Comparación de inflación** En 1974, Johnny Miller ganó 8 torneos en la PGA y acumuló $353,022 en ganancias oficiales por temporada. En 1999, Tiger Woods acumuló $6,616,585 con un récord similar.

(a) Suponga que la tasa de inflación mensual de 1974 a 1999 fue de 0.0025 (3% al año). Use la fórmula de interés compuesto para estimar el valor equivalente de las ganancias de Miller en el año 1999. Compare su respuesta con la de un cálculo de inflación en la web (por ejemplo, bls.gov/cpi/home.htm).

(b) Encuentre la tasa de interés anual necesaria para que las ganancias de Miller sean equivalentes en valor a las de Woods.

(c) ¿Qué tipo de función usó en el inciso (a)? ¿y en el inciso (b)?

78 **Índice de precios al consumidor** El IPC es la medida de inflación más ampliamente usada. En 1970, el IPC era de 37.8 y en 2000 fue de 168.8. Esto significa que un consumidor citadino que pagaba $37.80 por una canasta básica de artículos de consumo y servicios en 1970 hubiera necesitado $168.80 para artículos y servicios similares en 2000. Encuentre una función exponencial sencilla de la forma $y = ab^t$ que modele el IPC para 1970-2000 y prediga su valor para 2020.

5.3 La función exponencial natural

La *fórmula de interés compuesto* estudiada en la sección precedente es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

donde P es el capital inicial invertido, r es la tasa de interés anual (expresada como decimal), n es el número de periodos de interés por año y t es el número de años que se invierte el capital inicial. El siguiente ejemplo ilustra lo que ocurre si la tasa y el tiempo total de inversión son fijos, pero se hace variar el *periodo de interés*.

EJEMPLO 1 Uso de la fórmula de interés compuesto

Suponga que se invierten \$1000 a una tasa de interés compuesto de 9%. Encuentre la nueva cantidad del capital después de un año si el interés se capitaliza cada tres meses, cada mes, semanalmente, a diario, cada hora y cada minuto.

SOLUCIÓN Si hacemos $P = \$1000$, $t = 1$, y $r = 0.09$ en la fórmula de interés compuesto, entonces

$$A = \$1000\left(1 + \frac{0.09}{n}\right)^{n}$$

para n periodos de interés por año. Los valores de n que deseamos considerar aparecen en la tabla siguiente, donde hemos supuesto que hay 365 días en un año y por tanto (365)(24) = 8760 horas y (8760)(60) = 525,600 minutos. (En muchas transacciones financieras, un año de inversión se considera de sólo 360 días.)

Periodo de interés	Trimestre	Mes	Semana	Día	Hora	Minuto
n	4	12	52	365	8760	525,600

Usando la fórmula de interés compuesto (y una calculadora), obtenemos las cantidades dadas en la tabla siguiente.

Periodo de interés	Cantidad después de un año
Trimestre	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^{4} = \$1093.08$
Mes	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12} = \$1093.81$
Semana	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{52}\right)^{52} = \$1094.09$
Día	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{365}\right)^{365} = \$1094.16$
Hora	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{8760}\right)^{8760} = \$1094.17$
Minuto	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{525,600}\right)^{525,600} = \$1094.17$

■

Note que, en el ejemplo precedente, después de que llegamos a un periodo de interés de una hora, el número de periodos de interés por año no tiene efecto en la cantidad final. Si el interés se hubiera capitalizado *cada segundo*, el resultado todavía sería $1094.17. (Algunos lugares decimales *después* de los dos primeros *cambian*.) Así, la cantidad se aproxima a un valor fijo a medida que n aumenta. Se dice que el interés se **capitaliza continuamente** si el número n de periodos por año aumenta sin límite.

Si hacemos $P = 1$, $r = 1$ y $t = 1$ en la fórmula de interés compuesto, obtenemos

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La expresión del lado derecho de la ecuación es importante en cálculo. En el ejemplo 1 consideramos una situación semejante: a medida que n aumentaba, A se aproximaba a un valor límite. El mismo fenómeno se presenta para esta fórmula, como se ilustra en la tabla siguiente.

n	Aproximación a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1000	2.71692393
10,000	2.71814593
100,000	2.71826824
1,000,000	2.71828047
10,000,000	2.71828169
100,000,000	2.71828181
1,000,000,000	2.71828183

En cálculo se demuestra que cuando n aumenta sin límite, el valor de la expresión $[1 + (1/n)]^n$ se aproxima a cierto número irracional, denotado por e. El número e aparece en la investigación de muchos fenómenos físicos. Una aproximación es $e \approx 2.71828$. Si usamos la notación desarrollada para funciones racionales en la sección 4.5, denotamos este hecho como sigue.

El número *e*

Si n es un entero positivo, entonces

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2.71828 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

En la definición siguiente usamos e como base para una importante función exponencial.

Definición de la función exponencial natural

La **función exponencial natural** f está definida por

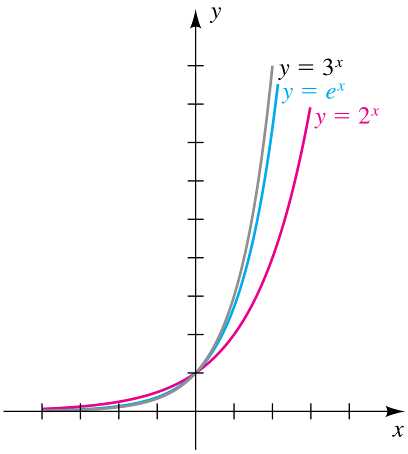
$$f(x) = e^x$$

para todo número real x.

Se puede tener acceso a la tecla $\boxed{e^x}$ *al pulsar* $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{LN}}$.

La función exponencial natural es una de las más útiles en matemáticas avanzadas y en aplicaciones. Como $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ se encuentra entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se muestra en la figura 1. Las calculadoras científicas y de gráficas tienen una tecla $\boxed{e^x}$ para aproximar valores de la función exponencial natural.

FIGURA 1



APLICACIÓN **Interés compuesto continuamente**

La fórmula de interés compuesto es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Si hacemos $1/k = r/n$, entonces $k = n/r$, $n = kr$ y $nt = krt$, y podemos escribir la fórmula otra vez como

$$A = P\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{krt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{rt}.$$

Para interés compuesto continuamente hacemos que n (el número de periodos de interés por año) aumente sin límite, denotado por $n \to \infty$, o bien, lo que es equivalente, por $k \to \infty$. Usando el hecho de que $[1 + (1/k)]^k \to e$ cuando $k \to \infty$, vemos que

$$P\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{rt} \to P[e]^{rt} = Pe^{rt} \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Este resultado nos da la fórmula siguiente.

Fórmula de interés capitalizado continuamente

$$A = Pe^{rt},$$

donde P = capital inicial
r = tasa de interés anual expresada como decimal
t = número de años que P se invierte
A = cantidad después de t años.

Los siguientes dos ejemplos ilustran el uso de esta fórmula.

EJEMPLO 2 **Uso de la fórmula de interés capitalizado continuamente**

Suponga que \$20,000 se depositan en una cuenta de mercado de dinero que paga interés a razón de 6% por año capitalizado continuamente. Determine el saldo de la cuenta después de 5 años.

SOLUCIÓN Aplicando la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = 20{,}000$, $r = 0.06$ y $t = 5$, tenemos

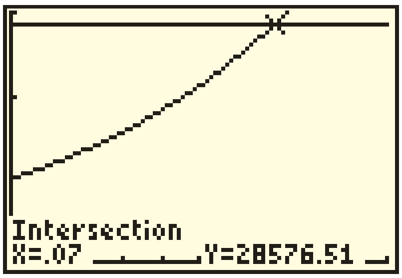
$$A = Pe^{rt} = 20{,}000e^{0.06(5)} = 20{,}000e^{0.3}.$$

Si usamos calculadora, encontramos que $A = \$26{,}997.18$. ■

EJEMPLO 3 **Uso de la fórmula de interés capitalizado continuamente**

Una inversión de \$10,000 aumentó a \$28,576.51 en 15 años. Si el interés se capitalizó continuamente, encuentre la tasa de interés.

FIGURA 2



SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$10{,}000$, $A = 28{,}576.51$ y $t = 15$:

$$A = Pe^{rt} \quad \text{fórmula}$$
$$28{,}576.51 = 10{,}000e^{r(15)} \quad \text{sustituya } A, P, t$$

En este punto, podríamos dividir entre 10,000, pero eso nos dejaría con una ecuación que no podemos resolver (todavía). Entonces, graficaremos $Y_1 = 28{,}576.51$ y $Y_2 = 10{,}000e$^(15x) y hallaremos su punto de intersección. Como r es una tasa de interés, empezaremos con un rectángulo de observación de [0, 0.10, 0.01] por [0, 30,000, 10,000]. Usando una función de intersección, encontramos que $Y_1 = Y_2$ para $x = 0.07$ en la figura 2. Entonces, la tasa de interés es 7%. ■

La fórmula de interés capitalizado continuamente es sólo un caso específico de la siguiente ley.

Ley de la fórmula de crecimiento (o decrecimiento)

Sea q_0 el valor de una cantidad q en el tiempo $t = 0$ (esto es, q_0 es la cantidad inicial de q). Si q cambia instantáneamente a una razón proporcional a su valor actual, entonces

$$q = q(t) = q_0e^{rt},$$

donde $r > 0$ es la rapidez de crecimiento (o $r < 0$ es la rapidez de decrecimiento) de q.

EJEMPLO 4 **Predicción de la población de una ciudad**

La población de una ciudad en 1970 era de 153,800. Suponiendo que la población aumenta continuamente a razón de 5% por año, prediga la población de la ciudad en el año 2020.

SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula del crecimiento $q = q_0e^{rt}$ con población inicial $q_0 = 153{,}800$, rapidez de crecimiento $r = 0.05$ y tiempo $t = 2020 - 1970 = 80$ años. Entonces, una predicción para la población de la ciudad en el año 2020 es

$$153{,}800e^{(0.05)(50)} = 153{,}800e^{2.5} \approx 1{,}873{,}668.$$

■

EJEMPLO 5 **Usando la fórmula de la ley de decaimiento**

El isótopo de plutonio-238 se utiliza para impulsar naves espaciales y decae a una tasa de aproximadamente 0.79% por año. A la décima de gramo más cercana, ¿cuánto de una muestra de 100 gramos permanecerá en 88 años?

SOLUCIÓN Se aplica la fórmula del decaimiento $q = q_0e^{rt}$ con la cantidad inicial $q = 100$, la tasa de decaimiento $r = -0.0079$ y el tiempo $t = 88$ años. La cantidad restante después de 88 años es

$$100e^{-0.0079(88)} = 100e^{-0.6952} \approx 49.9.$$

Como 49.9 está cerca de la mitad de la cantidad original, sabemos que la vida media del ^{238}Pu es de aproximadamente 88 años ■

La función f del siguiente ejemplo es importante en aplicaciones avanzadas de matemáticas.

EJEMPLO 6 **Trazar una gráfica que contenga dos funciones exponenciales**

Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

SOLUCIÓN Note que f es una función par, porque

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x).$$

Entonces, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Si usamos calculadora, obtenemos las siguientes aproximaciones de $f(x)$.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$ (aprox.)	1	1.13	1.54	2.35	3.76

La localización de los puntos y el uso de simetría con respecto al eje y nos da el trazo de la figura 3. La gráfica *parece* ser una parábola, pero éste no es realmente el caso. ■

FIGURA 3

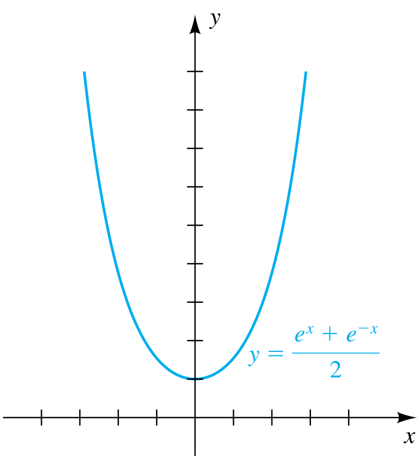
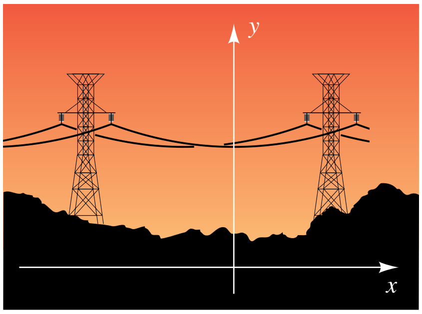


FIGURA 4



APLICACIÓN **Cables flexibles**

La función f del ejemplo 5 se presenta en matemáticas aplicadas e ingeniería, donde se denomina **función coseno hiperbólico.** Esta función se puede usar para describir la forma de una cadena o cable flexible uniforme cuyos extremos están sostenidos desde la misma altura, por ejemplo un cable de teléfonos o líneas eléctricas (vea la figura 4). Si introducimos un sistema de coordenadas, como se indica en la figura, entonces se puede demostrar que una ecuación que corresponde a la forma del cable es

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}),$$

donde a es un número real. La gráfica se llana **catenaria**, por la palabra latina que significa *cadena*. La función del ejemplo 6 es el caso especial en el que $a = 1$. Vea el ejercicio de análisis 3 al final de este capítulo para una aplicación que comprende una catenaria.

APLICACIÓN **Radioterapia**

Las funciones exponenciales desempeñan un importante papel en el campo de la *radioterapia*, que es el tratamiento de tumores por radiación. La fracción de células de un tumor que sobreviven al tratamiento, llamada *fracción sobreviviente*, depende no sólo de la energía y naturaleza de la radiación, sino también de la profundidad, tamaño y características del tumor mismo. La exposición a radiación puede considerarse como varios eventos potencialmente dañinos, donde al menos un *hit* (acierto) se requiere para matar una célula de tumor. Por ejemplo, suponga que cada célula tiene exactamente un *blanco* al que se debe acertar. Si k denota el tamaño promedio del blanco de una célula de tumor y si x es el número de eventos dañinos (la *dosis*), entonces la fracción sobreviviente $f(x)$ está dada por

$$f(x) = e^{-kx}.$$

Esto recibe el nombre de *fracción sobreviviente de un blanco un acierto* (o *hit*).

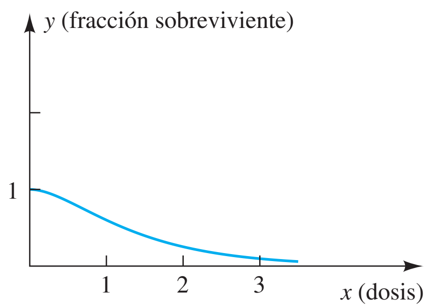
Suponga a continuación que cada célula tiene n objetivos o blancos y que a cada blanco se debe acertar una vez para que la célula muera. En este caso, la *fracción sobreviviente de n blancos − un acierto* está dada por

$$f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^n.$$

La gráfica de f puede ser analizada para determinar qué efecto tendrá aumentar la dosis x en disminuir la fracción sobreviviente de células de tumor. Note que $f(0) = 1$; esto es, si no hay dosis, entonces todas las células sobreviven. Como ejemplo, si $k = 1$ y $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (1 - e^{-x})^2 \\ &= 1 - (1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= 2e^{-x} - e^{-2x}. \end{aligned}$$

FIGURA 5
Fracción sobreviviente de células de un tumor después de un tratamiento de radiación



Un análisis completo de la gráfica de f requiere cálculo integral. La gráfica se traza en la figura 5. El *hombro* de la curva cerca del punto (0, 1) representa la naturaleza de umbral del tratamiento, es decir, una pequeña dosis resulta en muy poca eliminación de células del tumor. Note que para x grande, un aumento en dosis tiene poco efecto en la fracción sobreviviente. Para determinar la dosis ideal por administrar a un paciente, especialistas en terapia de radiación también deben tomar en cuenta el número de células sanas que mueren durante el tratamiento.

Problemas del tipo que se ilustra en el ejemplo siguiente se presentan en el estudio de cálculo.

EJEMPLO 7 **Hallar ceros de una función que contenga exponenciales**

Si $f(x) = x^2(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$, encuentre los ceros de f.

SOLUCIÓN Podemos factorizar $f(x)$ como sigue:

$$f(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} \quad \text{enunciado}$$
$$= 2xe^{-2x}(1 - x) \quad \text{factorice } 2xe^{-2x}$$

Para hallar los ceros de f, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$. Como $e^{-2x} > 0$ para toda x, vemos que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $1 - x = 0$. Entonces, los ceros de f son 0 y 1. ■

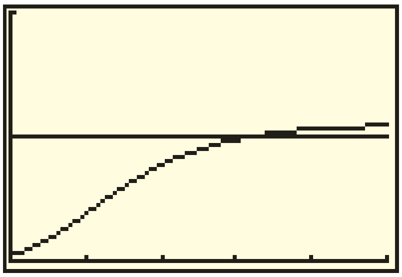
EJEMPLO 8 **Trazar una curva de crecimiento de Gompertz**

En biología, la **función de crecimiento de Gompertz** G, dada por

$$G(t) = ke^{(-Ae^{-Bt})}$$

donde k, A y B son constantes positivas, se usa para estimar el tamaño de ciertas cantidades en el tiempo t. La gráfica de G se llama **curva de crecimiento de Gompertz.** La función es siempre positiva y creciente, y cuando t aumenta sin límite, $G(t)$ se nivela y se aproxima al valor k. Grafique G en el intervalo [0, 5] para $k = 1.1$, $A = 3.2$ y $B = 1.1$, y estime el tiempo t en el que $G(t) = 1$.

FIGURA 6
[0, 5] por [0, 2]



SOLUCIÓN Empezamos por asignar

$$1.1e^{(-3.2e^{-1.1t})}$$

a Y_1. Como deseamos graficar G en el intervalo [0, 5], escogemos Xmín = 0 y Xmáx = 5. Como $G(t)$ es siempre positiva y no excede el valor $k = 1.1$, escogemos Ymín = 0 y Ymáx = 2. Por lo tanto, las dimensiones de la pantalla son [0, 5] por [0, 2]. Graficar G nos da una pantalla semejante a la figura 6. Los valores extremos de la gráfica son aproximadamente (0, 0.045) y (5, 1.086).

Para determinar el tiempo cuando $y = G(t) = 1$, usamos una función de intersección, con $Y_2 = 1$, para obtener $x = t \approx 3.194$. ■

5.3 Ejercicios

Ejer. 1-4: Use la gráfica de $y = e^x$ para ayudar a trazar la gráfica de f.

1 (a) $f(x) = e^{-x}$ (b) $f(x) = -e^x$

2 (a) $f(x) = e^{2x}$ (b) $f(x) = 2e^x$

3 (a) $f(x) = e^{x+4}$ (b) $f(x) = e^x + 4$

4 (a) $f(x) = e^{-2x}$ (b) $f(x) = -2e^x$

Ejer. 5-6: Si P dólares se depositan en una cuenta de ahorros que paga interés a razón de r% por año capitalizado continuamente, encuentre el saldo después de t años.

5 $P = 1000$, $r = 5\frac{1}{4}$, $t = 5$

6 $P = 100$, $r = 3\frac{1}{2}$, $t = 10$

Ejer. 7-8: ¿Cuánto dinero, invertido a una tasa de interés de r% por año capitalizado continuamente, llegará a A dólares después de t años?

7 $A = 100{,}000$, $r = 3.4$, $t = 18$

8 $A = 15{,}000$, $r = 4.5$, $t = 4$

Ejer. 9-10: Una inversión de P dólares aumentó a A dólares en t años. Si el interés se capitalizó continuamente, encuentre la tasa de interés.

9 $A = 4055$, $P = 1000$, $t = 20$

10 $A = 890.20$, $P = 400$, $t = 16$

Ejer. 11–14: Resuelva la ecuación.

11 $e^{(x^2)} = e^{7x-12}$

12 $e^{3x} = e^{2x-1}$

13 $(e^x + 1)(ex - 1) = 0$

14 $e^x(x + e) = 0$

Ejer . 15–18: Encuentre los ceros de *f*.

15 $f(x) = xe^x + e^x$

16 $f(x) = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$

17 $f(x) = x^3(4e^{4x}) + 3x^2e^{4x}$

18 $f(x) = x^2(2e^{2x}) + 2xe^{2x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$

Ejer . 19–20: Simplifique la expresión.

19 $\dfrac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

20 $\dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$

21 **Crecimiento de cultivos** Una función exponencial W tal que $W(t) = w_0e^{kt}$ para $k > 0$ describe el primer mes de crecimiento de cultivos como el maíz, algodón y frijol de soya. El valor de función $W(t)$ es el peso total en miligramos, W_0 es el peso en el día que emergen y t es el tiempo en días. Si, para una especie de frijol de soya, $k = 0.2$ y $W_0 = 68$ mg, prediga el peso al término de 30 días.

22 **Crecimiento de cultivos** Consulte el ejercicio 21. A veces es difícil medir el peso W_0 de una planta desde que emergió primero del suelo. Si, para una especie de algodón, $k = 0.21$ y el peso después de 10 días es 575 miligramos, estime W_0.

23 **Crecimiento de población en EU** La población de Estados Unidos en 1980 era alrededor de 231 millones y ha estado creciendo continuamente a razón de 1.03% por año. Prediga la población $N(t)$ en el año 2020 si esta tendencia continúa.

24 **Crecimiento de población en India** En 1985, la estimación de población en India era de 766 millones y ha estado creciendo a razón de 1.82% por año. Suponiendo que continúe este rápido porcentaje de crecimiento, estime la población $N(t)$ de India en el año 2015.

25 **Decaimiento del isótopo de yodo** El isótopo radiactivo ^{123}I, utilizado en medicina nuclear, decae continuamente a una tasa de 5.25% por hora.

(a) Aproxime el porcentaje remanente de cualquier cantidad inicial después de 26.4 horas.

(b) ¿Cuál es la vida media del ^{123}I?

26 **Recaimiento del isótopo de sodio** El isótopo radiactivo del sodio ^{24}Na, que se utiliza para localizar fugas en tuberías industriales y para el estudio de electrolitos en el cuerpo, decae continuamente a una tasa de 4.62% por hora.

(a) Aproxime el porcentaje restante de cualquier cantidad inicial después de 30 horas.

(b) ¿Cuál es la vida media de ^{24}Na?

27 **Longevidad del lenguado** En ciencias de pesquería, una cohorte es un conjunto de peces que resulta de una reproducción anual. Suele suponerse que el número de peces $N(t)$ todavía vivo después de t años está dado por una función exponencial. Para el lenguado del Pacífico, $N(t) = N_0e^{-0.2t}$, donde N_0 es el tamaño inicial de la cohorte. Aproxime el porcentaje del número original todavía vivos después de 10 años.

28 **Rastreador radiactivo** El rastreador radiactivo ^{51}Cr se puede usar para localizar la posición de la placenta en una mujer embarazada. Es frecuente que el rastreador sea solicitado por un laboratorio médico. Si se envían A_0 unidades (microcuries), entonces, debido a la desintegración radiactiva, el número de unidades $A(t)$ presentes después de t días está dado por $A(t) = A_0e^{-0.0249t}$.

(a) Si se envían 35 unidades del rastreador y tardan 2 días en llegar, ¿aproximadamente cuántas unidades habrá para la prueba?

(b) Si se necesitan 35 unidades para la prueba, ¿aproximadamente cuántas unidades deben enviarse?

29 **Crecimiento de la población de ballenas azules** En 1980, la población de ballenas azules en el hemisferio sur se pensaba que era de 4500. La población $N(t)$ ha estado decreciendo de acuerdo con la fórmula $N(t) = 4500e^{-0.1345t}$, donde t está en años y $t = 0$ corresponde a 1980. Prediga la población en el año 2015 si esta tendencia continúa.

30 **Crecimiento del lenguado** La longitud (en centímetros) de muchos peces comerciales comunes de t años de edad puede aproximarse con una función de crecimiento de Von Bertalanffy, que tiene una ecuación de la forma $f(t) = a(1 - be^{-kt})$, donde a, b y k son constantes.

(a) Para el lenguado del Pacífico, $a = 200$, $b = 0.956$ y $k = 0.18$. Estime la longitud de un lenguado de 10 años de edad.

(b) Use la gráfica de f para estimar la máxima longitud alcanzable del lenguado del Pacífico.

31 **Presión atmosférica** En ciertas condiciones, la presión atmosférica p (en pulgadas) a una altitud de h pies está dada por $p = 29e^{-0.000034h}$. ¿Cuál es la presión a una altitud de 40,000 pies?

(a) 30,000 pies? (b) 40,000 pies?

32 **Decaimiento del isótopo de polonio** Si empezamos con c miligramos del isótopo de polonio ^{210}Po, la cantidad restante después de t días puede ser aproximada mediante $A = ce^{-0.00495t}$. Si la cantidad inicial es 50 miligramos, aproxime, al centésimo más cercano, la cantidad restante después de

(a) 30 días (b) 180 días (c) 365 días

33 **Crecimiento de niños** El modelo Jenss es generalmente considerado como la fórmula más precisa para predecir la estatura de niños de preescolar. Si y es la estatura (en centímetros) y x es la edad (en años), entonces

$$y = 79.041 + 6.39x - e^{3.261-0.993x}$$

para $1/4 \le x \le 6$. Del cálculo, la rapidez de crecimiento R (en cm/año) está dada por $R = 6.39 + 0.993e^{3.261-0.993x}$. Encuentre la estatura y rapidez de crecimiento de un niño típico de 1 año de edad.

34 **Velocidad de una partícula** Una partícula esférica muy pequeña (del orden de 5 micrones de diámetro) se proyecta en aire en calma con una velocidad inicial de v_0 m/s, pero su velocidad disminuye debido a fuerzas de resistencia. Su velocidad t segundos más tarde está dada por $v(t) = v_0e^{-at}$ para alguna $a > 0$ y la distancia $s(t)$ que la partícula recorre está dada por

$$s(t) = \frac{v_0}{a}(1 - e^{-at}).$$

La distancia de frenado es la distancia total recorrida por la partícula.

(a) Encuentre una fórmula que aproxime la distancia de frenado en términos de v_0 y a.

(b) Use la fórmula del inciso (a) para estimar la distancia de frenado si $v_0 = 10$ m/s y $a = 8 \times 10^5$.

35 **Salario mínimo** En 1971 el salario mínimo en Estados Unidos era de \$1.60 por hora. Suponiendo que la tasa de inflación es 5% al año, encuentre el salario mínimo equivalente en el año 2020.

36 **Valor del suelo** En 1867, Estados Unidos compró Alaska a Rusia en \$7,200,000. Hay 586,400 millas cuadradas de terreno en Alaska. Suponiendo que el valor del terreno aumenta continuamente al 3% por año y que el terreno se puede comprar a un precio equivalente, determine el precio de 1 acre en el año 2020. (Una milla cuadrada es equivalente a 640 acres.)

Ejer. 37-40: El *rendimiento efectivo* (o tasa de interés anual efectiva) para una inversión es la tasa de interés simple que daría al término de un año la misma cantidad que rinde la tasa compuesta que en realidad se aplica. Aproxime, al 0.01% más cercano, el rendimiento efectivo correspondiente a una tasa de interés de r% por año capitalizado (a) trimestralmente y (b) continuamente.

37 $r = 7$ 38 $r = 12$

39 $r = 5$ 40 $r = 3$

Ejer. 41-42: Trace la gráfica de la ecuación.

41 $y = e^{1000x}$ 42 $y = e^{-1000x}$

Ejer. 43-44: Trace la gráfica de la ecuación. (a) Estime y si $x = 40$. (b) Estime x si $y = 2$.

43 $y = e^{0.085x}$ 44 $y = e^{0.0525x}$

Ejer. 45-47: (a) Grafique f usando calculadora de gráficas. (b) Trace la gráfica de g tomando los recíprocos de las coordenadas y en (a), *sin* usar calculadora de gráficas.

45 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $g(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

46 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $g(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

47 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

48 **Función de densidad de probabilidad** En estadística, la función de densidad de probabilidad para la distribución normal está definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \quad \text{con} \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

donde μ y σ son números reales (μ es la *media* y σ^2 es la *varianza* de la distribución). Trace la gráfica de f para el caso $\sigma = 1$ y $\mu = 0$.

Ejer. 49–50: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas, y estime las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$.

49 $f(x) = e^{0.5x} - e^{-0.4x}$; $g(x) = x^2 - 2$

50 $f(x) = 0.3e^x$; $g(x) = x^3 - x$

Ejer. 51–52: Las funciones f y g se pueden usar para aproximar e^x en el intervalo [0, 1]. Grafique f, g y $y = e^x$ en el mismo plano de coordenadas, y compare la precisión de $f(x)$ y $g(x)$ como una aproximación a e^x.

51 $f(x) = x + 1$; $g(x) = 1.72x + 1$

52 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$; $g(x) = 0.84x^2 + 0.878x + 1$

Ejer. 53–54: Grafique f y estime sus ceros.

53 $f(x) = x^2e^x - xe^{(x^2)} + 0.1$

54 $f(x) = x^3e^x - x^2e^{2x} + 1$

Ejer. 55–56: Grafique f en el intervalo (0, 200]. Encuentre una ecuación aproximada para la asíntota horizontal.

55 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ 56 $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

Ejer. 57-58: Aproxime la raíz real de la ecuación.

57 $e^{-x} = x$ 58 $e^{3x} = 5 - 2x$

Ejer. 59-60: Grafique f, y determine dónde f es creciente o es decreciente.

59 $f(x) = xe^x$ 60 $f(x) = x^2e^{-2x}$

61 **Contaminación de una chimenea** La concentración C (en unidades/m^3) de contaminación cerca de un punto al nivel del suelo, que está corriente abajo de una fuente de chimenea de altura h, está dada por

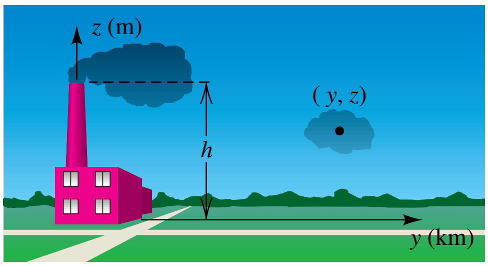
$$C = \frac{Q}{\pi vab} e^{-y^2/(2a^2)}\left[e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)}\right],$$

donde Q es la intensidad de la fuente (en unidades/s), v es la velocidad promedio del viento (en m/s), z es la altura (en metros) arriba del punto corriente abajo, y es la distancia desde el punto corriente abajo en la dirección que es perpendicular al viento (la dirección de viento cruzado), y a y b son constantes que dependen de la distancia en dirección del viento (vea la figura).

(a) ¿Cómo cambia la concentración de contaminación al nivel del suelo, en la posición a favor del viento ($y = 0$ y $z = 0$) si la altura de la chimenea se aumenta?

(b) ¿Cómo cambia la concentración de contaminación al nivel del suelo ($z = 0$) para una chimenea de altura fija h si una persona se mueve en la dirección de viento cruzado, con lo cual aumenta y?

EJERCICIO 61



62 **Concentración de contaminación** Consulte el ejercicio 61. Si la altura de la chimenea es 100 metros y $b = 12$, use una gráfica para estimar la altura z arriba del punto a favor del viento ($y = 0$) donde se presenta la máxima concentración de contaminación. (*Sugerencia:* sea $h = 100$, $b = 12$ y grafique la ecuación $C = e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)}$.)

63 **Densidad atmosférica** La densidad atmosférica a una altitud x aparece en la tabla siguiente.

Altitud (m)	0	2000	4000
Densidad (kg/m^3)	1.225	1.007	0.819

Altitud (m)	6000	8000	10,000
Densidad (kg/m^3)	0.660	0.526	0.414

(a) Encuentre una función $f(x) = C_0e^{kx}$ que aproxime la densidad a una altitud x, donde C_0 y k son constantes. Grafique los datos y f en los mismos ejes de coordenadas.

(b) Use f para pronosticar la densidad a 3000 y 9000 metros. Compare las predicciones con los valores reales de 0.909 y 0.467, respectivamente.

64 **Gasto gubernamental** Los gastos del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para años seleccionados aparecen en las tablas siguientes.

Año	1910	1930	1950	1970
Gastos	0.7	3.3	42.6	195.6

Año	1980	1990	2000
Gastos	590.9	1253.1	1789.1

(a) Sea $x = 0$ correspondiente al año 1910. Encuentre una función $A(x) = A_0e^{kx}$ que aproxime los datos, donde A_0 y k son constantes. Grafique los datos y A en los mismos ejes de coordenadas..

(b) Utilice A para predecir gráficamente el año en el que el gasto federal primero gastó \$1 billón. (El año real fue 1987.)

5.4 Funciones logarítmicas

En la sección 5.2 observamos que la función exponencial dada por $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ o $a > 1$ es biunívoca. En consecuencia, f tiene una función inversa f^{-1} (vea la sección 5.1). Esta inversa de la función exponencial con base a se denomina **función logarítmica con base *a*** y se denota por $\mathbf{log}_a$. Sus valores se escriben $\log_a(x)$ o $\log_a x$, léase "el logaritmo de x con base a". En vista de que, por la definición de una función inversa f^{-1},

$$y = f^{-1}(x) \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = f(y),$$

la definición de $\log_a$ se puede expresar como sigue.

Definición de $\log_a$

Sea a un número real positivo diferente de 1. El **logaritmo de x con base a** está definido por

$$y = \log_a x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = a^y$$

para toda $x > 0$ y todo número real y.

Note que las dos ecuaciones de la definición son equivalentes. A la primera ecuación la llamamos **forma logarítmica** y a la segunda **forma exponencial.** El lector debe esforzarse en ser experto para cambiar de una forma a la otra. El siguiente diagrama puede ayudar a lograr este objetivo.

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
$\log_a x = y$	$a^y = x$

exponente

base

Observe que cuando se cambian formas, *las bases de las formas logarítmica y exponencial son iguales.* El número y (esto es, $\log_a x$) corresponde al exponente en la forma exponencial. En otras palabras, $\log_a x$ es *el exponente al cual debe elevarse la base para obtener x.* Esto es a lo que se refieren las personas cuando dicen "los logaritmos son exponentes".

La siguiente ilustración contiene ejemplos de formas equivalentes

ILUSTRACIÓN **Formas equivalentes**

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
$\log_5 u = 2$	$5^2 = u$
$\log_b 8 = 3$	$b^3 = 8$
$r = \log_p q$	$p^r = q$
$w = \log_4 (2t + 3)$	$4^w = 2t + 3$
$\log_3 x = 5 + 2z$	$3^{5+2z} = x$

El siguiente ejemplo contiene una aplicación que comprende el cambio de una forma exponencial a una forma logarítmica.

EJEMPLO 1 Cambiar forma exponencial a forma logarítmica

El número N de bacterias en cierto cultivo después de t horas está dado por $N = (1000)2^t$. Exprese t como función logarítmica de N con base 2.

SOLUCIÓN

$$N = (1000)2^t \qquad \text{enunciado}$$

$$\frac{N}{1000} = 2^t \qquad \text{aísle la expresión exponencial}$$

$$t = \log_2 \frac{N}{1000} \qquad \text{cambie a forma logarítmica}$$

■

Algunos casos especiales de logaritmos se dan en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 **Hallar logaritmos**

Encuentre el número, si es posible.

(a) $\log_{10} 100$ **(b)** $\log_2 \frac{1}{32}$ **(c)** $\log_9 3$ **(d)** $\log_7 1$ **(e)** $\log_3 (-2)$

SOLUCIÓN En cada caso nos dan $\log_a x$ y debemos hallar el exponente y tal que $a^y = x$. Obtenemos lo siguiente.

(a) $\log_{10} 100 = 2$ porque $10^2 = 100$.

(b) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$ porque $2^{-5} = \frac{1}{32}$.

(c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ porque $9^{1/2} = 3$.

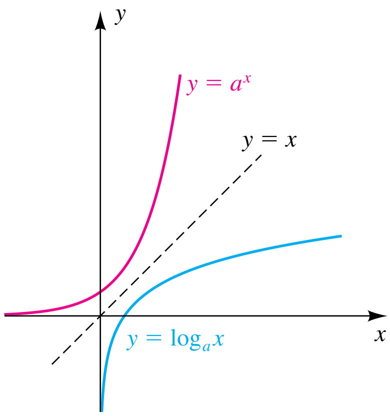
(d) $\log_7 1 = 0$ porque $7^0 = 1$.

(e) $\log_3 (-2)$ no es posible porque $3^y \neq -2$ para cualquier número real y. ■

Las siguientes propiedades generales se deducen de la interpretación de $\log_a x$ como exponente.

Propiedad de $\log_a x$	Razón	Ilustración
(1) $\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	$\log_3 1 = 0$
(2) $\log_a a = 1$	$a^1 = a$	$\log_{10} 10 = 1$
(3) $\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
(4) $a^{\log_a x} = x$	como sigue	$5^{\log_5 7} = 7$

FIGURA 1



La razón para la propiedad 4 es consecuencia directa de la definición de $\log_a$, porque

$$\text{si} \quad y = \log_a x, \quad \text{entonces} \quad x = a^y, \quad \text{o} \quad x = a^{\log_a x}.$$

La función logarítmica con base a es la inversa de la función exponencial con base a, de modo que la gráfica de $y = \log_a x$ se puede obtener al reflejar la gráfica de $y = a^x$ a través de la recta $y = x$ (vea la sección 5.1). Este procedimiento se ilustra en la figura 1 para el caso $a > 1$. Note que el punto de intersección con el eje x de la gráfica es 1, el dominio es el conjunto de los números reales positivos, el rango es $\mathbb{R}$ y el eje y es una asíntota vertical. Como los logaritmos con base $0 < a < 1$ se usan raras veces, aquí no trazaremos sus gráficas.

Vemos de la figura 1 que si $a > 1$, entonces $\log_a x$ es creciente en $(0, \infty)$ y por lo tanto es biunívoca según el teorema de la página 295. La combinación de este resultado con las partes (1) y (2) de la definición de función biunívoca de la página 294 nos dan el siguiente teorema, que también se puede demostrar si $0 < a < 1$.

Teorema: las funciones logarítmicas son biunívocas

La función logarítmica con base a es biunívoca. Entonces, las siguientes condiciones equivalentes se satisfacen para números reales positivos x_1 y x_2.

(1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$.

(2) Si $\log_a x_1 = \log_a x_2$, entonces $x_1 = x_2$.

Cuando usemos este teorema como justificación para un paso en la solución de un ejemplo, expresaremos que las *funciones logarítmicas son biunívocas.*

En el siguiente ejemplo resolvemos una *ecuación logarítmica* sencilla, es decir, una ecuación que contiene un logaritmo de una expresión que contiene una variable. Se pueden introducir soluciones extrañas cuando se resuelvan ecuaciones logarítmicas. En consecuencia, debemos comprobar las soluciones de ecuaciones logarítmicas para asegurarnos de que estamos sacando logaritmos de *sólo números reales positivos;* de otro modo, una función logarítmica no está definida.

EJEMPLO 3 **Resolver una ecuación logarítmica**

Resuelva la ecuación $\log_6 (4x - 5) = \log_6 (2x + 1)$.

SOLUCIÓN

$\log_6 (4x - 5) = \log_6 (2x + 1)$	enunciado
$4x - 5 = 2x + 1$	las funciones logarítmicas son biunívocas
$2x = 6$	reste $2x$; sume 5
$x = 3$	divida entre 2

✓ **Prueba** $x = 3$ LI: $\log_6 (4 \cdot 3 - 5) = \log_6 7$
LD: $\log_6 (2 \cdot 3 + 1) = \log_6 7$

Como $\log_6 7 = \log_6 7$ es un enunciado verdadero, $x = 3$ es una solución. ■

Cuando comprobemos la solución $x = 3$ del ejemplo 3, no se requiere que la solución sea positiva, pero sí se requiere que las dos expresiones, $4x - 5$ y $2x + 1$ sean positivas después de sustituir 3 por x. Si extendemos nuestra idea de *argumento* de variables a expresiones, entonces cuando comprobemos soluciones podemos simplemente recordar que *los argumentos deben ser positivos*.

En el siguiente ejemplo usamos la definición de logaritmo para resolver una ecuación logarítmica.

EJEMPLO 4 **Resolver una ecuación logarítmica**

Resuelva la ecuación $\log_4 (5 + x) = 3$.

SOLUCIÓN

$\log_4 (5 + x) = 3$	enunciado
$5 + x = 4^3$	cambie a forma exponencial
$x = 59$	despeje x

✓ **Prueba** $x = 59$ LI: $\log_4 (5 + 59) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$
LD: 3

Como $3 = 3$ es un enunciado verdadero, $x = 59$ es una solución. ■

A continuación trazamos la gráfica de una función logarítmica específica.

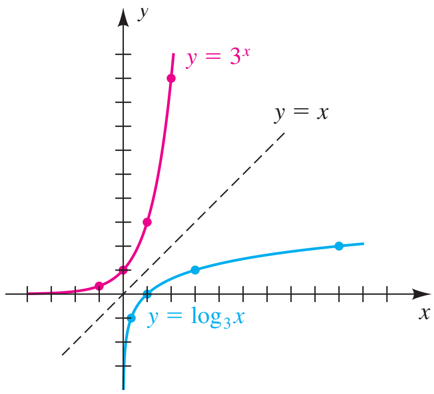
EJEMPLO 5 **Trazar la gráfica de una función logarítmica**

Trace la gráfica de f si $f(x) = \log_3 x$.

SOLUCIÓN Describiremos tres métodos para trazar la gráfica.

Método 1 Como las funciones dadas por $\log_3 x$ y 3^x son inversas entre sí, procedemos como hicimos para $y = \log_a x$ en la figura 1; esto es, primero trazamos la gráfica de $y = 3^x$ y luego la reflejamos a través de la recta $y = x$. Esto nos da el trazo de la figura 2. Note que los puntos $(-1, 3^{-1})$, $(0, 1)$,$(1, 3)$ y $(2, 9)$ en la gráfica de $y = 3^x$ se reflejan en los puntos $(3^{-1}, -1)$, $(1, 0)$, $(3, 1)$ y $(9, 2)$ en la gráfica de $y = \log_3 x$.

FIGURA 2



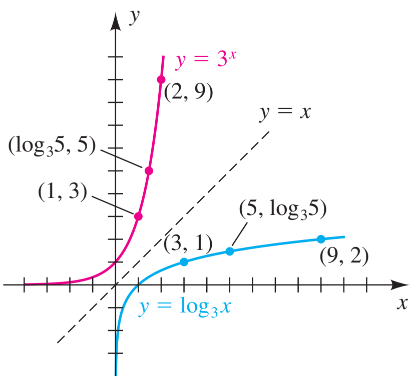
Método 2 Podemos hallar puntos en la gráfica de $y = \log_3 x$ si hacemos $x = 3^k$, donde k es un número real, y luego aplicamos la propiedad 3 de los logaritmos (página 329) como sigue:

$$y = \log_3 x = \log_3 3^k = k$$

Usando esta fórmula, obtenemos los puntos de la gráfica que se ven en la tabla siguiente.

$x = 3^k$	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3
$y = \log_3 x = k$	-3	-2	-1	0	1	2	3

FIGURA 3



Esto nos da los mismos puntos obtenidos usando el primer método.

Método 3 Podemos trazar la gráfica de $y = \log_3 x$ si trazamos la gráfica de la forma exponencial equivalente $x = 3^y$. ■

Antes de continuar, localizamos un punto más en $y = \log_3 x$ en la figura 2. Si hacemos $x = 5$, entonces $y = \log_3 5$ (vea la figura 3). (Vemos que $\log_3 5$ es un número entre 1 y 2; en la sección 5.6 estaremos en mejor aptitud de aproximar $\log_3 5$). Ahora en la gráfica de $y = 3^x$ tenemos el punto $(x, y) = (\log_3 5, 5)$, de modo que $5 = 3^{\log_3 5}$, que ilustra la propiedad 4 de logaritmos (página 329) y refuerza lo dicho de que *los logaritmos son exponentes.*

Al igual que en los ejemplos siguientes, con frecuencia buscamos trazar la gráfica de $f(x) = \log_a u$, donde u es alguna expresión que contiene x.

EJEMPLO 6 **Trazar la gráfica de una función logarítmica**

Trace la gráfica de f si $f(x) = \log_3 |x|$ para $x \neq 0$.

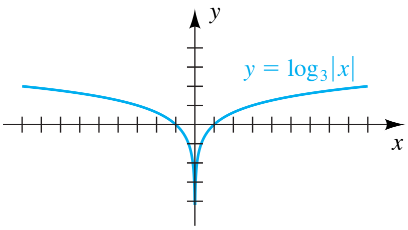
SOLUCIÓN La gráfica es simétrica con respecto al eje y, porque

$$f(-x) = \log_3 |-x| = \log_3 |x| = f(x).$$

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y la gráfica coincide con la gráfica de $y = \log_3 x$ trazada en la figura 2. Usando simetría, reflejamos esa parte de la gráfica a través del eje y, obteniendo el trazo de la figura 4.

De manera alternativa, podemos pensar en esta función como $g(x) = \log_3 x$ con $|x|$ sustituida por x (consulte la explicación en la página 191). Como todos los puntos de la gráfica de g tienen coordenadas x positivas, podemos obtener la gráfica de f al combinar g con la reflexión de g a través del eje y. ■

FIGURA 4



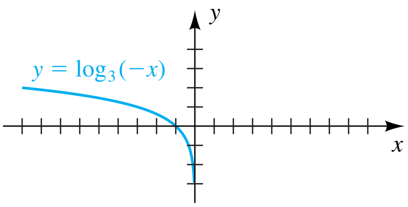
EJEMPLO 7 Reflejar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de f si $f(x) = \log_3 (-x)$.

SOLUCIÓN El dominio de f es el conjunto de los números reales negativos, porque $\log_3(-x)$ existe sólo si $-x > 0$ o bien, lo que es equivalente, $x < 0$. Podemos obtener la gráfica de f a partir de la gráfica de $y = \log_3 x$ al sustituir cada punto (x, y) de la figura 2 por $(-x, y)$. Esto es equivalente a reflejar la gráfica de $y = \log_3 x$ a través del eje y. La gráfica se traza en la figura 5.

Otro método es cambiar $y = \log_3 (-x)$ a la forma exponencial $3^y = -x$ y luego trazar la gráfica de $x = -3^y$. ■

FIGURA 5



EJEMPLO 8 Desplazar gráficas de ecuaciones logarítmicas

Trace la gráfica de la ecuación:

(a) $y = \log_3 (x - 2)$ **(b)** $y = \log_3 x - 2$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = \log_3 x$ se trazó en la figura 2 y se vuelve a trazar en la figura 6. De la exposición sobre desplazamientos horizontales en la sección 3.5, podemos obtener la gráfica de $y = \log_3 (x - 2)$ al desplazar la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades a la derecha, como se muestra en la figura 6.

(b) De la exposición sobre desplazamientos verticales en la sección 3.5, la gráfica de la ecuación $y = \log_3 x - 2$ se puede obtener al desplazar la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades hacia abajo, como se muestra en la figura 7. Note que el punto de intersección con el eje x está dado por $\log_3 x = 2$ o $x = 3^2 = 9$. ■

FIGURA 6

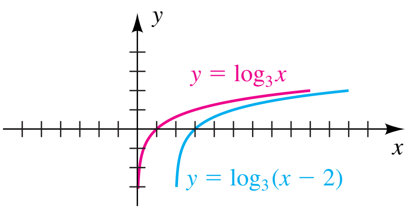
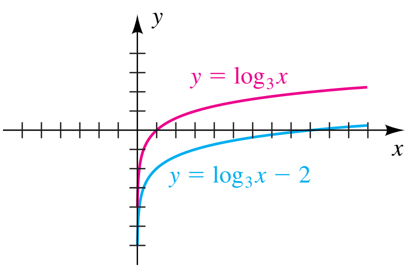


FIGURA 7



EJEMPLO 9 Reflejar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de f si $f(x) = \log_3 (2 - x)$.

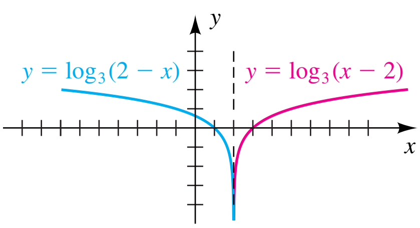
SOLUCIÓN Si escribimos

$$f(x) = \log_3 (2 - x) = \log_3 [-(x - 2)],$$

entonces, aplicando la misma técnica usada para obtener la gráfica de la ecuación $y = \log_3 (-x)$ en el ejemplo 7 (con x sustituida por $x - 2$), vemos que la gráfica de f es la reflexión de la gráfica de $y = \log_3 (x - 2)$ a través de la recta vertical $x = 2$. Esto nos da el trazo de la figura 8.

Otro método es cambiar $y = \log_3 (2 - x)$ a la forma exponencial $3^y = 2 - x$ y luego trazar la gráfica de $x = 2 - 3^y$. ■

FIGURA 8



Antes que se inventaran las calculadoras electrónicas, los logaritmos con base 10 se usaban para cálculos numéricos complicados que contenían productos, cocientes y potencias de números reales. La base 10 se usaba porque está bien adaptada para números que se expresan en forma científica. Los logaritmos con base 10 se denominan **logaritmos comunes.** El símbolo **log *x*** se usa como abreviatura para $\log_{10} x$, igual que $\sqrt{\ }$ se usa como abreviatura para $\sqrt[2]{\ }$.

Definición de logaritmo común	$\log x = \log_{10} x \qquad \text{para toda} \qquad x > 0$

Como ahora se dispone de calculadoras de bajo costo, no hay necesidad de logaritmos comunes como herramienta para trabajo computacional. La base 10 se incluye en aplicaciones, no obstante, y por ello numerosas calculadoras tienen una tecla LOG, que se puede usar para aproximar logaritmos comunes.

La función exponencial natural está dada por $f(x) = e^x$. La función logarítmica con base e se llama **función logarítmica natural.** El símbolo **ln *x*** (léase "ele ene de x" es una abreviatura de $\log_e x$ y nos referimos a ella como el **logaritmo natural de *x*.** Entonces, *la función logarítmica natural y la función exponencial natural son funciones inversas una de la otra.*

Definición de logaritmo natural	$\ln x = \log_e x \qquad \text{para toda} \qquad x > 0$

Casi todas las calculadoras tienen una tecla marcada LN, que se puede usar para aproximar logaritmos naturales. La siguiente ilustración da varios ejemplos de formas equivalentes que contienen logaritmos comunes y naturales.

ILUSTRACIÓN **Formas equivalentes**

Forma logarítmica	Forma exponencial
■ $\log x = 2$	$10^2 = x$
■ $\log z = y + 3$	$10^{y+3} = z$
■ $\ln x = 2$	$e^2 = x$
■ $\ln z = y + 3$	$e^{y+3} = z$

Para hallar x cuando se da $\log x$ o $\ln x$, podemos usar la tecla 10^x o la e^x, respectivamente, en una calculadora, como en el ejemplo siguiente. Si su calculadora tiene una tecla INV (para inversas), puede introducir x y sucesivamente pulsar INV LOG o INV LN.

EJEMPLO 10 **Resolver una ecuación logarítmica sencilla**

Encuentre x si

(a) $\log x = 1.7959$ **(b)** $\ln x = 4.7$

SOLUCIÓN

(a) Cambiando $\log x = 1.7959$ a su forma exponencial equivalente tendremos

$$x = 10^{1.7959}.$$

Evaluando la última expresión a una precisión de tres lugares decimales dará

$$x \approx 62.503.$$

(b) Cambiando $\ln x = 4.7$ a su forma exponencial equivalente dará

$$x = e^{4.7} \approx 109.95.$$ ■

La tabla siguiente es una lista de formas logarítmicas comunes y naturales para las propiedades de la página 329.

Logaritmos con base *a*	Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
(1) $\log_a 1 = 0$	$\log 1 = 0$	$\ln 1 = 0$
(2) $\log_a a = 1$	$\log 10 = 1$	$\ln e = 1$
(3) $\log_a a^x = x$	$\log 10^x = x$	$\ln e^x = x$
(4) $a^{\log_a x} = x$	$10^{\log x} = x$	$e^{\ln x} = x$

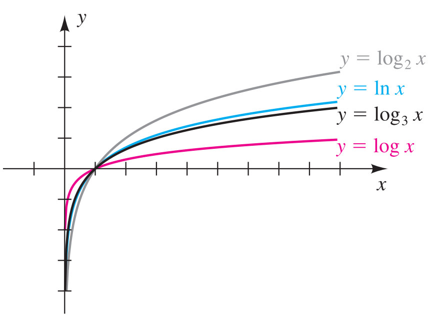
La última propiedad para logaritmos naturales nos permite escribir el número a como $e^{\ln a}$, de modo que la función exponencial $f(x) = a^x$ se puede escribir como $f(x) = (e^{\ln a})^x$ o como $f(x) = e^{x \ln a}$. Muchas calculadoras usan un modelo exponencial de regresión de la forma $y = ab^x$. Si se desea un modelo exponencial con base e, podemos escribir el modelo

$$y = ab^x \quad \text{cuando} \quad y = ae^{x \ln b}.$$

ILUSTRACIÓN **Convertir a expresiones de base *e***

- 3^x es equivalente a $e^{x \ln 3}$
- x^3 es equivalente a $e^{3 \ln x}$
- $4 \cdot 2^x$ es equivalente a $4 \cdot e^{x \ln 2}$

FIGURA 9



La figura 9 muestra cuatro gráficas logarítmicas con base $a > 1$. Note que para $x > 1$, cuando aumenta la base del logaritmo, las gráficas aumentan más lentamente (son más horizontales). Esto es lógico cuando consideramos las gráficas de las inversas de estas funciones: $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 3^x$ y $y = 10^x$. Aquí, para $x > 0$, cuando aumenta la base exponencial, las gráficas aumentan más rápido (son más verticales).

Los siguientes cuatro ejemplos ilustran aplicaciones de logaritmos comunes y naturales.

EJEMPLO 11 La escala Richter

En la escala Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I está dada por

$$R = \log \frac{I}{I_0},$$

donde I_0 es cierta intensidad mínima.

(a) Si la intensidad de un terremoto es $1000I_0$, encuentre R.

(b) Exprese I en términos de R e I_0.

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} R &= \log \frac{I}{I_0} && \text{enunciado} \\ &= \log \frac{1000I_0}{I_0} && \text{sea } I = 1000I_0 \\ &= \log 1000 && \text{cancele } I_0 \\ &= \log 10^3 && 1000 = 10^3 \\ &= 3 && \log 10^x = x \text{ para toda } x \end{aligned}$$

De este resultado vemos que un aumento multiplicado por diez en intensidad resulta en un aumento de 1 en magnitud (si 1000 se cambiara a 10,000, entonces 3 cambiaría a 4).

(b)
$$\begin{aligned} R &= \log \frac{I}{I_0} && \text{enunciado} \\ \frac{I}{I_0} &= 10^R && \text{cambie a forma exponencial} \\ I &= I_0 \cdot 10^R && \text{multiplique por } I_0 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 12 **Ley de Newton del enfriamiento**

La ley de Newton del enfriamiento expresa que la rapidez a la que un cuerpo se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que le rodea. La ley de Newton se puede usar para demostrar que en ciertas condiciones la temperatura T (en °C) de un cuerpo en el tiempo t (en horas) está dada por $T = 75e^{-2t}$. Exprese t como función de T.

SOLUCIÓN
$$\begin{aligned} T &= 75e^{-2t} && \text{enunciado} \\ e^{-2t} &= \frac{T}{75} && \text{aísle la expresión exponencial} \\ -2t &= \ln \frac{T}{75} && \text{cambie a forma logarítmica} \\ t &= -\frac{1}{2} \ln \frac{T}{75} && \text{divida entre } -2 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 13 **Aproximar un tiempo de duplicación**

Suponga que una población está creciendo continuamente a razón de 4% por año. Aproxime el tiempo que requiere una población para duplicar su tamaño, es decir, su **tiempo de duplicación.**

SOLUCIÓN Note que no se da un tamaño inicial de población. No saber el tamaño inicial no presenta problema, sin embargo, deseamos sólo determinar el tiempo necesario para obtener un tamaño de población *relativo* a un tamaño inicial de población. Si usamos la fórmula del crecimiento $q = q_0e^{rt}$ con $r = 0.04$ tendremos

$$
\begin{aligned}
2q_0 &= q_0 e^{0.04t} && \text{sea } q = 2q_0 \\
2 &= e^{0.04t} && \text{divida entre } q_0 \ (q_0 \neq 0) \\
0.04t &= \ln 2 && \text{cambie a forma logarítmica} \\
t &= 25 \ln 2 \approx 17.3 \text{ años.} && \text{multiplique por } \frac{1}{0.04} = 25
\end{aligned}
$$

El hecho de que q_0 no tuvo ningún efecto en la respuesta indica que el tiempo de duplicación para una población de 1000 es igual que el tiempo de duplicación para una población de 1,000,000 o cualquier otra población inicial razonable. ■

Del último ejemplo podemos obtener una fórmula general para el tiempo de duplicación de una población, es decir,

$$rt = \ln 2 \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad t = \frac{\ln 2}{r}.$$

Como $\ln 2 \approx 0.69$, vemos que el tiempo de duplicación t para un crecimiento de este tipo es aproximadamente $0.69/r$. Como los números 70 y 72 son cercanos a 69 pero tienen más divisores, algunas fuentes se refieren a esta relación de duplicación como la **regla del 70** o la **regla del 72.** Como ilustración de la regla del 72, si el porcentaje de crecimiento de una población es 8%, entonces toma unos $72/8 = 9$ años para que la población se duplique. En forma más precisa, este valor es

$$\frac{\ln 2}{8} \cdot 100 \approx 8.7 \text{ años.}$$

EJEMPLO 14 **Determinar la vida media de una sustancia radiactiva**

Un físico encuentra que una sustancia radiactiva desconocida registra 2000 conteos por minuto en un contador Geiger. Diez días después la sustancia registra 1500 conteos por minuto. Con cálculo, se puede demostrar que después de t días la cantidad de material radiactivo y por tanto el número de conteos por minuto $N(t)$, es directamente proporcional a e^{ct} para alguna constante c. Determine la vida media de la sustancia.

SOLUCIÓN Como $N(t)$ es directamente proporcional a e^{ct},

$$N(t) = ke^{ct},$$

donde k es una constante. Haciendo $t = 0$ y usando $N(0) = 2000$, obtenemos

$$2000 = ke^{c0} = k \cdot 1 = k.$$

En consecuencia, la fórmula para $N(t)$ se puede escribir como

$$N(t) = 2000e^{ct}.$$

Como $N(10) = 1500$, podemos determinar c como sigue:

$$
\begin{aligned}
1500 &= 2000e^{c \cdot 10} && \text{sea } t = 10 \text{ en } N(t) \\
\tfrac{3}{4} &= e^{10c} && \text{aísle la expresión exponencial} \\
10c &= \ln \tfrac{3}{4} && \text{cambie a forma logarítmica} \\
c &= \tfrac{1}{10} \ln \tfrac{3}{4} && \text{divida entre 10}
\end{aligned}
$$

Por último, como la vida media corresponde al tiempo t en el que $N(t)$ es igual a 1000, tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
1000 &= 2000e^{ct} && \text{sea } N(t) = 1000 \\
\tfrac{1}{2} &= e^{ct} && \text{aísle la expresión exponencial} \\
ct &= \ln \tfrac{1}{2} && \text{cambie a forma logarítmica} \\
t &= \frac{1}{c} \ln \frac{1}{2} && \text{divida entre } c \\
&= \frac{1}{\frac{1}{10}\ln\frac{3}{4}} \ln \frac{1}{2} && c = \tfrac{1}{10}\ln\tfrac{3}{4} \\
&\approx 24 \text{ días} && \text{aproxime}
\end{aligned}
$$

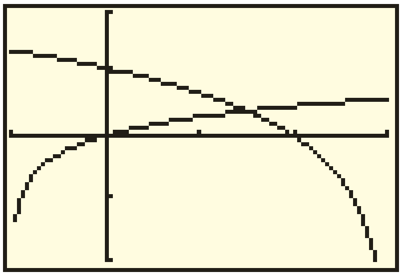
■

El siguiente ejemplo es una buena ilustración del poder de una calculadora de gráficas, porque es imposible hallar la solución exacta usando sólo métodos algebraicos.

EJEMPLO 15 **Aproximar una solución a una desigualdad**

Grafique $f(x) = \log(x + 1)$ y $g(x) = \ln(3 - x)$, y estime la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

FIGURA 10
$[-1, 3]$ por $[-2, 2]$



SOLUCIÓN Empezamos por hacer las asignaciones

$$Y_1 = \log(x + 1) \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \ln(3 - x).$$

Como el dominio de f es $(-1, \infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, 3)$, escogemos la pantalla $[-1, 3]$ por $[-2, 2]$ y obtenemos la gráfica de la figura 10. Usando una función de intersección, encontramos que el punto de intersección es aproximadamente $(1.51, 0.40)$. Entonces, la solución aproximada de $f(x) \geq g(x)$ es el intervalo

$$1.51 < x < 3.$$

■

5.4 Ejercicios

Ejer. 1–2: Cambie a forma logarítmica.

1 (a) $4^3 = 64$ (b) $4^{-3} = \frac{1}{64}$

(c) $t^r = s$ (d) $3^x = 4 - t$

(e) $5^{7t} = \dfrac{a + b}{a}$ (f) $(0.7)^t = 5.3$

2 (a) $3^5 = 243$ (b) $3^{-4} = \frac{1}{81}$

(c) $c^p = d$ (d) $7^x = 100p$

(e) $3^{-2x} = \dfrac{P}{F}$ (f) $(0.9)^t = \frac{1}{2}$

Ejer. 3–4: Cambie a forma exponencial.

3 (a) $\log_2 32 = 5$ (b) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

(c) $\log_t r = p$ (d) $\log_3 (x + 2) = 5$

(e) $\log_2 m = 3x + 4$ (f) $\log_b 512 = \frac{3}{2}$

4 (a) $\log_3 81 = 4$ (b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

(c) $\log_v w = q$ (d) $\log_6 (2x - 1) = 3$

(e) $\log_4 p = 5 - x$ (f) $\log_a 343 = \frac{3}{4}$

Ejer. 5–10: Despeje *t* usando logaritmos con base *a*.

5 $2a^{t/3} = 5$

6 $3a^{4t} = 10$

7 $K = H - Ca^t$

8 $F = D + Ba^t$

9 $A = Ba^{Ct} + D$

10 $L = Ma^{t/N} - P$

Ejer. 11-12: Cambie a forma logarítmica.

11 (a) $10^5 = 100{,}000$ (b) $10^{-3} = 0.001$

(c) $10^x = y - 3$ (d) $e^7 = p$

(e) $e^{2t} = 3 - x$

12 (a) $10^4 = 10{,}000$ (b) $10^{-2} = 0.01$

(c) $10^x = 38z$ (d) $e^4 = D$

(e) $e^{0.1t} = x + 2$

Ejer. 13-14: Cambie a forma exponencial.

13 (a) $\log x = 50$ (b) $\log x = 20t$

(c) $\ln x = 0.1$ (d) $\ln w = 4 + 3x$

(e) $\ln (z - 2) = \frac{1}{6}$

14 (a) $\log x = -8$ (b) $\log x = y + 4$

(c) $\ln x = \frac{1}{2}$ (d) $\ln z = 7 + x$

(e) $\ln (t - 5) = 1.2$

Ejer. 15-16: Encuentre el número, si es posible.

15 (a) $\log_5 1$ (b) $\log_3 3$ (c) $\log_4 (-2)$

(d) $\log_7 7^2$ (e) $3^{\log_3 8}$ (f) $\log_5 125$

(g) $\log_4 \frac{1}{16}$

16 (a) $\log_8 1$ (b) $\log_9 9$ (c) $\log_5 0$

(d) $\log_6 6^7$ (e) $5^{\log_5 4}$ (f) $\log_3 243$

(g) $\log_2 128$

Ejer. 17–20: Encuentre el número.

17 (a) $10^{\log 3}$ (b) $\log 10^5$ (c) $\log 100$

(d) $\log 0.0001$ (e) $10^{1+\log 3}$

18 (a) $10^{\log 7}$ (b) $\log 10^{-6}$ (c) $\log 100{,}000$

(d) $\log 0.001$ (e) $10^{-1+\log 5}$

19 (a) $e^{\ln 2}$ (b) $\ln e^{-3}$ (c) $e^{2+\ln 3}$

20 (a) $e^{\ln 8}$ (b) $\ln e^{2/3}$ (c) $e^{1+\ln 5}$

Ejer. 21–36: Resuelva la ecuación.

21 $\log_4 (x + 10) = \log_4 (8 - x)$

22 $\log_3 (x + 4) = \log_3 (1 - x)$

23 $\log_5 (x - 2) = \log_5 (3x + 7)$

24 $\log_7 (x - 5) = \log_7 (6x)$

25 $\log x^2 = \log (-3x - 2)$

26 $\ln x^2 = \ln (12 - x)$

27 $\log_3 (x - 4) = 2$

28 $\log_2 (x - 5) = 4$

29 $\log_9 x = -\frac{3}{2}$

30 $\log_4 x = -\frac{3}{2}$

31 $\ln x^2 = -2$

32 $\log x^2 = -4$

33 $e^{2 \ln x} = 9$

34 $e^{-\ln x} = 0.2$

35 $e^{x \ln 3} = 27$

36 $e^{x \ln 2} = 0.25$

37 Complete las afirmaciones para $f(x) = \log x$.

(a) Cuando $x \to 1$, $f(x) \to$ ____.

(b) Cuando $x \to 10$, $f(x) \to$ ____.

(c) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

(d) Cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to$ ____.

38 Complete las afirmaciones para $f(x) = \ln x$.

(a) Cuando $x \to 1$, $f(x) \to$ ____.

(b) Cuando $x \to e$, $f(x) \to$ ____.

(c) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

(d) Cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to$ ____.

39 Trace la gráfica de f si $a = 4$.

(a) $f(x) = \log_a x$ (b) $f(x) = -\log_a x$

(c) $f(x) = 2 \log_a x$ (d) $f(x) = \log_a (x + 2)$

(e) $f(x) = (\log_a x) + 2$ (f) $f(x) = \log_a (x - 2)$

(g) $f(x) = (\log_a x) - 2$ (h) $f(x) = \log_a |x|$

(i) $f(x) = \log_a (-x)$ (j) $f(x) = \log_a (3 - x)$

(k) $f(x) = |\log_a x|$ (l) $f(x) = \log_{1/a} x$

40 Haga el ejercicio 39 si $a = 5$.

Ejer. 41–46: Trace la gráfica de f.

41 $f(x) = \log (x + 10)$

42 $f(x) = \log (x + 100)$

43 $f(x) = \ln |x|$

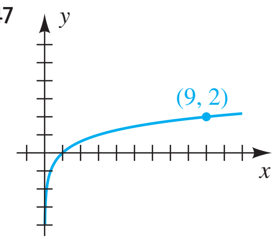
44 $f(x) = \ln |x - 1|$

45 $f(x) = \ln e + x$

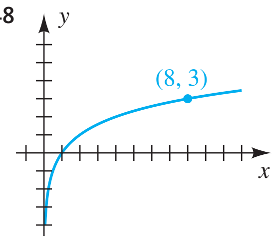
46 $f(x) = \ln (e + x)$

Ejer. 47–48: Encuentre una función logarítmica de la forma $f(x) = \log_a x$ para la gráfica dada.

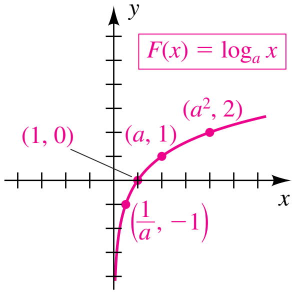
47



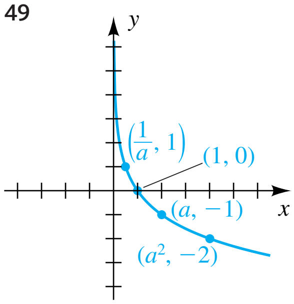
48



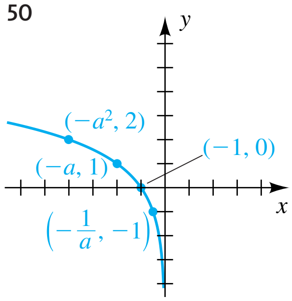
Ejer. 49–54: En la figura se muestra la gráfica de una función *f*. Exprese *f*(*x*) en términos de *F*.



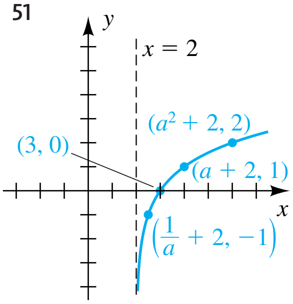
49



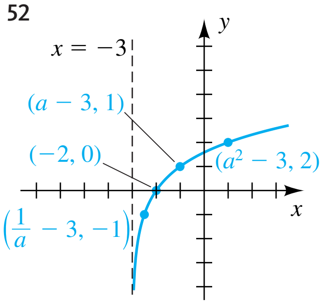
50



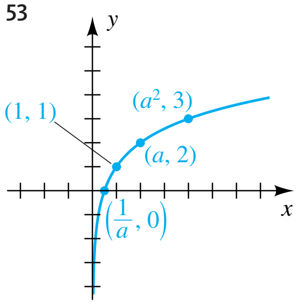
51



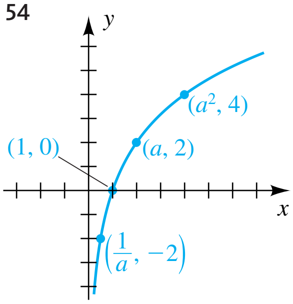
52



53



54



Ejer. 55–56: Aproxime *x* a tres cifras significativas.

55 **(a)** $\log x = 3.6274$ **(b)** $\log x = 0.9469$

(c) $\log x = -1.6$ **(d)** $\ln x = 2.3$

(e) $\ln x = 0.05$ **(f)** $\ln x = -1.6$

56 **(a)** $\log x = 1.8965$ **(b)** $\log x = 4.9680$

(c) $\log x = -2.2$ **(d)** $\ln x = 3.7$

(e) $\ln x = 0.95$ **(f)** $\ln x = -5$

57 **Hallar una rapidez de crecimiento** Cambie $f(x) = 1000(1.05)^x$ a una función exponencial con base *e* y aproxime el porcentaje de crecimiento de *f*.

58 **Hallar una rapidez de crecimiento** Cambie $f(x) = 50(9/8)^x$ a una función exponencial con base *e* y aproxime una rapidez de crecimiento de *f*.

59 **Hallar una rapidez de decaimiento** Cambie $f(x) = 20(0.97)^x$ a una función exponencial con base *e* y aproxime la rapidez de decaimiento de *f*.

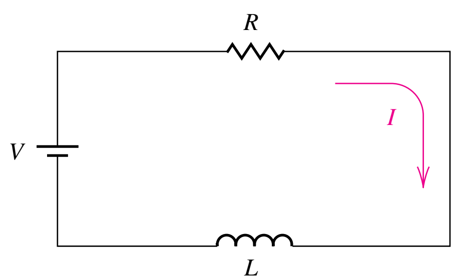
60 **Hallar una rapidez de decaimiento** Cambie $f(x) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^x$ a una función exponencial con base *e* y aproxime la rapidez de decaimiento de ***f*.**

61 **Decaimiento del radio** Si empezamos con q_0 miligramos de radio, la cantidad *q* restante después de *t* años está dada por la fórmula $q = q_0(2)^{-t/1600}$. Exprese *t* en términos de *q* y de q_0.

62 **Decaimiento del isótopo de bismuto** El isótopo radiactivo de bismuto ^{210}Bi se desintegra de acuerdo con $Q = k(2)^{-t/5}$, donde *k* es una constante y *t* es el tiempo en días. Exprese *t* en términos de *Q* y *k*.

63 **Circuito eléctrico** Un diagrama de un circuito eléctrico sencillo formado por un resistor y un inductor se muestra en la figura siguiente. La corriente *I* en el tiempo *t* está dada por la fórmula $I = 20e^{-Rt/L}$, donde *R* es la resistencia y *L* es la inductancia. De esta ecuación despeje *t*.

EJERCICIO 63



64 **Condensador eléctrico** A un condensador eléctrico con carga inicial Q_0 se le permite descargarse. Después de *t* segundos, la carga *Q* es $Q = Q_0e^{kt}$, donde *k* es una constante. De esta ecuación despeje *t*.

65 **Escala de Richter** Use la fórmula de la escala de Richter $R = \log (I/I_0)$ para hallar la magnitud de un terremoto que tiene una intensidad

(a) 100 veces la de I_0

(b) 10,000 veces la de I_0

(c) 100,000 veces la de I_0

66 **Escala de Richter** Consulte el ejercicio 65. Las magnitudes más grandes de terremotos registrados han sido de entre 8 y 9 en la escala de Richter. Encuentre las intensidades correspondientes en términos de I_0.

67 **Intensidad del sonido** La intensidad acústica de un sonido, como la experimenta el oído humano, está basada en su nivel de intensidad. Una fórmula empleada para hallar el nivel de intensidad $\alpha = 10 \log (I/I_0)$, donde I_0 es un valor especial de I acordado como el sonido más débil que puede ser detectado por el oído en ciertas condiciones. Encuentre α si

(a) I es 10 veces mayor que I_0

(b) I es 1000 veces mayor que I_0

(c) I es 10,000 veces mayor que I_0. (Éste es el nivel de intensidad de la voz promedio.)

68 **Intensidad del sonido** Consulte el ejercicio 67. Un nivel de intensidad del sonido de 140 decibeles produce dolor en el oído humano promedio. ¿Aproximadamente cuántas veces mayor que I_0 debe ser I para que α alcance este nivel?

69 **Crecimiento de la población en Estados Unidos** La población $N(t)$ (en millones) de Estados Unidos t años después de 1980 se puede aproximar con la fórmula $N(t) = 231e^{0.0103t}$. ¿Cuándo es que la población será el doble de la de 1980?

70 **Crecimiento de población en India** La población $N(t)$ (en millones) de India t años después de 1985 puede aproximarse con la fórmula $N(t) = 766e^{0.0182t}$. ¿Cuándo es que la población será de 1500 millones?

71 **Peso de niños** La relación de Ehrenberg

$$\ln W = \ln 2.4 + (1.84)h$$

es una fórmula empírica que relaciona la estatura h (en metros) con el peso promedio W (en kilogramos) para niños de 5 a 13 años de edad.

(a) Exprese W como función de h que no contenga ln.

(b) Estime el peso promedio de un niño de 8 años de edad que mide 1.5 metros de estatura.

72 **Interés capitalizado continuamente** Si el interés se capitaliza continuamente a razón de 4% al año, aproxime el número de años necesarios para que un depósito inicial de \$6000 crezca a \$25,000.

73 **Presión de aire** La presión de aire $p(h)$ (en lb/in^2), a una altitud de h pies sobre el nivel del mar, se puede aproximar con la fórmula $p(h) = 14.7e^{-0.0000385h}$. ¿Aproximadamente a qué altitud h la presión del aire es

(a) 10 lb/in^2?

(b) la mitad de su valor al nivel del mar?

74 **Presión de vapor** La presión de vapor P de un líquido (en lb/in^2), una medida de su volatilidad, está relacionada con su temperatura T (en °F) por la ecuación de Antoine

$$\log P = a + \frac{b}{c + T},$$

donde a, b y c son constantes. La presión de vapor aumenta rápidamente con un aumento de temperatura. Exprese P como función de T.

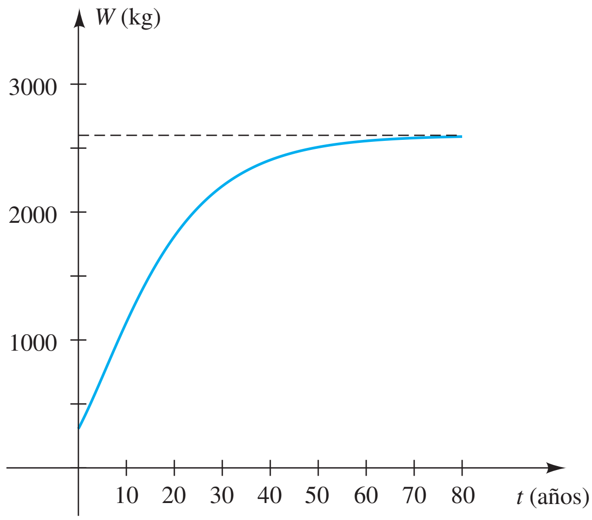
75 **Crecimiento de elefantes** El peso W (en kilogramos) de una elefanta africana de edad t (en años) se puede aproximar con

$$W = 2600(1 - 0.51e^{-0.075t})^3.$$

(a) Aproxime el peso al nacimiento.

(b) Estime la edad de una elefanta africana que pesa 1800 kg mediante el uso (1) de la gráfica siguiente y (2) de la fórmula para W.

EJERCICIO 75



76 **Consumo de carbón** Un país actualmente tiene reservas de carbón de 50 millones de toneladas; el año pasado consumió 6.5 millones de toneladas de carbón. Los datos de años pasados y las proyecciones de población sugieren que la rapidez de consumo R (en millones de toneladas al año) aumentará de acuerdo con la fórmula $R = 6.5e^{0.02t}$, y la cantidad total T (en millones de toneladas) de carbón que se usarán en t años está dada por la fórmula $T = 325(e^{0.02t} - 1)$. Si el país utiliza sólo sus propios recursos, ¿cuándo se agotarán las reservas de carbón?

77 **Densidad de población urbana** Un modelo de densidad urbana es una fórmula que relaciona la densidad de población D (en miles/mi^2) con la distancia x (en millas) desde el centro de la ciudad. La fórmula $D = ae^{-bx}$ para la densidad central a y el coeficiente de disminución b se ha encontrado apropiada para muchas grandes ciudades de Estados Unidos. Para la ciudad de Atlanta en 1970, $a = 5.5$ y $b = 0.10$. ¿Aproximadamente a qué distancia la densidad de población era de 2000 por milla cuadrada?

78 **Brillantez de estrellas** Las estrellas se clasifican en categorías de brillantez llamadas magnitudes. A las estrellas más tenues, con flujo de luz L_0, se les asigna una magnitud de 6; a las más brillantes con flujo de luz L se les asigna una magnitud m por medio de la fórmula

$$m = 6 - 2.5 \log \frac{L}{L_0}.$$

(a) Encuentre m si $L = 10^{0.4}L_0$.

(b) De la fórmula despeje L en términos de m y L_0.

79 **Decaimiento de yodo radiactivo** El yodo radiactivo ^{131}I se usa con frecuencia en estudios de rastreo de la glándula tiroides. La sustancia se desintegra de acuerdo con la fórmula $A(t) = A_0 a^{-t}$, donde A_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días. Encuentre a, suponiendo que la vida media del ^{131}I es 8 días.

80 **Contaminación radiactiva** El estroncio radiactivo ^{90}Sr ha sido depositado en un gran campo por la lluvia ácida. Si suficientes cantidades llegan hasta la cadena alimenticia de los seres humanos, puede ocasionar cáncer en los huesos. Se ha determinado que el nivel de radiactividad en el campo es 2.5 veces mayor que el nivel seguro S. El ^{90}Sr se desintegra de acuerdo con la fórmula

$$A(t) = A_0 e^{-0.0239t},$$

donde A_0 es la cantidad actualmente en el campo y t es el tiempo en años. ¿Durante cuántos años estará contaminado el campo?

81 **Velocidad al caminar** En un estudio de 15 ciudades que varían en población P de 300 a 3,000,000, se encontró que el promedio de velocidad al caminar S (en ft/s) de un peatón podría aproximarse por $S = 0.05 + 0.86 \log P$.

(a) ¿En qué forma afecta la población al promedio de velocidad al caminar?

(b) ¿Para qué población el promedio de velocidad al caminar es de 5 ft/s?

82 **Chips de computadora** Para fabricantes de chips de computadora, es importante considerar la fracción F de chips que fallarán después de t años de servicio. Esta fracción puede aproximarse a veces con la fórmula $F = 1 - e^{-ct}$ donde c es una constante positiva.

(a) ¿En qué forma el valor de c afecta la confiabilidad de un chip?

(b) Si $c = 0.125$, ¿después de cuántos años habrán fallado el 35% de los chips?

Ejer. 83–84: Aproxime la función en el valor de x a cuatro lugares decimales.

83 **(a)** $f(x) = \ln(x + 1) + e^x$, $\quad x = 2$

(b) $g(x) = \dfrac{(\log x)^2 - \log x}{4}$, $\quad x = 3.97$

84 **(a)** $f(x) = \log(2x^2 + 1) - 10^{-x}$, $\quad x = 1.95$

(b) $g(x) = \dfrac{x - 3.4}{\ln x + 4}$, $\quad x = 0.55$

Ejer. 85–86: Aproxime la raíz real de la ecuación.

85 $x \ln x = 1$ **86** $\ln x + x = 0$

Ejer. 87–88: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas y estime la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

87 $f(x) = 2.2 \log(x + 2)$; $\quad g(x) = \ln x$

88 $f(x) = x \ln |x|$; $\quad g(x) = 0.15e^x$

89 **Nivel de colesterol en mujeres** Estudios que relacionan el nivel de colesterol en suero con enfermedades coronarias, sugieren que un factor de riesgo es la razón entre x y la cantidad total C de colesterol en la sangre y la cantidad H de colesterol lipoproteínico de alta densidad en la sangre. Para una mujer, el riesgo de vida R de tener un ataque cardiaco se puede aproximar con la fórmula

$$R = 2.07 \ln x - 2.04 \quad \text{siempre y cuando} \quad 0 \leq R \leq 1.$$

Por ejemplo, si $R = 0.65$, entonces hay un 65% de probabilidad que una mujer tenga un ataque cardiaco en su vida.

(a) Calcule R para una mujer con $C = 242$ y $H = 78$

(b) Gráficamente estime x cuando el riesgo sea de 75%.

90 **Nivel de colesterol en hombres** Consulte el ejercicio 89. Para un hombre, el riesgo se puede aproximar con la fórmula $R = 1.35 \ln x - 1.19$.

(a) Calcule R para un hombre con $C = 287$ y $H = 65$.

(b) Gráficamente estime x cuando el riesgo sea de 75%.

5.5 Propiedades de los logaritmos

En la sección precedente observamos que $\log_a x$ se puede interpretar como un exponente. Así, parece razonable esperar que las leyes de los exponentes puedan usarse para obtener leyes correspondientes de logaritmos. Esto se demuestra en las demostraciones de las leyes siguientes, que son fundamentales para todo trabajo con logaritmos.

Leyes de logaritmos

Si u y w denotan números reales positivos, entonces

(1) $\log_a (uw) = \log_a u + \log_a w$

(2) $\log_a \left(\frac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$

(3) $\log_a (u^c) = c \log_a u$ para todo número real c

DEMOSTRACIONES Para las tres demostraciones, sean

$$r = \log_a u \quad \text{y} \quad s = \log_a w.$$

Las formas exponenciales equivalentes son

$$u = a^r \quad \text{y} \quad w = a^s.$$

Ahora procedemos como sigue:

(1)

$uw = a^r a^s$	definición de u y w
$uw = a^{r+s}$	ley 1 de los exponentes
$\log_a (uw) = r + s$	cambie a forma logarítmica
$\log_a (uw) = \log_a u + \log_a w$	definición de r y s

(2)

$\frac{u}{w} = \frac{a^r}{a^s}$	definición de u y w
$\frac{u}{w} = a^{r-s}$	ley 5(a) de los exponentes
$\log_a \left(\frac{u}{w}\right) = r - s$	cambie a forma logarítmica
$\log_a \left(\frac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$	definición de r y s

(3)

$u^c = (a^r)^c$	definición de u
$u^c = a^{cr}$	ley 2 de los exponentes
$\log_a (u^c) = cr$	cambie a forma logarítmica
$\log_a (u^c) = c \log_a u$	definición de r ■

Las leyes de los logaritmos para los casos especiales $a = 10$ (logaritmos comunes) y $a = e$ (logaritmos naturales) se escriben como se muestra en la tabla siguiente.

Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
(1) $\log (uw) = \log u + \log w$	**(1)** $\ln (uw) = \ln u + \ln w$
(2) $\log \left(\frac{u}{w}\right) = \log u - \log w$	**(2)** $\ln \left(\frac{u}{w}\right) = \ln u - \ln w$
(3) $\log (u^c) = c \log u$	**(3)** $\ln (u^c) = c \ln u$

Como lo indica la siguiente advertencia, no hay leyes para expresar $\log_a (u + w)$ o $\log_a (u - w)$ en términos de logaritmos más sencillos.

¡Advertencia!

$$\log_a (u + w) \neq \log_a u + \log_a w$$
$$\log_a (u - w) \neq \log_a u - \log_a w$$

Los siguientes ejemplos ilustran usos de las leyes de logaritmos.

EJEMPLO 1 **Uso de leyes de los logaritmos**

Exprese $\log_a \dfrac{x^3\sqrt{y}}{z^2}$ en términos de logaritmos de x, y y z.

SOLUCIÓN Escribimos $\sqrt{y}$ como $y^{1/2}$ y usamos leyes de los logaritmos:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{z^2} &= \log_a (x^3 y^{1/2}) - \log_a z^2 && \text{ley 2} \\ &= \log_a x^3 + \log_a y^{1/2} - \log_a z^2 && \text{ley 1} \\ &= 3\log_a x + \tfrac{1}{2}\log_a y - 2\log_a z && \text{ley 3} \end{aligned}$$

Note que si un término con exponente positivo (por ejemplo x^3) está en el numerador de la expresión original, tendrá un coeficiente positivo en la forma expandida, y si está en el denominador (por ejemplo z^2), tendrá un coeficiente negativo en la forma expandida. ■

EJEMPLO 2 **Uso de leyes de logaritmos**

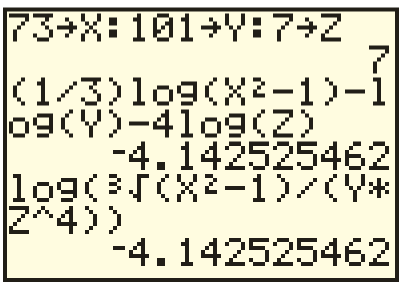
Exprese como un logaritmo:

$$\tfrac{1}{3}\log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4\log_a z$$

SOLUCIÓN Aplicamos las leyes de los logaritmos como sigue:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{3}\log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4\log_a z \\ &= \log_a (x^2 - 1)^{1/3} - \log_a y - \log_a z^4 && \text{ley 3} \\ &= \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - (\log_a y + \log_a z^4) && \text{álgebra} \\ &= \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - \log_a (yz^4) && \text{ley 1} \\ &= \log_a \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{yz^4} && \text{ley 2} \end{aligned}$$ ■

FIGURA 1



En la figura 1 ejecutamos una prueba sencilla de calculadora del ejemplo 2 al asignar valores arbitrarios a X, Y y Z y luego evaluar la expresión dada y nuestra respuesta. No demuestra que tengamos razón, pero da credibilidad a nuestro resultado (por no mencionar tranquilidad mental).

EJEMPLO 3 **Resolver una ecuación logarítmica**

Resuelva la ecuación $\log_5 (2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$.

SOLUCIÓN

$\log_5 (2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$	enunciado
$\log_5 (2x + 3) = \log_5 (11 \cdot 3)$	ley 1 de los logaritmos
$2x + 3 = 33$	las funciones logarítmicas son biunívocas
$x = 15$	despeje x

✓ **Prueba** $x = 15$ LI: $\log_5 (2 \cdot 15 + 3) = \log_5 33$
LD: $\log_5 11 + \log_5 3 = \log_5 (11 \cdot 3) = \log_5 33$

Como $\log_5 33 = \log_5 33$ es un enunciado verdadero, $x = 15$ es una solución. ■

Las leyes de los logaritmos se demostraron para logaritmos de números reales *positivos* u y w. Si aplicamos estas leyes a ecuaciones en las que u y w son expresiones que contienen una variable, entonces pueden aparecer soluciones extrañas, por lo cual las respuestas deben sustituirse por la variable en u y w para determinar si estas expresiones están definidas.

EJEMPLO 4 **Resolver una ecuación logarítmica**

Resuelva la ecuación $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$.

SOLUCIÓN

$\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$	enunciado
$\log_2 [x(x + 2)] = 3$	ley 1 de los logaritmos
$x(x + 2) = 2^3$	cambie a forma exponencial
$x^2 + 2x - 8 = 0$	multiplique e iguale a 0
$(x - 2)(x + 4) = 0$	factorice
$x - 2 = 0, \quad x + 4 = 0$	teorema del factor cero
$x = 2, \quad x = -4$	despeje x

✓ **Prueba** $x = 2$ LI: $\log_2 2 + \log_2 (2 + 2) = 1 + \log_2 4$
$= 1 + \log_2 2^2 = 1 + 2 = 3$
LD: 3

Como $3 = 3$ es un enunciado verdadero, $x = 2$ es una solución.

✓ **Prueba** $x = -4$ LI: $\log_2 (-4) + \log_2 (-4 + 2)$

Como los logaritmos de números negativos no están definidos, $x = -4$ no es una solución. ■

EJEMPLO 5 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $\ln(x+6) - \ln 10 = \ln(x-1) - \ln 2$.

SOLUCIÓN

$$\ln(x+6) - \ln(x-1) = \ln 10 - \ln 2 \qquad \text{reacomodo de términos}$$

$$\ln\left(\frac{x+6}{x-1}\right) = \ln\frac{10}{2} \qquad \text{ley 2 de logaritmos}$$

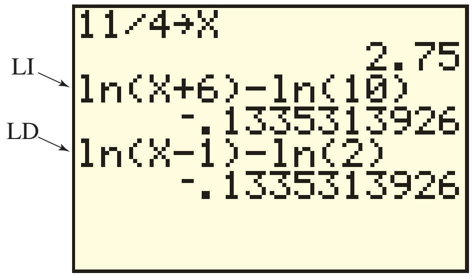
$$\frac{x+6}{x-1} = 5 \qquad \text{ln es biunívoco}$$

$$x + 6 = 5x - 5 \qquad \text{multiplique por } x - 1$$

$$x = \tfrac{11}{4} \qquad \text{despeje } x$$

✓ **Prueba** Como $\ln(x+6)$ y $\ln(x-1)$ están definidos en $x = \frac{11}{4}$ (son logaritmos de números reales positivos) y como nuestros pasos algebraicos son correctos, se deduce que $\frac{11}{4}$ es una solución de la ecuación dada. (La figura 2 muestra una prueba de calculadora para el ejemplo 5.)

FIGURA 2



■

EJEMPLO 6 Desplazar la gráfica de una ecuación logarítmica

Trace la gráfica de $y = \log_3(81x)$.

SOLUCIÓN Podemos reescribir la ecuación como sigue:

$$y = \log_3(81x) \qquad \text{enunciado}$$

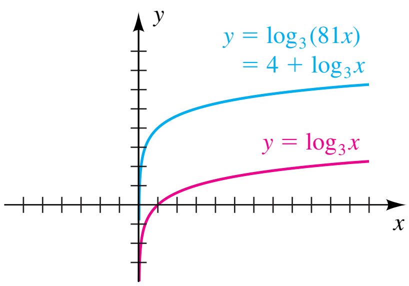
$$= \log_3 81 + \log_3 x \qquad \text{ley 1 de los logaritmos}$$

$$= \log_3 3^4 + \log_3 x \qquad 81 = 3^4$$

$$= 4 + \log_3 x \qquad \log_a a^x = x$$

Entonces, podemos obtener la gráfica de $y = \log_3(81x)$ al desplazar verticalmente la gráfica de $y = \log_3$ de la figura 2 en la sección 5.4 hacia arriba cuatro unidades. Esto nos da el trazo de la figura 3. ■

FIGURA 3



EJEMPLO 7 **Trazar gráficas de ecuaciones logarítmicas**

Trace la gráfica de la ecuación:

(a) $y = \log_3(x^2)$ **(b)** $y = 2\log_3 x$

SOLUCIÓN

(a) Como $x^2 = |x|^2$, podemos reescribir la ecuación dada como

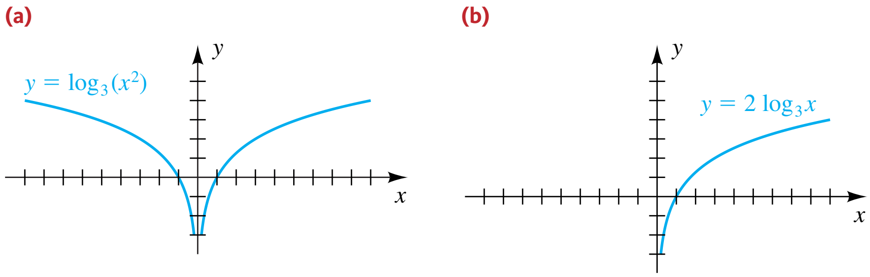
$$y = \log_3 |x|^2.$$

Usando la ley 3 de los logaritmos, tenemos

$$y = 2\log_3 |x|.$$

Podemos obtener la gráfica de $y = 2\log_3|x|$ al multiplicar por 2 las coordenadas y de puntos en la gráfica de $y = \log_3|x|$ en la figura 4 de la sección 5.4. Esto nos da la gráfica de la figura 4(*a*).

FIGURA 4



(b) Si $y = 2\log_3 x$, entonces x debe ser positiva. Por lo tanto, la gráfica es idéntica a la parte de la gráfica de $y = 2\log_3|x|$ de la figura 4(*a*) que se encuentra a la derecha del eje y. Esto nos da la figura 4(b). ■

EJEMPLO 8 **Una relación entre precio de venta y demanda**

En el estudio de economía, la demanda D de un producto a veces está relacionada con su precio de venta p por una ecuación de la forma

$$\log_a D = \log_a c - k\log_a p,$$

donde a, c y k son constantes positivas.

(a) Despeje D de la ecuación.

(b) ¿En qué forma se afecta la demanda al aumentar o disminuir el precio de venta?

SOLUCIÓN

(a)

$$\log_a D = \log_a c - k\log_a p \quad \text{enunciado}$$

$$\log_a D = \log_a c - \log_a p^k \quad \text{ley 3 de los logaritmos}$$

$$\log_a D = \log_a \frac{c}{p^k} \quad \text{ley 2 de los logaritmos}$$

$$D = \frac{c}{p^k} \quad \log_a \text{ es biunívoca}$$

(b) Si el precio p aumenta, el denominador p^k en $D = c/p^k$ también aumentará y por tanto la demanda D del producto disminuirá. Si el precio disminuye, entonces p^k disminuirá y la demanda D aumentará. ■

5.5 Ejercicios

Ejer. 1–8: Exprese en términos de logaritmos de x, y, z o w.

1 (a) $\log_4 (xz)$ (b) $\log_4 (y/x)$ (c) $\log_4 \sqrt[3]{z}$

2 (a) $\log_3 (xyz)$ (b) $\log_3 (xz/y)$ (c) $\log_3 \sqrt[5]{y}$

3 $\log_a \dfrac{x^3 w}{y^2 z^4}$

4 $\log_a \dfrac{y^5 w^2}{x^4 z^3}$

5 $\log \dfrac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$

6 $\log \dfrac{\sqrt{y}}{x^4 \sqrt[3]{z}}$

7 $\ln \sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5 z}}$

8 $\ln x \sqrt[3]{\dfrac{y^4}{z^5}}$

Ejer. 9–16: Escriba la expresión como un logaritmo.

9 (a) $\log_3 x + \log_3 (5y)$ (b) $\log_3 (2z) - \log_3 x$

(c) $\frac{1}{5} \log_3 y$

10 (a) $\log_4 (3z) + \log_4 x$ (b) $\log_4 x - \log_4 (7y)$

(c) $\frac{1}{3} \log_4 w$

11 $2 \log_a x - \frac{1}{3} \log_a (x - 2) - 5 \log_a (2x + 3)$

12 $5 \log_a x - \frac{1}{2} \log_a (3x - 4) - 3 \log_a (5x + 1)$

13 $\log (x^3 y^2) - 2 \log x \sqrt[3]{y} - 3 \log \left(\dfrac{x}{y}\right)$

14 $2 \log \dfrac{y^3}{x} - 3 \log y + \dfrac{1}{2} \log x^4 y^2$

15 $\ln y^3 + \frac{1}{3} \ln (x^9 y^6) - 5 \ln y$

16 $2 \ln x - 4 \ln (1/y) - 3 \ln (xy)$

Ejer. 17–38: Resuelva la ecuación.

17 $\log_6 (2x - 3) = \log_6 24 - \log_6 3$

18 $\log_4 (3x + 2) = \log_4 7 + \log_4 3$

19 $2 \log_3 x = 3 \log_3 5$

20 $3 \log_2 x = 2 \log_2 3$

21 $\log x - \log (x + 1) = 3 \log 4$

22 $\log (x + 2) - \log x = 2 \log 4$

23 $\ln (-4 - x) + \ln 3 = \ln (2 - x)$

24 $\ln x + \ln (x + 6) = \frac{1}{2} \ln 9$

25 $\log_2 (x + 7) + \log_2 x = 3$

26 $\log_6 (x + 5) + \log_6 x = 2$

27 $\log_2 (-x) + \log_2 (2 - x) = 3$

28 $\log_3 (-x) + \log_3 (8 - x) = 2$

29 $\log_3 (x + 3) + \log_3 (x + 5) = 1$

30 $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x - 4) = 2$

31 $\log (x + 3) = 1 - \log (x - 2)$

32 $\log (x + 4) = 2 - \log (x - 2)$

33 $\log (20x) = 3 + \log (x - 5)$

34 $\log (57x) = 2 + \log (x - 2)$

35 $\ln x = 1 - \ln (x + 2)$

36 $\ln x = 1 + \ln (x + 1)$

37 $\log_3 (x - 2) = \log_3 27 - \log_3 (x - 4) - 5^{\log_5 1}$

38 $\log_2 (x + 3) = \log_2 (x - 3) + \log_3 9 + 4^{\log_4 3}$

Ejer. 39–50: Trace la gráfica de f.

39 $f(x) = \log_3 (3x)$

40 $f(x) = \log_4 (16x)$

41 $f(x) = 3 \log_3 x$

42 $f(x) = \frac{1}{3} \log_3 x$

43 $f(x) = \log_3 (x^2)$

44 $f(x) = \log_2 (x^2)$

45 $f(x) = \log_2 (x^3)$

46 $f(x) = \log_3 (x^3)$

47 $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$

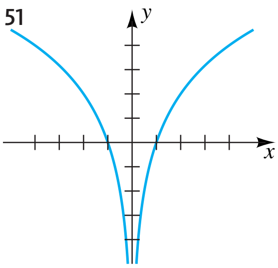
48 $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x}$

49 $f(x) = \log_3 \left(\dfrac{1}{x}\right)$

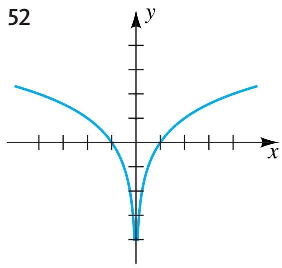
50 $f(x) = \log_2 \left(\dfrac{1}{x}\right)$

Ejer. 51–54: En la figura se ilustra la gráfica de una función f. Exprese $f(x)$ como un logaritmo con base 2.

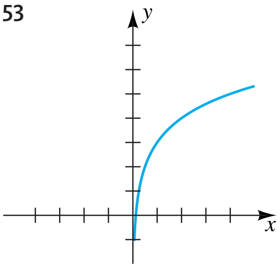
51



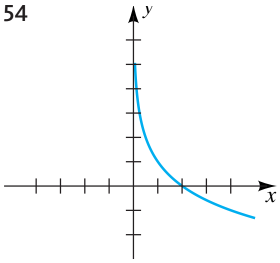
52



53



54



55 **Volumen y decibeles** Cuando se aumenta el control de volumen de un equipo de estéreo, el voltaje en los terminales del altavoz cambia de V_1 a V_2, y el aumento de decibeles en ganancia está dado por

$$\text{db} = 20 \log \frac{V_2}{V_1}.$$

Encuentre el aumento de decibeles si el voltaje cambia de 2 volts a 4.5 volts.

56 **Volumen y decibeles** Consulte el ejercicio 55. ¿Qué razón de voltaje k se necesita para una ganancia de $+20$ decibeles?, ¿y para una ganancia de $+40$ decibeles?

57 **Ley de Pareto** La ley de Pareto para países capitalistas expresa que la relación entre el ingreso anual x y el número y de individuos cuyo ingreso excede de x es

$$\log y = \log b - k \log x,$$

donde b y k son constantes positivas. De esta ecuación despeje y.

58 **Precio y demanda** Si p denota el precio de venta (en dólares) de una mercancía y x es la demanda correspondiente (en número vendido por día), entonces la relación entre p y x está dada a veces por $p = p_0e^{-ax}$, donde p_0 y a son constantes positivas. Exprese x como función de p.

59 **Velocidad del viento** Si v denota la velocidad del viento (en m/s) a una altura de z metros sobre el suelo, entonces en ciertas condiciones $v = c \ln (z/z_0)$, donde c es una constante positiva y z_0 es la altura a la que la velocidad es cero. Trace la gráfica de esta ecuación en un plano zv para $c = 0.5$ y $z_0 = 0.1$ m.

60 **Eliminar contaminación** Si la contaminación del lago Erie se detuviera de pronto, se ha estimado que el nivel y de contaminantes disminuiría según la fórmula $y = y_0e^{-0.3821t}$, donde t es el tiempo en años y y_0 es el nivel de contaminantes en el que ya no hubo más contaminación. ¿Cuántos años pasarían para limpiar 50% los de contaminantes?

61 **Reacción a un estímulo** Denote con R la reacción de un sujeto a un estímulo de intensidad x. Hay muchas posibilidades de R y x. Si el estímulo x es la salinidad (en gramos de sal por litro), R puede ser la estimación del sujeto de qué tan salada está la solución, con base en una escala de 0 a 10. Una relación entre R y x está dada por la fórmula de Weber-Fechner, $R(x) = a \log (x/x_0)$, donde a es una constante positiva y x_0 se denomina estímulo de umbral.

(a) Encuentre $R(x_0)$.

(b) Encuentre una relación entre $R(x)$ y $R(2x)$.

62 **Energía del electrón** La energía $E(x)$ de un electrón después de pasar por material de grosor x está dada por la ecuación $E(x) = E_0e^{-x/x_0}$, donde E_0 es la energía inicial y x_0 es la longitud de onda de la radiación.

(a) Exprese, en términos de E_0, la energía de un electrón después de pasar por material de grosor x_0.

(b) Exprese, en términos de x_0, el grosor al que el electrón pierde 99% de su energía inicial.

63 **Capa de ozono** Un método de estimar el grosor de la capa de ozono es usar la fórmula

$$\ln I_0 - \ln I = kx,$$

donde I_0 es la intensidad de una longitud de onda particular de la luz del sol antes que llegue a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar una capa de ozono de x centímetros de grueso y k es la constante de absorción de ozono para esa longitud de onda. Suponga que para una longitud de onda de 3176×10^{-8} centímetros con $k \approx 0.39$, I_0/I se mide como 1.12. Aproxime el grosor de la capa de ozono al 0.01 centímetro más cercano.

64 **Capa de ozono** Consulte el ejercicio 63. Aproxime el porcentaje de disminución en la intensidad de la luz con una longitud de onda de 3176×10^{-8} centímetros si la capa de ozono mide 0.24 centímetros de grueso.

Ejer. 65–66: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas y estime la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

65 $f(x) = x^3 - 3.5x^2 + 3x$; $g(x) = \log 3x$

66 $f(x) = 3^{-0.5x}$; $g(x) = \log x$

Ejer. 67–68: Use una gráfica para estimar las raíces de la ecuación en el intervalo dado.

67 $e^{-x} - 2 \log (1 + x^2) + 0.5x = 0$; $[0, 8]$

68 $0.3 \ln x + x^3 - 3.1x^2 + 1.3x + 0.8 = 0$; $(0, 3)$

Ejer. 69–70: Grafique f en el intervalo [0.2,16]. (a) Estime los intervalos donde f es creciente o decreciente. (b) Estime los valores máximo y mínimo de f en [0.2, 16].

69 $f(x) = 2 \log 2x - 1.5x + 0.1x^2$

70 $f(x) = 1.1^{3x} + x - 1.35^x - \log x + 5$

Ejer. 71–72: Resuelva la ecuación gráficamente.

71 $x \log x - \log x = 5$

72 $0.3e^x - \ln x = 4 \ln (x + 1)$

Ejer. 73–74: Los graznidos de aves disminuyen en intensidad (acústica) cuando se mueven por la atmósfera. Cuanto más lejos se encuentre un ave de un observador, más débil será el sonido. Esta disminución en intensidad se puede usar para estimar la distancia entre un observador y un ave. Una fórmula que se puede usar para medir esta distancia es

$$I = I_0 - 20 \log d - kd \quad \text{siempre que} \quad 0 \leq I \leq I_0,$$

donde I_0 representa la intensidad (en decibeles) del ave a una distancia de un metro (I_0 se conoce con frecuencia y por lo general depende sólo del tipo de ave), I es la intensidad observada a una distancia de d metros del ave y k es una constante positiva que depende de condiciones atmosféricas tales como temperatura y humedad. Dadas I_0, I y k, estime gráficamente la distancia d entre el ave y un observador.

73 $I_0 = 70, \quad I = 20, \quad k = 0.076$

74 $I_0 = 60, \quad I = 15, \quad k = 0.11$

5.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En esta sección consideraremos varios tipos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas y sus aplicaciones. Cuando resolvamos una ecuación con expresiones exponenciales con bases y variables constantes que aparecen en los exponentes, con frecuencia *igualamos los logaritmos de ambos lados* de la ecuación. Cuando así lo hacemos, las variables en el exponente se convierten en multiplicadores y la ecuación resultante suele ser más fácil de resolver. Nos referiremos a este paso simplemente como "sacar log en ambos lados."

EJEMPLO 1 **Resolver una ecuación exponencial**

Resuelva la ecuación $3^x = 21$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3^x &= 21 && \text{enunciado} \\ \log (3^x) &= \log 21 && \text{saque logaritmo en ambos lados} \\ x \log 3 &= \log 21 && \text{ley 3 de los logaritmos} \\ x &= \frac{\log 21}{\log 3} && \text{divida entre log 3} \end{aligned}$$

También podríamos haber usado logaritmos naturales para obtener

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}.$$

El uso de una calculadora nos da la solución aproximada de $x \approx 2.77$. Una prueba parcial es observar que como $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$, el número x tal que $3^x = 21$ debe estar entre 2 y 3, un poco más cerca de 3 que de 2. ■

También podríamos haber resuelto la ecuación del ejemplo 1 al cambiar la forma exponencial $3^x = 21$ a forma logarítmica, como hicimos en la sección 5.4, para obtener

$$x = \log_3 21.$$

Ésta es, de hecho, la solución de la ecuación; no obstante, como en general las calculadoras tienen teclas sólo para log y ln, no podemos aproximar $\log_3 21$ directamente. El siguiente teorema nos da una *fórmula de cambio de base* más sencilla para hallar $\log_b u$ si $u > 0$ y b es *cualquier* base logarítmica.

Teorema: fórmula de cambio de base

Si $u > 0$ y si a y b son números reales positivos diferentes de 1, entonces

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}.$$

DEMOSTRACIÓN Empezamos con las ecuaciones equivalentes

$$w = \log_b u \qquad \text{y} \qquad b^w = u$$

y procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} b^w &= u && \text{enunciado} \\ \log_a b^w &= \log_a u && \text{saque } \log_a \text{ en ambos lados} \\ w \log_a b &= \log_a u && \text{ley 3 de los logaritmos} \\ w &= \frac{\log_a u}{\log_a b} && \text{divida entre } \log_a b \end{aligned}$$

Como $w = \log_b u$, obtenemos la fórmula. ■

El siguiente caso especial de la fórmula de cambio de base se obtiene al hacer $u = a$ y usar el dato de que $\log_a a = 1$:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

La fórmula de cambio de base se confunde a veces con la ley 2 de los logaritmos. La primera de las siguientes advertencias podría recordarse con la frase "un cociente de logaritmos *no es* el logaritmo del cociente".

¡Advertencia!

$$\frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a \frac{u}{b}; \qquad \frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a (u - b)$$

Los casos especiales de la fórmula de cambio de base que se usan con más frecuencia son aquellos para los que $a = 10$ (logaritmos comunes) y $a = e$ (logaritmos naturales), como se expresa en el siguiente recuadro.

Fórmulas especiales de cambio de base

(1) $\log_b u = \dfrac{\log_{10} u}{\log_{10} b} = \dfrac{\log u}{\log b}$ **(2)** $\log_b u = \dfrac{\log_e u}{\log_e b} = \dfrac{\ln u}{\ln b}$

A continuación, retrabajamos el ejemplo 1 usando una fórmula de cambio de base.

EJEMPLO 2 **Usar una fórmula de cambio de base**

Resuelva la ecuación $3^x = 21$.

SOLUCIÓN Procedemos como sigue:

$$
\begin{aligned}
3^x &= 21 && \text{enunciado} \\
x &= \log_3 21 && \text{cambie a forma logarítmica} \\
&= \frac{\log 21}{\log 3} && \text{fórmula especial de cambio de base 1}
\end{aligned}
$$

Otro método es usar fórmula especial de cambio de base 2, obteniendo

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}.$$ ■

Los logaritmos con base 2 se usan en ciencias computacionales. El siguiente ejemplo indica cómo aproximar logaritmos con base 2 usando fórmulas de cambio de base.

EJEMPLO 3 Aproximar un logaritmo con base 2

Aproxime $\log_2 5$ usando

(a) logaritmos comunes **(b)** logaritmos naturales

SOLUCIÓN Usando las fórmulas especiales de cambio de base 1 y 2, obtenemos lo siguiente:

(a) $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx 2.322$ **(b)** $\log_2 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.322$ ■

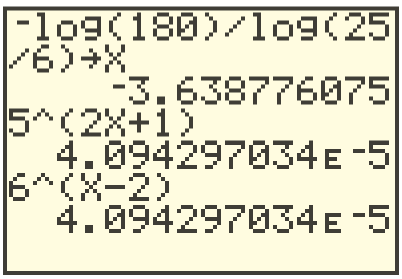
EJEMPLO 4 Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $5^{2x+1} = 6^{x-2}$.

SOLUCIÓN Podemos usar logaritmos comunes o naturales. El uso de logaritmos comunes nos da lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
5^{2x+1} &= 6^{x-2} && \text{enunciado} \\
\log(5^{2x+1}) &= \log(6^{x-2}) && \text{saque log en ambos lados} \\
(2x+1)\log 5 &= (x-2)\log 6 && \text{ley 3 de los logaritmos} \\
2x\log 5 + \log 5 &= x\log 6 - 2\log 6 && \text{multiplique} \\
2x\log 5 - x\log 6 &= -\log 5 - 2\log 6 && \text{pase a un lado todos los términos con } x \\
x(\log 5^2 - \log 6) &= -(\log 5 + \log 6^2) && \text{factorice, y use la ley 3 de los logaritmos} \\
x &= -\frac{\log(5 \cdot 36)}{\log \frac{25}{6}} && \text{despeje } x \text{ y use las leyes de los logaritmos}
\end{aligned}
$$

FIGURA 1



Una aproximación es $x \approx -3.64$. La figura 1 muestra una prueba de calculadora para este ejemplo. Deducimos de la prueba que las gráficas de $y = 5^{2x+1}$ y $y = 6^{x-2}$ se intersecan en aproximadamente $(-3.64, 0.00004)$. ■

EJEMPLO 5 **Resolver una ecuación exponencial**

Resuelva la ecuación $\dfrac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$.

SOLUCIÓN

$$\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3 \qquad \text{enunciado}$$
$$5^x - 5^{-x} = 6 \qquad \text{multiplique por 2}$$
$$5^x - \frac{1}{5^x} = 6 \qquad \text{definición de exponente negativo}$$
$$5^x(5^x) - \frac{1}{5^x}(5^x) = 6(5^x) \qquad \text{multiplique por el mcd, } 5^x$$
$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0 \qquad \text{simplifique y reste } 6(5^x)$$

Note que $(5^x)^2$ se puede escribir como 5^{2x}.

Reconocemos esta forma de ecuación como una cuadrática en 5^x y procedemos como sigue:

$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0 \qquad \text{ley de los exponentes}$$
$$5^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2} \qquad \text{fórmula cuadrática}$$
$$5^x = 3 \pm \sqrt{10} \qquad \text{simplifique}$$
$$5^x = 3 + \sqrt{10} \qquad 5^x > 0, \text{ pero } 3 - \sqrt{10} < 0$$
$$\log 5^x = \log\left(3 + \sqrt{10}\right) \qquad \text{saque log en ambos lados}$$
$$x \log 5 = \log\left(3 + \sqrt{10}\right) \qquad \text{ley 3 de los logaritmos}$$
$$x = \frac{\log\left(3 + \sqrt{10}\right)}{\log 5} \qquad \text{divida entre log 5}$$

Una aproximación es $x \approx 1.13$. ■

EJEMPLO 6 **Resolver una ecuación que contenga logaritmos**

Resuelva la ecuación $\log \sqrt[3]{x} = \sqrt{\log x}$ para x.

SOLUCIÓN

$$\log x^{1/3} = \sqrt{\log x} \qquad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$
$$\tfrac{1}{3} \log x = \sqrt{\log x} \qquad \log x^r = r \log x$$
$$\tfrac{1}{9} (\log x)^2 = \log x \qquad \text{eleve al cuadrado ambos lados}$$
$$(\log x)^2 = 9 \log x \qquad \text{multiplique por 9}$$
$$(\log x)^2 - 9 \log x = 0 \qquad \text{iguale a 0 un lado}$$
$$(\log x)(\log x - 9) = 0 \qquad \text{factorice log } x$$
$$\log x = 0, \qquad \log x - 9 = 0 \qquad \text{iguale a 0 cada factor}$$
$$\log x = 9 \qquad \text{sume 9}$$
$$x = 10^0 = 1 \quad \text{or} \quad x = 10^9 \qquad \log_{10} x = a \Longleftrightarrow x = 10^a$$

✓ **Prueba** $x = 1$ LI: $\log \sqrt[3]{1} = \log 1 = 0$
LD: $\sqrt{\log 1} = \sqrt{0} = 0$

✓ **Prueba** $x = 10^9$ LI: $\log \sqrt[3]{10^9} = \log 10^3 = 3$
LD: $\sqrt{\log 10^9} = \sqrt{9} = 3$

La ecuación tiene dos soluciones 1 y 1000 millones. ■

La función $y = 2/(e^x + e^{-x})$ se llama **función secante hiperbólica.** En el siguiente ejemplo despejamos x de esta ecuación en términos de y. Con restricciones apropiadas, esto nos da la función inversa.

EJEMPLO 7 **Hallar una función hiperbólica inversa**

De la ecuación $y = 2/(e^x + e^{-x})$ despeje x en términos de y.

SOLUCIÓN

$$y = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \text{enunciado}$$

$$ye^x + ye^{-x} = 2 \quad \text{multiplique por } e^x + e^{-x}$$

$$ye^x + \frac{y}{e^x} = 2 \quad \text{definición de exponente negativo}$$

$$ye^x(e^x) + \frac{y}{e^x}(e^x) = 2(e^x) \quad \text{multiplique por el mcd, } e^x$$

$$y(e^x)^2 - 2e^x + y = 0 \quad \text{simplifique y reste } 2e^x$$

Reconocemos esta forma de la ecuación como una cuadrática en e^x con coeficientes $a = y$, $b = -2$ y $c = y$. Note que estamos despejando e^x, no x.

$$e^x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(y)(y)}}{2(y)} \quad \text{fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} \quad \text{simplifique}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{1 - y^2}}{2y} \quad \text{factorice } \sqrt{4}$$

$$e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad \text{cancele un factor de 2}$$

$$x = \ln \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad \text{saque ln en ambos lados}$$

Para la curva azul $y = f(x)$ en la figura 2, la función inversa es

$$y = f^{-1}(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x},$$

que se muestra en azul en la figura 3. Note las relaciones de dominio y rango. Para la curva roja $y = g(x)$ en la figura 2, la función inversa es

$$y = g^{-1}(x) = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x},$$

que se muestra en rojo en la figura 3. Como la secante hiperbólica no es biunívoca, no puede tener una ecuación sencilla para su inversa. ■

FIGURA 2

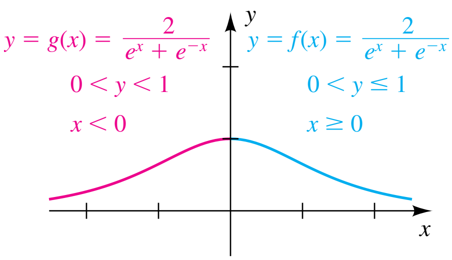
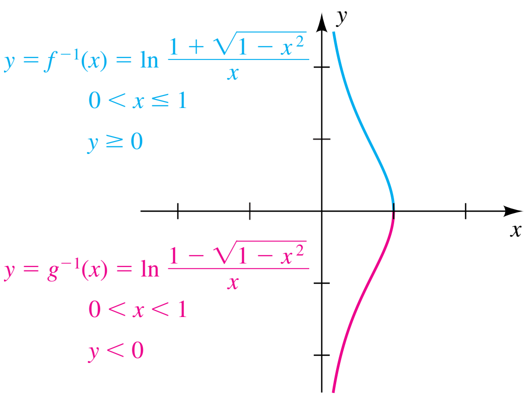


FIGURA 3



La secante hiperbólica inversa es parte de la ecuación de la curva llamada **tractriz.** La curva está asociada con la solución de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) a la pregunta "¿cuál es la trayectoria de un cuerpo arrastrado a lo largo de un plano horizontal con una cuerda de longitud constante, cuando el extremo de la cuerda no unido al cuerpo se mueve a lo largo de una recta en el plano?".

EJEMPLO 8 **Aproximar la penetración de luz en un océano**

La ley de Beer-Lambert expresa que la cantidad de luz I que penetra a una profundidad de x metros en un océano está dada por $I = I_0c^x$, donde $0 < c < 1$ e I_0 es la cantidad de luz en la superficie.

(a) Despeje x en términos de logaritmos comunes.

(b) Si $c = \frac{1}{4}$, aproxime la profundidad a la que $I = 0.01I_0$. (Esto determina la zona fótica donde puede tener lugar la fotosíntesis.)

SOLUCIÓN

(a)

$$I = I_0c^x \quad \text{enunciado}$$

$$\frac{I}{I_0} = c^x \quad \text{aísle la expresión exponencial}$$

$$x = \log_c \frac{I}{I_0} \quad \text{cambie a forma logarítmica}$$

$$= \frac{\log (I/I_0)}{\log c} \quad \text{cambio especial de fórmula de base 1}$$

(b) Haciendo $I = 0.01I_0$ y $c = \frac{1}{4}$ en la fórmula para x obtenida en el inciso (a), tenemos

$$x = \frac{\log (0.01I_0/I_0)}{\log \frac{1}{4}} \quad \text{sustituya } I \text{ y } c$$

$$= \frac{\log (0.01)}{\log 1 - \log 4} \quad \text{cancele } I_0\text{; ley 2 de los logaritmos}$$

$$= \frac{\log 10^{-2}}{0 - \log 4} \quad \text{propiedad de los logaritmos}$$

$$= \frac{-2}{-\log 4} \quad \log 10^x = x$$

$$= \frac{2}{\log 4}. \quad \text{simplifique}$$

Una aproximación es $x \approx 3.32$ m. ■

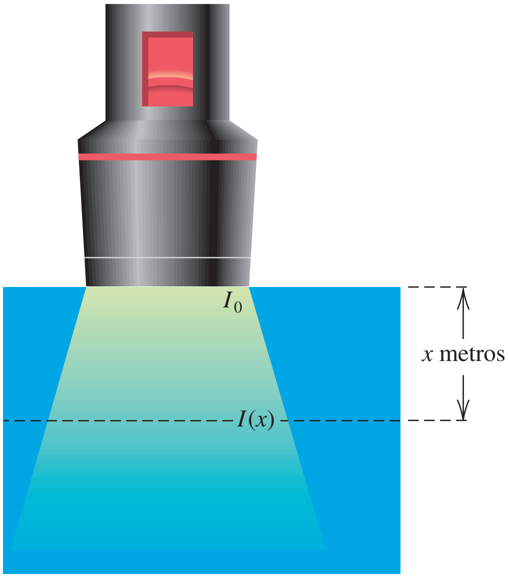
EJEMPLO 9 **Comparar intensidades de luz**

Si un haz de luz que tiene intensidad I_0 se proyecta verticalmente hacia abajo en el agua, entonces su intensidad $I(x)$ a una profundidad de x metros es $I(x) = I_0e^{-1.4x}$ (vea la figura 4). ¿A qué profundidad tendrá la intensidad la mitad de su valor en la superficie?

SOLUCIÓN En la superficie, $x = 0$ y la intensidad es

$$I(0) = I_0e^0$$
$$= I_0.$$

FIGURA 4



Deseamos hallar el valor de x tal que $I(x) = \frac{1}{2}I_0$. Esto lleva a lo siguiente:

$$I(x) = \tfrac{1}{2}I_0 \qquad \text{intensidad deseada}$$

$$I_0e^{-1.4x} = \tfrac{1}{2}I_0 \qquad \text{fórmula para } I(x)$$

$$e^{-1.4x} = \tfrac{1}{2} \qquad \text{divida entre } I_0\ (I_0 \neq 0)$$

$$-1.4x = \ln\tfrac{1}{2} \qquad \text{cambie a forma logarítmica}$$

$$x = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-1.4} \qquad \text{divida entre } -1.4$$

Una aproximación es $x \approx 0.495$ m. ■

EJEMPLO 10 Una curva logística

Una **curva logística** es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}},$$

donde k, b y c son constantes positivas. Estas curvas son útiles para describir una población y que al principio crece rápidamente, pero cuya rapidez de crecimiento disminuye después de que x alcanza cierto valor. En un estudio famoso del crecimiento de protozoarios realizado por Gause, se encontró que una población de *Paramecium caudata* estaba descrita por una ecuación logística con $c = 1.1244$, $k = 105$, y el tiempo x en días.

(a) Encuentre b si la población inicial era de 3 protozoarios.

(b) En el estudio, la máxima rapidez de crecimiento tuvo lugar en $y = 52$. ¿En qué tiempo x ocurrió esto?

(c) Demuestre que después de largo tiempo, la población descrita por cualquier curva logística se aproxima a la constante k.

SOLUCIÓN

(a) Haciendo $c = 1.1244$ y $k = 105$ en la ecuación logística, obtenemos

$$y = \frac{105}{1 + be^{-1.1244x}}.$$

A continuación procedemos como sigue:

$$3 = \frac{105}{1 + be^{0}} = \frac{105}{1 + b} \qquad y = 3 \text{ cuando } x = 0$$

$$1 + b = 35 \qquad \text{multiplique por } \frac{1 + b}{3}$$

$$b = 34 \qquad \text{despeje } b$$

(b) Usando el hecho de que $b = 34$ nos lleva a lo siguiente:

$$52 = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}} \qquad \text{sea } y = 52 \text{ en el inciso (a)}$$

$$1 + 34e^{-1.1244x} = \frac{105}{52} \qquad \text{multiplique por } \frac{1 + 34e^{-1.1244x}}{52}$$

$$e^{-1.1244x} = \left(\frac{105}{52} - 1\right) \cdot \frac{1}{34} = \frac{53}{1768} \qquad \text{aísle } e^{-1.1244x}$$

$$-1.1244x = \ln \frac{53}{1768} \qquad \text{cambie a forma logarítmica}$$

$$x = \frac{\ln \frac{53}{1768}}{-1.1244} \approx 3.12 \text{ días} \qquad \text{divida entre } -1.1244$$

(c) A medida que $x \to \infty$, $e^{-cx} \to 0$. En consecuencia,

$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}} \to \frac{k}{1 + b \cdot 0} = k.$$ ■

En el siguiente ejemplo graficamos la ecuación obtenida en el inciso (a) del ejemplo precedente.

EJEMPLO 11 **Trazar la gráfica de una curva logística**

Grafique la curva logística dada por

$$y = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}},$$

y estime el valor de x para $y = 52$.

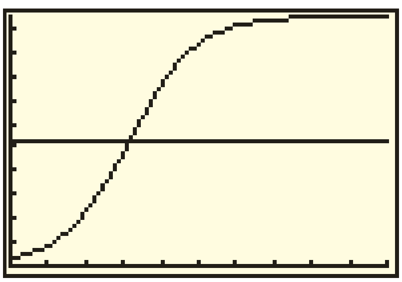
SOLUCIÓN Empezamos por asignar

$$\frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}}$$

a Y_1 y 52 a Y_2. Como el tiempo x es no negativo, escogemos Xmín = 0. Seleccionamos Xmáx = 10 para incluir el valor de x hallado en el inciso (b) del ejemplo 10. Por el inciso (c), sabemos que el valor de y no puede exceder de 105. Entonces, escogemos Ymín = 0 y Ymáx = 105 y obtenemos una pantalla semejante a la figura 5.

Usando una función de intersección, vemos que para $y = 52$, el valor de x es aproximadamente 3.12, que está acorde con la aproximación hallada en el inciso (b) del ejemplo 10. ■

FIGURA 5
[0, 10] por [0, 105, 10]



El siguiente ejemplo muestra cómo puede usarse una fórmula de cambio de base para graficar funciones logarítmicas con bases diferentes de 10 y e en una calculadora de gráficas.

EJEMPLO 12 **Estimar puntos de intersección de gráficas logarítmicas**

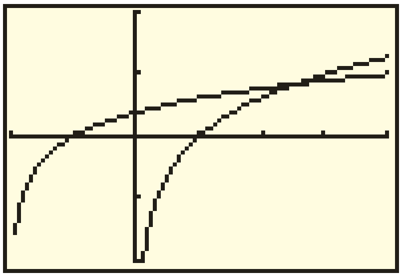
Estime el punto de intersección de las gráficas de

$$f(x) = \log_3 x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \log_6 (x + 2).$$

SOLUCIÓN Casi todas las calculadoras de gráficas están diseñadas para trabajar sólo con funciones logarítmicas comunes y naturales. Por tanto, primero usamos una *fórmula de cambio de base* para reescribir f y g como

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln 3} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{\ln (x + 2)}{\ln 6}.$$

FIGURA 6
$[-2, 4]$ por $[-2, 2]$



A continuación asignamos $(\ln x)/\ln 3$ y $(\ln + 2)/\ln 6$ a Y_1 y Y_2, respectivamente. Después de graficar Y_1 y Y_2 usando una pantalla estándar, vemos que hay un punto de intersección en el primer cuadrante con $2 < x < 3$. Usando una función de intersección, encontramos que el punto de intersección es aproximadamente $(2.52, 0.84)$.

La figura 6 se obtuvo usando dimensiones de pantalla de $[-2, 4]$ por $[-2, 2]$. No hay otros puntos de intersección, porque f aumenta más rápidamente que g para $x > 3$. ■

5.6 Ejercicios

Ejer. 1–4: Encuentre la solución exacta y una aproximación a dos lugares decimales para ella usando (a) el método del ejemplo 1 y (b) el método del ejemplo 2.

1 $5^x = 3$

2 $4^x = 7$

3 $3^{4-x} = 5$

4 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 100$

Ejer. 5–8: Estime utilizando la fórmula de cambio de base.

5 $\log_5 12$

6 $\log_6 5$

7 $\log_9 0.9$

8 $\log_6 \frac{1}{3}$

Ejer. 9–10: Evalúe utilizando la fórmula de cambio de base (sin calculadora).

9 $\dfrac{\log_5 16}{\log_5 4}$

10 $\dfrac{\log_7 243}{\log_7 3}$

Ejer. 11–28: Encuentre la solución exacta usando logaritmos comunes y una aproximación a dos lugares decimales de cada solución, cuando sea apropiado.

11 $2^{-x} = 8$

12 $2^{-x^2} = 5$

13 $3^{-x^2} = 7$

14 $3^{-x} = 81$

15 $3^{x+4} = 2^{1-3x}$

16 $4^{2x+3} = 5^{x-2}$

17 $2^{2x-3} = 5^{x-2}$

18 $3^{2-3x} = 4^{2x+1}$

19 $\log x = 1 - \log (x - 3)$

20 $\log (5x + 1) = 2 + \log (2x - 3)$

21 $\log (x^2 + 4) - \log (x + 2) = 2 + \log (x - 2)$

22 $\log (x + 3) + \log (x - 3) = \log (x^2 + 5) - 2$

23 $\log (x - 1) = \log (2/x) + \log (3x - 5)$

24 $\log (x - 4) - \log (3x - 10) = \log (1/x)$

25 $5^x + 125(5^{-x}) = 30$

26 $3(3^x) + 9(3^{-x}) = 28$

27 $4^x - 3(4^{-x}) = 8$

28 $2^x - 6(2^{-x}) = 6$

Ejer. 29–36: Resuelva la ecuación sin usar calculadora.

29 $\log(x^2) = (\log x)^2$

30 $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

31 $\log(\log x) = 2$

32 $\log \sqrt{x^3 - 9} = 2$

33 $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$

34 $\log(x^3) = (\log x)^3$

35 $e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$

36 $e^x + 4e^{-x} = 5$

Ejer. 37–38: Resuelva la ecuación.

37 $\log_3 x - \log_9(x + 42) = 0$

38 $\log_4 x + \log_8 x = 1$

Ejer. 39–42: Use logaritmos comunes para despejar *x* en términos de *y*.

39 $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{2}$

40 $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{2}$

41 $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$

42 $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}}$

Ejer. 43–46: Use logaritmos naturales para despejar *x* en términos de *y*.

43 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

44 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

45 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

46 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Ejer. 47–48: Trace la gráfica de *f*, y use la fórmula de cambio de base para aproximar el punto de intersección con el eje *y*.

47 $f(x) = \log_2(x + 3)$

48 $f(x) = \log_3(x + 5)$

Ejer. 49–50: Trace la gráfica de *f* y use la fórmula de cambio de base para aproximar el punto de intersección con el eje *x*.

49 $f(x) = 4^x - 3$

50 $f(x) = 3^x - 6$

Ejer. 51–54: Los químicos emplean un número denotado por pH para describir cuantitativamente la acidez o basicidad de soluciones. Por definición, $\text{pH} = -\log[H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro.

51 Aproxime el pH de cada sustancia.

(a) vinagre: $[H^+] \approx 6.3 \times 10^{-3}$

(b) zanahorias: $[H^+] \approx 1.0 \times 10^{-5}$

(c) agua de mar: $[H^+] \approx 5.0 \times 10^{-9}$

52 Aproxime la concentración de ion hidrógeno $[H^+]$ de cada sustancia.

(a) manzanas: $\text{pH} \approx 3.0$

(b) cerveza: $\text{pH} \approx 4.2$

(c) leche: $\text{pH} \approx 6.6$

53 Una solución es considerada como básica si $[H^+] < 10^{-7}$ o ácida si $[H^+] > 10^{-7}$. Encuentre las correspondientes desigualdades que contengan el pH.

54 Muchas soluciones tienen un pH entre 1 y 14. Encuentre el rango correspondiente de $[H^+]$.

55 **Interés compuesto** Use la fórmula del interés compuesto para determinar cuánto tiempo tardará una suma de dinero en duplicarse si se invierte a razón del 6% al año capitalizado mensualmente.

56 **Interés compuesto** De la fórmula de interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

despeje *t* usando logaritmos naturales.

57 **Zona fótica** Consulte el ejemplo 8. La zona más importante en el mar desde el punto de vista de la biología marina es la zona fótica, en la que tiene lugar la fotosíntesis. La zona fótica termina a la profundidad a la que penetra alrededor del 1% de la luz de la superficie. En aguas muy claras en el Caribe, 50% de la luz de superficie alcanza una profundidad de unos 13 metros. Estime la profundidad de la zona fótica.

58 **Zona fótica** En contraste con la situación descrita en el ejercicio previo, en partes del puerto de Nueva York, 50% de la luz de la superficie no llega a una profundidad de 10 centímetros. Estime la profundidad de la zona fótica.

59 **Absorción de medicamentos** Si una pastilla de 100 miligramos de un medicamento para el asma se toma oralmente y si nada de esta droga está presente en el cuerpo cuando se toma primero la pastilla, la cantidad total *A* en el torrente sanguíneo después de *t* minutos se pronostica que es

$$A = 100[1 - (0.9)^t] \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 10.$$

(a) Trace la gráfica de la ecuación.

(b) Determine el número de minutos necesario para que 50 miligramos de la droga haya entrado al torrente sanguíneo.

60 **Dosis de medicamento** Un medicamento es eliminado del cuerpo por la orina. Suponga que para una dosis de 10 miligramos, la cantidad $A(t)$ remanente en el cuerpo *t* horas después está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$ y que para que el medicamento sea eficaz, al menos 2 miligramos deben estar en el cuerpo.

(a) Determine cuándo quedan 2 miligramos en el cuerpo.

(b) ¿Cuál es la vida media del medicamento?

61 **Mutación genética** La fuente básica de diversidad genética es la mutación, o cambio en la estructura química de genes. Si un gen cambia a un ritmo constante m y si otras fuerzas de evolución son insignificantes, entonces la frecuencia F del gen original después de t generaciones está dada por $F = F_0(1 - m)^t$, donde F_0 es la frecuencia en $t = 0$.

(a) De la ecuación despeje t usando logaritmos comunes.

(b) Si $m = 5 \times 10^{-5}$, ¿después de cuántas generaciones F es igual a $\frac{1}{2}F_0$?

62 **Productividad de empleados** Ciertos procesos de aprendizaje se pueden ilustrar con la gráfica de una ecuación de la forma $f(x) = a + b(1 - e^{-cx})$, donde a, b y c son constantes positivas. Suponga que un fabricante estima que un nuevo empleado puede producir cinco piezas el primer día de trabajo. A medida que el empleado adquiera más experiencia, la producción diaria aumenta hasta alcanzar cierta producción máxima. Suponga que en el n día en el trabajo, el número $f(n)$ de piezas producidas se aproxima con

$$f(n) = 3 + 20(1 - e^{-0.1n}).$$

(a) Estime el número de piezas producidas en el quinto día, el noveno día, el día 24 y el día 30.

(b) Trace la gráfica de f de $n = 0$ a $n = 30$. (Las gráficas de este tipo reciben el nombre de *curvas de aprendizaje* y se usan con frecuencia en educación y psicología.)

(c) ¿Qué ocurre cuando n aumenta sin límite?

63 **Altura de árboles** El crecimiento en altura de árboles se describe con frecuencia con una ecuación logística. Suponga que la altura h (en pies) de un árbol de edad t (en años) es

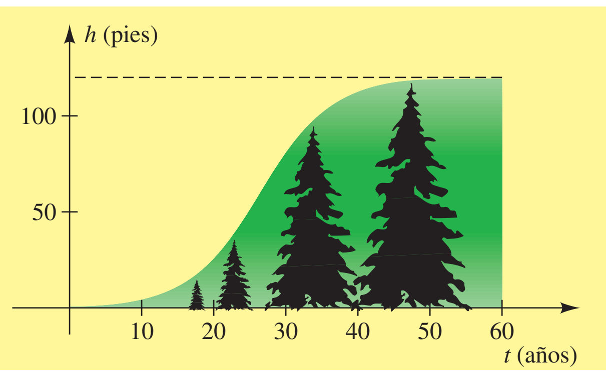
$$h = \frac{120}{1 + 200e^{-0.2t}},$$

como se ilustra en la gráfica de la figura.

(a) ¿Cuál es la altura del árbol a los 10 años de edad?

(b) ¿A qué edad tendrá 50 pies de altura?

EJERCICIO 63



64 **Productividad de empleados** En ocasiones, algunos fabricantes usan fórmulas empíricas para predecir el tiempo necesario para producir el n-ésimo artículo en una línea de ensamble para un entero n-ésimo. Si $T(n)$ denota el tiempo necesario para ensamblar el n artículo y T_1 denota el tiempo necesario para el primer artículo, o prototipo, entonces típicamente $T(n) = T_1 n^{-k}$ para alguna constante positiva k.

(a) Para numerosos aviones, el tiempo necesario para ensamblar el segundo avión, $T(2)$, es igual a $(0.80)T_1$. Encuentre el valor de k.

(b) Exprese, en términos de T_1, el tiempo necesario para ensamblar el cuarto avión.

(c) Exprese, en términos de $T(n)$, el tiempo $T(2n)$ necesario para ensamblar el $(2n)n$-ésimo avión.

65 **Cortante vertical del viento** Consulte los ejercicios 67-68 de la sección 3.3. Si v_0 es la velocidad del viento a una altura h_0 y si v_1 es la velocidad del viento a una altura h_1, entonces la cortante vertical del viento puede ser descrita por la ecuación

$$\frac{v_0}{v_1} = \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^P,$$

donde P es una constante. Durante un periodo de un año en Montreal, la máxima cortante vertical del viento ocurrió cuando los vientos al nivel de 200 pies eran de 25 mi/h mientras que los vientos al nivel de 35 pies eran de 6 mi/h. Encuentre P para estas condiciones.

66 **Cortante vertical del viento** Consulte el ejercicio 65. El promedio de cortante vertical del viento está dado por la ecuación

$$s = \frac{v_1 - v_0}{h_1 - h_0}.$$

Suponga que la velocidad del viento aumenta al incrementarse la altitud y que todos los valores para velocidades del viento, tomadas a altitudes de 35 pies y 200 pies, son mayores a 1 mi/h. ¿El valor creciente de P produce valores de s mayores o menores?

Ejer. 67-68: Un economista sospecha que los siguientes puntos de datos se encuentran sobre la gráfica de $y = c2^{kx}$, donde c y k son constantes. Si los puntos de datos tienen una precisión de tres lugares decimales, ¿es correcta esta sospecha?

67 (0, 4), (1, 3.249), (2, 2.639), (3, 2.144)

68 (0, −0.3), (0.5, −0.345), (1, −0.397), (2, −0.727)

Ejer. 69-70: Se sospecha que los siguientes puntos de datos se encuentran sobre la gráfica de $y = c \log(kx + 10)$, donde c y k son constantes. Si los puntos de datos tienen una precisión de tres lugares decimales, ¿es correcta esta sospecha?

69 (0, 1.5), (1, 1.619), (2, 1.720), (3, 1.997)

70 (0, 0.7), (1, 0.782), (2, 0.847), (4, 0.945)

Ejer. 71–72: Aproxime la función en el valor de x a cuatro lugares decimales.

71 $h(x) = \log_4 x - 2\log_8 1.2x;$ $\quad x = 5.3$

72 $h(x) = 3\log_3(2x - 1) + 7\log_2(x + 0.2);$ $\quad x = 52.6$

Ejer. 73–74: Use una gráfica para estimar las raíces de la ecuación en el intervalo dado.

73 $x - \ln(0.3x) - 3\log_3 x = 0;$ $\quad (0, 9)$

74 $2\log 2x - \log_3 x^2 = 0;$ $\quad (0, 3)$

Ejer. 75–76: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas y estime la solución de la ecuación $f(x) = g(x)$.

75 $f(x) = x;$ $\quad g(x) = 3\log_2 x$

76 $f(x) = x;$ $\quad g(x) = -x^2 - \log_5 x$

Ejer. 77–78: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas y estime la solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$.

77 $f(x) = 3^{-x} - 4^{0.2x};$ $\quad g(x) = \ln(1.2) - x$

78 $f(x) = 3\log_4 x - \log x;$ $\quad g(x) = e^x - 0.25x^4$

79 **Memoria humana** A un grupo de estudiantes de escuela elemental se les enseñó la división larga en una semana. Después, se les aplicó un examen. El promedio de calificación fue de 85. Cada semana de ahí en adelante se les aplicó un examen equivalente sin ningún repaso. Represente con $n(t)$ el promedio de calificación después de $t \geq 0$ semanas. Grafique cada $n(t)$ y determine cuál función modela mejor la situación.

(1) $n(t) = 85e^{t/3}$

(2) $n(t) = 70 + 10\ln(t + 1)$

(3) $n(t) = 86 - e^t$

(4) $n(t) = 85 - 15\ln(t + 1)$

80 **Enfriamiento** Un frasco con agua hirviendo a 212°F se coloca sobre una mesa en un cuarto con temperatura de 72°F. Si $T(t)$ representa la temperatura del agua después de t horas, grafique $T(t)$ y determine cuál función modela mejor la situación.

(1) $T(t) = 212 - 50t$

(2) $T(t) = 140e^{-t} + 72$

(3) $T(t) = 212e^{-t}$

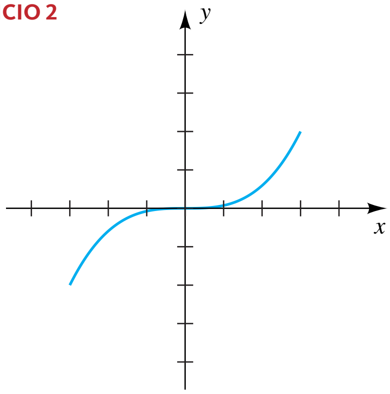
(4) $T(t) = 72 + 10\ln(140t + 1)$

CAPÍTULO 5 EJERCICIOS DE REPASO

1 ¿La función $f(x) = 2x^3 - 5$ es biunívoca?

2 La gráfica de una función f con dominio $[-3, 3]$ se muestra en la figura. Trace la gráfica de $y = f^{-1}(x)$.

EJERCICIO 2



Ejer. 3–4: (a) Encuentre $f^{-1}(x)$. (b) Trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano de coordenadas.

3 $f(x) = 10 - 15x$ $\quad$ 4 $f(x) = 9 - 2x^2, x \leq 0$

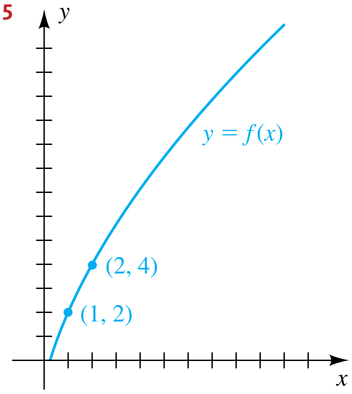
5 Consulte la figura para determinar cada una de las siguientes:

(a) $f(1)$ $\quad$ **(b)** $(f \circ f)(1)$ $\quad$ **(c)** $f^{-1}(4)$

(d) toda x tal que $f(x) = 4$

(e) toda x tal que $f(x) > 4$

EJERCICIO 5



6 Suponga que f y g son funciones biunívocas tales que $f(2) = 7$, $f(4) = 2$ y $g(2) = 5$. Encuentre el valor, si es posible.

(a) $(g \circ f^{-1})(7)$ $\quad$ **(b)** $(f \circ g^{-1})(5)$

(c) $(f^{-1} \circ g^{-1})(5)$ $\quad$ **(d)** $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$

Ejer. 7–24: Trace la gráfica de f.

7 $f(x) = 3^{x+2}$ $\quad$ 8 $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

9 $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$

10 $f(x) = 3^{-2x}$

11 $f(x) = 3^{-x^2}$

12 $f(x) = 1 - 3^{-x}$

13 $f(x) = e^{x/2}$

14 $f(x) = \frac{1}{2}e^{x}$

15 $f(x) = e^{x-2}$

16 $f(x) = e^{2-x}$

17 $f(x) = \log_6 x$

18 $f(x) = \log_6 (36x)$

19 $f(x) = \log_4 (x^2)$

20 $f(x) = \log_4 \sqrt[3]{x}$

21 $f(x) = \log_2 (x + 4)$

22 $f(x) = \log_2 (4 - x)$

23 $f(x) = -3 \log x$

24 $f(x) = \ln x - 1$

Ejer. 25–26: Evalúe sin usar calculadora.

25 (a) $\log_2 \frac{1}{16}$ (b) $\log_\pi 1$ (c) $\ln e$

(d) $6^{\log_6 4}$ (e) $\log 1{,}000{,}000$ (f) $10^{3 \log 2}$

(g) $\log_4 2$

26 (a) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ (b) $\log_5 1$ (c) $\log 10$

(d) $e^{\ln 5}$ (e) $\log \log 10^{10}$ (f) $e^{2 \ln 5}$

(g) $\log_{27} 3$

Ejer. 27–46: Resuelva la ecuación sin usar calculadora.

27 $2^{3x-1} = \frac{1}{2}$

28 $8^{2x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 4^{-x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$

29 $\log \sqrt{x} = \log (x - 6)$

30 $\log_8 (x + 6) = \frac{2}{3}$

31 $\log_4 (x + 1) = 2 + \log_4 (3x - 2)$

32 $2 \ln (x + 3) - \ln (x + 1) = 3 \ln 2$

33 $\ln (x + 2) = \ln e^{\ln 2} - \ln x$

34 $\log \sqrt[4]{x - 3} = \frac{1}{2}$

35 $2^{5-x} = 6$

36 $3^{(x^2)} = 7$

37 $2^{5x+3} = 3^{2x+1}$

38 $\log_3 (3x) = \log_3 x + \log_3 (4 - x)$

39 $\log_4 x = \sqrt[3]{\log_4 x}$

40 $e^{x+\ln 4} = 3e^{x}$

41 $10^{2 \log x} = 5$

42 $e^{\ln (x+1)} = 3$

43 $x^2(-2xe^{-x^2}) + 2xe^{-x^2} = 0$

44 $e^{x} + 2 = 8e^{-x}$

45 (a) $\log x^2 = \log (6 - x)$ (b) $2 \log x = \log (6 - x)$

46 (a) $\ln (e^{x})^2 = 16$ (b) $\ln e^{(x^2)} = 16$

47 Exprese $\log x^4 \sqrt[3]{y^2/z}$ en términos de logaritmos de x, y y z.

48 Exprese $\log (x^2/y^3) + 4 \log y - 6 \log \sqrt{xy}$ como un logaritmo.

49 Encuentre una función exponencial que tiene 6 como punto de intersección con el eje y y pasa por el punto $(1, 8)$.

50 Trace la gráfica de $f(x) = \log_3 (x + 2)$.

Ejer. 51–52: Use logaritmos comunes para despejar x de la ecuación en términos de *y*.

51 $y = \dfrac{1}{10^{x} + 10^{-x}}$

52 $y = \dfrac{1}{10^{x} - 10^{-x}}$

Ejer. 53–54: Aproxime *x* a tres cifras significativas.

53 (a) $x = \ln 6.6$ (b) $\log x = 1.8938$

(c) $\ln x = -0.75$ (d) $x = \log 52$

54 (a) $x = \log 8.4$ (b) $\log x = -2.4260$

(c) $\ln x = 1.8$ (d) $x = \ln 0.8$

Ejer. 55–56: (a) Encuentre el dominio y rango de la función. (b) Encuentre la inversa de la función y su dominio y rango.

55 $y = \log_2 (x + 1)$

56 $y = 2^{3-x} - 2$

57 **Crecimiento de bacterias** El número de bacterias en cierto cultivo en el tiempo t (en horas) está dado por $Q(t) = 2(3^{t})$, donde $Q(t)$ se mide en miles.

(a) ¿Cuál es el número de bacterias en $t = 0$?

(b) Encuentre el número de bacterias después de 10 minutos, 30 minutos y 1 hora.

58 **Interés compuesto** Si \$1000 se invierten a razón de 8% al año capitalizado cada tres meses, ¿cuál es el capital después de un año?

59 **Decaimento de yodo radiactivo** El yodo radiactivo ^{131}I, que se usa con frecuencia en estudios de rastreo de la glándula tiroides, se desintegra según $N = N_0(0.5)^{t/8}$, donde N_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días.

(a) Trace la gráfica de la ecuación si $N_0 = 64$.

(b) Encuentre la vida media del ^{131}I.

60 **Población de truchas** Un estanque es abastecido con 1000 truchas; tres meses después, se estima que quedan 600. Encuentre una fórmula de la forma $N = N_0a^{ct}$ que se pueda usar para estimar el número de truchas restantes después de t meses.

61 **Interés capitalizado continuamente** Diez mil dólares se invierten en un fondo de ahorros en el que el interés se capitaliza continuamente a razón de 4.75% al año.

(a) ¿Cuándo contendrá la cuenta \$25,000?

(b) ¿Cuánto tiempo tarda el dinero en duplicarse en la cuenta?

62 **Testamento de Ben Franklin** En 1790, Ben Franklin dejó \$4000 con instrucciones de que pasaran a la ciudad de Filadelfia en 200 años. Equivalían a unos \$2 millones de dólares en ese tiempo. Aproxime la tasa de interés anual para el crecimiento.

63 **Corriente eléctrica** La corriente $I(t)$ en cierto circuito eléctrico en el tiempo t está dada por $I(t) = I_0e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia, L es la inductancia e I_0 es la corriente inicial en $t = 0$. Encuentre el valor de t, en términos de L y R, para el cual $I(t)$ es 1% de I_0.

64 **Intensidad del sonido** La fórmula del nivel de intensidad del sonido es $\alpha = 10 \log (I/I_0)$.

(a) Despeje I en términos de α y de I_0.

(b) Demuestre que un aumento de un decibel en el nivel de intensidad α corresponde a 26% de aumento en la intensidad I.

65 **Crecimiento de peces** La longitud L de un pez está relacionada con su edad por medio de la fórmula de crecimiento de von Bertalanffy

$$L = a(1 - be^{-kt}),$$

donde a, b y k son constantes positivas que dependen del tipo de pez. De esta ecuación despeje t para obtener una fórmula que se pueda usar para estimar la edad de un pez a partir de una medición de longitud.

66 **Área de terremotos en el oeste** En la región oeste de Estados Unidos, el área A (en mi^2) afectada por un terremoto está relacionada con la magnitud R del terremoto mediante la fórmula

$$R = 2.3 \log (A + 3000) - 5.1.$$

Despeje A en términos de R.

67 **Área de terremotos en el este** Consulte el ejercicio 66. Para el este de Estados Unidos, la fórmula de área-magnitud tiene la forma

$$R = 2.3 \log (A + 34{,}000) - 7.5.$$

Si A_1 es el área afectada por un terremoto de magnitud R en el oeste y A_2 es el área afectada por un terremoto similar en el este, encuentre una fórmula para A_1/A_2 en términos de R.

68 **Área de terremotos en los estados del centro** Consulte el ejercicio 64. Para los estados de las Rocallosas y del centro, la fórmula de área-magnitud tiene la forma

$$R = 2.3 \log (A + 14{,}000) - 6.6.$$

Si el terremoto tiene una magnitud 4 en la escala de Richter, estime el área A de la región que sentirá el terremoto.

69 **Presión atmosférica** En ciertas condiciones, la presión atmosférica p a una altitud h está dada por la fórmula $p = 29e^{-0.000034h}$. Exprese h como función de p.

70 **Velocidad de un cohete** Un cohete de masa m_1 se llena de combustible de masa inicial m_2. Si se desprecian las fuerzas de fricción, la masa total m del cohete en el tiempo t después de la ignición está relacionada con su velocidad v hacia arriba por $v = -a \ln m + b$, donde a y b son constantes. En el tiempo de ignición $t = 0$, $v = 0$ y $m = m_1 + m_2$. Al agotarse el combustible, $m = m_1$. Use esta información para hallar una fórmula, en términos de un logaritmo, para la velocidad del cohete al agotársele el combustible.

71 **Frecuencia de terremotos** Sea n el número promedio de temblores por año que tienen magnitudes entre R y $R + 1$ en la escala de Richter. Una fórmula que aproxima la relación entre n y R es

$$\log n = 7.7 - (0.9)R.$$

(a) Despeje n de la ecuación en términos de R.

(b) Encuentre n si $R = 4$, 5 y 6.

72 **Energía de un terremoto** La energía E (en ergios) liberada durante un terremoto de magnitud R se puede aproximar con la fórmula

$$\log E = 11.4 + (1.5)R.$$

(a) Despeje E en términos de R.

(b) Encuentre la energía liberada durante el terremoto ocurrido frente a las costas de Sumatra en 2004, que midió 9.0 en la escala de Richter.

73 **Decaimiento radiactivo** Cierta sustancia radiactiva se desintegra según la fórmula $q(t) = q_0e^{-0.0063t}$, donde q_0 es la cantidad inicial de la sustancia y t es el tiempo en días. Aproxime la vida media de la sustancia.

74 **Crecimiento de niños** El modelo de cuenta es una fórmula que se puede usar para predecir la estatura de niños en edad preescolar. Si h es la estatura (en centímetros) y t es la edad (en años), entonces

$$h = 70.228 + 5.104t + 9.222 \ln t$$

para $\frac{1}{4} \leq t \leq 6$. Del cálculo, la rapidez de crecimiento R (en cm/año) está dada por $R = 5.104 + (9.222/t)$. Prediga la estatura y rapidez de crecimiento de un niño típico de dos años.

75 **Circuito eléctrico** La corriente I en cierto circuito eléctrico en el tiempo t está dada por

$$I = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

donde V es la fuerza electromotriz, R es la resistencia y L es la inductancia. De la ecuación despeje t.

76 **Datación del carbono 14** La técnica de datación del carbono 14 (^{14}C) se utiliza para determinar la edad de especímenes arqueológicos y geológicos. La fórmula $T = -8310 \ln x$ se usa a veces para pronosticar la edad T (en años) de un hueso fósil, donde x es el porcentaje (expresado como decimal) de ^{14}C todavía presente en el fósil.

(a) Estime la edad de un hueso fósil que contiene 4% del ^{14}C hallado en una cantidad igual de carbono en un hueso de nuestros días.

(b) Aproxime el porcentaje de ^{14}C presente en un fósil que tiene 10,000 años.

77 **Población en Kenia** Con base en tasas actuales de nacimientos y muertes, se espera que la población de Kenia aumente de acuerdo con la fórmula $N = 30.7e^{0.022t}$, con N en millones y $t = 0$ correspondiente a 2000. ¿Cuántos años tardará la población en duplicarse?

78 **Historia de un lenguaje** Consulte el ejercicio 48 de la sección 5.2. Si un lenguaje originalmente tenía N_0 palabras básicas, de las cuales $N(t)$ todavía están en uso, entonces $N(t) = N_0(0.805)^t$, donde el tiempo t se mide en milenios. ¿Después de cuántos años todavía está en uso la mitad de las palabras básicas?

CAPÍTULO 5 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 **(a)** Trace la gráfica de $f(x) = -(x - 1)^3 + 1$ junto con la gráfica de $y = f^{-1}(x)$.

(b) Analice qué le ocurre a la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ (en general) cuando la gráfica de $y = f(x)$ es creciente o decreciente.

(c) ¿Qué se puede concluir acerca de los puntos de intersección de las gráficas de una función y su inversa?

2 Grafique $y = (-3)^x$ en $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$. Trace la gráfica para $x = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1$. Discuta la forma en la que la gráfica se relaciona con las gráficas de $y = 3^x$ y $y = -3^x$. También explique cómo es que estos resultados se relacionan con la restricción $a > 0$ para funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$.

3 **Catenaria** Consulte el estudio sobre catenarias de la página 323 y la figura 4 de la sección 5.3.

(a) Describa la gráfica de la ecuación exhibida para valores crecientes de a.

(b) Encuentre una ecuación del cable en la figura, de manera que el punto más bajo del cable esté a 30 pies del suelo y la diferencia entre el punto más alto del cable (donde está conectado a la torre) y el punto más bajo sea menos de 2 pies, siempre que las torres están a 40 pies entre sí.

4 Consulte el ejercicio 76 de la sección 5.4. Explique cómo resolver este ejercicio *sin* usar la fórmula para la cantidad total T. Prosiga con su solución y compare su respuesta con la que obtuvo usando la fórmula para T.

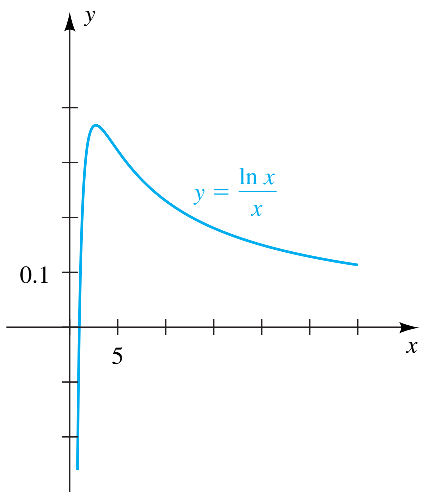
5 En la figura se ilustra una gráfica de $f(x) = (\ln x)/x$ para $x > 0$. El valor máximo de $f(x)$ se presenta en $x = e$.

(a) Los enteros 2 y 4 tienen la poco común propiedad de que $2^4 = 4^2$. Demuestre que si $x^y = y^x$ para los números reales positivos x y y, entonces $(\ln x)/x = (\ln y)/y$.

(b) Use la gráfica de f (una tabla es útil) para hallar otro par de números reales x y y (a dos lugares decimales) tales que $x^y \approx y^x$.

(c) Explique por qué muchos pares de números reales satisfacen la ecuación $x^y = y^x$.

EJERCICIO 5



6 **(a)** Compare los resultados del ejercicio 59 de la sección 5.2 y el ejercicio 43 de la sección 5.3. Explique la diferencia entre las dos funciones.

(b) Ahora supongamos que el lector invierte dinero al 8.5% por año capitalizado mensualmente. ¿Cómo se compara una gráfica de este crecimiento con las dos gráficas del inciso (a)?

(c) Usando la función descrita en el inciso (b), mentalmente estime las respuestas a los incisos (a) y (b) del ejercicio 43 de la sección 5.3 y explique por qué piensa que son correctas antes de calcularlas realmente.

7 Como $y = \log_3 (x^2)$ es equivalente a $y = 2 \log_3 x$ por la ley 3 de los logaritmos, ¿por qué no son iguales las gráficas de la figura 4(a) y (b) de la sección 5.5?

8 **Saldo no pagado sobre una hipoteca** Cuando las instituciones de préstamos prestan dinero, esperan recibir un rendimiento equivalente a la cantidad dada por la fórmula de interés compuesto. El prestatario acumula dinero "con-

tra" la cantidad original al hacer un pago mensual M que acumula según la fórmula

$$\frac{12M[(1 + r/12)^{12t} - 1]}{r},$$

donde r es la tasa de interés anual y t es el número de años del préstamo.

(a) Invente una fórmula para el saldo no pagado U de un préstamo.

(b) Grafique el saldo no pagado para el préstamo de hipoteca de vivienda del ejercicio 53(a) de la sección 5.2.

(c) ¿Cuál es el saldo no pagado después de 10 años? Estime el número de años que tardará en pagar la mitad del préstamo.

(d) Explique las condiciones que su gráfica debe satisfacer para ser correcta.

(e) Explique la validez de sus resultados obtenidos a partir de la gráfica.

9 Explique *cuántas veces* las gráficas de

$$y = 0.01(1.001)^x \qquad \text{y} \qquad y = x^3 - 99x^2 - 100x$$

se cruzan. Aproxime los puntos de intersección. En general, compare el crecimiento de funciones polinomiales y funciones exponenciales.

10 Explique *cuántas veces* las gráficas de

$$y = x \qquad \text{y} \qquad y = (\ln x)^4$$

se cruzan. Aproxime los puntos de intersección. ¿Qué se puede concluir acerca del crecimiento de $y = x$ y $y = (\ln x)^n$, donde n es un entero positivo, cuando x aumenta sin límite?

11 Aumentos de salario Supongamos que el lector empezó en un trabajo que paga \$40,000 por año. En 5 años, está programado para ganar \$60,000 por año. Determine la rapidez exponencial anual de aumento que describa esta situación. Suponga que la misma tasa exponencial de aumento continuará durante 40 años. Usando la regla del 70 (página 336), estime mentalmente su salario anual en 40 años y compare la estimación con un cálculo real.

12 Liberación de energía Considere estos tres eventos:

(1) El 18 de mayo de 1980, la erupción volcánica del monte St. Helens en Washington liberó aproximadamente 1.7×10^{18} joules de energía.

(2) Cuando detona una bomba nuclear de 1 megatón, libera alrededor de 4×10^{15} joules de energía.

(3) El terremoto de 1989 de San Francisco registró 7.1 en la escala de Richter.

(a) Haga comparaciones (es decir, ¿cuántas veces un evento es equivalente a otro) en términos de energía liberada. (*Sugerencia:* Consulte el ejercicio 72 en los ejercicios de análisis del capítulo 5 .) *Nota:* las bombas atómicas arrojadas en la Segunda Guerra Mundial fueron de 1 kilotón (1000 bombas de 1 kilotón = 1 bomba de 1 megatón).

(b) ¿Qué lectura en la escala de Richter sería equivalente a la erupción del monte St. Helens? ¿Ha habido alguna lectura tan alta?

13 Promedio Dow-Jones El promedio industrial Dow-Jones es un índice de 30 de las mayores empresas de Estados Unidos y es la medida más común de rendimiento de acciones en Estados Unidos. La tabla siguiente contiene unas fechas de hitos de 1000 puntos para el Dow.

Promedio Dow-Jones	Primer día que se alcanzó	Número de días desde el hito previo
1003.16	14/11/72	—
2002.25	8/1/87	5168
3004.46	17/4/91	1560
4003.33	23/2/95	1408
5023.55	21/11/95	271
6010.00	14/10/96	328
7022.44	13/2/97	122
8038.88	16/7/97	153
9033.23	6/4/98	264
10,006.78	29/3/99	357
11,014.69	3/5/99	35
12,011.73	20/10/06	2727
13,089.89	25/4/07	187
14,000.41	19/7/07	85

Encuentre el modelo exponencial para estos datos y úselo para predecir cuándo el Dow alcanzará 20,000. Encuentre la tasa anual promedio de rendimiento de acuerdo con el Dow. Explique algunas de las consideraciones prácticas relacionadas con estos cálculos.

14 Promedio Nasdaq El índice compuesto del mercado de acciones de Nasdaq experimentó un periodo de fenomenal crecimiento (que se ve en las últimas líneas de la tabla).

Promedio Nasdaq	Primer día que se alcanzó	Número de días desde el hito previo
100 (origen)	5/2/71	—
200.25	13/11/80	3569
501.62	12/4/91	3802
1005.89	17/7/95	1557
2000.56	16/7/98	1095
3028.51	3/11/99	475
4041.46	29/12/99	56
5046.86	9/3/00	71

El índice motivado por tecnología es considerado por muchos como el indicador de crecimiento más rápido en todo el mercado de acciones de Estados Unidos.

Encuentre un modelo de regresión exponencial para los datos. Explique el ajuste del modelo a los datos y posibles razones para la calidad del ajuste.

15 **Población total mundial** La Oficina del Censo de Estados Unidos dio las siguientes estimaciones y predicciones para la población total del mundo.

Año	Población
1950	2,556,518,868
1960	3,040,617,514
1970	3,707,921,742
1980	4,447,068,714
1990	5,274,320,491
2000	6,073,265,234
2010	6,838,220,183
2020	7,608,075,253
2030	8,295,925,812
2040	8,897,180,403
2050	9,404,296,384

(a) Sea $t = 0$ correspondiente a 1950 y trace los datos en la pantalla $[-10, 110, 10]$ por $[0, 10^{10}, 10^9]$.

(b) Explique si un modelo exponencial o logístico es más apropiado y por qué.

(c) Encuentre un modelo del tipo seleccionado en el inciso (b) y grafíquelo con los datos.

(d) De acuerdo con el modelo, ¿a qué se aproxima la población después de un largo periodo?

16 Explique cuántas soluciones tiene la ecuación

$$\log_5 x + \log_7 x = 11$$

Resuelva la ecuación usando la fórmula de cambio de base.

17 Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{9x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ e identifique cualesquiera asíntotas de la gráfica de f^{-1}. ¿Cómo se relacionan con las asíntotas de la gráfica de f?

CAPÍTULO 5 EXAMEN DE CAPÍTULO

1 Para $f(x) = \dfrac{x-4}{x+2}$, encuentre $f^{-1}(x)$, su dominio y rango.

2 Para $f(x) = 7 - x^2$, $x \leq 0$, encuentre $f^{-1}(x)$, su dominio y rango.

3 Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 3$, encuentre $(f \circ g^{-1})(5)$.

4 Encuentre las intersecciones con x y y para $f(x) = -\left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + \frac{4}{9}$.

5 Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x} + c$ que tiene asíntota horizontal $y = 70$ e intersección con el eje y en 350 y que pasa por el punto (3, 105).

6 La vida media de una sustancia radioactiva es de 300 años. Si la cantidad inicial es q_0 miligramos, entonces la cantidad $q(t)$ restante después de t años está dada por $q(t) = q_0 2^{kt}$. Encuentre k.

7 **(a)** Encuentre el pago mensual en un préstamo de \$270,000 a 30 años si la tasa de interés es 7%.

(b) Encuentre el interés total pagado en el préstamo del inciso (a). Use $M = \dfrac{Lrk}{12(k-1)}$, donde $k = [1 + (r/12)]^{12t}$, M es el pago mensual, L es el monto del préstamo, r es la tasa de interés y t es el número de años efectivos del préstamo.

8 Un artículo que costó \$2 hace treinta años ahora cuesta \$10. Encuentre una función exponencial sencilla de la forma $y = ab^t$ que modele el costo del artículo.(Aproxime el valor de b.)

9 En 1980 una población era de 100,000. Suponiendo que la población se incrementa de manera continua a una tasa de 4% anual, haga una predicción de la población para el año 2020.

10 ¿Qué cantidad de dinero, invertido a una tasa de interés de 4% anual compuesto continuamente, debe generar \$100,000 después de 10 años?

11 Un material radioactivo decae continuamente a una tasa de 3.75% por hora. Aproxime el porcentaje restante de cualquier cantidad de material inicial después de 20 horas.

12 Resuelva $\log_2(5x + 1) = 4$ para x.

13 ¿Para qué valores de x, $e^{\ln(2x-3)} = 2x - 3$ es una afirmación verdadera?

14 Resuelva $C = Da^{t/E} - F$ para t, utilizando logaritmos de base a.

15 Suponga que el nivel de radiactividad de un material en un campo el nivel de seguridad S es 4 veces y decae de acuerdo con la fórmula $A(t) = A_0 e^{-0.03t}$, donde A_0 es la cantidad actual en el campo y t es el tiempo en años. ¿Durante cuántos años estará contaminado el campo?

16 Resuelva $\log_4(6 - x) + \log_4(-x) = 2$ para x.

17 Resuelva $\log(x + 3) = 1 - \log(x - 5)$ para x.

18 Una población disminuye de acuerdo con la fórmula $y = y_0 e^{-0.015t}$, donde t es el tiempo en años y y_0 es la población actual. ¿Cuántos años tomará perder el 30% de la población?

19 Resuelva $(e^x + 3)(e^x - 2)(4x - 3) = 0$ para x.

20 Si $f(x) = \log x$, resuelva $(f \circ f \circ f)(x) = 0$ para x.

21 Utilice la fórmula de cambio de base para aproximar la intersección con el eje x de $f(x) = 2^x - 5$ a cuatro lugares decimales.

22 ¿Aproximadamente cuanto tiempo le tomará a una cantidad de dinero triplicarse si se invierte a una tasa de 5% anual compuesta trimestralmente?

6

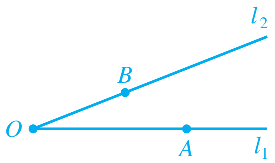
Las funciones trigonométricas

Hace más de 2000 años que la trigonometría fue inventada por los griegos, quienes necesitaban métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos. De hecho, la palabra *trigonometría* se derivó de dos palabras griegas *trigonon* (triángulo) y *metria* (medición). Este capítulo inicia con una exposición de los ángulos y cómo se miden, a continuación introducimos las funciones trigonométricas mediante el uso de razones entre lados de un triángulo rectángulo. Después de extender los dominios de las funciones trigonométricas a ángulos arbitrarios y números reales, consideramos sus gráficas y las técnicas de graficar que hacen uso de amplitudes, periodos y desplazamientos de fase. El capítulo concluye con una sección sobre problemas de aplicación.

6.1 Ángulos

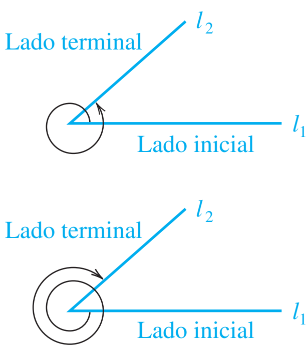
En geometría, un **ángulo** se define como el conjunto de puntos determinados por dos rayos, o semirrectas, l_1 y l_2, que tienen el mismo punto extremo O. Si A y B son puntos en l_1 y l_2, como en la figura 1, nos referimos al **ángulo *AOB*** (denotado $\angle AOB$). Un ángulo puede también ser considerado como dos segmentos de recta finitos con un punto extremo común.

FIGURA 1



En trigonometría con frecuencia interpretamos a los ángulos como rotaciones de rayos. Empezamos con un rayo fijo l_1, que tiene punto extremo O, y lo giramos alrededor de O, en un plano, a una posición especificada por el rayo l_2. Llamamos a l_1 el **lado inicial**, l_2 es el **lado terminal** y O es el **vértice** de $\angle AOB$. La cantidad o dirección de rotación no está restringida en ninguna forma. Podríamos considerar que l_1 hace varias revoluciones en cualquier dirección alrededor de O antes de llegar a la posición l_2, como lo ilustran las flechas curvas de la figura 2. Así, muchos ángulos diferentes tienen los mismos lados iniciales y terminales. Dos de estos ángulos cualesquiera reciben el nombre de **ángulos coterminales**. Un **ángulo llano** es un ángulo cuyos lados se encuentran sobre la misma recta pero se extienden en direcciones opuestas desde su vértice.

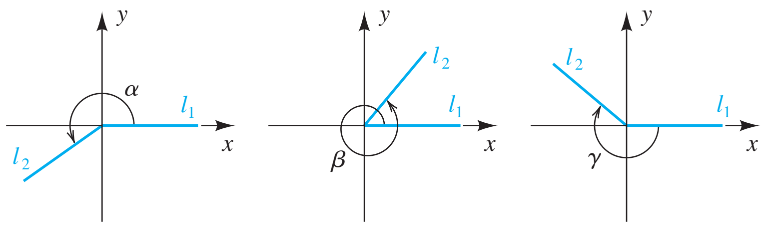
FIGURA 2
Ángulos coterminales



Si introducimos un sistema de coordenadas rectangulares, entonces la **posición estándar** de un ángulo se obtiene al colocar el vértice en el origen y hacer que el lado inicial coincida con el eje x positivo. Si l_1 se hace girar en dirección *contraria al giro de las manecillas de un reloj* hasta la posición terminal l_2, el ángulo se considera **positivo.** Si l_1 se hace girar en dirección *de las manecillas,* el ángulo es **negativo.** Los ángulos se denotan por lo común con letras griegas minúsculas como α (*alfa*), β (*beta*), γ (*gamma*), θ (*teta*), ϕ (*fi*) y así sucesivamente. La figura 3 contiene trazos de dos ángulos positivos, α y β, y un ángulo negativo, γ. Si el lado terminal de un ángulo en posición estándar está en cierto cuadrante, se dice que el *ángulo* se halla en ese cuadrante. En la figura 3, α está en el tercer cuadrante, β en el primero y γ en el segundo. Un ángulo se llama **ángulo cuadrantal** si su lado terminal está en un eje coordenado.

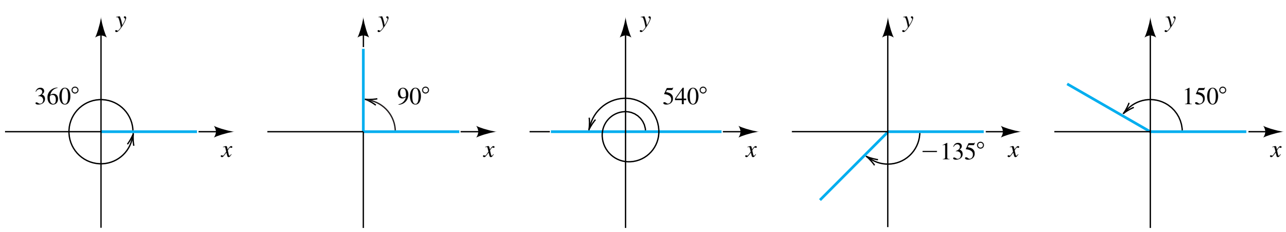
FIGURA 3 Posición estándar de un ángulo

Ángulo positivo   Ángulo positivo   Ángulo negativo



Una unidad de medida para los ángulos es el **grado.** El ángulo en posición estándar obtenido por una revolución completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj mide 360 grados, que se escribe 360°; por tanto, un ángulo de un grado (1°) se obtiene por $\frac{1}{360}$ de toda una revolución en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En la figura 4 se muestran varios ángulos medidos en grados en posición estándar sobre sistemas de coordenadas rectangulares. Note que los tres primeros son ángulos cuadrantales.

FIGURA 4



En nuestro trabajo, una notación como $\theta = 60°$ especifica un ángulo θ cuya medida es 60°. También nos referimos a *un ángulo de 60°*, en lugar de usar la frase más precisa (pero más engorrosa) de *un ángulo que mide* 60°.

EJEMPLO 1 **Hallar ángulos coterminales**

Si $\theta = 60°$ está en posición estándar, encuentre dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con θ.

SOLUCIÓN El ángulo θ se muestra en posición estándar en el primer trazo de la figura 5. Para hallar ángulos coterminales positivos se pueden sumar 360° o 720° (o cualquier múltiplo positivo de 360°) a θ, con lo que se obtiene

$$60° + 360° = 420° \qquad \text{y} \qquad 60° + 720° = 780°.$$

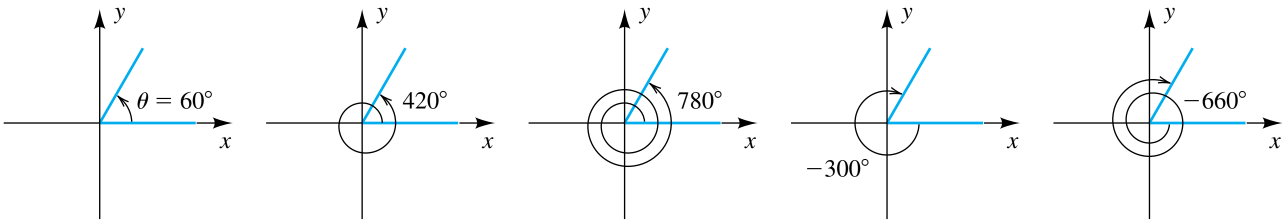
Estos ángulos coterminales también se muestran en la figura 5.

Para hallar ángulos coterminales negativos, se pueden sumar $-360°$ o $-720°$ (o cualquier múltiplo negativo de 360°), con lo que se obtiene

$$60° + (-360°) = -300° \qquad \text{y} \qquad 60° + (-720°) = -660°,$$

como se ve en los últimos dos trazos de la figura 5.

FIGURA 5



■

Un **ángulo recto** es la mitad de un ángulo llano y mide 90°. La siguiente tabla contiene definiciones de otros tipos especiales de ángulos.

Terminología	Definición	Ilustraciones
ángulo agudo θ	$0° < \theta < 90°$	12°; 37°
ángulo obtuso θ	$90° < \theta < 180°$	95°; 157°
ángulos complementarios α, β	$\alpha + \beta = 90°$	20°, 70°; 7°, 83°
ángulos suplementarios α, β	$\alpha + \beta = 180°$	115°, 65°; 18°, 162°

Si se requieren medidas menores de un grado, podemos usar décimas, centésimas o milésimas de grado. En forma opcional, podemos dividir el grado en 60 partes iguales, llamadas **minutos** (denotados por $'$), y cada minuto en 60 partes iguales, llamadas **segundos** (denotados por $''$). Por tanto, $1° = 60'$ y $1' = 60''$. La notación $\theta = 73°56'18''$ se refiere a un ángulo θ que mide 73 grados, 56 minutos, 18 segundos.

EJEMPLO 2 **Hallar ángulos complementarios**

Encuentre el ángulo que sea complementario a θ:

(a) $\theta = 25°43'37''$ **(b)** $\theta = 73.26°$

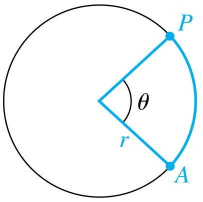
SOLUCIÓN Deseamos hallar $90° - \theta$. Es más fácil escribir $90°$ como una medida equivalente: $89°59'60''$.

(a)
$$\begin{aligned} 90° &= 89°59'60'' \\ \underline{\theta\quad} &= \underline{25°43'37''} \\ 90° - \theta &= 64°16'23'' \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 90° &= 90.00° \\ \underline{\theta\quad} &= \underline{73.26°} \\ 90° - \theta &= 16.74° \end{aligned}$$

■

FIGURA 6
Ángulo central θ

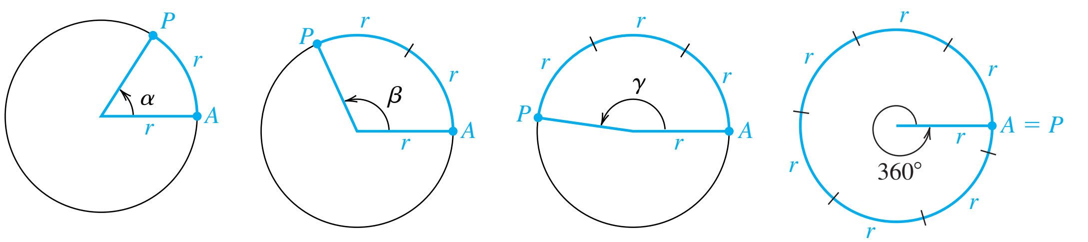


La medida en grados para ángulos se emplea en actividades aplicadas como topografía, navegación y el diseño de equipos mecánicos. En aplicaciones científicas que requieren cálculo integral, se acostumbra emplear *medidas en radianes*. Para definir un ángulo de medida radián, consideremos un círculo de cualquier radio r. Un **ángulo central** de un círculo es un ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo. Si θ es el ángulo central que se ve en la figura 6, decimos que el **arco *AP*** (denotado $\overset{\frown}{AP}$) del círculo **subtiende a** θ o que θ **está subtendido por** $\overset{\frown}{AP}$. Si la longitud de $\overset{\frown}{AP}$ es igual al radio r del círculo, entonces θ tiene una medida de un radián, como en la siguiente definición.

Definición de radián como medida	**Un radián** es la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo.

Si consideramos un círculo de radio r, entonces un ángulo α cuya medida es 1 radián interseca un arco AP de longitud r, como se ilustra en la figura 7(a). El ángulo β de la figura 7(b) mide 2 radianes, porque está subtendido por un arco de longitud $2r$. Del mismo modo, γ en (c) de la figura 3 mide radianes, porque está subtendido por un arco de longitud $3r$.

FIGURA 7
(a) $\alpha = 1$ radián **(b)** $\beta = 2$ radianes **(c)** $\gamma = 3$ radianes **(d)** $360° = 2\pi \approx 6.28$ radianes



Para hallar la medida en radianes correspondiente a $360°$, debemos hallar el número de veces que un arco de circunferencia de longitud r puede trazarse a lo largo de la circunferencia (vea figura 7(d)). Este número no es un entero y ni siquiera un número racional. Como la circunferencia del círculo es $2\pi r$, el número de veces que r unidades se pueden trazar es 2π; por tanto, un ángulo de 2π radianes corresponde a $360°$ y se escribe $360° = 2\pi$ radianes. Este resultado da las siguientes relaciones.

Relaciones entre grados y radianes	
	(1) $180° = \pi$ radianes
	(2) $1° = \dfrac{\pi}{180}$ radián ≈ 0.0175 radián
	(3) 1 radián $= \left(\dfrac{180°}{\pi}\right) \approx 57.2958°$

Cuando se usa la medida angular en radianes, no deben indicarse unidades. En consecuencia, si un ángulo mide 5 radianes, escribimos $\theta = 5$ en lugar de $\theta = 5$ *radianes.* No debe haber confusión en cuanto a que se usen radianes o grados, puesto que si θ mide 5°, se escribe $\theta = 5°$ y *no* $\theta = 5$.

La siguiente tabla ilustra la forma de pasar de una medida angular a otra.

Cambios de medidas angulares

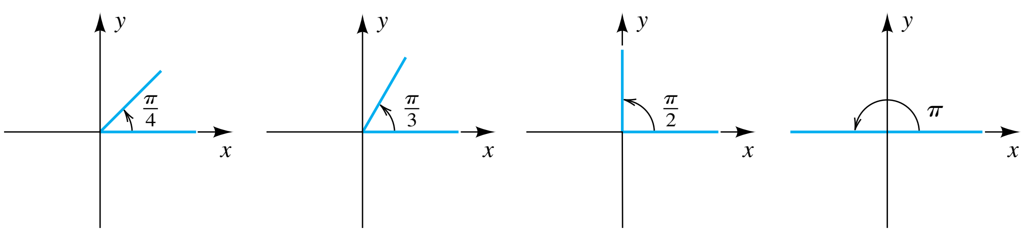
Para cambiar	Multiplicar por	Ilustraciones
grados a radianes	$\dfrac{\pi}{180°}$	$150° = 150°\left(\dfrac{\pi}{180°}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$ $225° = 225°\left(\dfrac{\pi}{180°}\right) = \dfrac{5\pi}{4}$
radianes a grados	$\dfrac{180°}{\pi}$	$\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}\left(\dfrac{180°}{\pi}\right) = 315°$ $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{180°}{\pi}\right) = 60°$

Se puede usar esta técnica a fin de obtener la siguiente tabla, que presenta las medidas correspondientes a radianes y grados de ángulos especiales.

Radianes	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π	$\dfrac{7\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{4}$	$\dfrac{4\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{5\pi}{3}$	$\dfrac{7\pi}{4}$	$\dfrac{11\pi}{6}$	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°

En la figura 8 se muestran en posición estándar varios de estos ángulos especiales, en radianes.

FIGURA 8

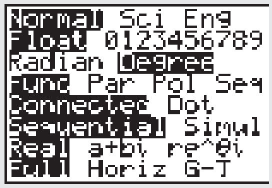


Las calculadoras de gráficas tienen funciones especiales que facilitan la conversión de radianes a grados.

Conversión de radianes a grados

Seleccione el modo de grados.

MODE ▽ ▽ ▷ ENTER



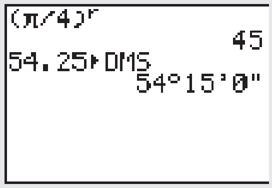
Convierta radianes a grados.

(2nd π ÷ 4)

2nd ANGLE 3 ENTER

Convierta un grado decimal a grados, minutos y segundos.

54.25 2nd ANGLE 4 ENTER



EJEMPLO 3 **Cambiar radianes por grados, minutos y segundos**

Si $\theta = 3$, aproxime θ en términos de grados, minutos y segundos.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
3 \text{ radianes} &= 3\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) && \text{multiplique por } \frac{180^\circ}{\pi} \\
&\approx 171.8873^\circ && \text{aproxime} \\
&= 171^\circ + (0.8873)(60') && 1^\circ = 60' \\
&= 171^\circ + 53.238' && \text{multiplique} \\
&= 171^\circ + 53' + (0.238)(60'') && 1' = 60'' \\
&= 171^\circ 53' + 14.28'' && \text{multiplique} \\
&\approx 171^\circ 53' 14'' && \text{aproxime}
\end{aligned}
$$

■

EJEMPLO 4 **Expresar minutos y segundos como grados decimales**

Exprese $19^\circ 47' 23''$ como decimal, al diezmilésimo de grado más cercano.

SOLUCIÓN Como $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ y $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$,

$$
\begin{aligned}
19^\circ 47' 23'' &= 19^\circ + \left(\tfrac{47}{60}\right)^\circ + \left(\tfrac{23}{3600}\right)^\circ \\
&\approx 19^\circ + 0.7833^\circ + 0.0064^\circ \\
&= 19.7897^\circ.
\end{aligned}
$$

■

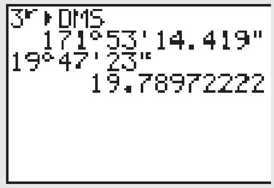
Los ejemplos 3 y 4 se manejan fácilmente con calculadora de gráficas (en modo de grados).

convierta los radianes del ejemplo 3 a grados, minutos y segundos

3 [2nd] [ANGLE] [3] [2nd] [ANGLE]
[4] [ENTER]

Exprese el ángulo del ejemplo 4 como grado decimal.

19 [2nd] [ANGLE] [1]
47 [2nd] [ANGLE] [2]
23 [ALPHA] [″(on+key)] [ENTER]



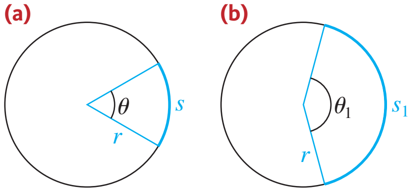
El siguiente resultado especifica la relación entre la longitud de un arco de circunferencia y el ángulo central que subtiende.

Fórmula para la longitud de un arco de circunferencia

Si un arco de longitud s en un círculo de radio r subtiende un ángulo central de θ radianes, entonces

$$s = r\theta.$$

FIGURA 9
(a) (b)



DEMOSTRACIÓN En la figura 9(a) se muestra un arco común de longitud s y el ángulo central θ correspondiente. La figura 9(b) presenta un arco de longitud s_1 y ángulo central θ_1. Si se usa la medida en radianes, entonces, de la geometría plana, la razón entre longitudes de los arcos es igual a la razón entre medidas angulares; es decir,

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\theta}{\theta_1}, \quad \text{o bien} \quad s = \frac{\theta}{\theta_1} s_1.$$

Si consideramos el caso especial en que θ_1 mide 1 radián, entonces, de la definición de radián, $s_1 = r$ y la última ecuación se convierte en

$$s = \frac{\theta}{1} \cdot r = r\theta.$$ ■

Note que si $\theta = 2\pi$, entonces la fórmula para la longitud de un arco de circunferencia se convierte en $s = r(2\pi)$, que es simplemente la fórmula para la circunferencia de un círculo, $C = 2\pi r$.

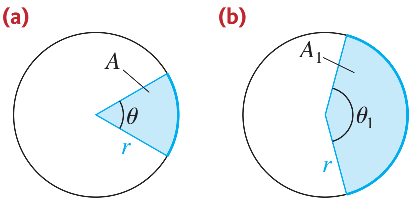
La siguiente fórmula se demuestra de manera similar.

Fórmula para el área de un sector circular

Si θ es la medida en radianes de un ángulo central de un circulo de radio r y si A es el área de un sector circular determinado por θ, entonces

$$A = \tfrac{1}{2}r^2\theta.$$

FIGURA 10



DEMOSTRACIÓN Si A y A_1 son las áreas de los sectores de las figuras 10(a) y 10(b), respectivamente, entonces, por geometría plana,

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\theta}{\theta_1}, \qquad \text{o} \qquad A = \frac{\theta}{\theta_1}A_1.$$

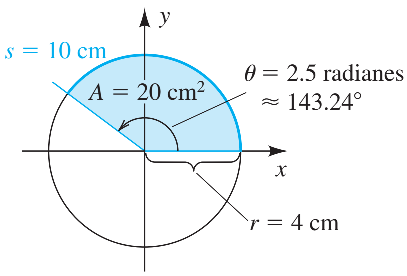
Si se considera el caso especial $\theta_1 = 2\pi$, entonces $A_1 = \pi r^2$ y

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta.$$ ■

Cuando se usen las fórmulas precedentes, es importante recordar emplear radianes como medida de θ en lugar de grados, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Usar las fórmulas de arco y sector circulares

FIGURA 11



En la figura 11, un ángulo central θ está subtendido por un arco de 10 cm de largo en un círculo de 4 cm de radio.

(a) Aproxime la medida de θ en grados.

(b) Encuentre el área del sector circular determinado por θ.

SOLUCIÓN Procedemos como sigue:

(a) $s = r\theta$ — fórmula para la longitud de un arco de circunferencia

$\theta = \frac{s}{r}$ — despeje θ

$= \frac{10}{4} = 2.5$ — sea $s = 10$, $r = 4$

Ésta es la medida de θ *en radianes*. Al cambiar por grados tenemos

$$\theta = 2.5\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{450°}{\pi} \approx 143.24°.$$

(b) $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ — fórmula para el área de un sector circular

$= \frac{1}{2}(4)^2(2.5)$ — sea $r = 4$, $\theta = 2.5$ radianes

$= 20\ \text{cm}^2$ — multiplique ■

FIGURA 12



La **rapidez angular** de una rueda que gira a razón constante es el ángulo generado, en una unidad de tiempo, por un segmento de recta que va del centro de la rueda a un punto P de la circunferencia (figura 12). La **rapidez lineal** de un punto P de la circunferencia es la distancia que P recorre por unidad de tiempo. Al dividir ambos lados de la fórmula del arco circular entre el tiempo t, obtenemos una relación para la rapidez lineal y la rapidez angular; esto es,

$$\frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t}, \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad \underset{\text{velocidad lineal}}{\frac{s}{t}} = r \cdot \underset{\text{velocidad angular}}{\frac{\theta}{t}}.$$

EJEMPLO 6 Hallar la rapidez angular y lineal

Suponga que la rueda de la figura 12 está girando a razón de 800 rpm (revoluciones por minuto).

(a) Determine la rapidez angular de la rueda.

(b) Encuentre la rapidez lineal (en pulg/min y mi/h) de un punto P sobre la circunferencia de la rueda.

SOLUCIÓN

(a) Denote con O el centro de la rueda y sea P un punto en la circunferencia. En vista de que el número de revoluciones por minuto es 800 y que cada revolución genera un ángulo de 2π radianes, el ángulo generado por el segmento de recta OP en un minuto medirá $(800)(2\pi)$ radianes, es decir,

$$\text{rapidez angular} = \frac{800 \text{ revoluciones}}{1 \text{ minuto}} \cdot \frac{2\pi \text{ radianes}}{1 \text{ revolución}} = \begin{array}{c}1600\pi \text{ radianes}\\ \text{por minuto}\end{array}$$

Note que el diámetro de la rueda no tiene importancia para hallar la rapidez angular.

(b)
$$\begin{aligned}\text{rapidez lineal} &= \text{radio} \cdot \text{rapidez angular}\\ &= (12 \text{ pulg})(1600\pi \text{ rad/min})\\ &= 19{,}200\pi \text{ pulg/min}\end{aligned}$$

Convirtiendo pulg/min a mi/h, obtenemos

$$\frac{19{,}200\pi \text{ pulg}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ pulg}} \cdot \frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ ft}} \approx 57.1 \text{ mi/h}$$

A diferencia de la rapidez angular, la rapidez lineal *depende* del diámetro de la rueda. ■

6.1 Ejercicios

Ejer. 1–4: Si el ángulo dado está en posición estándar, encuentre dos ángulos coterminales y dos ángulos coterminales negativos.

1 (a) $120°$ (b) $135°$ (c) $-30°$

2 (a) $240°$ (b) $315°$ (c) $-150°$

3 (a) $620°$ (b) $\dfrac{5\pi}{6}$ (c) $-\dfrac{\pi}{4}$

4 (a) $570°$ (b) $\dfrac{2\pi}{3}$ (c) $-\dfrac{5\pi}{4}$

Ejer. 5–6: Encuentre el ángulo complementario de θ.

5 (a) $\theta = 12°37'24''$ (b) $\theta = 43.87°$

6 (a) $\theta = 76°4'53''$ (b) $\theta = 5.08°$

Ejer. 7–8: Encuentre el ángulo suplementario de θ.

7 (a) $\theta = 125°16'27''$ (b) $\theta = 58.07°$

8 (a) $\theta = 87°13'52''$ (b) $\theta = 97.9°$

Ejer. 9–12: Encuentre la medida exacta del ángulo en radianes.

9 (a) $150°$ (b) $-60°$ (c) $225°$

10 (a) $120°$ (b) $-135°$ (c) $210°$

11 (a) $450°$ (b) $72°$ (c) $100°$

12 (a) $630°$ (b) $54°$ (c) $95°$

Ejer. 13–16: Encuentre la medida exacta del ángulo en grados.

13 (a) $\dfrac{2\pi}{3}$ (b) $\dfrac{11\pi}{6}$ (c) $\dfrac{3\pi}{4}$

14 (a) $\dfrac{5\pi}{6}$ (b) $\dfrac{4\pi}{3}$ (c) $\dfrac{11\pi}{4}$

15 (a) $-\frac{7\pi}{2}$ (b) 7π (c) $\frac{\pi}{9}$

16 (a) $-\frac{5\pi}{2}$ (b) 9π (c) $\frac{\pi}{16}$

Ejer. 17–20: Exprese θ en términos de grados, minutos y segundos, al segundo más cercano.

17 $\theta = 1.57$ 18 $\theta = 3.1$

19 $\theta = 6.3$ 20 $\theta = 4.7$

Ejer. 21–24: Exprese el ángulo como decimal, al diezmilésimo de grado más cercano.

21 $120°16'$ 22 $53°47'$

23 $262°15'31''$ 24 $320°7'58''$

Ejer. 25–28: Exprese el ángulo en términos de grados, minutos y segundos al segundo más cercano.

25 $63.169°$ 26 $12.864°$

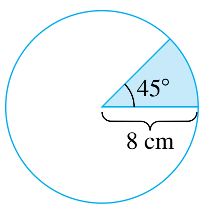
27 $310.6215°$ 28 $81.7238°$

Ejer. 29–30: (a) Si un arco circular de longitud s subtiende el ángulo central θ en un círculo, encuentre el radio de la circunferencia.

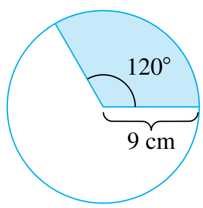
29 $s = 10$ cm, $\theta = 4$ 30 $s = 3$ km, $\theta = 20°$

Ejer. 31–32: (a) Encuentre la longitud del arco del sector en color de la figura. (b) Encuentre el área del sector.

31



32



Ejer. 33–34: (a) Encuentre la medida en radianes y grados del ángulo central θ subtendido por el arco dado de longitud s en una circunferencia de radio r. (b) Encuentre el área del sector determinado por θ.

33 $s = 7$ cm, $r = 4$ cm 34 $s = 3$ ft, $r = 20$ in.

Ejer. 35–36: (a) Encuentre la longitud del arco que subtiende el ángulo θ central dado en un círculo de diámetro d. (b) Encuentre el área del sector determinado por θ.

35 $\theta = 50°$, $d = 16$ m 36 $\theta = 2.2$, $d = 120$ cm

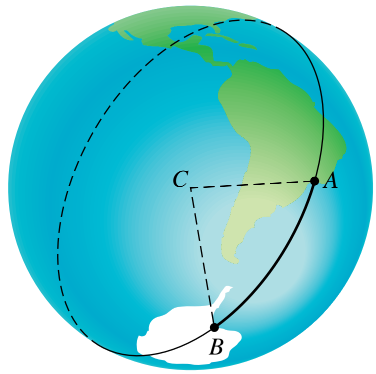
Ejer. 37–38: Si un arco de circunferencia de longitud s dada subtiende el ángulo central θ en un círculo, exprese el área del sector determinado por θ en función de θ.

37 $s = 8$ 38 $s = 14$

39 **Medir distancias en la Tierra** La distancia entre dos puntos A y B en la Tierra se mide a lo largo de una circunferencia cuyo centro es C, en el centro de la Tierra, y radio igual a la distancia de C a la superficie (vea la figura). Si el diámetro de la Tierra es aproximadamente 8000 millas, calcule la distancia entre A y B si el ángulo ACB tiene la medida indicada:

(a) 60° (b) 45° (c) 30° (d) 10° (e) 1°

EJERCICIO 39



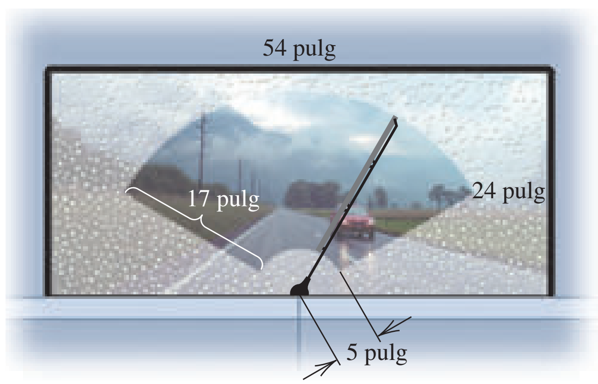
40 **Millas náuticas** Consulte el ejercicio 39. Si el ángulo ACB mide $1'$, entonces la distancia entre A y B es una milla náutica. Calcule en forma aproximada el número de millas terrestres en una milla náutica.

41 **Medir ángulos usando distancia** Consulte el ejercicio 39. Si dos puntos A y B están a 500 millas uno del otro, exprese el ángulo ACB en radianes y en grados.

42 Un hexágono está inscrito en un círculo. Si la diferencia entre el área del círculo y el área del hexágono es 24 m^2, use la fórmula para el área de un sector para aproximar el radio r del círculo.

43 **Área de una ventana** Una ventana rectangular mide 54 pulgadas por 24 pulgadas. Hay una hoja limpiadora de 17 pulgadas unida por un brazo de 5 pulgadas al centro de la base de la ventana, como se ve en la figura. Si el brazo gira 120°, aproxime el porcentaje del área de la ventana que es limpiado por la hoja.

EJERCICIO 43



44 Núcleo de un tornado Un modelo simple del núcleo de un tornado es un cilindro circular recto que gira alrededor de su eje. Si un tornado tiene un diámetro de núcleo de 200 pies y velocidad máxima de vientos de 180 mi/h (o 264ft/s) en el perímetro del núcleo, aproxime el número de revoluciones que hace el núcleo cada minuto.

45 Rotación de la Tierra La Tierra gira alrededor de su eje una vez cada 23 horas, 56 minutos y 4 segundos. Aproxime el número de radianes que gira la Tierra en un segundo.

46 Rotación de la Tierra Consulte el ejercicio 45. El radio ecuatorial de la Tierra mide aproximadamente 3963.3 millas. Encuentre la velocidad lineal de un punto sobre el ecuador como resultado de la rotación de nuestro planeta.

Ejer. 47–48: Una rueda de radio dado gira a la rapidez indicada.
(a) Encuentre la rapidez angular (en radianes por minuto).
(b) Encuentre la rapidez lineal de un punto sobre la circunferencia (en pies/min).

47 radios 5 pulg, 40 rpm **48** radios 9 pulg, 2400 rpm

49 Rotación de discos compactos (CD) El motor de impulsión de un reproductor particular de discos compactos está controlado para girar a 200 rpm cuando lee una pista que está a 5.7 cm del centro del CD. La rapidez del motor debe variar para que la lectura de la información ocurra a un ritmo constante.

(a) Encuentre la rapidez angular (en radianes por minuto) del motor de impulsión cuando está leyendo una pista a 5.7 cm del centro del CD.

(b) Encuentre la rapidez lineal (en cm/s) de un punto en el CD que está a 5.7 cm del centro del CD.

(c) Encuentre la rapidez angular (en rpm) del motor de impulsión cuando está leyendo una pista que está a 3 centímetros del centro del CD.

(d) Encuentre una función S que dé la rapidez del motor de impulsión en rpm para cualquier radio r en centímetros, donde $2.3 \leq r \leq 5.9$. ¿Qué tipo de variación existe entre la rapidez del motor y el radio de la pista que se está leyendo? Compruebe su respuesta al graficar S y hallar las magnitudes de la rapidez para $r = 3$ y $r = 5.7$.

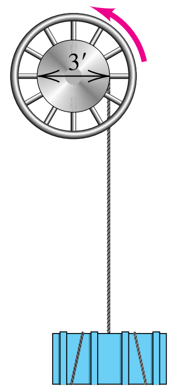
50 Revoluciones en llantas Una llanta común de auto compacto mide 22 pulgadas de diámetro. Si el auto corre con una rapidez de 60 mi/h, encuentre el número de revoluciones que hace la llanta por minuto.

51 Malacate de carga Se utiliza un malacate grande de 3 pies de diámetro para levantar cargas, como se ve en la figura.

(a) Encuentre la distancia que la carga es levantada si el malacate gira un ángulo de $7\pi/4$ radianes.

(b) Encuentre el ángulo (en radianes) que el malacate debe girar para levantar la carga d pies.

EJERCICIO 51

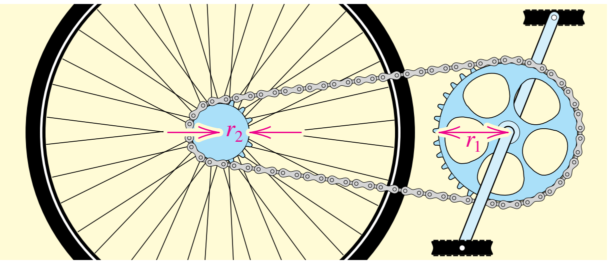


52 Oscilación de un péndulo El péndulo de un reloj mide 4 pies de largo y oscila a lo largo de un arco de 6 pulgadas. Calcule el ángulo (en grados) por el que pasa el péndulo durante una oscilación.

53 Valores de pizza Un comerciante vende dos tamaños de pizza en rebanadas. La rebanada *pequeña* es de $\frac{1}{6}$ de una pizza circular de 18 pulgadas de diámetro y la vende en $2.00; la rebanada *grande* es de $\frac{1}{8}$ de una pizza circular de 26 pulgadas de diámetro y la vende en $3.00. ¿Cuál rebanada da más pizza por dólar?

54 Mecánica de bicicletas En la figura se ilustran las dos estrellas de una bicicleta. Si la estrella de radio r_1 gira un ángulo de θ_1 radianes, encuentre el ángulo de rotación correspondiente para la estrella de radio r_2.

EJERCICIO 54



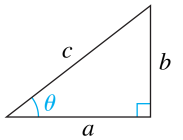
55 Mecánica de bicicletas Consulte el ejercicio 54. Un ciclista experto alcanza una rapidez de 40 mi/h. Si las dos estrellas miden $r_1 = 5$ pulgadas y $r_2 = 2$ pulgadas, respectivamente, y la llanta tiene un diámetro de 28 pulgadas, ¿aproximadamente cuántas revoluciones por minuto de la estrella delantera producirá una velocidad de 40 mi/h? (*Sugerencia:* primero cambie 40 mi/h a pulg/s.)

56 Desplazamiento del polo magnético Los polos geográfico y magnético norte tienen diferentes ubicaciones. Hoy en día, el polo norte magnético se desplaza al oeste 0.0017 radianes por año, donde el ángulo de desplazamiento tiene su vértice en el centro de la Tierra. Si este movimiento continúa, ¿aproximadamente cuántos años tardará el polo norte magnético en desplazarse un total de 5°?

6.2 Funciones trigonométricas de ángulos

Introduciremos las funciones trigonométricas en la forma en que se originaron históricamente: como razones entre los lados de un triángulo rectángulo. Un triángulo es un **triángulo rectángulo** si uno de sus ángulos es recto. Si θ es un ángulo agudo, podemos considerar un triángulo rectángulo que tiene a θ como uno de sus ángulos, como en la figura 1, donde el símbolo $\ulcorner$ especifica el ángulo de 90°. Se pueden obtener seis razones usando las longitudes a, b y c de los lados del triángulo:

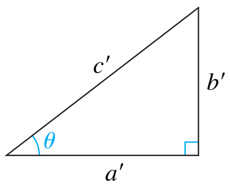
FIGURA 1



$$\frac{b}{c}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b}$$

Podemos demostrar que estas razones dependen sólo de θ y no del tamaño del triángulo, como se indica en la figura 2. Como los dos triángulos tienen ángulos iguales, son semejantes y por tanto las razones entre lados correspondientes son proporcionales. Por ejemplo

FIGURA 2



$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}.$$

Entonces, para cada θ, las seis razones están determinadas de manera única y por tanto son funciones de θ. Reciben el nombre de **funciones trigonométricas*** y se denominan como las funciones **seno, coseno, tangente, cotangente, secante** y **cosecante**, abreviadas **sen, cos, tan, cot, sec** y **csc,** respectivamente. El símbolo sen (θ), o sen θ se usa por la razón b/c, que la función seno asocia con θ. Los valores de las otras cinco funciones se denotan de un modo semejante. Para resumir, si θ es el ángulo agudo del triángulo rectángulo de la figura 1, entonces, por definición,

Nos referiremos a estas seis funciones trigonométricas como **las funciones trigonométricas. A continuación veamos otras, las funciones trigonométricas menos comunes que no usaremos en este texto:*

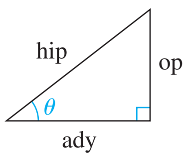
$$\text{vers } \theta = 1 - \cos \theta$$
$$\text{covers } \theta = 1 - \text{sen } \theta$$
$$\text{exsec } \theta = \sec \theta - 1$$
$$\text{hav } \theta = \tfrac{1}{2} \text{vers } \theta$$

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{c} \qquad \cos \theta = \frac{a}{c} \qquad \tan \theta = \frac{b}{a}$$
$$\csc \theta = \frac{c}{b} \qquad \sec \theta = \frac{c}{a} \qquad \cot \theta = \frac{a}{b}.$$

El dominio de cada una de las seis funciones trigonométricas es el conjunto de todos los ángulos agudos. Más adelante en esta sección ampliaremos los dominios a conjuntos más grandes de ángulos y, en la siguiente sección, a números reales.

Si θ es el ángulo en la figura 1, nos referiremos a los lados del triángulo de longitudes a, b y c como el **lado adyacente, lado opuesto** e **hipotenusa,** respectivamente. Usaremos **ady, op** e **hip** para denotar las longitudes de los lados. Entonces podemos representar el triángulo como en la figura 3. Con esta notación, las funciones trigonométricas se pueden expresar como sigue.

FIGURA 3



Definición de funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan \theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$
$$\csc \theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} \qquad \sec \theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \qquad \cot \theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

Las fórmulas de la definición precedente se pueden aplicar a cualquier triángulo rectángulo sin poner las leyendas a, b, c a los lados. Como las longitudes de los lados de un triángulo son números reales positivos, *los valores de las seis funciones trigonométricas son positivos para todo ángulo agudo* θ. Además, la hipotenusa es siempre mayor que el lado adyacente o el opuesto, y por tanto sen $\theta < 1$, $\cos \theta < 1$, $\csc \theta > 1$ y $\sec \theta > 1$ para todo ángulo agudo θ.

Note que como

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \quad \text{y} \quad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}},$$

sen θ y csc θ son recíprocas entre sí, lo cual nos da las dos identidades de la columna izquierda del recuadro siguiente. Del mismo modo, cos θ y sec θ son recíprocas entre sí, como lo son tan θ y cot θ.

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

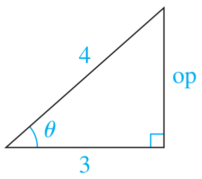
$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Otras varias identidades importantes que contienen funciones trigonométricas se estudiarán al final de esta sección.

EJEMPLO 1 **Hallar valores de funciones trigonométricas**

Si θ es un ángulo agudo y $\cos\theta = \frac{3}{4}$, encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ.

FIGURA 4



SOLUCIÓN Empezamos por trazar un triángulo rectángulo que tenga un ángulo agudo θ con ady $= 3$ e hip $= 4$, como se ve en la figura 4 y procedemos como sigue:

$$3^2 + (\text{op})^2 = 4^2 \quad \text{teorema de Pitágoras}$$
$$(\text{op})^2 = 16 - 9 = 7 \quad \text{aísle } (\text{op})^2$$
$$\text{op} = \sqrt{7} \quad \text{saque la raíz cuadrada}$$

Aplicando la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, obtenemos lo siguiente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{3}{4} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$ ■

En el ejemplo 1 podríamos haber racionalizado los denominadores para csc θ y cot θ, escribiendo

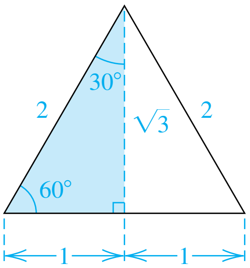
$$\csc\theta = \frac{4\sqrt{7}}{7} \quad \text{y} \quad \cot\theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

No obstante, en casi todos los ejemplos y ejercicios dejaremos expresiones en forma no racionalizada. Una excepción a esta práctica es la de los valores de las funciones trigonométricas especiales correspondientes a 60°, 30° y 45°, que se obtienen en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 **Hallar valores de funciones trigonométricas de 60°, 30°, y 45°**

Encuentre los valores de las funciones trigonométricas que corresponden a θ:
(a) $\theta = 60°$ **(b)** $\theta = 30°$ **(c)** $\theta = 45°$

FIGURA 5



SOLUCIÓN Considere un triángulo equilátero con lados de longitud 2. La mediana de un vértice al lado opuesto biseca el ángulo en ese vértice, como se ilustra con una línea interrumpida en la figura 5. Por el teorema de Pitágoras, el lado opuesto a 60° en el triángulo rectángulo sombreado tiene longitud $\sqrt{3}$. Usando las fórmulas para las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, obtenemos los valores correspondientes a 60° y a 30° como sigue:

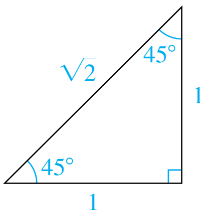
(a) $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ $\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\csc 60° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\sec 60° = \dfrac{2}{1} = 2$ $\cot 60° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(b) $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$ $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\csc 30° = \dfrac{2}{1} = 2$ $\sec 30° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\cot 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

FIGURA 6



(c) Para hallar los valores para $\theta = 45°$, podemos considerar un triángulo rectángulo isósceles cuyos dos lados iguales tienen longitud 1, como se ve en la figura 6. Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ y por tanto los valores correspondientes para 45° son como sigue:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° \qquad \tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = \sec 45° \qquad \cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

■

Para referencia, en la tabla siguiente presentamos la lista de valores hallados en el ejemplo 2, junto con las medidas en radianes de los ángulos. Dos razones para destacar estos valores son: que son exactos y se ven con frecuencia al trabajar con trigonometría. Debido a la importancia de estos valores especiales, es una buena idea aprender de memoria la tabla o saber cómo hallar los valores rápidamente al usar triángulos, como en el ejemplo 2.

Valores especiales de las funciones trigonométricas

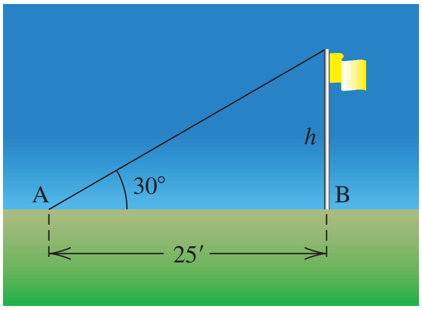
θ (radianes)	θ (grados)	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
$\dfrac{\pi}{6}$	30°	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\dfrac{\pi}{4}$	45°	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\dfrac{\pi}{3}$	60°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

El siguiente ejemplo ilustra un uso práctico para funciones trigonométricas de ángulos agudos. En la sección 6.7 veremos aplicaciones adicionales que contienen triángulos rectángulos.

EJEMPLO 3 **Hallar la altura de un asta de bandera**

Un topógrafo observa que en un punto A, situado al nivel del suelo a una distancia de 25.0 pies de la base B de un asta de bandera, el ángulo entre el suelo y el extremo superior del poste es de 30°. Calcule la altura h del poste al décimo de pie más cercano.

FIGURA 7



SOLUCIÓN Al observar la figura 7 vemos que lo que buscamos es relacionar el lado opuesto y el lado adyacente, h y 25, respectivamente, con el ángulo de 30°. Esto sugiere que usemos una función trigonométrica que contenga esos dos lados, es decir, tan o cot. Por lo general es más fácil resolver el problema si seleccionamos la función para la cual la variable está en el numerador. Por tanto, tenemos

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{25} \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad h = 25 \tan 30^\circ.$$

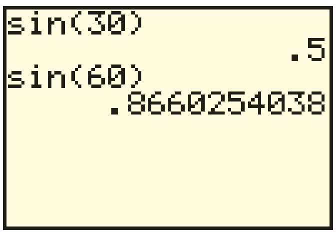
Usamos el valor de tan 30° del ejemplo 2 para hallar h:

$$h = 25\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 14.4 \text{ ft}$$

■

Es posible aproximar, a cualquier grado de precisión, los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo agudo. Las calculadoras tienen teclas marcadas como SIN, COS y TAN que se pueden usar para calcular los valores de estas funciones. Los valores para csc, sec y cot se pueden encontrar por medio de la tecla de recíprocos. *Antes de usar una calculadora para hallar valores de funciones que correspondan a la medida en radianes de un ángulo agudo, asegúrese que su calculadora esté en modo de radianes. Para valores correspondientes a medidas en grados, seleccione el modo de grados.*

FIGURA 8
En modo de grados



Como ilustración (vea la figura 8), para hallar sen 30° en una calculadora común, ponemos la calculadora en modo de grados y usamos la tecla SIN para obtener sen 30° = 0.5, que es el valor exacto. Usando el mismo procedimiento para 60°, obtenemos una aproximación decimal a $\sqrt{3}/2$, tal como

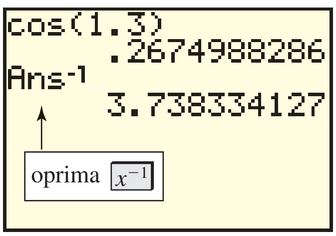
$$\operatorname{sen} 60^\circ \approx 0.8660.$$

Casi todas las calculadoras tienen una precisión de ocho a diez lugares decimales para esos valores de función, pero en todo este texto por lo general redondearemos valores a cuatro lugares decimales.

Para hallar un valor tal como cos 1.3 (vea la figura 9), donde 1.3 es la medida en radianes de un ángulo agudo, ponemos la calculadora en modo de radianes y usamos la tecla COS, obteniendo

$$\cos 1.3 \approx 0.2675.$$

FIGURA 9
En modo de radianes



Para sec 1.3, podríamos hallar cos 1.3 y luego usar la tecla de recíprocos, por lo general marcada 1/x o x^{-1} (como se ve en la figura 9), para obtener

$$\sec 1.3 = \frac{1}{\cos 1.3} \approx 3.7383.$$

Las fórmulas que aparecen en el recuadro de la página siguiente son, sin duda, las identidades más importantes en trigonometría porque se pueden usar

para simplificar y unificar muchos aspectos diferentes del tema. Como las fórmulas son parte de la base para trabajar en trigonometría, se denominan *identidades fundamentales*.

Tres de las identidades fundamentales contienen cuadrados, por ejemplo $(\text{sen } \theta)^2$ y $(\cos \theta)^2$. En general, si n es un entero diferente de -1, entonces una potencia como $(\cos \theta)^n$ se escribe $\cos^n \theta$. Los símbolos $\text{sen}^{-1}\theta$ y $\cos^{-1} \theta$ están reservados para funciones trigonométricas inversas que estudiaremos en la sección 6.4 y trataremos a fondo en el siguiente capítulo. Con este acuerdo sobre notaciones, tenemos, por ejemplo,

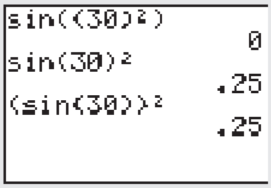
$$\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2 = (\cos \theta)(\cos \theta)$$
$$\tan^3 \theta = (\tan \theta)^3 = (\tan \theta)(\tan \theta)(\tan \theta)$$
$$\sec^4 \theta = (\sec \theta)^4 = (\sec \theta)(\sec \theta)(\sec \theta)(\sec \theta).$$

Evaluación de potencias de funciones trigonométricas (en modo de grados)

Debe tenerse cuidado al evaluar potencias de funciones trigonométricas en calculadoras. Por ejemplo, considere la expresión $\text{sen}^2\, 30°$. Como $\text{sen}\, 30° = \frac{1}{2}$, tenemos

$$\text{sen}^2\, 30° = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Por la forma en que está escrita la expresión en la primera entrada en la pantalla que se ve a continuación, podríamos esperar que la calculadora evalúe 30^2 y luego saque el seno de 900°, y eso es lo que ocurre. No obstante, esperaríamos lo mismo en la segunda entrada, donde la TI−83/84 Plus nos da el valor de $\text{sen}^2\, 30°$. Entonces, en adelante, para evaluar $\text{sen}^2\, 30°$, usaremos el formato que se ve en la tercera entrada.



A continuación hagamos una lista de las identidades fundamentales y luego estudiemos las demostraciones. Estas identidades son verdaderas para todo ángulo agudo θ, que puede tomar varias formas. Por ejemplo, usando la primera identidad de Pitágoras con $\theta = 4\alpha$, sabemos que

$$\text{sen}^2 4\alpha + \cos^2 4\alpha = 1.$$

Más adelante veremos que estas identidades también son verdaderas para otros ángulos y para números reales.

Las identidades fundamentales

(1) Las identidades recíprocas:

$$\csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} \qquad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

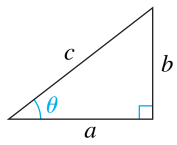
(2) Las identidades tangente y cotangente:

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} \qquad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

(3) Las identidades de Pitágoras:

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \qquad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \qquad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

FIGURA 10



DEMOSTRACIONES

(1) Las identidades recíprocas se establecieron ya antes en esta sección.

(2) Para demostrar la identidad tangente, vemos el triángulo rectángulo de la figura 10 y usamos definiciones de funciones trigonométricas como sigue:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Para verificar la identidad cotangente, usamos una identidad recíproca y la identidad tangente:

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta/\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

(3) Las identidades de Pitágoras reciben ese nombre por el primer paso en la siguiente demostración. Si vemos la figura 10, obtenemos

$$b^2 + a^2 = c^2 \qquad \text{teorema de Pitágoras}$$
$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2 \qquad \text{divida entre } c^2$$
$$(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \qquad \text{definiciones de sen } \theta \text{ y cos } \theta$$
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1. \qquad \text{notación equivalente}$$

Podemos usar esta identidad para verificar la segunda identidad de Pitágoras como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \text{divida entre } \cos^2\theta$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \text{ecuación equivalente}$$
$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 \qquad \text{ley de exponentes}$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \text{identidades tangente y recíproca}$$

Para demostrar la tercera identidad de Pitágoras, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$, podríamos dividir ambos lados de la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ entre $\operatorname{sen}^2\theta$. ■

Podemos usar las identidades fundamentales para expresar cada función trigonométrica en términos de cualquier otra función trigonométrica. En el siguiente ejemplo se dan dos ilustraciones.

EJEMPLO 4 **Usar identidades fundamentales**

Sea θ un ángulo agudo.

(a) Exprese sen θ en términos de cos θ.

(b) Exprese tan θ en términos de sen θ.

SOLUCIÓN

(a) Podemos proceder como sigue:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{identidad de Pitágoras}$$
$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \text{aísle } \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} \qquad \text{saque la raíz cuadrada}$$
$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} \qquad \operatorname{sen}\theta > 0 \text{ para ángulos agudos}$$

(continúa)

Más adelante en esta sección (ejemplo 12) consideraremos una simplificación que contiene un ángulo θ que *no es agudo*.

(b) Empezamos con la identidad fundamental

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta},$$

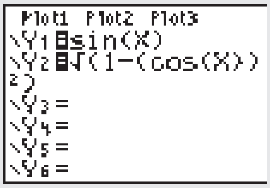
entonces todo lo que resta es expresar $\cos\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$, que podemos hacer al despejar $\cos\theta$ de $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, obteniendo

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} \quad \text{para} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

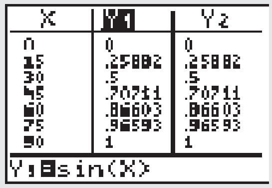
En consecuencia,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}} \quad \text{para} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad ■$$

En la misma forma en que hemos hecho manipulaciones algebraicas, podemos dar apoyo numérico a los resultados de nuestras manipulaciones trigonométricas al examinar una tabla de valores. Las siguientes pantallas muestran que el resultado del ejemplo 4(a), $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ para θ agudo, está apoyado por la igualdad de Y_1 y Y_2 en la tabla de valores seleccionados. Discutiremos el apoyo gráfico más adelante en el texto.







Es frecuente el uso de identidades fundamentales para simplificar expresiones que contengan funciones trigonométricas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Demostrar que una ecuación es una identidad**

Demuestre que la siguiente ecuación es una identidad al transformar el lado izquierdo en el lado derecho:

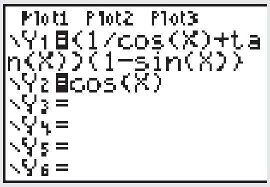
$$(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta$$

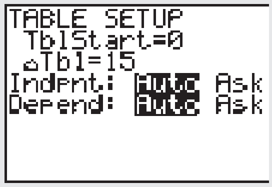
SOLUCIÓN Empezamos con el lado izquierdo y procedemos como sigue:

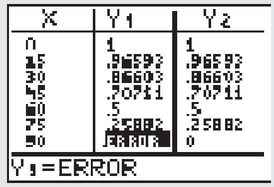
$$\begin{aligned}
(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) &= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \operatorname{sen}\theta) && \text{identidades recíproca y tangente} \\
&= \left(\frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \operatorname{sen}\theta) && \text{sume fracciones} \\
&= \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} && \text{multiplique} \\
&= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} && \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\
&= \cos\theta && \text{cancele } \cos\theta
\end{aligned}$$

■

Examinemos el resultado del ejemplo 5 desde un punto de vista numérico. Asignamos el lado izquierdo a Y_1 y el lado derecho a Y_2 y elaboramos una tabla de valores para $\theta = 0°$ a $\theta = 90°$. Note que los valores de Y_1 y Y_2 de la tercera pantalla son iguales excepto para $\theta = 90°$. El mensaje ERROR aparece porque sec 90° y tan 90° no están definidas.







Hay otras formas de simplificar la expresión del lado izquierdo en el ejemplo 5. Podríamos primero multiplicar los dos factores y luego simplificar y combinar términos. Es útil el método que empleamos; es decir, cambiar todas las expresiones por otras que contengan sólo senos y cosenos, pero esa técnica no siempre lleva a la simplificación más corta posible.

En adelante, usaremos la frase *verifique una identidad* en lugar de *demuestre que una ecuación es una identidad.* Cuando verifiquemos una identidad, muchas veces usamos identidades fundamentales y manipulaciones algebraicas para simplificar expresiones, como hicimos en el ejemplo precedente. Al igual que con las identidades fundamentales, entendemos que una identidad que contiene fracciones es válida para todos los valores de las variables, de forma que no haya denominadores cero.

EJEMPLO 6 Verificar una identidad

Verifique la siguiente identidad al transformar el lado izquierdo en el lado derecho:

$$\frac{\tan\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \sec\theta + \cot\theta$$

SOLUCIÓN Podemos transformar el lado izquierdo en el lado derecho como sigue:

$$\frac{\tan\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{divida el numerador entre sen } \theta$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)}{\operatorname{sen}\theta} + \cot\theta \qquad \text{identidades tangente y cotangente}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \cot\theta \qquad \text{regla para cocientes}$$

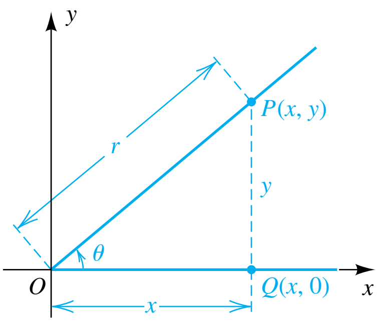
$$= \frac{1}{\cos\theta} + \cot\theta \qquad \text{cancele sen } \theta$$

$$= \sec\theta + \cot\theta \qquad \text{identidad recíproca}$$

■

En la sección 7.1 verificaremos muchas otras identidades usando métodos semejantes a los empleados en los ejemplos 5 y 6.

FIGURA 11

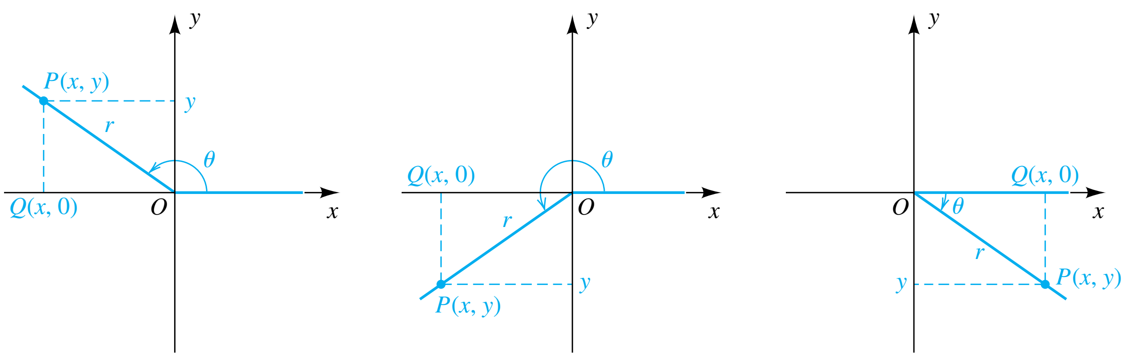


En vista de que numerosos problemas aplicados contienen ángulos que no son agudos, es necesario ampliar la definición de las funciones trigonométricas. Hacemos esta ampliación usando la posición estándar de un ángulo θ en un sistema de coordenadas rectangulares. Si θ es agudo, tenemos la situación ilustrada en la figura 11, donde hemos seleccionado un punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ y donde $d(O, P) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por consulta del triángulo OQP, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{y}{x}.$$

Ahora deseamos considerar ángulos de los tipos ilustrados en la figura 12 (o cualquier *otro* ángulo, ya sea positivo, negativo o cero). Note que en la figura 12 el valor de x o de y puede ser negativo. En cada caso, el lado QP (el opuesto en la figura 11) tiene longitud $|y|$, el lado OQ (el adyacente en la figura 11) tiene longitud $|x|$, y la hipotenusa OP tiene longitud r. Definiremos las seis funciones trigonométricas para que sus valores estén de acuerdo con los dados previamente siempre que el ángulo sea agudo. Se entiende que si se presenta un denominador cero, entonces el valor de la función correspondiente no está definido.

FIGURA 12



Definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Sea θ un ángulo en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares, y sea $P(x, y)$ cualquier punto que no sea el origen O en el lado terminal de θ.

Si $d(O, P) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad (\text{si } y \neq 0) \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0).$$

Podemos demostrar, usando triángulos semejantes, que las fórmulas en esta definición no dependen del punto $P(x, y)$ que está seleccionado en el lado terminal de θ. Las identidades fundamentales, que se establecieron para ángulos agudos, también son verdaderas para funciones trigonométricas de cualquier ángulo.

Los dominios de las funciones seno y coseno incluyen todos los ángulos θ. No obstante, $\tan\theta$ y $\sec\theta$ no están definidas si $x = 0$ (esto es, si el lado terminal de θ está en el eje y). Así, los dominios de las funciones tangente y secante

están formados por todos los ángulos *excepto* los de medida $(\pi/2) + \pi n$ en radianes para cualquier entero n. Algunos casos especiales son $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$ y $\pm 5\pi/2$. Las medidas correspondientes en grados son $\pm 90°$, $\pm 270°$ y $\pm 450°$.

Los dominios de las funciones cotangente y cosecante están formados por todos los ángulos excepto los que tienen $y = 0$ (esto es, todos los ángulos excepto los que tienen lados terminales sobre el eje x). Éstos son los ángulos de medida πn en radianes (o medida $180° \cdot n$ en grados) para cualquier entero n.

Nuestro examen de dominios se resume en la tabla siguiente, donde n denota cualquier entero.

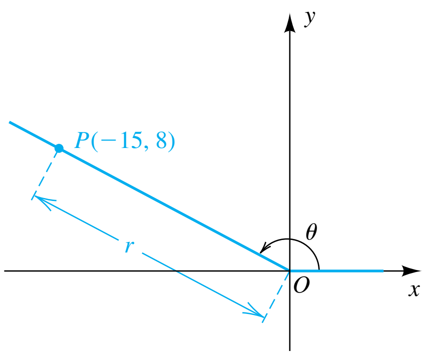
Función	Dominio
seno, coseno	todo ángulo θ
tangente, secante	todo ángulo θ excepto $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \pi n = 90° + 180° \cdot n$
cotangente, cosecante	todo ángulo θ excepto $\theta = \pi n = 180° \cdot n$

Para cualquier punto $P(x, y)$ de la definición precedente, $|x| \leq r$ y $|y| \leq r$ o bien, lo que es equivalente, $|x/r| \leq 1$ y $|y/r| \leq 1$. Por tanto,

$$|\text{sen}\ \theta| \leq 1, \quad |\cos\theta| \leq 1, \quad |\csc\theta| \geq 1 \quad \text{y} \quad |\sec\theta| \geq 1$$

para toda θ en los dominios de estas funciones.

FIGURA 13



EJEMPLO 7 **Hallar valores de función trigonométrica de un ángulo en posición estándar**

Si θ es un ángulo en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares y si $P(-15, 8)$ está en el lado terminal de θ, encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN El punto $P(-15, 8)$ se muestra en la figura 13. Aplicando la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo con $x = -15$, $y = 8$ y

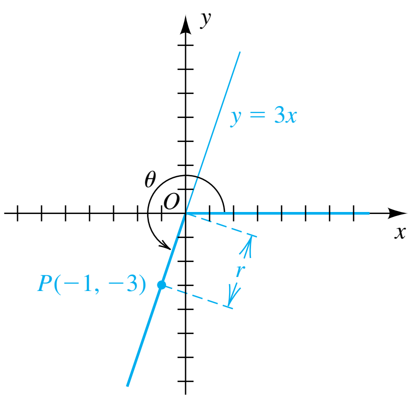
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17,$$

obtenemos lo siguiente:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{17} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{15}{17} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{8}{15}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{8} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = -\frac{17}{15} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{15}{8}$$

FIGURA 14



EJEMPLO 8 **Hallar valores de función trigonométrica de un ángulo en posición estándar**

Un ángulo θ está en posición estándar y su lado terminal se encuentra en el tercer cuadrante sobre la recta $y = 3x$. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = 3x$ está trazada en la figura 14, junto con los lados inicial y terminal de θ. Como el lado terminal de θ está en el tercer cuadrante, empezamos por escoger un valor negativo conveniente de x, por ejemplo $x = -1$.

(continúa)

Sustituyendo en $y = 3x$ nos da $y = 3(-1) = -3$ y por lo tanto $P(-1, -3)$ está en el lado terminal. Aplicando la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo con

$$x = -1, \quad y = -3, \quad \text{y} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

tendremos

$$\text{sen}\ \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \tan\theta = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\csc\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3} \qquad \sec\theta = -\frac{\sqrt{10}}{1} \qquad \cot\theta = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

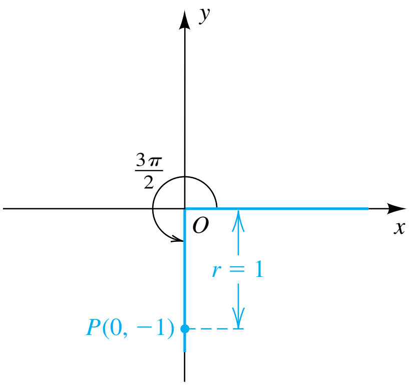
■

La definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo se pueden aplicar si θ es un ángulo cuadrantal. El procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 Hallar valores de función trigonométrica de un ángulo cuadrantal

Si $\theta = 3\pi/2$, encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ.

FIGURA 15



SOLUCIÓN Note que $3\pi/2 = 270°$. Si θ está colocado en posición estándar, el lado terminal de θ coincide con el eje y negativo, como se ve en la figura 15. Para aplicar la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, podemos seleccionar *cualquier* punto P en el lado terminal de θ. Para mayor sencillez, usamos $P(0, -1)$. En este caso, $x = 0$, $y = -1$, $r = 1$ y por tanto

$$\text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{-1} = -1 \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{-1} = 0.$$

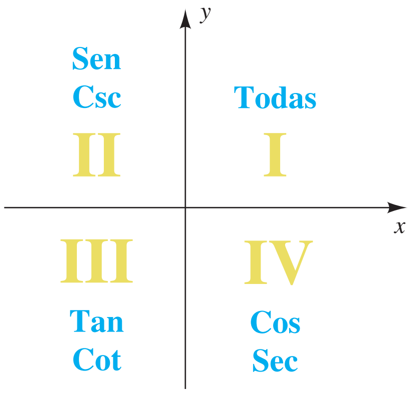
Las funciones tangente y secante no están definidas, porque las expresiones sin sentido $\tan\theta = (-1)/0$ y $\sec\theta = 1/0$ se presentan cuando sustituimos en las fórmulas apropiadas. ■

Determinemos los signos asociados con los valores de las funciones trigonométricas. Si θ está en el segundo cuadrante y $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal, entonces x es negativa y y es positiva. En consecuencia, $\text{sen}\ \theta = y/r$ y $\csc\theta = r/y$ son positivos y las otras cuatro funciones trigonométricas, que contienen x, son negativas. Comprobando los cuadrantes restantes de un modo semejante, obtenemos la siguiente tabla.

Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante que contiene θ	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

FIGURA 16
Funciones trigonométricas positivas



El diagrama de la figura 16 puede ser útil para recordar cuadrantes en los que las funciones trigonométricas son *positivas*. Si una función no aparece (por ejemplo cos en el segundo cuadrante), entonces esa función es negativa. Terminamos esta sección con tres ejemplos que requieren usar la información de la tabla precedente.

EJEMPLO 10 **Hallar el cuadrante que contenga un ángulo**

Encuentre el cuadrante que contenga θ si $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$.

SOLUCIÓN Por consulta de la tabla de signos o la figura 16, vemos que $\cos\theta > 0$ (el coseno es positivo) si θ está en los cuadrantes primero o cuarto, y que $\operatorname{sen}\theta < 0$ (el seno es negativo) si θ está en los cuadrantes tercero o cuarto. En consecuencia, para que ambas condiciones queden satisfechas, θ debe estar en el cuarto cuadrante. ■

EJEMPLO 11 **Hallar valores de funciones trigonométricas a partir de condiciones prescritas**

Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ y $\tan\theta < 0$, utilice identidades fundamentales para hallar los valores de las otras cinco funciones trigonométricas.

SOLUCIÓN Como $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5} > 0$ (positivo) y $\tan\theta < 0$ (negativo), θ está en el segundo cuadrante. Usando la relación $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y el hecho de que $\cos\theta$ es negativo en el segundo cuadrante, tenemos

$$\cos\theta = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = -\sqrt{1 - \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\tfrac{16}{25}} = -\tfrac{4}{5}.$$

A continuación usamos la identidad tangente para obtener

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}.$$

Por último, usando las identidades recíprocas tenemos

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-4/5} = -\frac{5}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{-3/4} = -\frac{4}{3}.$$ ■

EJEMPLO 12 **Usar identidades fundamentales**

Reescriba $\sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cot^2\theta}$ en forma no radical sin usar valores absolutos para $\pi < 0 < 2\pi$.

SOLUCIÓN

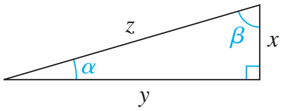
$$\begin{aligned}\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cot^2\theta} &= \sqrt{1 + \cot^2\theta} && \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1\\ &= \sqrt{\csc^2\theta} && 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta\\ &= |\csc\theta| && \sqrt{x^2} = |x|\end{aligned}$$

Como $\pi < \theta < 2\pi$, sabemos que θ está en los cuadrantes tercero o cuarto. En consecuencia, $\csc\theta$ es *negativa* y por la definición de valor absoluto tenemos

$$|\csc\theta| = -\csc\theta.$$ ■

6.2 Ejercicios

Ejer. 1–2: Use sentido común para relacionar las variables y los valores. (Los triángulos se trazan a escala y los ángulos se miden en radianes.)

1 

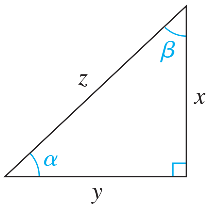
(a) α (A) 7

(b) β (B) 0.28

(c) x (C) 24

(d) y (D) 1.29

(e) z (E) 25

2 

(a) α (A) 23.35

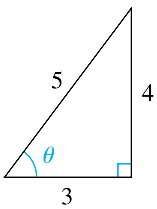
(b) β (B) 16

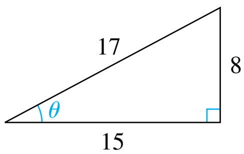
(c) x (C) 17

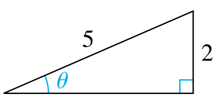
(d) y (D) 0.82

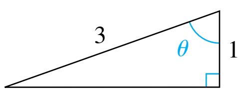
(e) z (E) 0.76

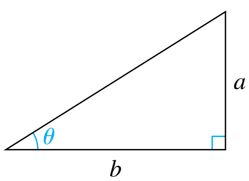
Ejer. 3–10: Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo θ.

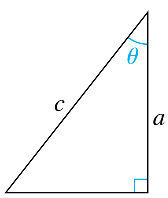
3 

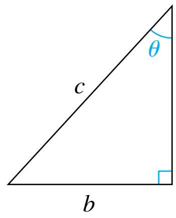
4 

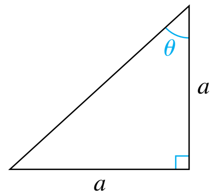
5 

6 

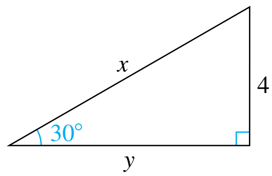
7 

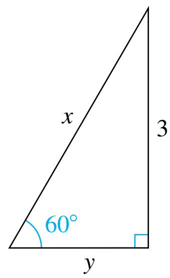
8 

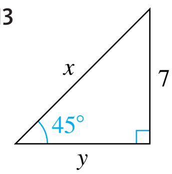
9 

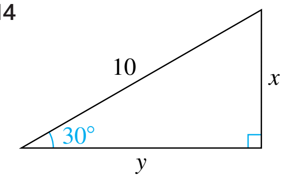
10 

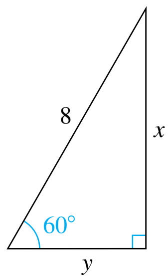
Ejer. 11–16: Encuentre los valores exactos de x y y.

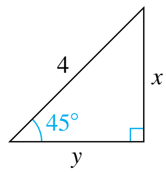
11 

12 

13 

14 

15 

16 

Ejer. 17–22: Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas para el ángulo agudo θ.

17 $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$

18 $\cos\theta = \frac{8}{17}$

19 $\tan\theta = \frac{5}{12}$

20 $\cot\theta = \frac{7}{24}$

21 $\sec\theta = \frac{6}{5}$

22 $\csc\theta = \frac{4}{3}$

23 **Altura de un árbol** Un guardabosque, situado a 200 pies de la base de una sequoia roja, observa que el ángulo entre el suelo y la cima del árbol es de 60°. Estime la altura del árbol.

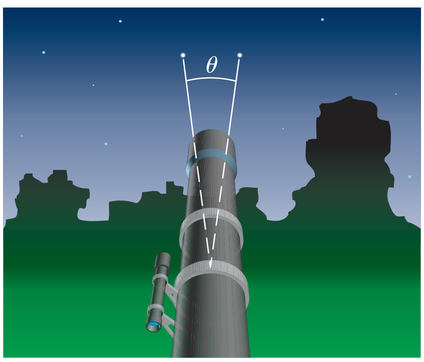
24 **Distancia al Monte Fuji** El monte Fuji de Japón mide aproximadamente 12,400 pies de altura. Un estudiante de trigonometría, situado a varias millas del monte, observa que el ángulo entre el nivel del suelo y el piso es de 30°. Estime la distancia del estudiante al punto a nivel del suelo que está directamente abajo del pico.

25 **Bloques de Stonehenge** Stonehenge en los llanos de Salisbury, Inglaterra, fue construido usando bloques de piedra maciza de más de 99,000 libras cada uno. Levantar una sola piedra requería de 550 personas que la empujaran por una rampa inclinada a un ángulo de 9°. Calcule la distancia que una piedra era movida para levantarla a una altura de 30 pies.

26 **Altura de un anuncio espectacular** Colocado en 1990 y removido en 1997, el anuncio más alto del mundo era una gran letra I situada en lo alto del edificio de 73 pisos First Interstate World Center en Los Ángeles. A una distancia de 200 pies del punto directamente abajo del anuncio, el ángulo entre el suelo y la cima del anuncio era de 78.87°. Calcule la altura de la cima del anuncio.

27 **Resolución de telescopio** Dos estrellas que están muy cercanas entre sí pueden aparecer como una sola. La capacidad del telescopio para separar sus imágenes se llama resolución. Cuando menor es la resolución, mejor es la capacidad del telescopio para separar imágenes en el cielo. En un telescopio de refracción, la resolución θ (vea la figura) se puede mejorar al usar una lente con diámetro D más grande. La relación entre θ en grados y D en metros está dada por sen $\theta = 1.22\lambda/D$, donde λ es la longitud de onda de la luz en metros. El telescopio de refracción más grande del mundo está en la Universidad de Chicago. A una longitud de onda de $\lambda = 550 \times 10^{-9}$ metros, su resolución es 0.00003769°. Calcule el diámetro de la lente.

EJERCICIO 27

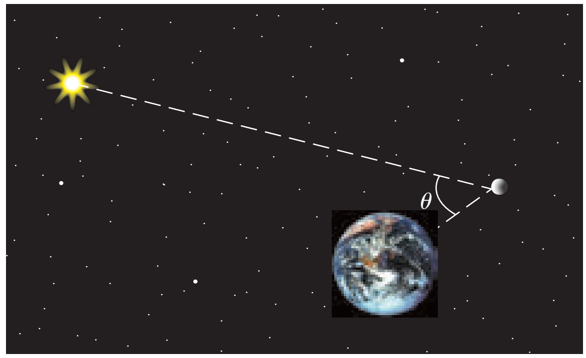


28 **Fases de la Luna** Las fases de la Luna se pueden describir usando el ángulo de fase θ, determinado por el Sol, la Luna y la Tierra, como se muestra en la figura. Debido a que la Luna gira alrededor de la Tierra, el ángulo θ cambia durante el curso de un mes. El área de la región A de la Luna, que aparece iluminada para un observador en la Tierra, está dado por $A = \frac{1}{2}\pi R^2(1 + \cos\theta)$, donde $R = 1080$ millas es el radio de la Luna. Calcule A para las siguientes posiciones de la Luna:

(a) $\theta = 0°$ (luna llena) **(b)** $\theta = 180°$ (luna nueva)

(c) $\theta = 90°$ (cuarto creciente) **(d)** $\theta = 103°$

EJERCICIO 28



Ejer. 29–34: Calcule a cuatro lugares decimales, cuando sea apropiado.

29 **(a)** sen 73° **(b)** cos 61°

(c) csc 105° **(d)** sec (−215°)

30 **(a)** tan 282° **(b)** cot (−81°)

(c) sec 202° **(d)** sen 97°

31 **(a)** cot (π/13) **(b)** csc 1.32

(c) cos (−8.54) **(d)** tan $\frac{15}{8}$

32 **(a)** sen (−0.11) **(b)** sec (2π/5)

(c) tan $\left(-\frac{3}{13}\right)$ **(d)** cos 2.4π

33 **(a)** sen 30° **(b)** sen 30

(c) cos π° **(d)** cos π

34 **(a)** sen 45° **(b)** sen 45

(c) cos (3π/2)° **(d)** cos (3π/2)

Ejer. 35–38: Use las identidades de Pitágoras para escribir la expresión como un entero.

35 **(a)** $\tan^2 4\beta - \sec^2 4\beta$ **(b)** $4\tan^2\beta - 4\sec^2\beta$

36 **(a)** $\csc^2 3\alpha - \cot^2 3\alpha$ **(b)** $3\csc^2\alpha - 3\cot^2\alpha$

37 **(a)** $5\,\text{sen}^2\,\theta + 5\cos^2\theta$ **(b)** $5\,\text{sen}^2\,(\theta/4) + 5\cos^2(\theta/4)$

38 (a) $7\sec^2\gamma - 7\tan^2\gamma$

(b) $7\sec^2(\gamma/3) - 7\tan^2(\gamma/3)$

Ejer. 39–44: Simplifique la expresión.

39 $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$

40 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta}$

41 $\dfrac{9 - \tan^2\theta}{\tan^2\theta - 5\tan\theta + 6}$

42 $\dfrac{\cot^2\alpha - 4}{\cot^2\alpha - \cot\alpha - 6}$

43 $\dfrac{2 - \tan\theta}{2\csc\theta - \sec\theta}$

44 $\dfrac{\csc\theta + 1}{(1/\operatorname{sen}^2\theta) + \csc\theta}$

Ejer. 45–50: Use identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda, para cualquier ángulo agudo θ.

45 $\cot\theta, \operatorname{sen}\theta$

46 $\tan\theta, \cos\theta$

47 $\sec\theta, \operatorname{sen}\theta$

48 $\csc\theta, \cos\theta$

49 $\operatorname{sen}\theta, \sec\theta$

50 $\cos\theta, \cot\theta$

Ejer. 51–74: Verifique la identidad al transformar el lado izquierdo en el lado derecho.

51 $\cos\theta\sec\theta = 1$

52 $\tan\theta\cot\theta = 1$

53 $\operatorname{sen}\theta\sec\theta = \tan\theta$

54 $\operatorname{sen}\theta\cot\theta = \cos\theta$

55 $\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta} = \cot\theta$

56 $\cot\theta\sec\theta = \csc\theta$

57 $(1 + \cos 2\theta)(1 - \cos 2\theta) = \operatorname{sen}^2 2\theta$

58 $\cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$

59 $\cos^2\theta(\sec^2\theta - 1) = \operatorname{sen}^2\theta$

60 $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$

61 $\dfrac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\csc(\theta/2)} + \dfrac{\cos(\theta/2)}{\sec(\theta/2)} = 1$

62 $1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta/2) = 2\cos^2(\theta/2) - 1$

63 $(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) = \dfrac{1}{\sec^2\theta}$

64 $(1 - \operatorname{sen}^2\theta)(1 + \tan^2\theta) = 1$

65 $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\operatorname{sen}\theta$

66 $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \cot\theta\cos\theta$

67 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 1 + \cot\theta$

68 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta} = 1 + \tan\theta$

69 $(\cot\theta + \csc\theta)(\tan\theta - \operatorname{sen}\theta) = \sec\theta - \cos\theta$

70 $\cot\theta + \tan\theta = \csc\theta\sec\theta$

71 $\sec^2 3\theta\csc^2 3\theta = \sec^2 3\theta + \csc^2 3\theta$

72 $\dfrac{1 + \cos^2 3\theta}{\operatorname{sen}^2 3\theta} = 2\csc^2 3\theta - 1$

73 $\log\csc\theta = -\log\operatorname{sen}\theta$

74 $\log\tan\theta = \log\operatorname{sen}\theta - \log\cos\theta$

Ejer. 75–78: Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y P está en el lado terminal.

75 $P(12, -5)$

76 $P(-8, -15)$

77 $P(-2, -5)$

78 $P(-2, 3)$

Ejer. 79–84: Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y el lado terminal de θ está en el cuadrante especificado y satisface la condición dada.

79 II; en la recta $y = -3x$

80 IV; en la recta $3y + 5x = 0$

81 IV; en la recta que tiene pendiente $-\frac{3}{4}$

82 III; biseca el cuadrante

83 III; paralela a la recta $2y - 7x + 2 = 0$

84 II; paralela a la recta que pasa por $A(1, 6)$ y $B(3, -2)$

Ejer. 85–86: Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de cada ángulo, siempre que sea posible.

85 (a) $90°$ (b) $0°$ (c) $7\pi/2$ (d) 3π

86 (a) $180°$ (b) $-90°$ (c) 2π (d) $5\pi/2$

Ejer. 87–88: Encuentre el cuadrante que contenga θ si las condiciones dadas son verdaderas.

87 (a) $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

(b) $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cot\theta > 0$

(c) $\csc\theta > 0$ y $\sec\theta < 0$

(d) $\sec\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

88 (a) $\tan\theta < 0$ y $\cos\theta > 0$

(b) $\sec\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$

(c) $\csc\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$

(d) $\cos\theta < 0$ y $\csc\theta < 0$

Ejer. 89–96: Use identidades fundamentales para hallar los valores de las funciones trigonométricas para las condiciones dadas.

89 $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$

90 $\cot\theta = \frac{3}{4}$ y $\cos\theta < 0$

91 $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13}$ y $\sec\theta > 0$

92 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

93 $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

94 $\csc\theta = 5$ y $\cot\theta < 0$

95 $\sec\theta = 4$ y $\csc\theta > 0$

96 $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{5}$ y $\cos\theta > 0$

Ejer. 97–102: Reescriba la expresión en forma no radical sin usar valores absolutos para los valores indicados de θ.

97 $\sqrt{\sec^2\theta - 1}$; $\pi/2 < \theta < \pi$

98 $\sqrt{1 + \cot^2\theta}$; $0 < \theta < \pi$

99 $\sqrt{1 + \tan^2\theta}$; $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

100 $\sqrt{\csc^2\theta - 1}$; $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

101 $\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta/2)}$; $2\pi < \theta < 4\pi$

102 $\sqrt{\cos^2(\theta/2)}$; $0 < \theta < \pi$

6.3 Funciones trigonométricas de números reales

El dominio de cada función trigonométrica que hemos estudiado es un conjunto de ángulos. En cálculo y en numerosas aplicaciones, los dominios de funciones están formados por números reales. Para considerar el dominio de una función trigonométrica como un subconjunto de $\mathbb{R}$, podemos usar la siguiente definición.

Definición de las funciones trigonométricas de números reales

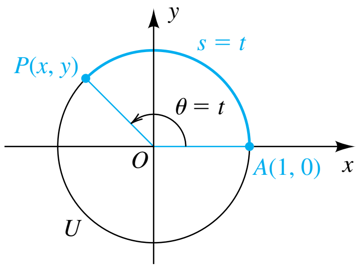
El **valor de una función trigonométrica en un número real** ***t*** es su valor en un ángulo de t radianes, siempre que exista ese valor.

Usando esta definición, podemos interpretar una notación como sen 2 *o* como el seno del número real 2 *o* el seno de un ángulo de 2 radianes. Al igual que en la sección 6.2, si se usan medidas en grados, escribiremos sen 2°. Con esta idea,

$$\operatorname{sen} 2 \neq \operatorname{sen} 2°.$$

Para hallar los valores de funciones trigonométricas de números reales con una calculadora, usamos el modo de radianes.

FIGURA 1



Podemos interpretar geométricamente funciones trigonométricas de números reales si usamos una circunferencia unitaria U; es decir, una circunferencia de radio 1, con centro en el origen O de un plano de coordenadas rectangulares. La circunferencia U es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Sea t un número real tal que $0 < t < 2\pi$, y denotemos con θ el ángulo (en posición estándar) medido t en radianes. Una posibilidad se ilustra en la figura 1, donde $P(x, y)$ es el punto de intersección del lado terminal de θ y la circunferencia unitaria U y donde s es la longitud del arco de circunferencia de $A(1, 0)$ a $P(x, y)$. Usando la fórmula $s = r\theta$ para la longitud de un arco de circunferencia, con $r = 1$ y $\theta = t$, vemos que

$$s = r\theta = 1(t) = t.$$

Entonces, *t puede ser considerada como la medida en radianes del ángulo θ o como la longitud del arco de circunferencia AP en U.*

A continuación consideremos *cualquier* número t real no negativo. Si consideramos que el ángulo θ medido t en radianes ha sido generado al girar el segmento de recta OA alrededor de O en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj, entonces t es la distancia a lo largo de U que A viaja antes de llegar a su posición final $P(x, y)$. En la figura 2 hemos ilustrado un caso para $t < 2\pi$; no obstante, si $t > 2\pi$, entonces A puede viajar alrededor de U varias veces en sentido contrario al de las manecillas de un reloj antes de llegar a $P(x, y)$.

Si $t < 0$, entonces la rotación de OA es *en el sentido de giro de las manecillas del reloj*, y la distancia que A viaja antes de llegar a $P(x, y)$ es $|t|$, como se ilustra en la figura 3.

FIGURA 2
$\theta = t, t > 0$

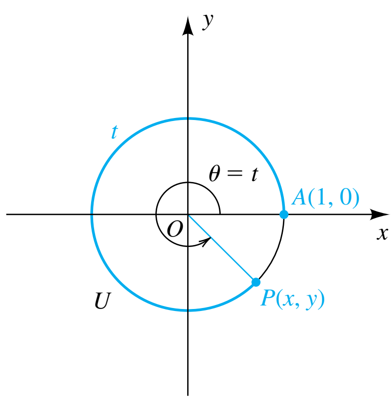
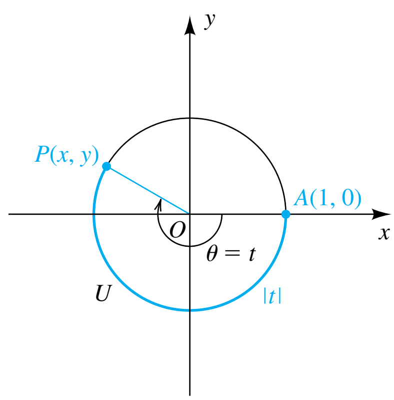


FIGURA 3
$\theta = t, t < 0$



El análisis precedente indica la forma en que *podemos asociar, con cada número real t, un punto único P(x, y) en U*. A $P(x, y)$ lo llamaremos **punto sobre la circunferencia unitaria U que corresponde a t.** Las coordenadas (x, y) de P se pueden usar para hallar las seis funciones trigonométricas de t. Entonces, por la definición de las funciones trigonométricas de números reales junto con la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo (dada en la sección 6.2), vemos que

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y.$$

El uso del mismo procedimiento para las restantes cinco funciones trigonométricas nos da las fórmulas siguientes.

Definición de las funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria

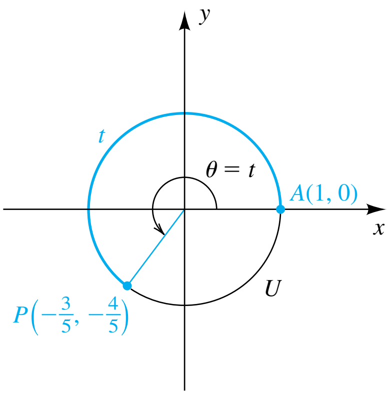
Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto en la circunferencia unitaria U que corresponde a t, entonces

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (\text{si } y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0).$$

Las fórmulas en esta definición expresan valores de una función en términos de coordenadas de un punto P en una circunferencia unitaria. Por esta razón, las funciones trigonométricas a veces se conocen como **funciones circulares.**

FIGURA 4



EJEMPLO 1 **Encontrar valores de las funciones trigonométricas**

Un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria U correspondiente a un número real t se muestra en la figura 4, para $\pi < t < 3\pi/2$. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas en t.

SOLUCIÓN Consultando la figura 4, vemos que las coordenadas del punto $P(x, y)$ son

$$x = -\tfrac{3}{5}, \qquad y = -\tfrac{4}{5}.$$

El uso de la definición de las funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria nos da

$$\operatorname{sen} t = y = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = x = -\frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{y} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4} \quad \sec t = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3} \quad \cot t = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

■

EJEMPLO 2 **Hallar un punto en *U* relativo a un punto dado**

Denotemos con $P(t)$ el punto en la circunferencia unitaria U que corresponde a t para $0 \leq t < 2\pi$. Si $P(t) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, encuentre

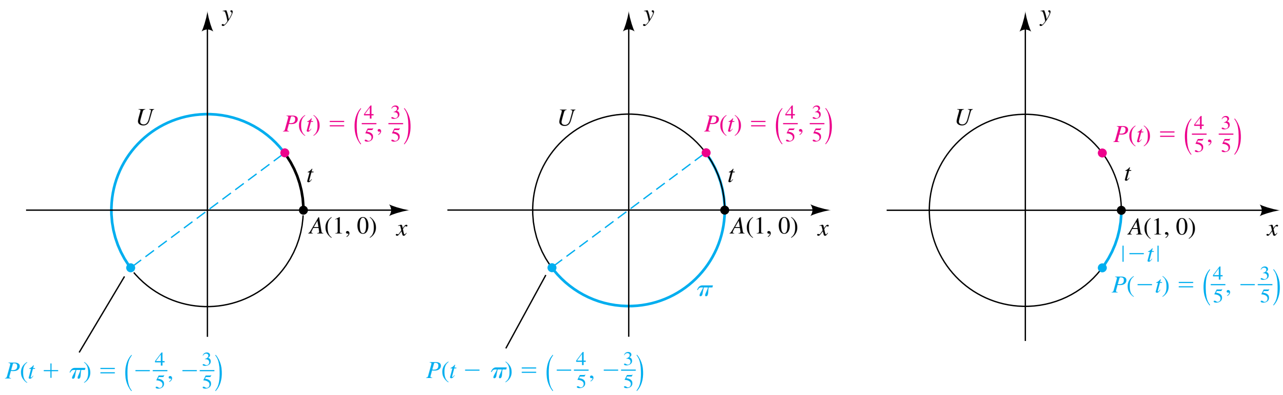
(a) $P(t + \pi)$ **(b)** $P(t - \pi)$ **(c)** $P(-t)$

SOLUCIÓN

(a) El punto $P(t)$ en U se localiza en la figura 5(a), donde también hemos mostrado el arco AP de longitud t. Para hallar $P(t + \pi)$, nos desplazamos una distancia π en *sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj* a lo largo de U desde $P(t)$, como lo indica el arco azul en la figura. Como π es la mitad de la circunferencia de U, esto nos da el punto $P(t + \pi) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ diametralmente opuesto a $P(t)$.

FIGURA 5

(a) **(b)** **(c)**

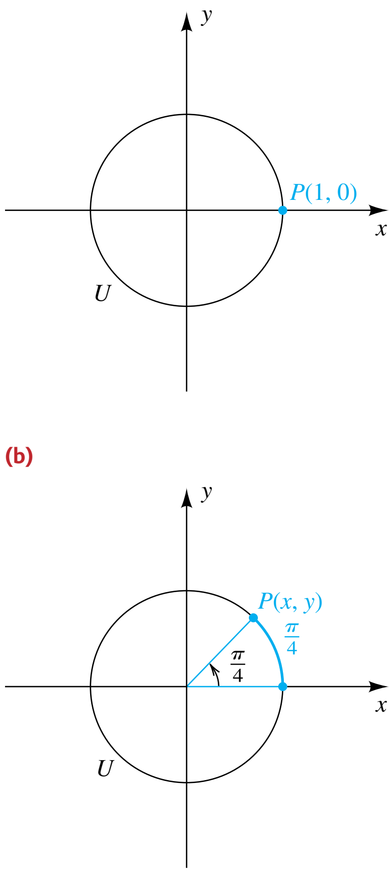


(b) Para hallar $P(t - \pi)$, nos desplazamos una distancia π *en el sentido de giro de las manecillas de un reloj* a lo largo de U desde $P(t)$, como se indica en la figura 5(b). Esto nos da $P(t - \pi) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. Note que $P(t + \pi) = P(t - \pi)$.

(c) Para hallar $P(-t)$, nos movemos a lo largo de U una distancia $|-t|$ *en el sentido de giro de las manecillas de un reloj* desde $A(1, 0)$, como se indica en la figura 5(c). Esto es equivalente a reflejar $P(t)$ a través del eje x. Por lo tanto, simplemente cambiamos el signo de la coordenada y de $P(t) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ para obtener $P(-t) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. ■

FIGURA 6

(a)



EJEMPLO 3 Hallar valores especiales de las funciones trigonométricas

Encuentre los valores de las funciones trigonométricas en t:

(a) $t = 0$ **(b)** $t = \frac{\pi}{4}$ **(c)** $t = \frac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN

(a) El punto P en la circunferencia unitaria U que corresponde a $t = 0$ tiene coordenadas $(1, 0)$, como se ve en la figura 6(a). Así, hacemos $x = 1$ y $y = 0$ en la definición de las funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria, obteniendo

$$\operatorname{sen} 0 = y = 0 \qquad \cos 0 = x = 1$$
$$\tan 0 = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec 0 = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Note que csc 0 y cot 0 son indefinidas, porque $y = 0$ es un denominador.

(b) Si $t = \pi/4$, entonces el ángulo $\pi/4$ medido en radianes mostrado en la figura 6(b) biseca el primer cuadrante y el punto $P(x, y)$ está en la recta $y = x$. Como $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ y como $y = x$, obtenemos

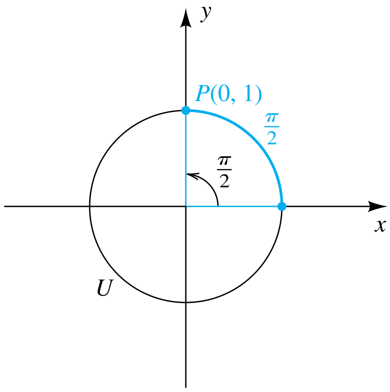
$$x^2 + x^2 = 1, \qquad \text{o} \qquad 2x^2 = 1.$$

Al despejar x y observar que $x > 0$ tendremos

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces, P es el punto $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$. Si hacemos $x = \sqrt{2}/2$ y $y = \sqrt{2}/2$ en la definición de las funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria, tendremos

FIGURA 6
(c)



$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \tan\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}=1$$

$$\csc\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\qquad \sec\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\qquad \cot\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}=1.$$

(c) El punto P en U que corresponde a $t = \pi/2$ tiene coordenadas $(0, 1)$, como se ve en la figura 6(c). Así, hacemos $x = 0$ y $y = 1$ en la definición de las funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria, obteniendo

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1\qquad \cos\frac{\pi}{2}=0\qquad \csc\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1}=1\qquad \cot\frac{\pi}{2}=\frac{0}{1}=0.$$

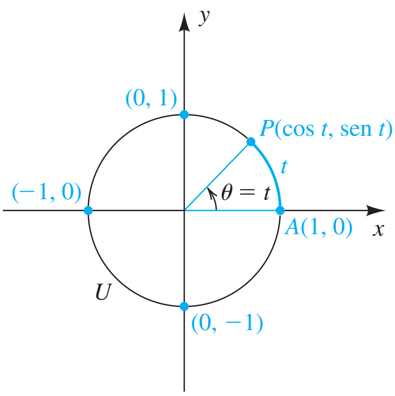
Las funciones tangente y secante no están definidas, porque $x = 0$ es un denominador en cada caso. ■

Un resumen de las funciones trigonométricas de ángulos especiales aparece en el Apéndice IV.

Usaremos la formulación de la circunferencia unitaria de las funciones trigonométricas para ayudar a obtener estas gráficas. Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto en la circunferencia unitaria U que corresponde a t, entonces por la definición de las funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria

$$x = \cos t \qquad \text{y} \qquad y = \operatorname{sen} t.$$

FIGURA 7



Entonces, como se ve en la figura 7, podemos denotar $P(x, y)$ por

$$P(\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Si $t > 0$, el número real t puede interpretarse como la medida del ángulo θ en radianes o como la longitud del arco AP.

Si hacemos que t aumente de 0 a 2π radianes, el punto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ se mueve alrededor de la circunferencia unitaria U una vez en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj. Al observar la variación de las coordenadas x y y de P, obtenemos la siguiente tabla. La notación $0 \to \pi/2$ en la primera fila significa que t aumenta de 0 a $\pi/2$, y la notación $(1, 0) \to (0, 1)$ denota la variación correspondiente de $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ cuando se mueve a lo largo de U de $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Si t aumenta de 0 a $\pi/2$, entonces sen t aumenta de 0 a 1, que denotamos por $0 \to 1$. Además, sen t toma todo valor entre 0 y 1. Si aumenta de $\pi/2$ a π, entonces sen t disminuye de 1 a 0, que se denota por $1 \to 0$. Otras entradas en la tabla se pueden interpretar de manera semejante.

t	$P(\cos t, \operatorname{sen} t)$	$\cos t$	$\operatorname{sen} t$
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$(1, 0) \to (0, 1)$	$1 \to 0$	$0 \to 1$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$(0, 1) \to (-1, 0)$	$0 \to -1$	$1 \to 0$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$(-1, 0) \to (0, -1)$	$-1 \to 0$	$0 \to -1$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$(0, -1) \to (1, 0)$	$0 \to 1$	$-1 \to 0$

Si t aumenta de 2π a 4π, el punto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ en la figura 7 traza la circunferencia unitaria U otra vez y los patrones para sen t y cos t se repiten; es decir,

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

para toda t en el intervalo $[0, 2\pi]$. Lo mismo es cierto si t aumenta de 4π a 6π, de 6π a 8π, etcétera. En general, tenemos el siguiente teorema.

Teorema en valores de función repetidos para sen y cos

Si n es cualquier entero, entonces

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi n) = \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \cos(t + 2\pi n) = \cos t.$$

La variación repetitiva de las funciones seno y coseno es *periódica* en el sentido de la siguiente definición

Definición de función periódica

Una función f es **periódica** si existe un número real positivo k tal que

$$f(t + k) = f(t)$$

para toda t en el dominio de f. Este número real positivo k mínimo, si existe, es el **periodo** de f.

Ya el lector tiene un sentido común del concepto del periodo de una función. Por ejemplo, si en un lunes se le pregunta "¿qué día de la semana será dentro de 15 días?", su respuesta será "martes" porque entiende que los días de la semana se repiten cada 7 días y 15 es un día más que dos periodos completos de 7 días. Del examen que precede al teorema anterior, vemos que el periodo de las funciones seno y coseno es 2π.

Ahora podemos fácilmente obtener las gráficas de las funciones seno y coseno. Como deseamos trazar estas gráficas en un plano xy, sustituyamos la variable t por x y consideremos las ecuaciones

$$y = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y = \cos x.$$

Podemos considerar x como la medida de cualquier ángulo en radianes, pero, en cálculo, x suele ser considerada como número real. Estos son puntos de vista equivalentes, porque el seno (o coseno) de un ángulo de x radianes es igual que el seno (o coseno) del número real x. La variable y denota el valor de la función que corresponde a x.

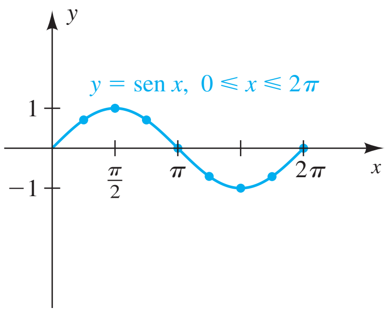
x	$y = \operatorname{sen} x$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
2π	0

La tabla que se ve al margen es una lista de coordenadas de varios puntos en la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le 2\pi$. Se pueden determinar puntos adicionales usando resultados de ángulos especiales, por ejemplo

$$\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \approx 0.8660.$$

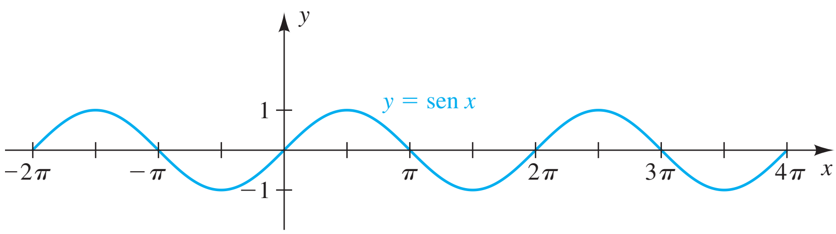
Para trazar la gráfica para $0 \le x \le 2\pi$, localizamos los puntos dados por la tabla y recuerde que sen x aumenta en $[0, \pi/2]$, disminuyen en $[\pi/2, \pi]$ y $[\pi, 3\pi/2]$, y aumenta en $[3\pi/2, 2\pi]$. Esto nos da el trazo de la figura 8. Como la función seno es periódica, el patrón que se muestra en la figura 8 se repite a la derecha y a la izquierda, en intervalos de longitud 2π. Esto nos da el trazo de la figura 9.

FIGURA 8



x	$y = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
π	-1
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
2π	1

FIGURA 9



Podemos usar el mismo procedimiento para trazar la gráfica de $y = \cos x$. La tabla del margen es una lista de coordenadas de varios puntos en la gráfica de $0 \leq x \leq 2\pi$. La localización de estos puntos lleva a la parte de la gráfica ilustrada en la figura 10. Si se repite este trazo a la derecha y a la izquierda, en intervalos de longitud 2π, obtenemos el trazo de la figura 11.

FIGURA 10

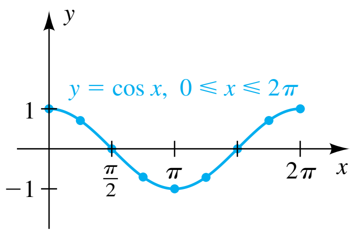
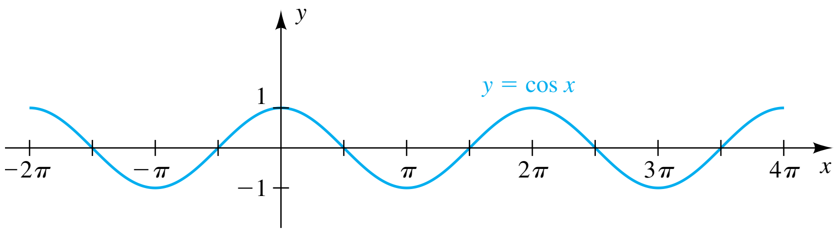


FIGURA 11



La parte de la gráfica de la función seno o coseno correspondiente a $0 \leq x \leq 2\pi$ es un **ciclo.** A veces nos referimos a un ciclo como una **onda senoidal** o una **onda cosenoidal.**

El rango de las funciones seno y coseno está formado por todos los números reales en el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Como $\csc x = 1/\text{sen}\, x$ y $\sec x = 1/\cos x$, se deduce que el conjunto de valores de las funciones cosecante y secante está formado por todos los números reales que tienen valor absoluto mayor o igual a 1.

Como veremos, el rango de las funciones tangente y cotangente está formado por todos los números reales.

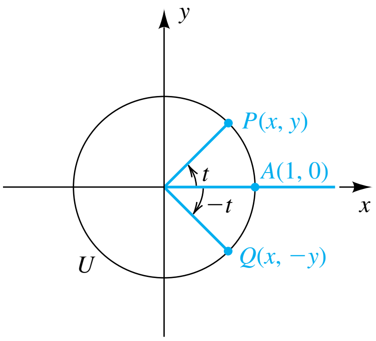
Antes de estudiar gráficas de otras funciones trigonométricas, establezcamos fórmulas que contienen funciones de $-t$ para cualquier t. Como aparece un signo menos, las llamamos *fórmulas para ángulos negativos.*

Fórmulas para ángulos negativos

$\text{sen}\,(-t) = -\text{sen}\, t \quad \cos\,(-t) = \cos t \quad \tan\,(-t) = -\tan t$

$\csc\,(-t) = -\csc t \quad \sec\,(-t) = \sec t \quad \cot\,(-t) = -\cot t$

FIGURA 12



DEMOSTRACIONES Considere la circunferencia unitaria U de la figura 12. Cuando t aumenta de 0 a 2π, el punto $P(x, y)$ traza la circunferencia unitaria U una vez en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj y el punto $Q(x, -y)$, correspondiente a $-t$, traza U una vez en el sentido de giro de las manecillas de un reloj. Al aplicar la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo (con $r = 1$), tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-t) &= -y = -\operatorname{sen} t \\ \cos(-t) &= x = \cos t \\ \tan(-t) &= \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t. \end{aligned}$$

Las demostraciones de las restantes tres fórmulas son semejantes. ■

En la siguiente ilustración se usan fórmulas para negativos para hallar un valor exacto para cada función trigonométrica.

ILUSTRACIÓN **Uso de fórmulas para negativos**

- $\operatorname{sen}(-45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(-30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$
- $\csc(-30°) = -\csc 30° = -2$
- $\sec(-60°) = \sec 60° = 2$
- $\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

A continuación usaremos fórmulas para negativos para verificar una identidad trigonométrica.

EJEMPLO 4 **Usar fórmulas para ángulos negativos para verificar una identidad**

Verifique la siguiente identidad transformando el lado izquierdo en el lado derecho:

$$\operatorname{sen}(-x)\tan(-x) + \cos(-x) = \sec x$$

SOLUCIÓN Podemos proceder como sigue

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-x)\tan(-x) + \cos(-x) &= (-\operatorname{sen} x)(-\tan x) + \cos x && \text{fórmulas para negativos} \\ &= \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \cos x && \text{identidad tangente} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x && \text{multiplique} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} && \text{sume términos} \\ &= \frac{1}{\cos x} && \text{identidad de Pitágoras} \\ &= \sec x && \text{identidad recíproca} \end{aligned}$$

■

Podemos usar las fórmulas para ángulos negativos para demostrar el siguiente teorema.

Teorema sobre funciones trigonométricas pares e impares	**(1)** Las funciones coseno y secante son pares. **(2)** Las funciones seno, tangente, cotangente y cosecante son impares.

DEMOSTRACIONES Demostraremos el teorema para las funciones coseno y seno. Si $f(x) = \cos x$, entonces

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x),$$

lo cual significa que la función coseno es par.

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces

$$f(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x = -f(x).$$

Entonces la función seno es impar. ■

Como la función seno es impar, su gráfica es simétrica con respecto al origen (vea figura 13). Como la función coseno es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y (vea la figura 14).

FIGURA 13 seno es impar

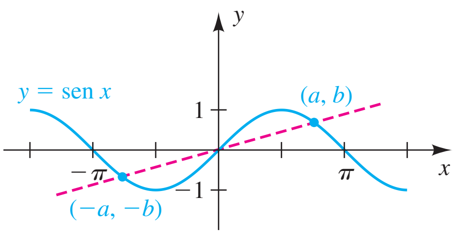
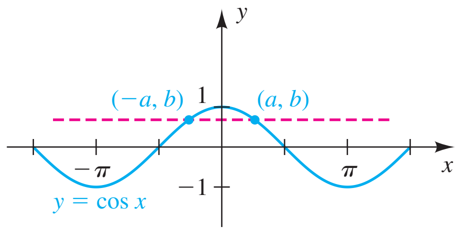


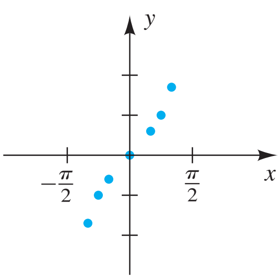
FIGURA 14 coseno es par



x	$y = \tan x$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3} \approx -1.7$
$-\frac{\pi}{4}$	-1
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.6$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3} \approx 1.7$

Por el teorema precedente, la función tangente es impar y por tanto la gráfica de $y = \tan x$ es simétrica con respecto al origen. La tabla del margen contiene una lista de algunos puntos sobre la gráfica si $-\pi/2 < x < \pi/2$. Los puntos correspondientes se localizan en la figura 15.

FIGURA 15



Los valores de $\tan x$ cerca de $x = \pi/2$ requieren especial atención. Si consideramos que $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$, entonces cuando x aumenta hacia $\pi/2$, el numerador $\operatorname{sen} x$ se aproxima a 1 y el denominador $\cos x$ se aproxima a 0. En

consecuencia, tan x toma valores positivos grandes. A continuación veamos algunas aproximaciones de tan x para x cercana a $\pi/2 \approx 1.5708$:

$$\tan 1.57000 \approx 1{,}255.8$$
$$\tan 1.57030 \approx 2{,}014.8$$
$$\tan 1.57060 \approx 5{,}093.5$$
$$\tan 1.57070 \approx 10{,}381.3$$
$$\tan 1.57079 \approx 158{,}057.9$$

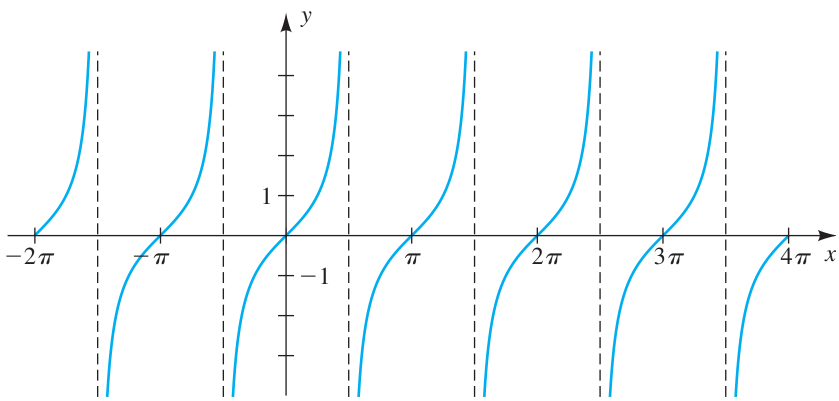
Note la rapidez con que tan x aumenta cuando x se aproxima a $\pi/2$. Decimos que tan x *aumenta sin límite cuando x se aproxima a* $\pi/2$, por medio de valores menores que $\pi/2$. Del mismo modo, si x se aproxima a $-\pi/2$ pasando por valores *mayores* que $-\pi/2$, entonces tan x *disminuye sin límite.* Podemos denotar esta variación usando la notación de flecha como sigue:

$$\text{cuando} \quad x \to \frac{\pi}{2}^{-}, \quad \tan x \to \infty$$

$$\text{cuando} \quad x \to -\frac{\pi}{2}^{+}, \quad \tan x \to -\infty$$

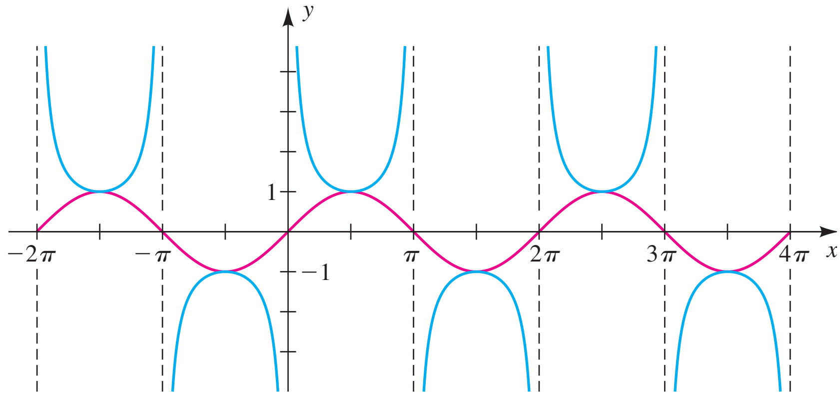
Esta variación de tan x en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$ se ilustra en la figura 16. Esta parte de la gráfica recibe el nombre de **rama** de la tangente. Las rectas $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$ son asíntotas verticales para la gráfica. El patrón se repite en los intervalos abiertos $(-3\pi/2, -\pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ y $(3\pi/2, 5\pi/2)$ y en intervalos semejantes de longitud π, como se ve en la figura. Entonces, *la función tangente es periódica con periodo* π.

FIGURA 16 $y = \tan x$



Podemos usar las gráficas de $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$ y $y = \tan x$ para ayudar a trazar las gráficas de las tres funciones trigonométricas restantes. Por ejemplo, como $\csc x = 1/\text{sen}\, x$, podemos hallar la coordenada y de un punto en la gráfica de la función cosecante al evaluar el recíproco de la correspondiente coordenada y en la gráfica del seno para todo valor de x, excepto $x = \pi n$ para cualquier entero n. (Si $x = \pi n$, $\text{sen}\, x = 0$ y por tanto $1/\text{sen}\, x$ no está definido.) Como ayuda para trazar la gráfica de la función cosecante, es conveniente trazar la gráfica de la función seno (mostrada en rojo en la figura 17) y luego tomar recíprocos para obtener puntos en la gráfica de la cosecante.

FIGURA 17 $y = \csc x$, $y = \operatorname{sen} x$

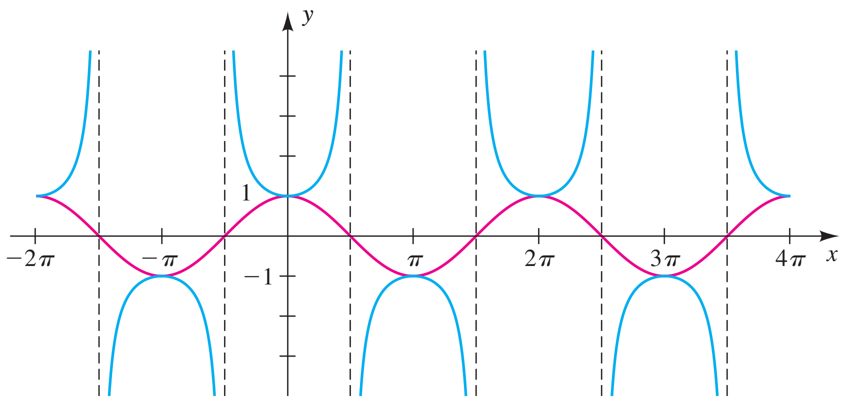


Note la forma en que la función cosecante aumenta o disminuye sin límite cuando x se aproxima a πn para cualquier entero n. La gráfica tiene asíntotas verticales $x = \pi n$, como se indica en la figura. Hay una **rama superior** de la cosecante en el intervalo $(0, \pi)$ y una **rama inferior** en el intervalo $(\pi, 2\pi)$; juntas forman *un ciclo* de la cosecante.

Como $\sec x = 1/\cos$ y $\cot x = 1/\tan x$, podemos obtener las gráficas de las funciones secante y cotangente al evaluar recíprocos de coordenadas y de puntos sobre las gráficas de las funciones coseno y tangente, como se ilustra en las figuras 18 y 19.

Un resumen gráfico de las seis funciones trigonométricas y sus inversas (estudiadas en la sección 7.6) aparece en el Apéndice III.

FIGURA 18 $y = \sec x$, $y = \cos x$



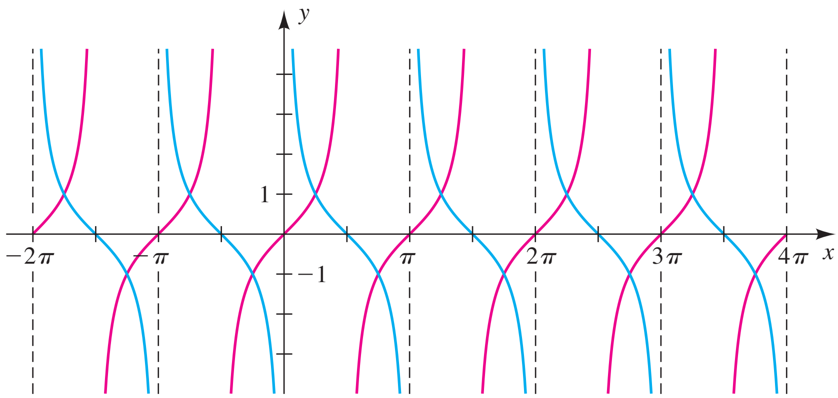
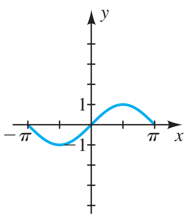
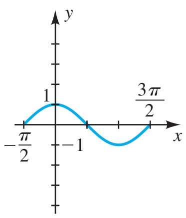
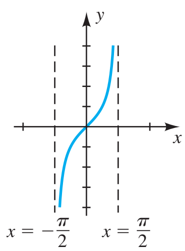
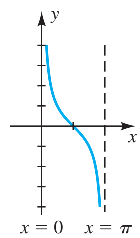
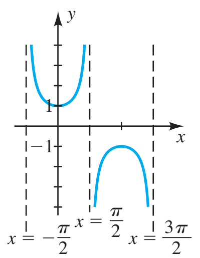
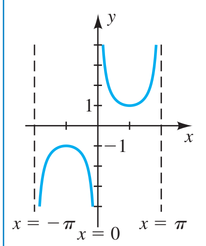


FIGURA 19 $y = \cot x$, $y = \tan x$

Hemos considerado muchas propiedades de las seis funciones trigonométricas de x, donde x es un número real o la medida de un ángulo en radianes. La tabla siguiente contiene un resumen de características importantes de estas funciones (n denota un entero arbitrario).

Resumen de características de las funciones trigonométricas y sus gráficas

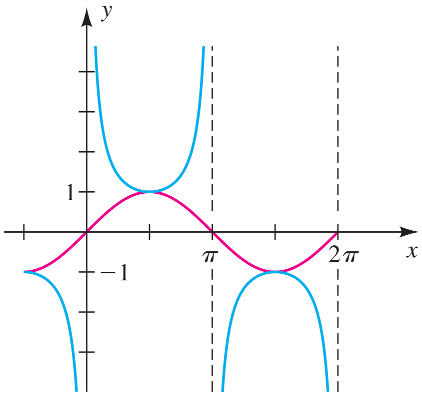
Características	$y = \operatorname{sen} x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$	$y = \sec x$	$y = \csc x$
Gráfica (un periodo)						
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x \neq \pi n$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x \neq \pi n$
Asíntotas verticales	ninguna	ninguna	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi n$
Rango	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Intersecciones con eje x	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	ninguno	ninguno
Intersecciones con eje y	0	1	0	ninguno	1	ninguno
Periodo	2π	2π	π	π	2π	2π
Par o impar	impar	par	impar	impar	par	impar
Simetría	origen	eje y	origen	origen	eje y	origen

EJEMPLO 5 **Investigar la variación de csc x**

Investigue la variación de csc x cuando

$$x \to \pi^-, \quad x \to \pi^+, \quad x \to \frac{\pi}{2}^- \quad \text{y} \quad x \to \frac{\pi}{6}^+.$$

FIGURA 20
$y = \csc x$, $y = \text{sen } x$



SOLUCIÓN Al consultar la gráfica de $y = \csc x$ en la figura 20 y usando nuestro conocimiento de los valores especiales de las funciones seno y cosecante, obtenemos lo siguiente:

cuando	$x \to \pi^-$,	$\text{sen } x \to 0$ (con valores positivos)	y	$\csc x \to \infty$
cuando	$x \to \pi^+$,	$\text{sen } x \to 0$ (con valores negativos)	y	$\csc x \to -\infty$
cuando	$x \to \dfrac{\pi}{2}^-$,	$\text{sen } x \to 1$	y	$\csc x \to 1$
cuando	$x \to \dfrac{\pi}{6}^+$,	$\text{sen } x \to \dfrac{1}{2}$	y	$\csc x \to 2$ ■

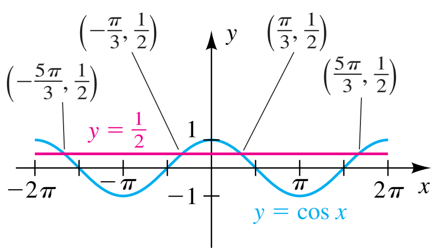
EJEMPLO 6 **Resolver ecuaciones y desigualdades que contengan una función trigonométrica**

Encuentre todos los valores de x en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ tales que

(a) $\cos x = \frac{1}{2}$ **(b)** $\cos x > \frac{1}{2}$ **(c)** $\cos x < \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN Este problema se puede resolver fácilmente al consultar las gráficas de $y = \cos x$ y $y = \frac{1}{2}$, trazadas en el mismo plano xy de la figura 21 para $-2\pi \le x \le 2\pi$

FIGURA 21



(a) Los valores de x tales que $\cos x = \frac{1}{2}$ son las coordenadas x de los puntos en los que las gráficas se intersectan. Recuerde que $x = \pi/3$ satisface la ecuación. Por simetría, $x = -\pi/3$ es otra solución de $\cos x = \frac{1}{2}$. Como la función coseno tiene periodo 2π, los otros valores de x en $[-2\pi, 2\pi]$ tales que $\cos x = \frac{1}{2}$ son

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}.$$

(b) Los valores de x tales que $\cos x > \frac{1}{2}$ se pueden hallar al determinar en dónde la gráfica de $y = \cos x$ de la figura 21 se encuentra *arriba* de la recta $y = \frac{1}{2}$. Esto nos da los intervalos x

$$\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right].$$

(c) Para resolver $\cos x < \frac{1}{2}$, de nuevo consultamos la figura 21 y vemos en dónde la gráfica de $y = \cos x$ se encuentra *abajo de* la recta $y = \frac{1}{2}$. Esto nos da los intervalos x

$$\left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right).$$

(continúa)

Otro método para resolver $\cos x < \frac{1}{2}$ es observar que las soluciones son los subintervalos abiertos de $[-2\pi, 2\pi]$ que *no están* incluidos en los intervalos obtenidos en el inciso (b). ■

El resultado que se examina en el ejemplo siguiente desempeña un importante papel en matemáticas avanzadas.

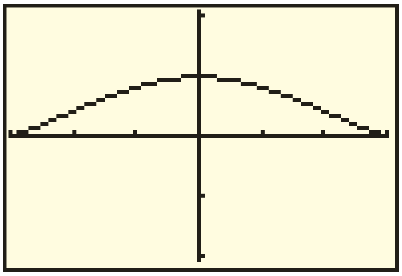
EJEMPLO 7 **Trazar la gráfica de $f(x) = (\text{sen } x)/x$**

Si $f(x) = (\text{sen } x)/x$, trace la gráfica de f en $[-\pi, \pi]$ e investigue el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to 0^-$ y cuando $x \to 0^+$.

SOLUCIÓN Note que f no está definida en $x = 0$, porque la sustitución da la expresión sin sentido $0/0$.

Asignamos $(\text{sen } x)/x$ a Y_1. Como nuestra pantalla tiene una proporción 3 : 2 (horizontal : vertical), usamos la pantalla $[-\pi, \pi]$ por $[-2.1, 2.1]$, obteniendo un trazo semejante al de la figura 22. Usando funciones de trazo y *zoom*, encontramos que

FIGURA 22
$[-\pi, \pi]$ por $[-2.1, 2.1]$



$$\text{cuando} \quad x \to 0^-, \quad f(x) \to 1 \quad \text{y cuando} \quad x \to 0^+, \quad f(x) \to 1.$$

Hay un hueco en la gráfica en el punto (0, 1); no obstante, casi ninguna calculadora tiene capacidad para mostrar este hecho.

Nuestra técnica gráfica no *demuestra* que $f(x) \to 1$ cuando $x \to 0$, pero lo hace parecer altamente probable. Una demostración rigurosa, basada en la definición de sen x y consideraciones geométricas, se pueden hallar en textos de cálculo. ■

Un resultado interesante obtenido del ejemplo 7 es que *si x está en radianes* y

$$\text{si} \quad x \approx 0 \quad \text{entonces} \quad \frac{\text{sen } x}{x} \approx 1, \quad \text{y entonces} \quad \text{sen } x \approx x.$$

El último enunciado nos da una *fórmula de aproximación* para sen x si x es cercana a 0. Para ilustrar, usando calculadora encontramos que:

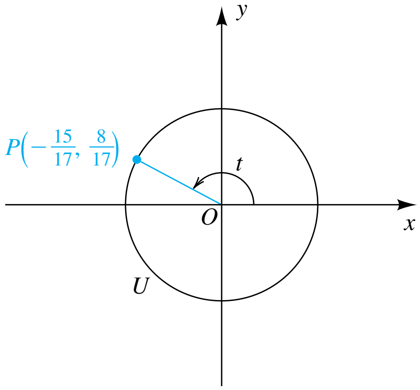
$$\text{sen } (0.03) \approx 0.029\,995\,5 \approx 0.03$$
$$\text{sen } (0.02) \approx 0.019\,998\,7 \approx 0.02$$
$$\text{sen } (0.01) \approx 0.009\,999\,8 \approx 0.01$$

Ahora hemos estudiado dos enfoques diferentes de las funciones trigonométricas. El desarrollo en términos de ángulos y razones, introducido en la sección 6.2, tiene muchas aplicaciones en ciencias e ingeniería. La definición en términos de una circunferencia unitaria, considerada en esta sección, destaca el hecho de que las funciones trigonométricas tienen dominios formados por números reales. Estas funciones son los elementos de construcción para cálculo. Además, el método de la circunferencia unitaria es útil para estudiar gráficas y deducir identidades trigonométricas. El lector debe trabajar para adquirir experiencia en el uso de ambas formulaciones de las funciones trigonométricas, puesto que cada una reforzará a la otra y facilita el dominio de aspectos más avanzados de trigonometría.

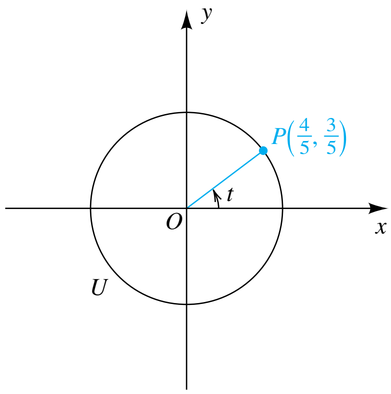
6.3 Ejercicios

Ejer. 1–4: Un punto $P(x, y)$ se muestra en la circunferencia unitaria U correspondiente a un número real t. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas en t.

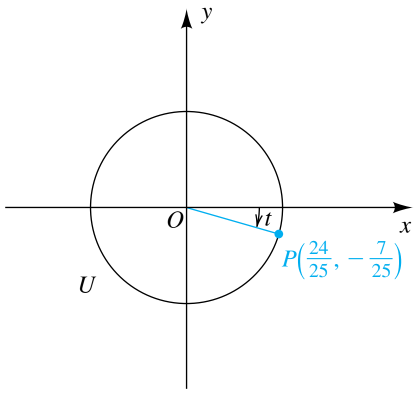
1



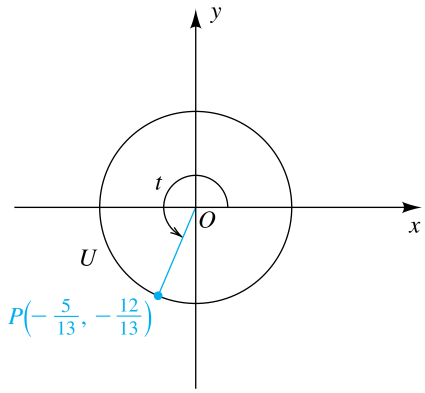
2



3



4



Ejer. 5–8: Sea $P(t)$ el punto en la circunferencia unitaria U que corresponde a t. Si $P(t)$ tiene las coordenadas rectangulares dadas, encuentre

(a) $P(t + \pi)$ **(b)** $P(t - \pi)$ **(c)** $P(-t)$ **(d)** $P(-t - \pi)$

5 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

6 $\left(-\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

7 $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

8 $\left(\frac{7}{25}, -\frac{24}{25}\right)$

Ejer. 9–16: Sea P el punto en la circunferencia unitaria U que corresponde a t. Encuentre las coordenadas de P y los valores exactos de las funciones trigonométricas de t, siempre que sea posible.

9 (a) 2π (b) -3π

10 (a) $-\pi$ (b) 6π

11 (a) $3\pi/2$ (b) $-7\pi/2$

12 (a) $5\pi/2$ (b) $-\pi/2$

13 (a) $9\pi/4$ (b) $-5\pi/4$

14 (a) $3\pi/4$ (b) $-7\pi/4$

15 (a) $5\pi/4$ (b) $-\pi/4$

16 (a) $7\pi/4$ (b) $-3\pi/4$

Ejer. 17–20: Use una fórmula para ángulos negativos para hallar el valor exacto.

17 (a) $\operatorname{sen}(-90^\circ)$ (b) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (c) $\tan(-135^\circ)$

18 (a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ (b) $\cos(-225^\circ)$ (c) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

19 (a) $\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (b) $\sec(-45^\circ)$ (c) $\csc\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

20 (a) $\cot(-225^\circ)$ (b) $\sec(-\pi)$ (c) $\csc(-45^\circ)$

Ejer. 21–26: Verifique la identidad al transformar el lado izquierdo en el lado derecho.

21 $\operatorname{sen}(-x)\sec(-x) = -\tan x$

22 $\csc(-x)\cos(-x) = -\cot x$

23 $\dfrac{\cot(-x)}{\csc(-x)} = \cos x$

24 $\dfrac{\sec(-x)}{\tan(-x)} = -\csc x$

25 $\dfrac{1}{\cos(-x)} - \tan(-x)\operatorname{sen}(-x) = \cos x$

26 $\cot(-x)\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x) = -\csc x$

Ejer. 27–38: Complete el enunciado al consultar una gráfica de una función trigonométrica.

27 (a) Cuando $x \to 0^+$, $\operatorname{sen} x \to$ ____

(b) Cuando $x \to (-\pi/4)$, $\operatorname{sen} x \to$ ____

28 (a) Cuando $x \to (-\pi/2)$, $\operatorname{sen} x \to$ ____

(b) Cuando $x \to (\pi/6)^-$, $\operatorname{sen} x \to$ ____

29 (a) Cuando $x \to (\pi/4)^+$, $\cos x \to$ ____

(b) Cuando $x \to 3\pi/2$, $\cos x \to$ ____

30 (a) Cuando $x \to \pi$, $\cos x \to$ ____

(b) Cuando $x \to (-\pi/3)^-$, $\cos x \to$ ____

31 (a) Cuando $x \to \pi$, $\tan x \to$ ____

(b) Cuando $x \to (\pi/2)^+$, $\tan x \to$ ____

32 (a) Cuando $x \to \pi/4$, $\tan x \to$ ____

(b) Cuando $x \to (-\pi/2)^-$, $\tan x \to$ ____

33 (a) Cuando $x \to \pi/6$, $\cot x \to$ ____

(b) Cuando $x \to 0^+$, $\cot x \to$ ____

34 (a) Cuando $x \to (-\pi/4)$, $\cot x \to$ ____

(b) Cuando $x \to \pi^-$, $\cot x \to$ ____

35 (a) Cuando $x \to (\pi/2)^-$, $\sec x \to$ ____

(b) Cuando $x \to 0$, $\sec x \to$ ____

36 (a) As $x \to (\pi/2)^+$, $\sec x \to$ ____

(b) Cuando $x \to \pi/4$, $\sec x \to$ ____

37 (a) Cuando $x \to 0^-$, $\csc x \to$ ____

(b) Cuando $x \to \pi/4$, $\csc x \to$ ____

38 (a) Cuando $x \to \pi^+$, $\csc x \to$ ____

(b) Cuando $x \to \pi/2$, $\csc x \to$ ____

Ejer. 39–46: Consulte la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ o $y = \cos$ para hallar los valores exactos de x en el intervalo $[0, 4\pi]$ que satisfaga la ecuación.

39 $\operatorname{sen} x = -1$

40 $\operatorname{sen} x = 1$

41 $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

42 $\operatorname{sen} x = -\sqrt{2}/2$

43 $\cos x = 1$

44 $\cos x = -1$

45 $\cos x = \sqrt{2}/2$

46 $\cos x = -\frac{1}{2}$

Ejer. 47–50: Consulte la gráfica de $y = \tan x$ para hallar los valores exactos de x en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ que satisfagan la ecuación.

47 $\tan x = 1$

48 $\tan x = \sqrt{3}$

49 $\tan x = 0$

50 $\tan x = -1/\sqrt{3}$

Ejer. 51–54: Consulte la gráfica de la ecuación en el intervalo especificado. Encuentre todos los valores de x tales que para el número real a, (a) $y = a$, (b) $y > a$, y (c) $y < a$.

51 $y = \operatorname{sen} x$; $[-2\pi, 2\pi]$; $a = \frac{1}{2}$

52 $y = \cos x$; $[0, 4\pi]$; $a = \sqrt{3}/2$

53 $y = \cos x$; $[-2\pi, 2\pi]$; $a = -\frac{1}{2}$

54 $y = \operatorname{sen} x$; $[0, 4\pi]$; $a = -\sqrt{2}/2$

Ejer. 55–62: Use la gráfica de una función trigonométrica para trazar la gráfica de la ecuación sin localizar puntos.

55 $y = 2 + \operatorname{sen} x$

56 $y = 3 + \cos x$

57 $y = \cos x - 2$

58 $y = \operatorname{sen} x - 1$

59 $y = 1 + \tan x$

60 $y = \cot x - 1$

61 $y = \sec x - 2$

62 $y = 1 + \csc x$

Ejer. 63–66: Encuentre los intervalos entre -2π y 2π en los que la función dada es (a) creciente o (b) decreciente.

63 secante

64 cosecante

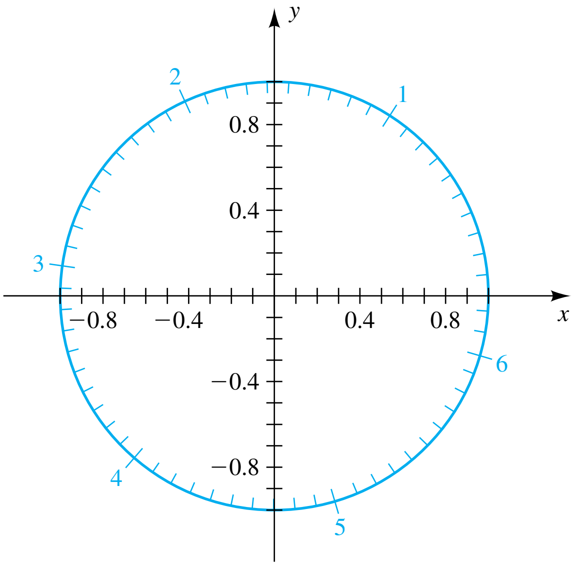
65 tangente

66 cotangente

67 Practique el trazo de gráficas de la función seno tomando diferentes unidades de longitud en los ejes horizontal y vertical. Practique trazar gráficas de las funciones coseno y tangente en la misma forma. Continúe esta práctica hasta que alcance una etapa en la que, si se despertara de un profundo sueño a medianoche y le pidieran trazar una de estas gráficas, pueda hacerla en menos de treinta segundos.

68 Trabaje el ejercicio 67 para las funciones cosecante, secante y cotangente.

Ejer. 69–72: Use la figura para calcular lo siguiente a un lugar decimal.



69 **(a)** sen 4 **(b)** sen (-1.2)

(c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que sen $t = 0.5$

70 **(a)** sen 2 **(b)** sen (-2.3)

(c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que sen $t = -0.2$

71 **(a)** cos 4 **(b)** cos (-1.2)

(c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que cos $t = -0.6$

72 **(a)** cos 2 **(b)** cos (-2.3)

(c) Todos los números t entre 0 y 2π tales que cos $t = 0.2$

73 **Relación entre temperatura y humedad** El 17 de marzo de 1981, en Tucson, Arizona, la temperatura en grados Fahrenheit pudo calcularse con la ecuación

$$T(t) = -12 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 60,$$

mientras el porcentaje de humedad relativa podría expresarse con

$$H(t) = 20 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 60,$$

donde t está en horas y $t = 0$ corresponde a las 6:00 a.m.

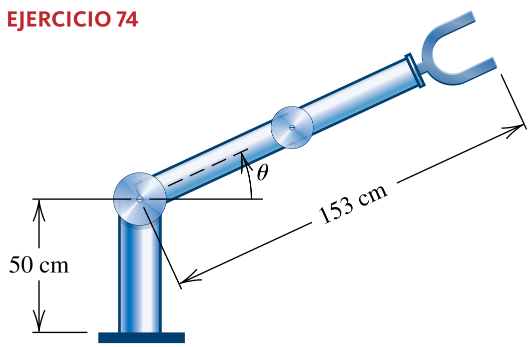
(a) Construya una tabla que contenga la temperatura y humedad relativa cada tres horas, empezando a medianoche.

(b) Determine las horas cuando ocurrió el máximo y el mínimo para T y H.

(c) Discuta la relación entre la temperatura y la humedad relativa en este día.

74 **Movimiento de brazo robótico** Las funciones trigonométricas se usan extensamente en el diseño de robots industriales. Suponga que la articulación del hombro de un robot está motorizada de modo que el ángulo θ aumenta a una razón constante de $\pi/12$ radianes por segundo a partir de un ángulo inicial de $\theta = 0$. Suponga que la articulación del codo se mantiene siempre recta y que el brazo tiene una longitud constante de 153 centímetros, como se ve en la figura.

EJERCICIO 74



(a) Suponga que $h = 50$ cm cuando $\theta = 0$. Construya una tabla que indique el ángulo θ y la altura h de la mano robótica cada segundo cuando $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

(b) Determine si un aumento constante en el ángulo θ produce o no un aumento constante en la altura de la mano.

(c) Encuentre la distancia total que se mueve la mano.

Ejer. 75–76: Grafique la ecuación y estime los valores de *x* en el intervalo especificado que correspondan al valor dado de *y*.

75 $y = \operatorname{sen}(x^2), \quad [-2, 2]; \quad y = 0.5$

76 $y = \tan\left(\sqrt{x}\right), \quad [0, 25]; \quad y = 5$

Ejer. 77–78: Grafique *f* en el intervalo especificado, y estime las coordenadas de los puntos alto y bajo.

77 $f(x) = x \operatorname{sen} x, \ [-2\pi, 2\pi]$

78 $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x, [-2.5, 2.5]$

Ejer. 79–84: Cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to L$ para algún número real *L*. Use una gráfica para predecir *L*.

79 $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

80 $f(x) = \dfrac{6x - 6 \operatorname{sen} x}{x^3}$

81 $f(x) = x \cot x$

82 $f(x) = \dfrac{x + \tan x}{\operatorname{sen} x}$

83 $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

84 $f(x) = \dfrac{\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)}{x}$

6.4 Valores de las funciones trigonométricas

En secciones previas calculamos valores especiales de las funciones trigonométricas usando sus definiciones en términos de un ángulo o una circunferencia unitaria. En la práctica usamos con frecuencia una calculadora para calcular valores de funciones.

A continuación demostraremos la forma en que el valor de cualquier función trigonométrica en un ángulo de θ grados, o en cualquier número real *t,* se puede hallar a partir de su valor en el intervalo θ (0°, 90°) o el intervalo *t* $(0, \pi/2)$, respectivamente. Esta técnica a veces es necesaria cuando se usa calculadora para hallar todos los ángulos de números reales que correspondan a un valor dado de la función.

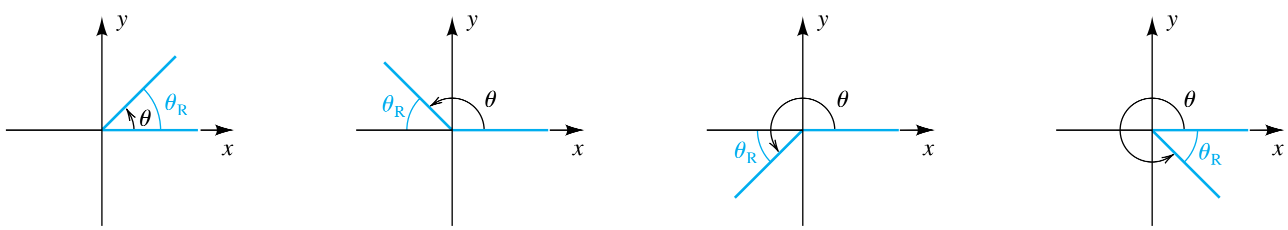
Haremos uso del siguiente concepto.

Definición de ángulo de referencia	Sea θ un ángulo no cuadrantal en posición estándar. El **ángulo de referencia** para θ es el ángulo agudo θ_R que el lado terminal de θ forma con el eje *x*.

La figura 1 ilustra el ángulo de referencia θ_R para un ángulo no cuadrantal θ, con $0° < \theta < 360°$ o $0 < \theta < 2\pi$, en cada uno de los cuatro cuadrantes.

FIGURA 1 Ángulos de referencia

(a) Primer cuadrante **(b)** Segundo cuadrante **(c)** Tercer cuadrante **(d)** Cuarto cuadrante



$\theta_R = \theta$

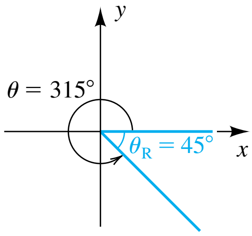
$\theta_R = 180° - \theta$
$= \pi - \theta$

$\theta_R = \theta - 180°$
$= \theta - \pi$

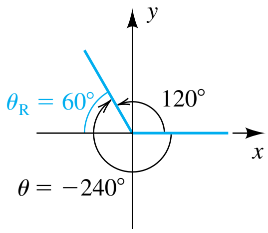
$\theta_R = 360° - \theta$
$= 2\pi - \theta$

FIGURA 2

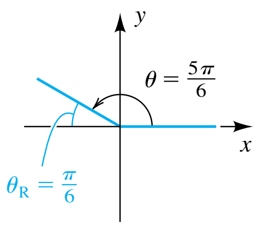
(a)



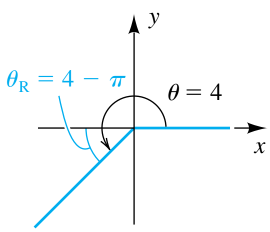
(b)



(c)



(d)



Las fórmulas que aparecen debajo de los ejes de la figura 1 se pueden usar para hallar la medida de θ_R en grados o radianes, respectivamente. *Para un ángulo no cuadrantal mayor que* 360° *o menor que* 0°, *primero encuentre el ángulo coterminal* θ con $0° < \theta < 360°$ *o* $0° < \theta < 2\pi$, y luego usamos las fórmulas de la figura 1.

EJEMPLO 1 Hallar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia θ_R para θ, y trace θ y θ_R en posición estándar en el mismo plano de coordenadas.

(a) $\theta = 315°$ **(b)** $\theta = -240°$ **(c)** $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ **(d)** $\theta = 4$

SOLUCIÓN

(a) El ángulo $\theta = 315°$ está en el cuarto cuadrante, y por tanto, como en la figura 1(d),

$$\theta_R = 360° - 315° = 45°.$$

Los ángulos θ y θ_R se ven en la figura 2(a).

(b) El ángulo entre 0° y 360° que es coterminal con $\theta = -240°$ es

$$-240° + 360° = 120°,$$

que está en el segundo cuadrante. Usando la fórmula de la figura 1(b) nos da

$$\theta_R = 180° - 120° = 60°.$$

Los ángulos θ y θ_R se ven en la figura 2(b).

(c) Como el ángulo $\theta = 5\pi/6$ está en el segundo cuadrante, tenemos

$$\theta_R = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

como se ve en la figura 2(c).

(d) Como $\pi < 4 < 3\pi/2$, el ángulo $\theta = 4$ está en el tercer cuadrante. Usando la fórmula de la figura 1(c), obtenemos

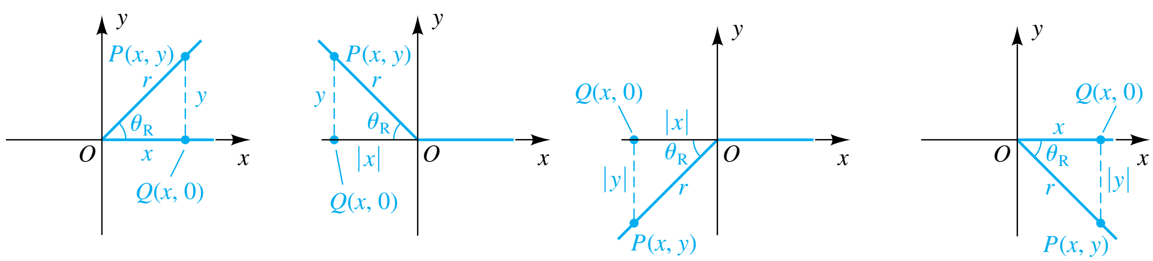
$$\theta_R = 4 - \pi.$$

Los ángulos están trazados en la figura 2(d). ■

A continuación mostraremos la forma en que se pueden usar ángulos de referencia para hallar valores de las funciones trigonométricas.

Si θ es un ángulo no cuadrantal con ángulo de referencia θ_R, entonces tenemos $0° < \theta_R < 90°$ o $0 < \theta_R < \pi/2$. Sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal de θ y considere el punto $Q(x, 0)$ en el eje x. La figura 3 ilustra una situa-

FIGURA 3



ción común para θ en cada cuadrante. En cada caso, las longitudes de los lados del triángulo OQP son

$$d(O, Q) = |x|, \quad d(Q, P) = |y| \quad \text{y} \quad d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Podemos aplicar la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo y también usar el triángulo OQP para obtener las siguientes fórmulas:

$$|\operatorname{sen} \theta| = \left|\frac{y}{r}\right| = \frac{|y|}{|r|} = \frac{|y|}{r} = \operatorname{sen} \theta_R$$
$$|\cos \theta| = \left|\frac{x}{r}\right| = \frac{|x|}{|r|} = \frac{|x|}{r} = \cos \theta_R$$
$$|\tan \theta| = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|} = \tan \theta_R$$

Estas fórmulas llevan al siguiente teorema. Si θ es un ángulo cuadrantal, la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo deben usarse para hallar valores.

Teorema sobre ángulos de referencia

Si θ es un ángulo no cuadrantal en posición estándar, entonces para hallar el valor de una función trigonométrica en θ, encuentre su valor para el ángulo de referencia θ_R y ponga como prefijo el signo apropiado.

El "signo apropiado" citado en el teorema se puede determinar a partir de la tabla de signos de las funciones trigonométricas dada en la página 388.

EJEMPLO 2 Usar ángulos de referencia

Use ángulos de referencia para hallar los valores exactos de sen θ, cos θ y tan θ si

(a) $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $\theta = 315°$

FIGURA 4

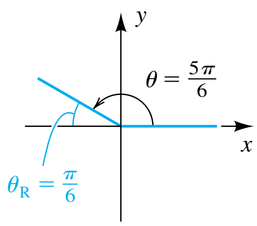
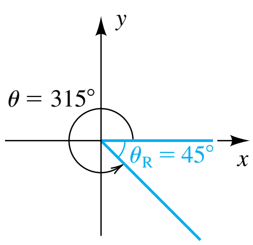


FIGURA 5



SOLUCIÓN

(a) El ángulo $\theta = 5\pi/6$ y su ángulo de referencia $\theta_R = \pi/6$ están trazados en la figura 4. Como θ está en el segundo cuadrante, sen θ es positivo y cos θ y tan θ son negativos. En consecuencia, por el teorema sobre ángulos de referencia y resultados conocidos acerca de ángulos especiales, obtenemos los valores siguientes:

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos \frac{5\pi}{6} = - \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan \frac{5\pi}{6} = - \tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(b) El ángulo $\theta = 315°$ y su ángulo de referencia $\theta_R = 45°$ están trazados en la figura 5. Como θ está en el cuarto cuadrante, sen $\theta < 0$, cos $\theta > 0$ y tan $\theta < 0$. Por lo tanto, por el teorema sobre ángulos de referencia, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{sen } 315° &= -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 315° &= +\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan 315° &= -\tan 45° = -1. \end{aligned}$$

■

Si usamos una calculadora para calcular valores de función, los ángulos de referencia suelen ser innecesarios (vea el ejercicio de análisis 2 al final del capítulo). Como ilustración, para hallar sen 210°, ponemos la calculadora en modo de grados y obtenemos sen 210° = −0.5, que es el valor exacto. Usando el mismo procedimiento para 240°, obtenemos una representación decimal:

$$\text{sen } 240° \approx -0.8660$$

No debe usarse calculadora para hallar el valor *exacto* de sen 240°. En este caso, encontramos el ángulo de referencia 60° de 240° y usamos el teorema sobre ángulos de referencia, junto con resultados conocidos acerca de ángulos especiales, para obtener

$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Consideremos a continuación el problema de resolver una ecuación del siguiente tipo:

Problema: si θ es un ángulo agudo y sen $\theta = 0.6635$, aproxime θ.

Casi todas las calculadoras tienen una tecla marcada [SIN⁻¹] que se puede usar para ayudar a resolver la ecuación. Con algunas calculadoras puede ser necesario usar otra tecla o una secuencia de tecleo como [INV] [SIN] (consulte el manual del usuario para su calculadora). Usaremos la siguiente notación cuando se busca θ, donde $0 \leq k \leq 1$:

$$\text{si} \quad \text{sen } \theta = k, \quad \text{entonces} \quad \theta = \text{sen}^{-1} k$$

Esta notación es semejante a la usada para la función inversa f^{-1} de una función f en la sección 5.1, donde vimos que en ciertas circunstancias,

$$\text{si} \quad f(x) = y, \quad \text{entonces} \quad x = f^{-1}(y).$$

Para el problema sen $\theta = 0.6635$, f es la función seno $x = \theta$, y $y = 0.6635$. La notación sen^{-1} está basada en las *funciones trigonométricas inversas* que se estudian en la sección 7.6. En esta etapa de nuestro trabajo, *consideraremos* sen^{-1} *simplemente como una entrada hecha en una calculadora usando la tecla* [SIN⁻¹]. Por tanto, para el problema expresado, obtenemos

$$\theta = \text{sen}^{-1}(0.6635) \approx 41.57° \approx 0.7255.$$

Como se indica, cuando se encuentra un ángulo, por lo general redondeamos medidas en grados al 0.01° más cercano y la medida en radianes a cuatro lugares decimales.

Del mismo modo, dados cos $\theta = k$ o tan $\theta = k$, donde θ es agudo, escribimos

$$\theta = \cos^{-1} k \qquad \text{o} \qquad \theta = \tan^{-1} k$$

para indicar el uso de una tecla [COS⁻¹] o [TAN⁻¹] en una calculadora

Dados csc θ, sec θ o cot θ, usamos una relación recíproca para hallar θ, como se indica en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN **Hallar soluciones de ecuaciones de ángulos agudos con calculadora**

Ecuación	Solución de calculadora (grados y radianes)
■ $\operatorname{sen}\theta = 0.5$	$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.5) = 30° \approx 0.5236$
■ $\cos\theta = 0.5$	$\theta = \cos^{-1}(0.5) = 60° \approx 1.0472$
■ $\tan\theta = 0.5$	$\theta = \tan^{-1}(0.5) \approx 26.57° \approx 0.4636$
■ $\csc\theta = 2$	$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30° \approx 0.5236$
■ $\sec\theta = 2$	$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60° \approx 1.0472$
■ $\cot\theta = 2$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26.57° \approx 0.4636$

La misma técnica se puede emplear si θ es *cualquier* ángulo o número real. Así, usando la tecla [SIN⁻¹] obtenemos, en modo de grados o radianes,

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.6635) \approx 41.57° \approx 0.7255,$$

que es el ángulo de referencia para θ. Si $\operatorname{sen}\theta$ es *negativo*, entonces una calculadora nos da el *negativo* del ángulo de referencia. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}^{-1}(-0.6635) \approx -41.57° \approx -0.7255.$$

Del mismo modo, dados $\cos\theta$ o $\tan\theta$, encontramos θ con una calculadora usando [COS⁻¹] or [TAN⁻¹], respectivamente. El intervalo que contiene a θ aparece en la tabla siguiente. Es importante observar que si $\cos\theta$ es negativo, entonces θ *no es* el negativo del ángulo de referencia, sino que está en el intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$ o $90° < \theta < 180°$. Las razones para usar estos intervalos se explican en la sección 7.6. Podemos usar relaciones recíprocas para resolver ecuaciones semejantes que contengan $\csc\theta$, $\sec\theta$ y $\cot\theta$.

Ecuación	Valores de k	Solución de calculadora	Intervalo que contiene a θ si se usa calculadora
$\operatorname{sen}\theta = k$	$-1 \le k \le 1$	$\theta = \operatorname{sen}^{-1} k$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ o $-90° \le \theta \le 90°$
$\cos\theta = k$	$-1 \le k \le 1$	$\theta = \cos^{-1} k$	$0 \le \theta \le \pi$ o $0° \le \theta \le 180°$
$\tan\theta = k$	cualquier k	$\theta = \tan^{-1} k$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ o $-90° < \theta < 90°$

La siguiente ilustración contiene algunos ejemplos específicos para modos en grados y radianes.

ILUSTRACIÓN **Hallar ángulos con calculadora**

Ecuación	Solución de calculadora (grados y radianes)
■ $\operatorname{sen}\theta = -0.5$	$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-0.5) = -30° \approx -0.5236$
■ $\cos\theta = -0.5$	$\theta = \cos^{-1}(-0.5) = 120° \approx 2.0944$
■ $\tan\theta = -0.5$	$\theta = \tan^{-1}(-0.5) \approx -26.57° \approx -0.4636$

Cuando use calculadora para hallar θ, asegúrese de recordar las restricciones para θ. Si se desean otros valores, entonces los ángulos de referencia u otros métodos se pueden emplear, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

FIGURA 6

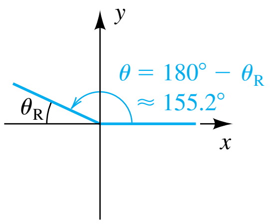


FIGURA 7

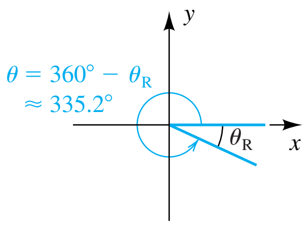


FIGURA 8

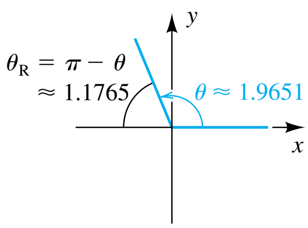


FIGURA 9

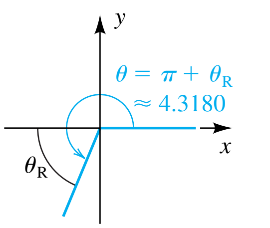
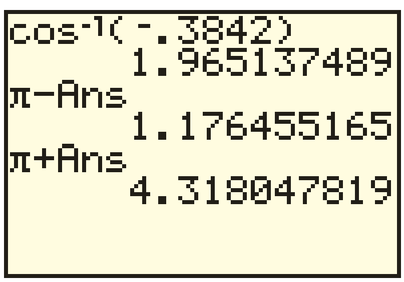


FIGURA 10



EJEMPLO 3 **Aproximar un ángulo con calculadora**

Si $\tan \theta = -0.4623$ y $0° \leq \theta < 360°$, encuentre θ al 0.1° más cercano.

SOLUCIÓN Como se señala en el análisis precedente, si usamos calculadora (en modo de grados) para hallar θ cuando $\tan \theta$ es negativa, entonces la medida en grados estará en el intervalo $(-90°, 0°)$. En particular, obtenemos lo siguiente:

$$\theta = \tan^{-1}(-0.4623) \approx -24.8°$$

Como deseamos hallar valores de θ entre 0° y 360°, usamos el ángulo de referencia (aproximado) $\theta_R \approx 24.8°$. Hay dos posibles valores de θ tales que $\tan \theta$ es negativo, uno en el segundo cuadrante, el otro en el cuarto cuadrante. Si θ está en el segundo cuadrante y $0° \leq \theta \leq 360°$, tenemos la situación que se ve en la figura 6 y

$$\theta = 180° - \theta_R \approx 180° - 24.8° = 155.2°.$$

Si θ está en el cuarto cuadrante y $0° \leq \theta \leq 360°$, entonces, como en la figura 7.

$$\theta = 360° - \theta_R \approx 360° - 24.8° = 335.2°.$$

■

EJEMPLO 4 **Aproximar un ángulo con calculadora**

Si $\cos \theta = -0.3842$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, encuentre θ al 0.0001 de radian más cercano.

SOLUCIÓN Si usamos calculadora (en modo de radianes) para hallar θ cuando $\cos \theta$ es negativo, entonces la medida en radianes estará en el intervalo $[0, \pi]$. En particular, obtenemos lo siguiente (mostrado en la figura 8):

$$\theta = \cos^{-1}(-0.3842) \approx 1.965\,137\,489$$

Como deseamos hallar valores de θ entre 0 y 2π, usamos el ángulo de referencia (aproximado)

$$\theta_R = \pi - \theta \approx 1.176\,455\,165.$$

Hay dos posibles valores de θ tales que $\cos \theta$ sea negativo: el que encontramos en el segundo cuadrante y el otro en el tercer cuadrante. Si θ está en el tercer cuadrante, entonces

$$\theta = \pi + \theta_R \approx 4.318\,047\,819,$$

como se ve en la figura 9.

La pantalla de la figura 10 da apoyo numérico para las respuestas

$$\theta \approx 1.9651 \quad \text{y} \quad \theta \approx 4.3180.$$

También podríamos resolver gráficamente este problema si hallamos los puntos de intersección de $Y_1 = \cos(X)$ y $Y_2 = -0.3842$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. No obstante, el propósito de esta solución era ilustrar el uso de los ángulos de referencia. ■

6.4 Ejercicios

Ejer. 1–6: Encuentre el ángulo de referencia θ_R si θ tiene la medida dada.

1 (a) $310°$ (b) $260°$ (c) $-235°$ (d) $-660°$

2 (a) $290°$ (b) $195°$ (c) $-185°$ (d) $400°$

3 (a) $3\pi/4$ (b) $4\pi/3$ (c) $-\pi/6$ (d) $9\pi/4$

4 (a) $7\pi/4$ (b) $2\pi/3$ (c) $-3\pi/4$ (d) $-23\pi/6$

5 (a) 3 (b) -2 (c) 5.5 (d) 100

6 (a) 6 (b) -4 (c) 4.5 (d) 80

Ejer. 7–18: Encuentre el valor exacto.

7 (a) $\operatorname{sen}(2\pi/3)$ (b) $\operatorname{sen}(-5\pi/4)$

8 (a) $\operatorname{sen} 210°$ (b) $\operatorname{sen}(-315°)$

9 (a) $\cos 150°$ (b) $\cos(-60°)$

10 (a) $\cos(5\pi/4)$ (b) $\cos(-11\pi/6)$

11 (a) $\tan(5\pi/6)$ (b) $\tan(-\pi/3)$

12 (a) $\tan 330°$ (b) $\tan(-225°)$

13 (a) $\cot 120°$ (b) $\cot(-150°)$

14 (a) $\cot(3\pi/4)$ (b) $\cot(-2\pi/3)$

15 (a) $\sec(2\pi/3)$ (b) $\sec(-\pi/6)$

16 (a) $\sec 135°$ (b) $\sec(-210°)$

17 (a) $\csc 240°$ (b) $\csc(-330°)$

18 (a) $\csc(3\pi/4)$ (b) $\csc(-2\pi/3)$

Ejer. 19–24: Calcule a tres lugares decimales.

19 (a) $\operatorname{sen} 24°20'$ (b) $\cos 0.68$

20 (a) $\cos 88°30'$ (b) $\operatorname{sen} 1.48$

21 (a) $\tan 73°10'$ (b) $\cot 1.13$

22 (a) $\cot 9°10'$ (b) $\tan 0.75$

23 (a) $\sec 67°50'$ (b) $\csc 0.32$

24 (a) $\csc 43°40'$ (b) $\sec 0.26$

Ejer. 25–36: Calcule el ángulo agudo θ al (a) 0.01° y (b) 1′ más cercano.

25 $\operatorname{sen}\theta = 0.42$

26 $\operatorname{sen}\theta = 0.6612$

27 $\cos\theta = 0.8620$

28 $\cos\theta = 0.8$

29 $\tan\theta = 3.7$

30 $\tan\theta = 4.91$

31 $\cot\theta = 4$

32 $\cot\theta = 0.361$

33 $\sec\theta = 4.246$

34 $\sec\theta = 1.15$

35 $\csc\theta = 2.54$

36 $\csc\theta = 11$

Ejer. 37–38: Aproxime a cuatro lugares decimales.

37 (a) $\operatorname{sen} 98°10'$ (b) $\cos 623.7°$ (c) $\tan 3$

(d) $\cot 231°40'$ (e) $\sec 1175.1°$ (f) $\csc 0.82$

38 (a) $\operatorname{sen} 496.4°$ (b) $\cos 0.65$ (c) $\tan 105°40'$

(d) $\cot 1030.2°$ (e) $\sec 1.46$ (f) $\csc 320°50'$

Ejer. 39–40: Calcule, al 0.1° más cercano, todos los ángulos θ en el intervalo $[0°, 360°)$ que satisfagan la ecuación.

39 (a) $\operatorname{sen}\theta = -0.5640$ (b) $\cos\theta = 0.7490$

(c) $\tan\theta = 2.798$ (d) $\cot\theta = -0.9601$

(e) $\sec\theta = -1.116$ (f) $\csc\theta = 1.485$

40 (a) $\operatorname{sen}\theta = 0.8225$ (b) $\cos\theta = -0.6604$

(c) $\tan\theta = -1.5214$ (d) $\cot\theta = 1.3752$

(e) $\sec\theta = 1.4291$ (f) $\csc\theta = -2.3179$

Ejer. 41–42: Aproxime, al 0.01 radián más cercano, todos los ángulos θ en el intervalo $[0, 2\pi)$ que satisfagan la ecuación.

41 (a) $\text{sen } \theta = 0.4195$ (b) $\cos \theta = -0.1207$

(c) $\tan \theta = -3.2504$ (d) $\cot \theta = 2.6815$

(e) $\sec \theta = 1.7452$ (f) $\csc \theta = -4.8521$

42 (a) $\text{sen } \theta = -0.0135$ (b) $\cos \theta = 0.9235$

(c) $\tan \theta = 0.42$ (d) $\cot \theta = -2.731$

(e) $\sec \theta = -3.51$ (f) $\csc \theta = 1.258$

43 **Grosor de la capa de ozono** El grosor de la capa de ozono se puede calcular usando la fórmula

$$\ln I_0 - \ln I = kx \sec \theta,$$

donde I_0 es la intensidad de una longitud de onda de luz particular proveniente del Sol antes de llegar a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar por una capa de ozono de x centímetros de grueso, k es la constante de absorción de ozono para esa longitud de onda y θ es el ángulo agudo que la luz solar forma con la vertical. Suponga que para una longitud de onda de 3055×10^{-8} centímetros con $k \approx 1.88$, I_0/I se mide como 1.72 y $\theta = 12°$. Aproxime el grosor de la capa de ozono al 0.01 de centímetro más cercano.

44 **Cálculos de ozono** Consulte el ejercicio 43. Si se estima que la capa de ozono mide 0.31 centímetros de grueso y, para una longitud de onda de 3055×10^{-8} centímetros, I_0/I se mide como 2.05, aproxime el ángulo que formó el Sol con la vertical en el momento de la medición.

45 **Radiación solar** La cantidad de luz solar que ilumina una pared de un edificio puede afectar en gran medida la eficiencia de energía del edificio. La radiación solar que incide en una pared vertical que mira hacia el este está dada por la fórmula

$$R = R_0 \cos \theta \text{ sen } \phi,$$

donde R_0 es la máxima radiación solar posible, θ es el ángulo que el Sol forma con la horizontal, y ϕ es la dirección del Sol en el cielo, con $\phi = 90°$ cuando el Sol está en el este y $\phi = 60°$ cuando el Sol está en el sur.

(a) ¿Cuándo incide sobre la pared la máxima radiación solar R_0?

(b) ¿Qué porcentaje de R_0 incide sobre la pared cuando θ es igual a 60° y el Sol está en el sureste?

46 **Cálculos meteorológicos** En latitudes medias a veces es posible estimar la distancia entre regiones consecutivas de baja presión. Si ϕ es la latitud (en grados), R es el radio de la Tierra (en kilómetros) y v es la velocidad horizontal del viento (en km/h), entonces la distancia d (en kilómetros) de una zona de baja presión a la siguiente se puede estimar usando la fórmula

$$d = 2\pi\left(\frac{vR}{0.52 \cos \phi}\right)^{1/3}.$$

(a) A una latitud de 48°, el radio de la Tierra es aproximadamente 6369 kilómetros. Calcule d si la velocidad del viento es de 45 km/h.

(b) Si v y R son constantes, ¿cómo varía d cuando aumenta la latitud?

47 **Brazo de robot** Los puntos en los lados terminales de ángulos desempeñan un papel importante en el diseño de brazos de robot. Suponga que un robot tiene un brazo recto de 18 pulgadas de largo que puede girar alrededor del origen en un plano de coordenadas. Si la mano del robot está situada en (18, 0) y luego gira un ángulo de 60°, ¿cuál es la nueva ubicación de la mano?

48 **Brazo de robot** Suponga que el brazo de robot del ejercicio 47 puede cambiar su longitud además de girar alrededor del origen. Si la mano está inicialmente en (12, 12), ¿aproximadamente cuántos grados debe girar el brazo y cuánto debe cambiar su longitud para mover la mano a (−16, 10)?

6.5 Gráficas trigonométricas

En esta sección consideramos gráficas de las ecuaciones

$$y = a \text{ sen } (bx + c) \qquad \text{y} \qquad y = a \cos (bx + c)$$

para números reales a, b y c. Nuestra meta es trazar esas gráficas sin localizar muchos puntos. Para hacer esto usaremos datos acerca de las gráficas de las funciones seno y coseno estudiadas en la sección 6.3.

Empecemos por considerar el caso especial $c = 0$ y $b = -1$, es decir,

$$y = a \text{ sen } x \qquad \text{y} \qquad y = a \cos x.$$

Podemos hallar las coordenadas y de puntos sobre las gráficas si multiplicamos por a las coordenadas y de puntos en las gráficas de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$. Para ilustrar, si $y = 2 \text{ sen } x$, multiplicamos por 2 la coordenada y de cada

punto sobre la gráfica de $y = \text{sen } x$. Esto da la figura 1, donde para comparar también se muestra la gráfica de $y = \text{sen } x$. El procedimiento es el mismo que para estirar verticalmente la gráfica de una función, que vimos en la sección 3.5.

Como otra ilustración, si $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$, multiplicamos por $\frac{1}{2}$ las coordenadas y de puntos sobre la gráfica de $y = \text{sen } x$. Esta multiplicación comprime verticalmente la gráfica de $y = \text{sen } x$ por un factor de 2, como se ilustra en la figura 2.

FIGURA 1

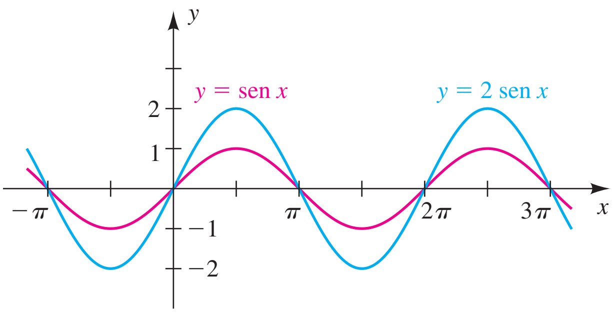
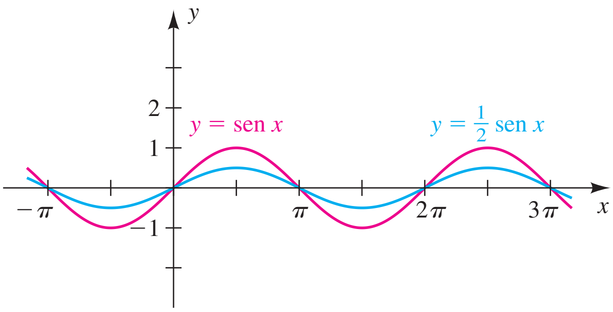


FIGURA 2



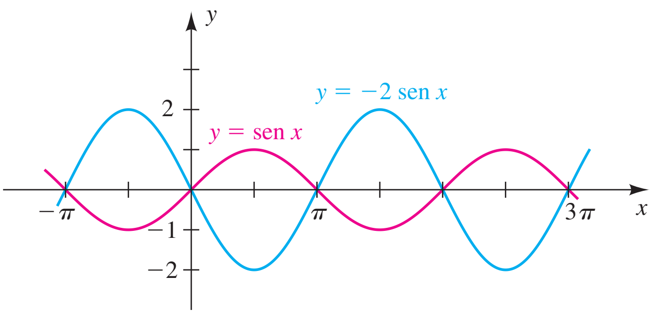
El siguiente ejemplo ilustra una gráfica de $y = a \text{ sen } x$ con a negativa.

EJEMPLO 1 **Trazar la gráfica de una ecuación que contiene sen x**

Trace la gráfica de la ecuación $y = -2 \text{ sen } x$.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = -2 \text{ sen } x$ trazada en la figura 3 se puede obtener al trazar primero la gráfica de $y = \text{sen } x$ (que se muestra en la figura) y luego multiplicando por -2 las coordenadas y. Un método alternativo es reflejar la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x$ (vea la figura 1) a través del eje x.

FIGURA 3



■

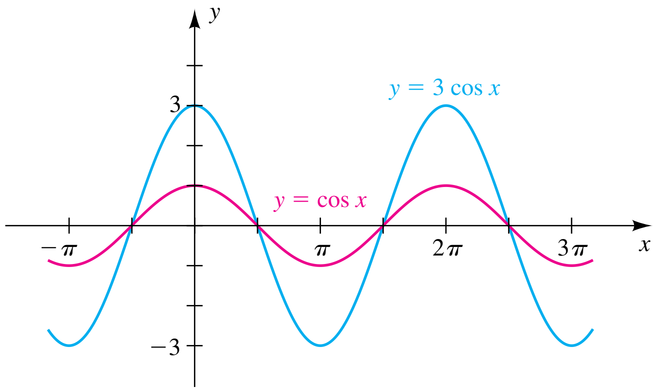
Para cualquier $a \neq 0$, la gráfica de $y = a \text{ sen } x$ tiene la apariencia general de una de las gráficas ilustradas en las figuras 1, 2 y 3. La cantidad de estiramiento de la gráfica de $y = \text{sen } x$, y si la gráfica se refleja o no, está determinada por el valor absoluto de a y el signo de a, respectivamente. La coordenada y más grande $|a|$ es la **amplitud de la gráfica** o, lo que es equivalente, la **amplitud de la función** f dada por $f(x) = a \text{ sen } x$. En las figuras 1 y 3 la amplitud es 2. En la figura 2 la amplitud es $\frac{1}{2}$. Observaciones y técnicas similares aplican si $y = a \cos x$.

EJEMPLO 2 **Trazar la gráfica de una ecuación que contiene cos x**

Encuentre la amplitud y trace la gráfica de $y = 3 \cos x$.

SOLUCIÓN Por el análisis precedente, la amplitud es 3. Como se indica en la figura 4, primero trazamos la gráfica de $y = \cos x$ y luego multiplicamos las coordenadas y por 3.

FIGURA 4



■

A continuación consideremos $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$ para números reales a y b diferentes de cero. Al igual que antes, la amplitud es $|a|$. Si $b > 0$, entonces se presenta exactamente un ciclo cuando bx aumenta de 0 a 2π o, lo que es equivalente, cuando x aumenta de 0 a $2\pi/b$. Si $b < 0$, entonces $-b > 0$ y se presenta un ciclo cuando x aumenta de 0 a $2\pi/(-b)$. Así, el periodo de la función f dada por $f(x) = a \operatorname{sen} bx$ o $f(x) = a \cos bx$ es $2\pi/|b|$. Por comodidad, también nos referiremos a $2\pi/|b|$ como el periodo de la *gráfica de f*. El siguiente teorema resume nuestra exposición.

Teorema sobre amplitudes y periodos

Si $y = a \operatorname{sen} bx$ o $y = a \cos bx$ para números reales a y b diferentes de ceros, entonces la gráfica tiene amplitud $|a|$ y periodo $\dfrac{2\pi}{|b|}$.

También podemos relacionar el papel de b con la discusión de comprimir y estirar horizontalmente una gráfica de la sección 3.5. Si $|b| > 1$, se puede considerar que la gráfica de $y = \operatorname{sen} bx$ o $y = \cos bx$ es comprimida horizontalmente por un factor b. Si $0 < |b| < 1$, las gráficas se estiran horizontalmente en un factor de $1/b$. Este concepto se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

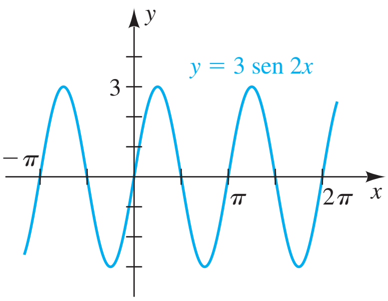
EJEMPLO 3 **Hallar una amplitud y un periodo**

Encuentre la amplitud y el periodo y trace la gráfica de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$.

SOLUCIÓN Usando el teorema sobre amplitudes y periodos con $a = 3$ y $b = 2$, obtenemos lo siguiente:

(continúa)

FIGURA 5



$$\text{amplitud: } |a| = |3| = 3$$

$$\text{periodo: } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

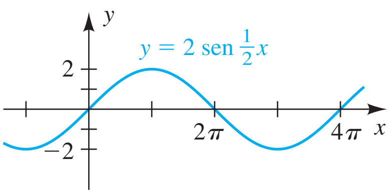
Entonces, hay exactamente una onda senoidal de amplitud 3 en el intervalo x de $[0, \pi]$. El trazo de esta onda y luego extender la gráfica a derecha e izquierda nos da la figura 5. ■

EJEMPLO 4 **Hallar una amplitud y un periodo**

Encuentre la amplitud y el periodo y trace la gráfica de $y = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$.

SOLUCIÓN Usando el teorema sobre amplitudes y periodos con $a = 2$ $b = \frac{1}{2}$, obtenemos lo siguiente:

FIGURA 6



$$\text{amplitud: } |a| = |2| = 2$$

$$\text{periodo: } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Entonces, hay una onda senoidal de amplitud 2 en el intervalo $[0, 4\pi]$. El trazo de esta onda y extenderla a izquierda y derecha nos da la gráfica de la figura 6. ■

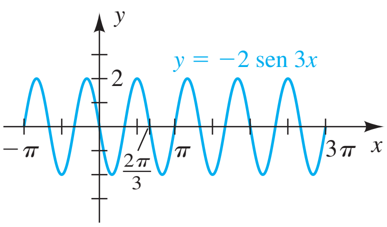
Si $y = a \text{ sen } bx$ y si b es un número positivo grande, entonces el periodo $2\pi/b$ es pequeño y las ondas senoidales están cercanas entre sí, con b ondas senoidales en el intervalo $[0, 2\pi]$. Por ejemplo, en la figura 5, $b = 2$ y tenemos dos ondas senoidales en $[0, 2\pi]$. Si b es un número positivo pequeño, entonces el periodo $2\pi/b$ es grande y las ondas están separadas. Para ilustrar, si $y = \text{sen } 1/10x$, entonces habrá un décimo de una onda senoidal en $[0, 2\pi]$ y se requiere un intervalo de 20π unidades de largo para un ciclo completo. (Vea también la figura 6, para $y = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$, hay media onda senoidal en $[0, 2\pi]$,)

Si $b < 0$, podemos usar el hecho de que $\text{sen } (-x) = -\text{sen } x$ para obtener la gráfica de $y = a \text{ sen } bx$. Para ilustrar, la gráfica de $y = \text{sen } (-2x)$ es igual que la gráfica de $y = -\text{sen } 2x$.

EJEMPLO 5 **Hallar una amplitud y un periodo**

Encuentre la amplitud y el periodo y trace la gráfica de la ecuación $y = 2 \text{ sen } (-3x)$.

FIGURA 7

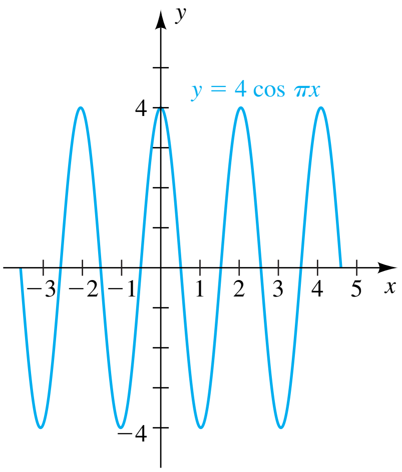


SOLUCIÓN Como la función seno es impar, $\text{sen } (-3x) = -\text{sen } 3x$ y podemos escribir la ecuación como $y = -2 \text{ sen } 3x$. La amplitud es $|-2| = 2$, y el periodo es $2\pi/3$. Entonces, hay un ciclo en el intervalo de longitud $2\pi/3$. El signo negativo indica una reflexión a través del eje x. Si consideramos el intervalo $[0, 2\pi/3]$ y trazamos una onda senoidal de amplitud 2 (reflejada a través del eje x), la forma de la gráfica es aparente. La parte de la gráfica del intervalo $[0, 2\pi/3]$ se repite periódicamente, como se ilustra en la figura 7. ■

EJEMPLO 6 **Hallar una amplitud y un periodo**

Encuentre la amplitud y el periodo y trace la gráfica de $y = 4 \cos \pi x$.

FIGURA 8



SOLUCIÓN La amplitud es $|4| = 4$, y el periodo es $2\pi/\pi = 2$. Entonces, hay exactamente una onda cosenoidal de amplitud 4 en el intervalo $[0, 2]$. Como el periodo no contiene el número π, tiene sentido usar divisiones enteras en el eje x. Trazar esta onda y extenderla a izquierda y derecha nos da la gráfica de la figura 8. ■

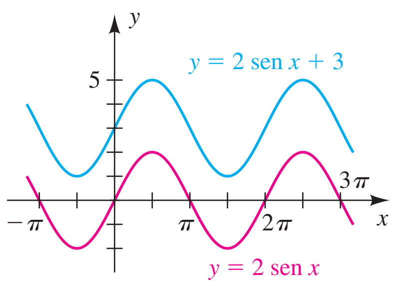
Como ya vimos en la sección 3.5, si f es una función y c es un número real positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ se puede obtener al desplazar la gráfica de $y = f(x)$ una distancia c verticalmente hacia arriba. Para la gráfica de $y = f(x) - c$, desplazamos la gráfica de $y = f(x)$ una distancia c verticalmente hacia abajo. En el siguiente ejemplo usamos esta técnica para una gráfica trigonométrica.

EJEMPLO 7 **Desplazar verticalmente una gráfica trigonométrica**

Trace la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x + 3$.

SOLUCIÓN Es importante observar que $y \neq 2 \text{ sen } (x + 3)$. La gráfica de $y = 2 \text{ sen } x$ está trazada en rojo en la figura 9. Si desplazamos esta gráfica una distancia 3 verticalmente hacia arriba, obtenemos la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x + 3$. ■

FIGURA 9



A continuación consideremos la gráfica de

$$y = a \text{ sen } (bx + c).$$

Al igual que antes, la amplitud es $|a|$, y el periodo es $2\pi/|b|$. Sólo hay un ciclo si $bx + c$ aumenta de 0 a 2π. En consecuencia, podemos hallar un intervalo que contenga exactamente una onda senoidal al despejar x de la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 0 \le bx + c &\le 2\pi \\ -c \le bx \quad &\le 2\pi - c \qquad \text{reste } c \\ -\frac{c}{b} \le \quad x \quad &\le \frac{2\pi}{b} - \frac{c}{b} \qquad \text{divida entre } b \end{aligned}$$

El número $-c/b$ es el **desplazamiento de fase** asociado con la gráfica. La gráfica de $y = a \text{ sen } (bx + c)$ se puede obtener al desplazar la gráfica de $y = a \text{ sen } bx$ a la izquierda si el desplazamiento de fase es negativo o a la derecha si el desplazamiento de fase es positivo.

Resultados análogos son verdaderos para $y = a \cos (bx + c)$. El siguiente teorema resume nuestra exposición.

Teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase

Si $y = a \text{ sen } (bx + c)$ o $y = a \cos (bx + c)$ para números reales a y b, diferentes de cero, entonces

(1) la amplitud es $|a|$, el periodo es $\dfrac{2\pi}{|b|}$ y el desplazamiento de fase $-\dfrac{c}{b}$;

(2) un intervalo que contenga exactamente un ciclo se puede hallar al resolver la desigualdad

$$0 \le bx + c \le 2\pi.$$

A veces escribiremos $y = a \text{ sen } (bx + c)$ *en la forma equivalente*

$$y = a \text{ sen} \left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right].$$

EJEMPLO 8 **Hallar una amplitud, un periodo y un desplazamiento de fase**

Encuentre la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase y trace la gráfica de

$$y = 3 \text{ sen } \left(2x + \frac{\pi}{2}\right).$$

SOLUCIÓN La ecuación es de la forma $y = a \text{ sen } (bx + c)$ con $a = 3$, $b = 2$ y $c = \pi/2$. Entonces, la amplitud es $|a| = 3$ y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$.

Por la parte (2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, el desplazamiento de fase y un intervalo que contiene una onda senoidal se pueden hallar al resolver la siguiente desigualdad

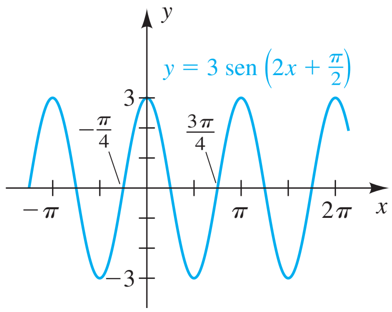
$$0 \leq 2x + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{reste } \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{divida entre 2}$$

Entonces, el desplazamiento de fase es $-\pi/4$ y una onda senoidal de amplitud 3 ocurre en el intervalo $[-\pi/4, 3\pi/4]$. Trazar esta onda y luego repetirla a derecha e izquierda nos da la gráfica de la figura 10. ■

FIGURA 10



EJEMPLO 9 **Hallar una amplitud, un periodo y un desplazamiento de fase**

Encuentre la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase y trace la gráfica de $y = 2 \cos (3x - \pi)$.

SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma $y = a \cos (bx + c)$ con $a = 2$, $b = 3$ y $c = -\pi$. Entonces, la amplitud es $|a| = 2$ y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/3$.

Por la parte (2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, el desplazamiento de fase y el intervalo que contiene un ciclo se pueden hallar al resolver la siguiente desigualdad:

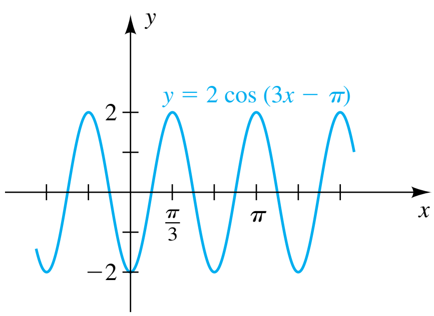
$$0 \leq 3x - \pi \leq 2\pi$$

$$\pi \leq 3x \leq 3\pi \quad \text{sume } \pi$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi \quad \text{divida entre 3}$$

En consecuencia, el desplazamiento de fase es $\pi/3$ y un ciclo tipo coseno (de máximo a máximo) de amplitud 2 ocurre en el intervalo $[\pi/3, \pi]$. Trazar esa parte de la gráfica y luego repetirla a derecha e izquierda nos da el trazo de la figura 11.

FIGURA 11



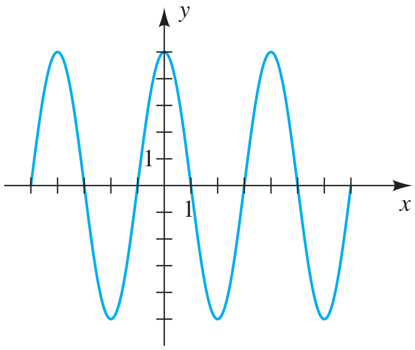
Si resolvemos la desigualdad

$$-\frac{\pi}{2} \leq 3x - \pi \leq \frac{3\pi}{2} \qquad \text{en lugar de} \qquad 0 \leq 3x - \pi \leq 2\pi,$$

obtenemos el intervalo $\pi/6 \leq x \leq 5\pi/6$, que nos da un ciclo entre puntos de intersección con el eje x más que un ciclo entre máximos. ■

EJEMPLO 10 **Hallar una ecuación para una onda senoidal**

FIGURA 12



Exprese la ecuación para la onda senoidal mostrada en la figura 12 de la forma

$$y = a \text{ sen } (bx + c)$$

para $a > 0$, $b > 0$, y el mínimo número real positivo c.

SOLUCIÓN Las máximas y mínimas coordenadas y de puntos sobre la gráfica son 5 y -5, respectivamente. Por tanto, la amplitud es $a = 5$.

Como existe una onda senoidal en el intervalo $[-1, 3]$, el periodo tiene valor $3 - (-1) = 4$. En consecuencia, por el teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase (con $b > 0$),

$$\frac{2\pi}{b} = 4 \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad b = \frac{\pi}{2}.$$

El desplazamiento de fase es $-c/b = -c/(\pi/2)$. Como c debe ser positivo, el desplazamiento de fase debe ser *negativo*; esto es, la gráfica de la figura 12 debe obtenerse al desplazar la gráfica de $y = 5 \text{ sen}[(\pi/2)x]$ a la *izquierda*. Como deseamos que c sea tan pequeño como sea posible, escogemos el desplazamiento de fase -1. Por lo tanto,

$$-\frac{c}{\pi/2} = -1 \qquad \text{o bien, lo que es equivalente} \qquad c = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces, la ecuación deseada es,

$$y = 5 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Hay muchas otras ecuaciones para la gráfica. Por ejemplo, podríamos usar los desplazamientos de fase $-5, -9, -13$, etcétera, pero no nos darían el *mínimo* valor positivo para c. Otras dos ecuaciones para la gráfica son

$$y = 5 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad y = -5 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Sin embargo, ninguna de estas ecuaciones satisface los criterios dados para a, b y c, porque en la primera, $c < 0$ y en la segunda, $a < 0$, y c no tienen su valor positivo mínimo.

Como solución alternativa, podríamos escribir

$$y = a \text{ sen } (bx + c) \qquad \text{como} \qquad y = a \text{ sen} \left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right].$$

Al igual que antes, encontramos $a = 5$ y $b = \pi/2$. Ahora, como la gráfica tiene un punto de intersección en el eje x en $x = -1$, podemos considerar esta gráfica como un desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = 5 \text{ sen } [(\pi/2)x]$ a la izquierda por 1 unidad, esto es, sustituimos x con $x + 1$. Por lo tanto, una ecuación es

$$y = 5 \text{ sen} \left[\frac{\pi}{2}(x + 1)\right] \qquad \text{o} \qquad y = 5 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right).$$ ■

Muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza varían en forma cíclica o rítmica. A veces es posible representar ese comportamiento por medio de funciones trigonométricas, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 11 **Analizar el proceso de respiración**

El proceso rítmico de respiración consiste en periodos alternados de inhalación y exhalación. Un ciclo completo normalmente tiene lugar cada 5 segundos. Si $F(t)$ denota el ritmo de flujo en el tiempo t (en litros por segundo) y si el máximo ritmo de flujo es 0.6 litros por segundo, encuentre una fórmula de la forma $F(t) = a \operatorname{sen} bt$ que se ajuste a esta información.

SOLUCIÓN Si $F(t) = a \operatorname{sen} bt$ para alguna $b > 0$, entonces el periodo de F es $2\pi/b$. En esta aplicación el periodo es 5 segundos y por lo tanto

$$\frac{2\pi}{b} = 5 \qquad \text{o} \qquad b = \frac{2\pi}{5}.$$

Como el máximo ritmo de flujo corresponde a la amplitud a de F, hacemos $a = 0.6$. Esto nos da la fórmula

$$F(t) = 0.6 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right).$$

■

EJEMPLO 12 **Aproximar el número de horas de luz diurna en un día**

El número de horas de luz diurna $D(t)$ en un tiempo particular del año se puede calcular con

$$D(t) = \frac{K}{2} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right] + 12$$

para t en días y $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. La constante K determina la variación total en duración del día y depende de la latitud del lugar.

(a) Para Boston, $K \approx 6$. Trace la gráfica de D para $0 \leq t \leq 365$.

(b) ¿Cuándo es más larga la duración del día?, ¿y más corta?

SOLUCIÓN

(a) Si $K = 6$, entonces $K/2 = 3$ y podemos escribir $D(t)$ en la forma

$$D(t) = f(t) + 12,$$

donde

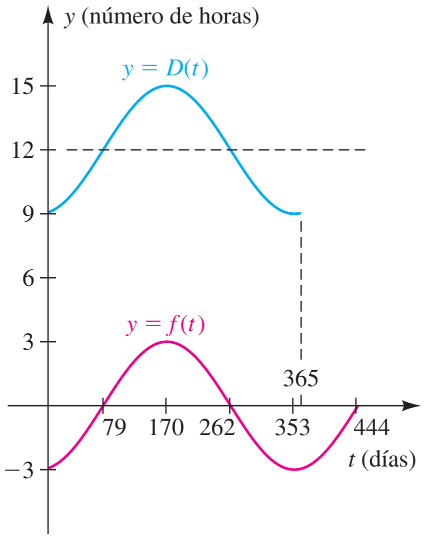
$$f(t) = 3 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right].$$

Trazaremos la gráfica de f y luego aplicaremos un desplazamiento vertical a una distancia de 12.

Al igual que en la parte (2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, podemos obtener un intervalo t que contenga exactamente un ciclo al resolver la desigualdad siguiente

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{2\pi}{365}&(t - 79) \leq 2\pi \\ 0 \leq\ & t - 79 \leq 365 && \text{multiplique por } \frac{365}{2\pi} \\ 79 \leq\ & t \leq 444 && \text{sume 79} \end{aligned}$$

FIGURA 13



En consecuencia, hay una onda senoidal en el intervalo [79, 444]. Dividiendo este intervalo en cuatro partes iguales, obtenemos la tabla siguiente de valores, que indica la conocida onda senoidal de amplitud 3.

t	79	170.25	261.5	352.75	444
$f(t)$	0	3	0	−3	0

Si $t = 0$,

$$f(0) = 3 \text{ sen}\left[\frac{2\pi}{365}(-79)\right] \approx 3 \text{ sen}(-1.36) \approx -2.9.$$

Como el periodo de f es 365 días, esto implica que $f(365) \approx -2.9$.

La gráfica de f para el intervalo [0, 444] aparece en la figura 13, con diferentes escalas en los ejes y t redondeada al día más cercano.

La aplicación de un desplazamiento vertical de 12 unidades nos da la gráfica de D para $0 \le t \le 365$ que se ve en la figura 13.

(b) El día más largo, es decir, el valor más grande de $D(t)$, ocurre 170 días después del 1 de enero. Excepto para un año bisiesto, esto corresponde al 20 de junio. El día más corto ocurre 353 días después del 1 de enero, o sea el 20 de diciembre. ■

En el ejemplo siguiente usamos una calculadora de gráficas para aproximar la solución de una desigualdad que contiene expresiones trigonométricas.

EJEMPLO 13 Aproximar soluciones de una desigualdad trigonométrica

Aproxime la solución de la desigualdad

$$\text{sen } 3x < x + \text{sen } x.$$

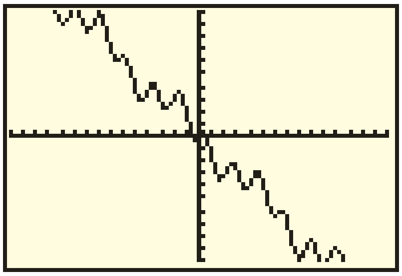
SOLUCIÓN La desigualdad dada es equivalente a

$$\text{sen } 3x - x - \text{sen } x < 0.$$

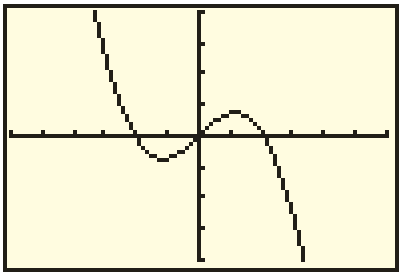
Si asignamos sen $3x - x -$ sen x a Y_1, entonces el problema dado es equivalente a hallar dónde la gráfica de Y_1 está abajo del eje x. Usando la pantalla estándar nos da un trazo similar a la figura 14(a), donde vemos que la gráfica de Y_1 tiene un punto de cruce c con el eje x entre -1 y 0. Parece que la gráfica está abajo del eje x en el intervalo (c, ∞), pero este hecho no está perfectamente claro debido a la pequeña escala de los ejes.

FIGURA 14

(a) $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$



(b) $[-1.5, 1.5, 0.25]$ por $[-1, 1, 0.25]$



Usando la pantalla $[-1.5, 1.5, 0.25]$ por $[-1, 1, 0.25]$, obtenemos la figura 14(b), donde vemos que los puntos de cruce con el eje x son aproximadamente -0.5, 0 y 0.5. Usando una función de raíz obtenemos un valor positivo más preciso de 0.51. Como la función involucrada es impar, el valor negativo es aproximadamente -0.51. En consecuencia, las soluciones de la desigualdad están en los intervalos (aproximados)

$$(-0.51, 0) \cup (0.51, \infty).$$

■

EJEMPLO 14 **Investigar la corriente alterna en un circuito eléctrico**

La corriente I (en amperes) en un circuito de corriente alterna en el tiempo t (en segundos) está dada por

$$I = 30 \text{ sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right).$$

Aproxime el valor más pequeño de t para el cual $I = 15$.

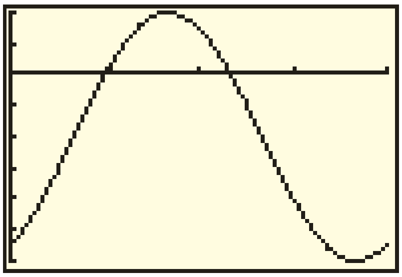
SOLUCIÓN Haciendo $I = 15$ en la fórmula dada, obtenemos

$$15 = 30 \text{ sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right)$$

o bien, lo que es equivalente,

$$\text{sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0.$$

FIGURA 15
$[0, 0.04, 0.01]$ por $[-1.5, 0.5, 0.25]$



Si asignamos sen $(50\pi x - 7\pi/3) - ½$ a Y_1, entonces el problema dado es equivalente a calcular el mínimo punto de cruce con el eje x de la gráfica.

Como el periodo de Y_1 es

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25} = 0.04$$

y como $-\frac{3}{2} \leq Y_1 \leq \frac{1}{2}$, seleccionamos la pantalla dado, obteniendo un trazo semejante a la figura 15. Usando una función de raíz nos da $t \approx 0.01$ s. ■

Volveremos a trabajar el ejemplo precedente en la sección 7.2 y mostraremos cómo hallar el valor exacto de t sin ayuda de una calculadora de gráficas.

6.5 Ejercicios

1 Encuentre la amplitud y periodo y trace la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 4 \text{ sen } x$ **(b)** $y = \text{sen } 4x$

(c) $y = \frac{1}{4} \text{ sen } x$ **(d)** $y = \text{sen } \frac{1}{4}x$

(e) $y = 2 \text{ sen } \frac{1}{4}x$ **(f)** $y = \frac{1}{2} \text{ sen } 4x$

(g) $y = -4 \text{ sen } x$ **(h)** $y = \text{sen } (-4x)$

2 Para ecuaciones análogas a las de (a)–(h) del ejercicio 1 pero que contengan el coseno, encuentre la amplitud y el periodo y trace la gráfica.

3 Encuentre la amplitud y el periodo y trace la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 3 \cos x$ **(b)** $y = \cos 3x$

(c) $y = \frac{1}{3} \cos x$ **(d)** $y = \cos \frac{1}{3}x$

(e) $y = 2 \cos \frac{1}{3}x$ **(f)** $y = \frac{1}{2} \cos 3x$

(g) $y = -3 \cos x$ **(h)** $y = \cos (-3x)$

4 Para ecuaciones análogas a las de (a)–(h) del ejercicio 3 pero que contengan el seno, encuentre la amplitud y el periodo y trace la gráfica.

Ejer. 5–40: Encuentre la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase y trace la gráfica de la ecuación.

5 $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

6 $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

7 $y = 3\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

8 $y = 2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

9 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

10 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

11 $y = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

12 $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

13 $y = \operatorname{sen}(2x - \pi) + 1$

14 $y = -\operatorname{sen}(3x + \pi) - 1$

15 $y = -\cos(6x + \pi) - 2$

16 $y = \cos(2x - \pi) + 2$

17 $y = -5\operatorname{sen}(3x + \pi)$

18 $y = 3\cos(3x - \pi)$

19 $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

20 $y = 7\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

21 $y = 6\operatorname{sen}\pi x$

22 $y = 3\cos\frac{\pi}{2}x$

23 $y = 2\cos\frac{\pi}{2}x$

24 $y = 4\operatorname{sen}2\pi x$

25 $y = \frac{3}{4}\operatorname{sen}2\pi x$

26 $y = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}x$

27 $y = 5\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

28 $y = -4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

29 $y = -3\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

30 $y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$

31 $y = -5\cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$

32 $y = 4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

33 $y = 3\cos(\pi x + 4\pi)$

34 $y = -2\operatorname{sen}(2\pi x + \pi)$

35 $y = -8\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

36 $y = 9\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$

37 $y = -2\operatorname{sen}(2x - \pi) + 3$

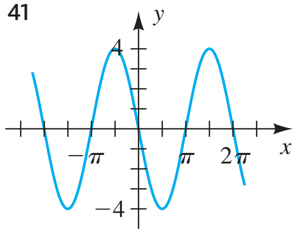
38 $y = 3\cos(x + 3\pi) - 2$

39 $y = 5\cos(2x + 2\pi) + 2$

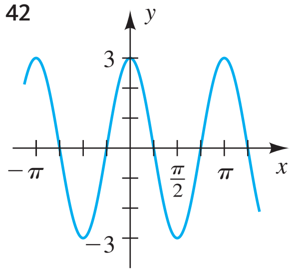
40 $y = -4\operatorname{sen}(3x - \pi) - 3$

Ejer. 41–44: La gráfica de una ecuación se muestra en la figura. (a) Encuentre la amplitud, el periodo y desplazamiento de fase. (b) Escriba la ecuación en la forma $y = a\operatorname{sen}(bx + c)$ para $a > 0$, $b > 0$ y el mínimo número real positivo c.

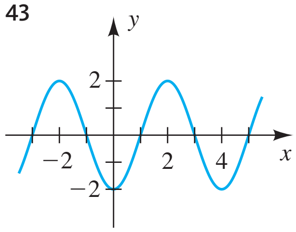
41



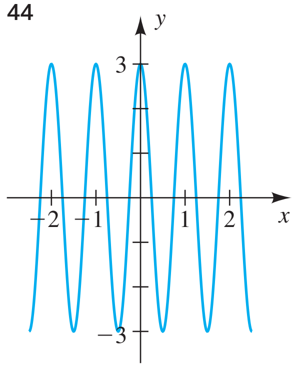
42



43

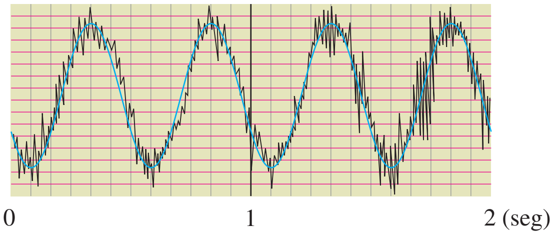


44



45 **Electroencefalografía** En la figura se muestra un electroencefalograma de ondas del cerebro humano durante el sueño profundo. Si usamos $W = a \text{ sen } (bt + c)$ para representar estas ondas, ¿cuál es el valor de b?

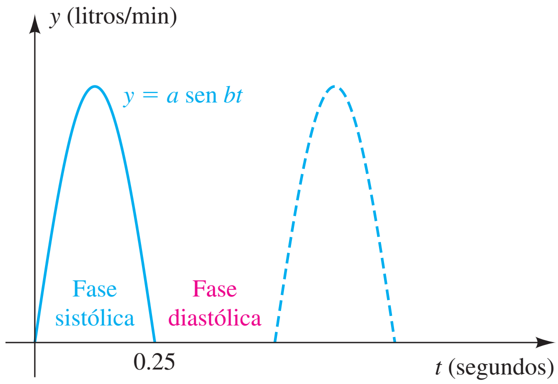
EJERCICIO 45



46 **Intensidad de la luz diurna** En cierto día de primavera con 12 horas de luz diurna, la intensidad I de luz toma su máximo valor de 510 calorías/cm^2 al mediodía. Si $t = 0$ corresponde al amanecer, encuentre una fórmula $I = a \text{ sen } bt$ que ajuste esta información.

47 **Acción del corazón** La acción de bombeo del corazón consiste de la fase sistólica, en la que la sangre sale del ventrículo izquierdo hacia la aorta, y la fase diastólica, durante la cual el músculo cardiaco se relaja. La función cuya grafica se muestra en la figura se usa a veces para modelar un ciclo completo de este proceso. Para un individuo en particular, la fase sistólica dura $\frac{1}{4}$ de segundo y tiene un caudal máximo de 8 litros por minuto. Encuentre a y b.

EJERCICIO 47



48 **Biorritmos** La conocida teoría del biorritmo usa las gráficas de tres sencillas funciones senoidales para hacer pronósticos acerca del potencial físico, emocional e intelectual de una persona en un día particular. Las gráficas están dadas por $y = a \text{ sen } bt$ para t en días, con $t = 0$ correspondiente al nacimiento y $a = 1$ denotando el 100% de potencial.

(a) Encuentre el valor de b para el ciclo físico, que tiene un periodo de 23 días; para el ciclo emocional (periodo de 28 días); y para el ciclo intelectual (periodo de 33 días).

(b) Evalúe los ciclos de biorritmo para una persona que acaba de cumplir 21 años y tiene exactamente 7670 días de edad.

49 **Componentes de mareas** La altura de la marea en un punto particular de la playa se puede predecir con el uso de siete funciones trigonométricas (llamadas componentes de mareas) de la forma

$$f(t) = a \cos (bt + c).$$

El principal componente lunar se puede aproximar con

$$f(t) = a \cos \left(\frac{\pi}{6} t - \frac{11\pi}{12} \right),$$

donde t está en horas y $t = 0$ corresponde a la medianoche. Trace la gráfica de f si $a = 0.5$ m.

50 **Componentes de mareas** Consulte el ejercicio 49. El principal componente solar diurno se puede calcular con

$$f(t) = a \cos \left(\frac{\pi}{12} t - \frac{7\pi}{12} \right).$$

Trace la gráfica de f si $a = 0.2$ m.

51 **Horas de luz solar en Fairbanks** Si se usa la fórmula para $D(t)$ del ejemplo 12 para Fairbanks, Alaska, entonces $K \approx 12$. Trace la gráfica de D en este caso para $0 \leq t \leq 365$.

52 **Temperatura baja en Fairbanks** Con base en años de datos meteorológicos, la temperatura baja esperada T (en °F) en Fairbanks, Alaska, se puede calcular con

$$T = 36 \text{ sen } \left[\frac{2\pi}{365} (t - 101) \right] + 14,$$

donde t está en días y $t = 0$ corresponde al 1 de enero.

(a) Trace la gráfica de t para $0 \leq t \leq 365$.

(b) Pronostique cuándo ocurrirá el día más frío del año.

Ejer. 53–54: Grafique la ecuación $y = f(t)$ en el intervalo [0, 24]. Represente con y la temperatura exterior (en °F) en el tiempo t (en horas), donde $t = 0$ corresponde a las 9:00 a.m. Describa la temperatura durante el intervalo de 24 horas.

53 $y = 20 + 15 \text{ sen } \frac{\pi}{12} t$

54 $y = 80 + 22 \cos \left[\frac{\pi}{12} (t - 3) \right]$

Ejer. 55–58: A veces los científicos usan la fórmula

$$f(t) = a \text{ sen } (bt + c) + d$$

para simular variaciones de temperatura durante el día, con el tiempo t en horas, la temperatura $f(t)$ en °C y $t = 0$ correspondiente a la medianoche. Suponga que $f(t)$ es decreciente a medianoche

(a) Determine valores de a, b, c y d que ajusten la información.

(b) Trace la gráfica de f para $0 \leq t \leq 24$.

55 La temperatura alta es 10°C y la temperatura baja de −10°C se presenta a las 4:00 a.m.

56 La temperatura a la medianoche es 15°C, y las temperaturas alta y baja son 20°C y 10°C.

57 La temperatura varía entre 10°C y 30°C, y el promedio de temperatura de 20°C ocurre primero a las 9:00 a.m.

58 La temperatura alta de 28°C ocurre a las 2:00 p.m. y el promedio de temperatura de 20°C ocurre 6 horas después.

59 **Precipitación en el lago Tahoe sur** El promedio mensual de precipitación P (en pulgadas) en el lago Tahoe sur, California, aparece en la tabla siguiente.

Mes	P	Mes	P	Mes	P
Ene.	6.1	May.	1.2	Sep.	0.5
Feb.	5.4	Jun.	0.6	Oct.	2.8
Mar.	3.9	Jul.	0.3	Nov.	3.1
Abr.	2.2	Ago.	0.2	Dic.	5.4

(a) Sea t el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero, $t = 2$ a febrero, …, $t = 12$ a diciembre, $t = 13$ a enero, y así sucesivamente. Trace los puntos de datos para un periodo de dos años.

(b) Encuentre una función $P(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$ que aproxime el promedio mensual de precipitación. Trace los datos y la función P en los mismos ejes de coordenadas.

60 **Profundidad del río Támesis** Cuando un río desagua en un océano, la profundidad del río varía cerca de su desembocadura como resultado de las mareas. La información acerca de este cambio en profundidad es de importancia crítica para la seguridad. La tabla siguiente da la profundidad D (en pies) del río Támesis en Londres para un periodo de 24 horas.

Tiempo	D	Tiempo	D	Tiempo	D
12 a.m.	27.1	8 a.m.	20.0	4 p.m.	34.0
1 a.m.	30.1	9 a.m.	18.0	5 p.m.	32.4
2 a.m.	33.0	10 a.m.	18.3	6 p.m.	29.1
3 a.m.	34.3	11 a.m.	20.6	7 p.m.	25.2
4 a.m.	33.7	12 p.m.	24.2	8 p.m.	21.9
5 a.m.	31.1	1 p.m.	28.1	9 p.m.	19.6
6 a.m.	27.1	2 p.m.	31.7	10 p.m.	18.6
7 a.m.	23.2	3 p.m.	33.7	11 p.m.	19.6

(a) Grafique los datos, con el tiempo en el eje horizontal y la profundidad en el eje vertical. Sea $t = 0$ correspondiente a las 12:00 a.m.

(b) Determine la función $D(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$, donde $D(t)$ representa la profundidad del agua en el puerto en el tiempo t. Grafique la función D con los datos. (*Sugerencia:* para determinar b, encuentre el tiempo entre profundidades máximas.)

(c) Si un barco requiere al menos 24 pies de agua para navegar con seguridad en el Támesis, gráficamente determine el intervalo(s) cuando la navegación *no sea* segura.

61 **Horas de luz diurna** El número de horas de luz diurna D en un lugar particular varía con el mes y la latitud. La tabla siguiente contiene el número de horas de luz diurna en el primer día de cada mes a 60° de latitud norte.

Mes	D	Mes	D	Mes	D
Ene.	6.03	May.	15.97	Sep.	14.18
Feb.	7.97	Jun.	18.28	Oct.	11.50
Mar.	10.43	Jul.	18.72	Nov.	8.73
Abr.	13.27	Ago.	16.88	Dic.	5.88

(a) Sea t el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero, $t = 2$ a febrero, …, $t = 12$ a diciembre, $t = 13$ a enero, y así sucesivamente. Trace los puntos de datos para un periodo de dos años.

(b) Encuentre una función $D(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$ que aproxime el número de horas luz diurna. Trace la función D con los datos.

62 **Horas de luz diurna** Consulte el ejercicio 61. El número máximo de horas de luz diurna a los 40°N es 15.02 horas y ocurre el 21 de junio. El número mínimo de horas de luz diurna es de 9.32 horas y ocurre el 22 de diciembre.

(a) Determine una función $D(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$ que modele el número de horas de luz diurna, donde t está en meses y $t = 1$ corresponde al 1 de enero.

(b) Grafique la función D usando la pantalla [0.5, 24.5 ,4] por [0, 20, 4].

(c) Pronostique el número de horas de luz diurna en el 1 de febrero y el 1 de septiembre. Compare sus respuestas con los verdaderos valores de 10.17 y 13.08 horas, respectivamente.

Ejer. 63–66: Grafique la ecuación en el intervalo [−2, 2] y describa el comportamiento de y cuando $x \to 0^-$ y cuando $x \to 0^+$.

63 $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

64 $y = |x| \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

65 $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

66 $y = \dfrac{1 - \cos 3x}{x}$

Ejer. 67–68: Grafique la ecuación en el intervalo $[-20, 20]$, y estime la asíntota horizontal.

67 $y = x^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2}{x}\right)$

68 $y = \dfrac{1 - \cos^2 (2/x)}{\operatorname{sen} (1/x)}$

Ejer. 69–70: Use una gráfica para resolver la desigualdad en el intervalo $[-0, \pi]$.

69 $\cos 3x \geq \frac{1}{3}x - \operatorname{sen} x$

70 $\frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{3}x^2\right) < \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{20}x^2$

6.6 Gráficas trigonométricas adicionales

Los métodos que desarrollamos en la sección 6.5 para el seno y coseno se pueden aplicar a las otras cuatro funciones trigonométricas; sin embargo, hay varias diferencias. Como las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante no tienen valores máximos, la noción de amplitud no tiene significado. Además, no hacemos referencia a ciclos. Para algunas gráficas de tangente y cotangente empezamos por trazar la parte entre asíntotas sucesivas y luego repetimos ese patrón a derecha e izquierda.

La gráfica de $y = a \tan x$ para $a > 0$ se puede obtener al extender o comprimir la gráfica de $y = \tan x$. Si $a < 0$, entonces también usamos una reflexión alrededor del eje x. Como la función tangente tiene periodo π, es suficiente trazar la rama entre las dos asíntotas verticales sucesivas $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$. El mismo patrón se presenta a derecha e izquierda, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 **Trazar la gráfica de una ecuación que contenga tan *x***

Trace la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 3 \tan x$ **(b)** $y = \frac{1}{3} \tan x$

SOLUCIÓN Empezamos por trazar la gráfica de una rama de $y = \tan x$, como se ve en rojo en las figuras 1 y 2, entre las asíntotas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$.

(a) Para $y = 3 \tan x$, multiplicamos por 3 la coordenada y de cada punto y luego prolongamos la rama resultante a derecha e izquierda, como se ve en la figura 1.

FIGURA 1 $y = 3 \tan x$, $y = \tan x$

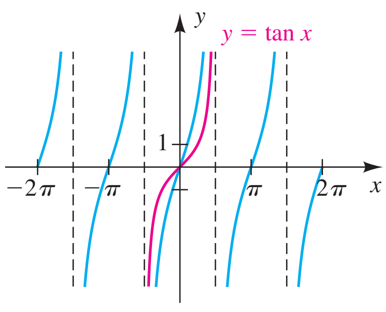
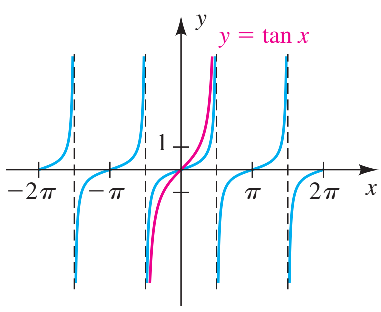


FIGURA 2 $y = \frac{1}{3} \tan x$, $y = \tan x$

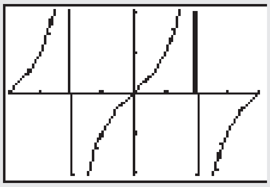


(b) Para $y = \frac{1}{3} \tan x$, multiplicamos por $\frac{1}{3}$ las coordenadas y obteniendo el trazo de la figura 2 en la página siguiente. ■

El método empleado en el ejemplo 1 se puede aplicar a otras funciones. Así, para trazar la gráfica de $y = 3 \sec x$, podríamos primero trazar la gráfica de una rama de $y = \sec x$ y luego multiplicar por 3 la coordenada y de cada punto.

La figura mostrada a continuación es la gráfica de $y = \tan x$ generada por una calculadora de gráficas común. Parece que la calculadora tiene incluidas las asíntotas, pero las rectas verticales en realidad resultan del trabajo de la calculadora para conectar píxeles sucesivos.

$[-\pi, \pi, \pi/4]$ por $[-2.1, 2.1]$



El siguiente teorema es una analogía del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase expresados en la sección 6.5 para las funciones seno y coseno.

Teorema sobre la gráfica de $y = a \tan(bx + c)$

Si $y = a \tan(bx + c)$ para números reales a y b diferentes de cero, entonces

(1) el periodo es $\dfrac{\pi}{|b|}$ y el desplazamiento de fase es $-\dfrac{c}{b}$;

(2) las asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de una rama se pueden hallar al resolver la desigualdad

$$-\frac{\pi}{2} < bx + c < \frac{\pi}{2}.$$

EJEMPLO 2 **Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \tan(bx + c)$**

Encuentre el periodo y trace la gráfica de $y = \dfrac{1}{3} \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma dada en el teorema precedente con $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$ y $c = \pi/4$. En consecuencia, por la parte (1), el periodo está dado por $\pi/|b| = \pi/1 = \pi$.

Al igual que en la parte (2), para hallar asíntotas verticales sucesivas resolvemos la siguiente desigualdad:

$$-\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

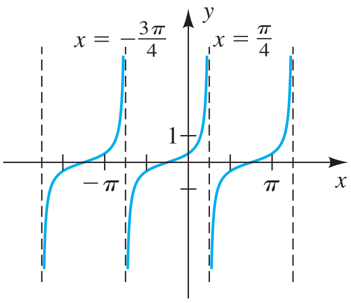
$$-\frac{3\pi}{4} < x \qquad < \frac{\pi}{4} \qquad \text{reste } \frac{\pi}{4}$$

Como $a = \frac{1}{3}$, la gráfica de la ecuación en el intervalo $[-3\pi/4, \pi/4]$ tiene la forma de la gráfica de $y = \frac{1}{3} \tan x$ (vea la figura 2). Trazar la rama y prolongarla a derecha e izquierda nos da la figura 3.

Note que como $c = \pi/4$ y $b = 1$, el desplazamiento de fase es $-c/b = -\pi/4$. Por lo tanto, la gráfica también se puede obtener al desplazar a la izquierda la gráfica de $y = \frac{1}{3} \tan x$ en la figura 2 una distancia $\pi/4$. ■

FIGURA 3

$y = \dfrac{1}{3} \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$



Si $y = a \cot (bx + c)$, tenemos una situación semejante a la expresada en el teorema previo. La única diferencia es la parte (2). Como las asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de $y = \cot x$ son $x = 0$ y $x = \pi$ (vea la figura 19 de la sección 6.3), obtenemos asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de una rama de $y = a \cot (bx + c)$ al resolver la desigualdad

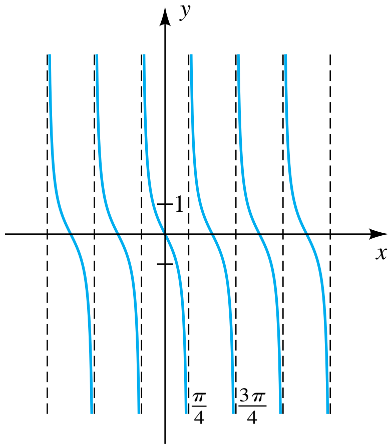
$$0 < bx + c < \pi.$$

EJEMPLO 3 **Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \cot (bx + c)$**

Encuentre el periodo y trace la gráfica de $y = \cot \left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

FIGURA 4

$y = \cot \left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$



SOLUCIÓN Con la notación usual, vemos que $a = 1$, $b = 2$ y $c = -\pi/2$. El periodo es $\pi/|b| = \pi/2$. Por lo tanto, la gráfica se repite en intervalos de longitud $\pi/2$.

Al igual que en la exposición que precede a este ejemplo, para hallar dos asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de una rama resolvemos la desigualdad:

$$0 < 2x - \frac{\pi}{2} < \pi$$

$$\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2} \quad \text{sume } \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \quad \text{divida entre 2}$$

Como a es positiva, trazamos una rama en forma de cotangente en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ y luego la repetimos a derecha e izquierda en intervalos de longitud $\pi/2$, como se ve en la figura 4. ■

Las gráficas que contienen funciones secante y cosecante se pueden obtener con métodos semejantes a aquellos para tangente y cotangente, o tomando recíprocos de gráficas correspondientes de las funciones coseno y seno.

EJEMPLO 4 **Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \sec (bx + c)$**

Trace la gráfica de la ecuación:

(a) $y = \sec \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $y = 2 \sec \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = \sec x$ está trazada (sin asíntotas) en rojo en la figura 5. La gráfica de $y = \cos x$ está trazada en negro; note que las asíntotas de $y = \sec x$ corresponden a los ceros de $y = \cos x$. Podemos obtener la gráfica de $y = \sec \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ al desplazar a la derecha la gráfica de $y = \sec x$ una distancia $\pi/4$, como se ve en azul en la figura 5.

(b) Podemos trazar esta gráfica multiplicando por 2 las coordenadas y de la gráfica en el inciso (a). Esto nos da la figura 6.

FIGURA 5 $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

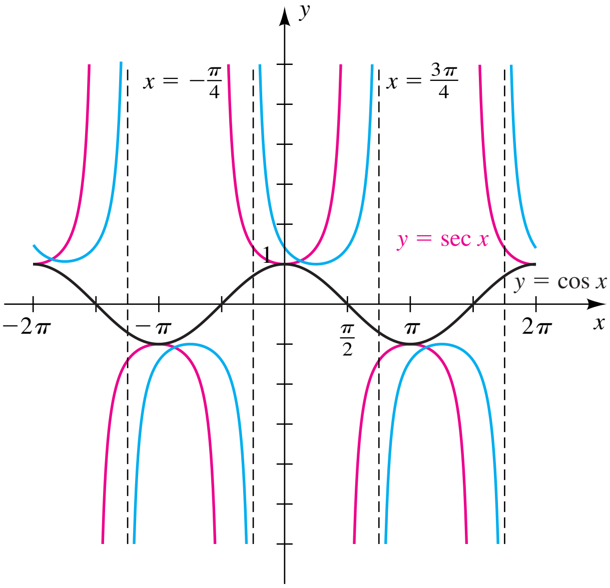
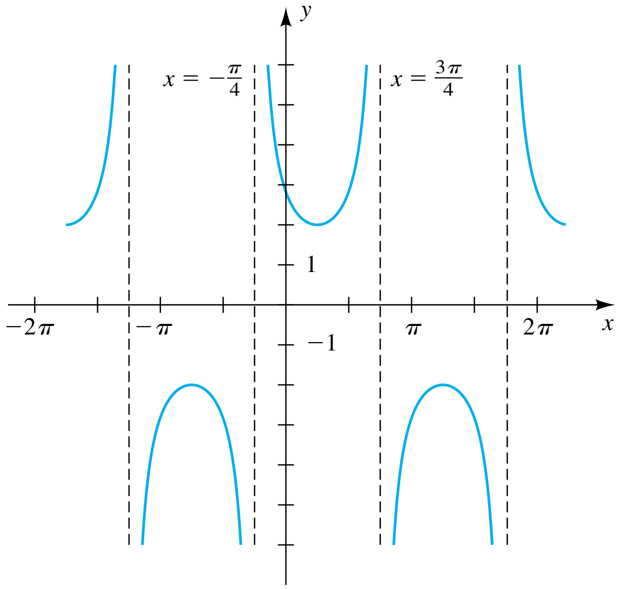


FIGURA 6 $y = 2\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \csc(bx + c)$

Trace la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$.

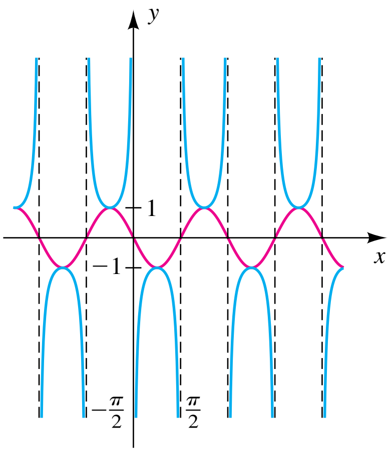
SOLUCIÓN Como $\csc\theta = 1/\text{sen}\,\theta$, podemos escribir la ecuación dada como

$$y = \frac{1}{\text{sen}\,(2x + \pi)}.$$

Entonces, podemos obtener la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$ al hallar la gráfica de $y = \text{sen}\,(2x + \pi)$ y luego sacar el recíproco de la coordenada y de cada punto. Usando $a = 1$, $b = 2$ y $c = \pi$, vemos que la amplitud de $y = \text{sen}\,(2x + \pi)$ es 1 y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$. Para hallar un intervalo que contenga un ciclo, resolvemos la desigualdad

$$\begin{aligned} 0 &< 2x + \pi < 2\pi \\ -\pi &< 2x \qquad < \pi \\ -\frac{\pi}{2} &< \ \ x \qquad < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

FIGURA 7 $y = \csc(2x + \pi)$

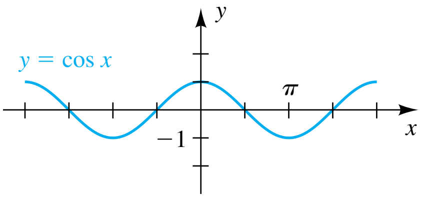


Esto lleva a la gráfica en rojo de la figura 7. Sacando recíprocos nos da la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$ mostrada en azul en la figura. Note que los ceros de la curva seno corresponden a las asíntotas de la gráfica de la cosecante. ■

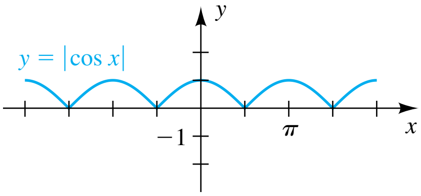
El siguiente ejemplo contiene el valor absoluto de una función trigonométrica.

FIGURA 8

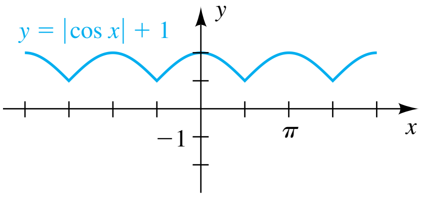
(a)



(b)



(c)



EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de una ecuación que contiene un valor absoluto

Trace la gráfica de $y = |\cos x| + 1$.

SOLUCIÓN Trazaremos la gráfica en tres etapas. Primero, trazamos la gráfica de $y = \cos x$, como en la figura 8(a).

A continuación, obtenemos la gráfica de $y = |\cos x|$ al reflejar las coordenadas y negativas en la figura 8(a) a través del el eje x. Esto nos da la figura 8(b).

Por último, desplazamos verticalmente la gráfica en (b) 1 unidad hacia arriba para obtener la figura 8(c).

Hemos empleado tres gráficas separadas para mayor claridad. En la práctica, podríamos trazar las gráficas sucesivamente en un plano de coordenadas. ■

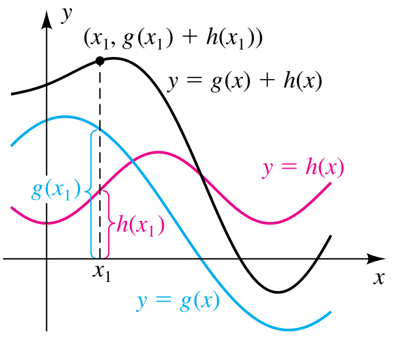
Las aplicaciones matemáticas con frecuencia contienen una función f que es una suma de otras dos o más funciones. Para ilustrar, suponga

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

donde f, g y h tienen el mismo dominio D. Antes de que hubiera calculadora de gráficas, a veces se usaba una técnica conocida como **adición de coordenadas *y*** para trazar la gráfica de f. El método se ilustra en la figura 9, donde para cada x_1, la coordenada y, $f(x_1)$, de un punto en la gráfica de f es la *suma* $g(x_1)+ h(x_1)$ de las coordenadas y de puntos en las gráficas de g y h. La gráfica de f se obtiene al *sumar gráficamente* un número suficiente de tales coordenadas y, un trabajo que mejor se deja a una calculadora de gráficas.

A veces es útil comparar la gráfica de una suma de funciones con las funciones individuales, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

FIGURA 9



EJEMPLO 7 Trazar la gráfica de una suma de dos funciones trigonométricas

Trace la gráfica de $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x + \operatorname{sen} x$ en el mismo plano de coordenadas para $0 \le x \le 3\pi$.

SOLUCIÓN Hacemos las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = \cos x, \qquad Y_2 = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad Y_3 = Y_1 + Y_2$$

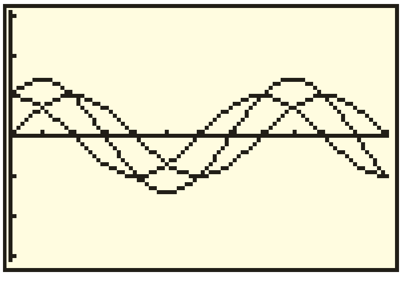
Como deseamos una proporción de pantalla 3 : 2 (horizontal : vertical), escogemos la pantalla $[0, 3\pi, \pi/4]$ por $[-\pi, \pi]$ y obtenemos la figura 10(a). La claridad de la gráfica se puede mejorar al cambiar la pantalla a $[0, 3\pi, \pi/4]$ por $[-1.5, 1.5]$, como en la figura 10(b).

Note que la gráfica de Y_3 cruza la gráfica de Y_1 cuando $Y_2 = 0$, y la gráfica de Y_2 cuando $Y_1 = 0$. Los puntos de cruce con el eje x para Y_3 corresponden a las soluciones de $Y_2 = -Y_1$. Por último, vemos que los valores máximo y mínimo de Y_3 ocurren cuando $Y_1 = Y_2$ (esto es, cuando $x = \pi/4$, $5\pi/4$ y $9\pi/4$). Estos valores de y son

$$\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{2}/2 + \left(-\sqrt{2}/2\right) = -\sqrt{2}. \quad ■$$

FIGURA 10

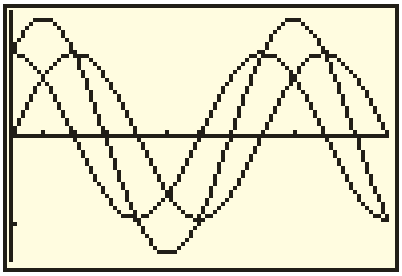
(a) $[0, 3\pi, \pi/4]$ por $[-\pi, \pi]$



La gráfica de una ecuación de la forma

$$y = f(x) \operatorname{sen}(ax + b) \qquad \text{o} \qquad y = f(x) \cos(ax + b),$$

FIGURA 10
(b) $[0, 3\pi, \pi/4]$ por $[-\pi, \pi]$



donde f es una función y a y b son números reales, se denomina **onda senoidal amortiguada** u **onda cosenoidal amortiguada,** respectivamente, y $f(x)$ recibe el nombre de **factor de amortiguamiento.** El siguiente ejemplo ilustra un método para graficar esas ecuaciones.

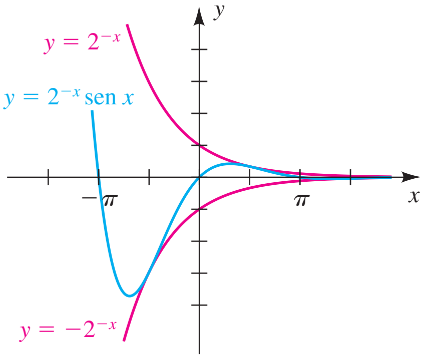
EJEMPLO 8 **Trazar la gráfica de una onda senoidal amortiguada**

Trace la gráfica de f si $f(x) = 2^{-x}$ sen x.

SOLUCIÓN Primero examinamos el valor absoluto de f:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |2^{-x} \operatorname{sen} x| && \text{valor absoluto de ambos lados} \\ &= |2^{-x}||\operatorname{sen} x| && |ab| = |a||b| \\ &\le |2^{-x}| \cdot 1 && |\operatorname{sen} x| \le 1 \\ |f(x)| &\le 2^{-x} && |2^{-x}| = 2^{-x} \text{ porque } 2^{-x} > 0 \\ -2^{-x} \le f(x) &\le 2^{-x} && |x| \le a \Longleftrightarrow -a \le x \le a \end{aligned}$$

FIGURA 11



La última desigualdad implica que la gráfica de f se encuentra entre las gráficas de las ecuaciones $y = -2^{-x}$ y $y = 2^{-x}$. La gráfica de f coincidirá con una de estas gráficas si $|\operatorname{sen} x| = 1$; es decir, si $x = (\pi/2) + \pi n$ para algún entero n.

Como $2^{-x} > 0$, los puntos de cruce con el eje x sobre la gráfica de f se presentan en sen $x = 0$; esto es, en $x = \pi n$. Como hay un número infinito de puntos de cruce con el eje x, este es un ejemplo de una función que interseca su asíntota horizontal un número infinito de veces. Con esta información, obtenemos el trazo mostrado en la figura 11. ■

El factor de amortiguamiento del ejemplo 8 es 2^{-x}. Con el uso de diferentes factores de amortiguamiento podemos obtener otras variaciones comprimidas o expandidas de ondas senoidales. El análisis de esas gráficas es importante en física e ingeniería.

6.6 Ejercicios

Ejer. 1–48: Encuentre el periodo y trace la gráfica de la ecuación. Muestre las asíntotas.

1 $y = 4 \tan x$

2 $y = \frac{1}{4} \tan x$

3 $y = \frac{1}{3} \cot x$

4 $y = 3 \cot x$

5 $y = 2 \csc x$

6 $y = \frac{1}{2} \csc x$

7 $y = \frac{1}{4} \sec x$

8 $y = 4 \sec x$

9 $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

10 $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

11 $y = \tan 2x$

12 $y = \tan \frac{1}{2}x$

13 $y = \tan \dfrac{\pi}{6}x$

14 $y = \tan \dfrac{\pi}{3}x$

15 $y = 2 \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

16 $y = \dfrac{1}{3} \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

17 $y = -\dfrac{1}{4} \tan\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

18 $y = -3 \tan\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

19 $y = \cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

20 $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

21 $y = \cot \frac{1}{2}x$

22 $y = \cot 2x$

23 $y = \cot \dfrac{\pi}{2}x$

24 $y = \cot \dfrac{\pi}{4}x$

25 $y = 2 \cot\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 26 $y = -\frac{1}{3} \cot(3x - \pi)$

27 $y = -\frac{1}{2} \cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ 28 $y = 4 \cot\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

29 $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 30 $y = \sec\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

31 $y = \sec 2x$ 32 $y = \sec \frac{1}{2}x$

33 $y = \sec \frac{\pi}{3}x$ 34 $y = \sec \frac{2\pi}{3}x$

35 $y = 2 \sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 36 $y = \frac{1}{2} \sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

37 $y = -\frac{1}{3} \sec\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

38 $y = -3 \sec\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$

39 $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 40 $y = \csc\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

41 $y = \csc \frac{1}{2}x$ 42 $y = \csc 2x$

43 $y = \csc \pi x$ 44 $y = \csc \frac{\pi}{4}x$

45 $y = 2 \csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 46 $y = -\frac{1}{2} \csc(2x - \pi)$

47 $y = -\frac{1}{4} \csc\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$ 48 $y = 4 \csc\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

Ejer. 49–50: Encuentre las ecuaciones de dos asíntotas verticales sucesivas de la gráfica de *f*.

49 $f(x) = \cot(2x - \pi)$ 50 $f(x) = \tan(3x + 1)$

Ejer. 51–52: Encuentre una intersección de la gráfica de *f* con el eje *x*.

51 $f(x) = \tan(4x - 3)$ 52 $f(x) = \cot\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

Ejer. 53–54: Encuentre el punto más bajo en una rama superior de *f*.

53 $f(x) = 3 \csc\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$ 54 $f(x) = 4 \sec\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$

Ejer. 55–56: Encuentre el rango de *f*.

55 $f(x) = 3 \sec(2x + 5) + 1$ 56 $f(x) = 4 \csc(2x - \pi) - 3$

57 Encuentre una ecuación usando la función cotangente que tenga la misma gráfica que $y = \tan x$.

58 Encuentre una ecuación usando la función cosecante que tenga la misma gráfica que $y = \sec x$.

Ejer. 59–64: Use la gráfica de una función trigonométrica para ayudar a trazar la gráfica de la ecuación sin localizar puntos.

59 $y = |\operatorname{sen} x|$ 60 $y = |\cos x|$

61 $y = |\operatorname{sen} x| + 2$ 62 $y = |\cos x| - 3$

63 $y = -|\cos x| + 1$ 64 $y = -|\operatorname{sen} x| - 2$

Ejer. 65–70: Trace la gráfica de la ecuación.

65 $y = x + \cos x$ 66 $y = x - \operatorname{sen} x$

67 $y = 2^{-x} \cos x$ 68 $y = e^x \operatorname{sen} x$

69 $y = |x| \operatorname{sen} x$ 70 $y = |x| \cos x$

Ejer. 71–76: Grafique la función *f* en la pantalla $[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$. Use la gráfica de *f* para predecir la gráfica de *g*. Verifique su predicción al graficar *g* en la misma pantalla.

71 $f(x) = \tan 0.5x$; $g(x) = \tan\left[0.5\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

72 $f(x) = 0.5 \csc 0.5x$; $g(x) = 0.5 \csc 0.5x - 2$

73 $f(x) = 0.5 \sec 0.5x$; $g(x) = 0.5 \sec\left[0.5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 1$

74 $f(x) = \tan x - 1$; $g(x) = -\tan x + 1$

75 $f(x) = 3 \cos 2x$; $g(x) = |3 \cos 2x| - 1$

76 $f(x) = 1.2^{-x} \cos x$; $g(x) = 1.2^x \cos x$

Ejer. 77–78: Identifique el factor de amortiguamiento $f(x)$ para la onda amortiguada. Trace gráficas de $y = \pm f(x)$ y la ecuación en el mismo plano de coordenadas para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

77 $y = e^{-x/4}$ sen $4x$

78 $y = 3^{-x/5}$ cos $2x$

Ejer. 79–80: Grafique la función f en $[-\pi, \pi]$ y estime los puntos altos y bajos.

79 $f(x) = \cos 2x + 2 \text{ sen } 4x - \text{sen } x$

80 $f(x) = \tan \frac{1}{4}x - 2 \text{ sen } 2x$

Ejer. 81–82: Use una gráfica para estimar el máximo intervalo $[a, b]$, con $a < 0$ y $b > 0$, en el que f es biunívoca.

81 $f(x) = \text{sen } (2x + 2) \cos (1.5x - 1)$

82 $f(x) = 1.5 \cos \left(\frac{1}{2}x - 0.3\right) + \text{sen } (1.5x + 0.5)$

Ejer. 83–84: Use una gráfica para resolver la desigualdad en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

83 $\cos (2x - 1) + \text{sen } 3x \geq \text{sen } \frac{1}{3}x + \cos x$

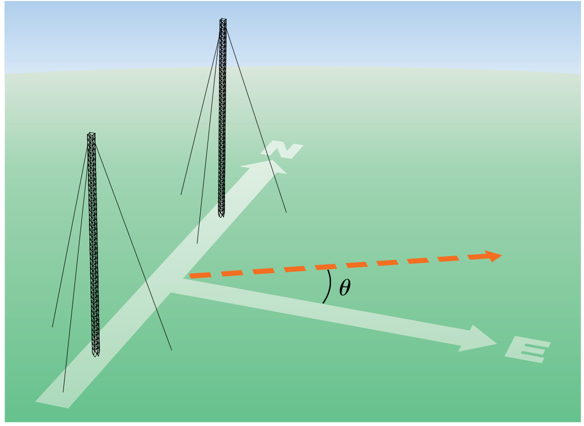
84 $\frac{1}{2} \cos 2x + 2 \cos (x - 2) < 2 \cos (1.5x + 1) + \text{sen } (x - 1)$

85 **Intensidad de una señal de radio** Las estaciones de radio tienen a veces más de una torre de transmisión, porque las normas federales no suelen permitir que una estación emita su señal en todas direcciones con igual potencia. Como las ondas de radio pueden viajar grandes distancias, es importante controlar sus patrones direccionales para que las estaciones de radio no se interfieran unas con otras. Suponga que una estación de radio tiene dos torres de transmisión localizadas a lo largo de la línea norte–sur, como se ve en la figura. Si la estación está transmitiendo a una longitud de onda λ y la distancia entre las dos torres de radio es igual a $\frac{1}{2}\lambda$, entonces la intensidad I de la señal en la dirección θ está dada por

$$I = \frac{1}{2}I_0[1 + \cos (\pi \text{ sen } \theta)],$$

donde I_0 es la intensidad máxima. Calcule I en términos de I_0 para cada θ.

EJERCICIO 85



(a) $\theta = 0$ (b) $\theta = \pi/3$ (c) $\theta = \pi/7$

86 **Intensidad de una señal de radio** Consulte el ejercicio 85.

(a) Determine las direcciones en las que I tiene valores máximo o mínimo.

(b) Grafique I en el intervalo $[0, 2\pi)$. Gráficamente aproxime θ a tres lugares decimales, cuando I es igual a $\frac{1}{3}I_0$. (*Sugerencia:* sea $I_0 = 1$.)

87 **Campo magnético de la Tierra** La intensidad del campo magnético de la Tierra varía con la profundidad bajo la superficie. La intensidad a una profundidad z y tiempo t pueden calcularse a veces usando la onda senoidal amortiguada

$$S = A_0 e^{-\alpha z} \text{ sen } (kt - \alpha z),$$

donde A_0, α y k son constantes.

(a) ¿Cuál es el factor de amortiguamiento?

(b) Encuentre el desplazamiento de fase a una profundidad z_0.

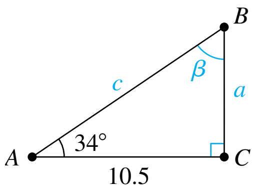
(c) ¿A qué profundidad la amplitud de la onda es la mitad de la amplitud de la intensidad en la superficie?

6.7 Problemas de aplicación

La trigonometría fue desarrollada para ayudar a resolver problemas que contenían ángulos y longitudes de lados de triángulos. Problemas de ese tipo ya no son las aplicaciones más importantes, pero todavía surgen preguntas acerca de triángulos en situaciones físicas. Cuando consideremos dichas preguntas en esta sección, restringiremos nuestra exposición a triángulos rectángulos. Los triángulos que no contengan un ángulo recto se consideran en el capítulo 8.

Con frecuencia usaremos la siguiente notación. Los vértices de un triángulo se denotarán con A, B y C; los ángulos en A, B y C se denotarán con α, β y γ, respectivamente; y las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos por a, b y c, respectivamente. El triángulo mismo se mencionará como *trián-*

FIGURA 1



gulo ABC (o denotado $\triangle ABC$). Si un triángulo es rectángulo y si se conocen uno de los ángulos agudos y un lado o si se dan dos lados, entonces podemos hallar las partes restantes con las fórmulas de la sección 6.2 que expresan las funciones trigonométricas como razones entre lados de un triángulo. Podemos referirnos al proceso de hallar las partes restantes como **resolver el triángulo.**

En todos los ejemplos *se supone que el lector sabe cómo hallar valores de funciones trigonométricas y ángulos con calculadora o con resultados acerca de ángulos especiales.*

EJEMPLO 1 Resolver un triángulo rectángulo

Resuelva $\triangle ABC$, dadas $\gamma = 90°$, $\alpha = 34°$ y $b = 10.5$.

SOLUCIÓN Como la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180°, tenemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Despejando el ángulo desconocido β tendremos

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 34° - 90° = 56°.$$

Al consultar la figura 1 obtenemos

$$\tan 34° = \frac{a}{10.5} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$a = (10.5)\tan 34° \approx 7.1. \qquad \text{despeje } a\text{, aproxime}$$

Para hallar el lado c, podemos usar la función coseno o la secante, como sigue en (1) o (2), respectivamente:

(1)

$$\cos 34° = \frac{10.5}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

$$c = \frac{10.5}{\cos 34°} \approx 12.7 \qquad \text{despeje } c\text{; aproxime}$$

(2)

$$\sec 34° = \frac{c}{10.5} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$c = (10.5)\sec 34° \approx 12.7 \qquad \text{despeje } c\text{; aproxime}$$

■

Ayuda para tareas

La organización de tareas en una tabla facilita ver qué partes restan por hallar. A continuación veamos algunos ejemplos de cómo debe verse la tabla para el ejemplo 1.

Después de hallar β:

Ángulos	*Lados opuestos*
$\alpha = 34°$	a
$\beta = 56°$	$b = 10.5$
$\gamma = 90°$	c

Después de hallar a:

Ángulos	*Lados opuestos*
$\alpha = 34°$	$a \approx 7.1$
$\beta = 56°$	$b = 10.5$
$\gamma = 90°$	c

Después de hallar c:

Ángulos	*Lados opuestos*
$\alpha = 34°$	$a \approx 7.1$
$\beta = 56°$	$b = 10.5$
$\gamma = 90°$	$c \approx 12.7$

Como se ilustra en el ejemplo 1, al trabajar con triángulos por lo general redondeamos respuestas. Una razón para hacer esto es que en casi todas las aplicaciones las longitudes de los lados de los triángulos y las medidas de ángulos se encuentran con dispositivos mecánicos y por tanto son sólo aproximaciones a valores exactos. En consecuencia, un número como 10.5 en el ejemplo 1 se supone que ha sido redondeado al décimo más cercano. No podemos esperar más precisión en los valores calculados para los lados restantes, y por tanto deben redondearse también al décimo más cercano.

Al hallar ángulos, las respuestas deben redondearse como se indica en la tabla siguiente.

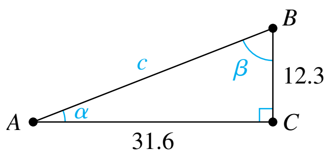
Número de cifras significativas para lados	Redondee medidas de ángulos en grados al más cercano
2	1°
3	0.1° o 10′
4	0.01° o 1′

La justificación de esta tabla requiere un cuidadoso análisis de problemas que contienen datos aproximados.

EJEMPLO 2 **Resolver un triángulo rectángulo**

Resuelva el $\triangle ABC$, dados $\gamma = 90°$, $a = 12.3$ y $b = 31.6$.

FIGURA 2



SOLUCIÓN La consulta del triángulo ilustrado en la figura 2 nos da

$$\tan \alpha = \frac{12.3}{31.6}.$$

Como los lados están dados con tres cifras significativas, la regla expresada en la tabla precedente nos dice que α debe redondearse al 0.1° más cercano, o al múltiplo más cercano de 10′. Usando el modo de grados en una calculadora, tenemos

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{12.3}{31.6} \approx 21.3° \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad \alpha \approx 21°20'.$$

Como α y β son ángulos complementarios,

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 21.3° = 68.7°.$$

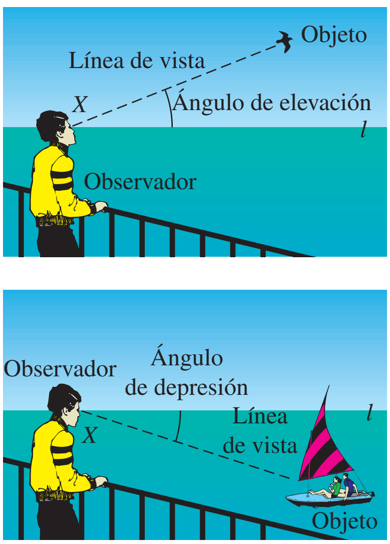
La única parte faltante de hallar es c. Podríamos usar varias relaciones que contengan c para determinar su valor. Entre éstas están

$$\cos \alpha = \frac{31.6}{c}, \qquad \sec \beta = \frac{c}{12.3} \qquad \text{y} \qquad a^2 + b^2 = c^2.$$

Siempre que sea posible, es mejor usar una relación que contenga sólo información dada, puesto que no depende de ningún valor calculado previamente. Por lo tanto, con $a = 12.3$ y $b = 31.6$, tenemos

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(12.3)^2 + (31.6)^2} = \sqrt{1149.85} \approx 33.9.$$ ■

FIGURA 3



Como se ilustra en la figura 3, si un observador en el punto X ve un objeto, entonces el ángulo que la línea de vista forma con la horizontal l es el **ángulo de elevación** del objeto, si ésta está sobre la línea horizontal, o el **ángulo de depresión** del objeto, si éste está debajo de la línea horizontal. Usamos esta terminología en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 3 **Usar un ángulo de elevación**

Desde un punto al nivel del suelo a 135 pies de la base de una torre, el ángulo de elevación de la cima de la torre es 57°20′. Calcule la altura de la torre.

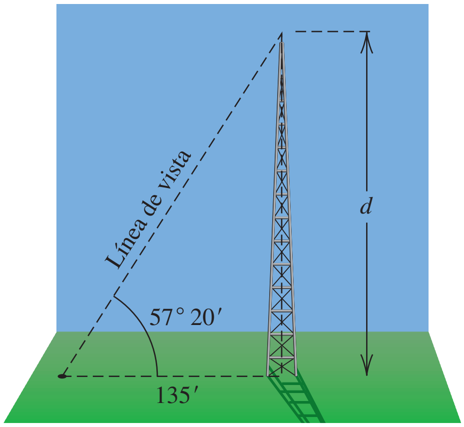
SOLUCIÓN Si con d denotamos la altura de la torre, entonces los datos dados están representados por el triángulo de la figura 4. Consultando la figura, obtenemos

$$\tan 57°20' = \frac{d}{135} \qquad \tan 57°20' = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$d = 135 \tan 57°20' \approx 211. \qquad \text{despeje } d\text{; aproxime}$$

La torre mide aproximadamente 211 pies de altura.

FIGURA 4

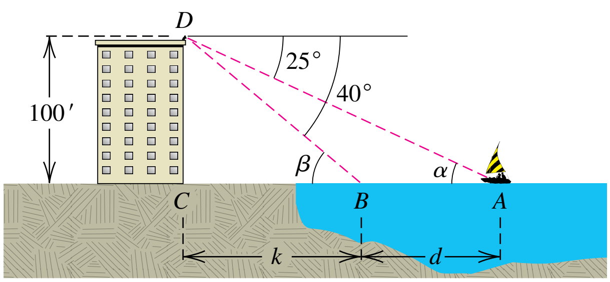


EJEMPLO 4 **Usar ángulos de depresión**

Desde lo alto de un edificio situado frente a un océano, un observador ve un bote que navega directamente hacia el edificio. Si el observador está a 100 pies sobre el nivel del mar y si el ángulo de depresión del bote cambia de 25° a 40° durante el periodo de observación, calcule la distancia que recorre el bote.

SOLUCIÓN Como en la figura 5, sean A y B las posiciones del bote que corresponden a los ángulos de 25° y 40°, respectivamente. Suponga que el observador está en el punto D y que C es el punto 100 pies directamente abajo. Denote con d la distancia que recorre el bote y con k la distancia de B a C. Si α y β denotan los ángulos DAC y DBC, respectivamente, entonces se deduce por geometría (ángulos interiores alternos) que $\alpha = 25°$ y $\beta = 40°$.

FIGURA 5



Del triángulo BCD:

$$\cot \beta = \cot 40° = \frac{k}{100} \qquad \cot \beta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

$$k = 100 \cot 40° \qquad \text{despeje } k$$

Note que $d = \overline{AC} - \overline{BC}$, y si usamos tan en lugar de cot, obtenemos la ecuación equivalente

$$d = \frac{100}{\tan 25^\circ} - \frac{100}{\tan 40^\circ}.$$

Del triángulo DAC:

$\cot\alpha = \cot 25^\circ = \dfrac{d+k}{100}$	$\cot\alpha = \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}$
$d + k = 100\cot 25^\circ$	multiplique por el mcd
$d = 100\cot 25^\circ - k$	despeje d
$= 100\cot 25^\circ - 100\cot 40^\circ$	$k = 100\cot 40^\circ$
$= 100(\cot 25^\circ - \cot 40^\circ)$	factorice 100
$\approx 100(2.145 - 1.192) \approx 95$	calcule

En consecuencia, el bote recorre aproximadamente 95 pies. ■

En ciertos problemas de navegación y topografía, la **dirección**, o **rumbo**, de un punto P a un punto Q se especifica al expresar el ángulo agudo que el segmento PQ forma con la línea norte-sur que pasa por P. También expresamos si Q está al norte o al sur, y al este u oeste de P. La figura 6 ilustra cuatro posibilidades. El rumbo de P a Q_1 es 25° al este del norte y se denota por N25°E. También nos referimos a la **dirección** N25°E, lo que significa la dirección de P a Q_1. Los rumbos de P a Q_2, a Q_3 y a Q_4 están representados de un modo semejante en la figura. Note que cuando esta notación se emplea para rumbos o direcciones, N o S siempre aparece a la *izquierda* del ángulo y O o E a la *derecha.*

FIGURA 6

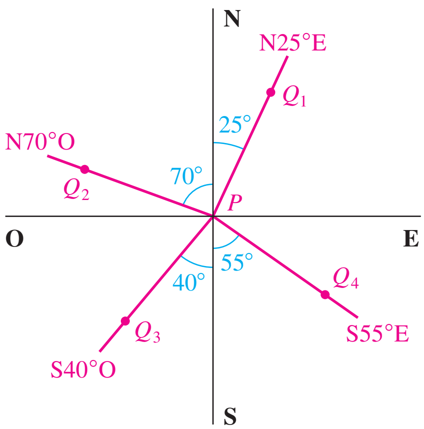
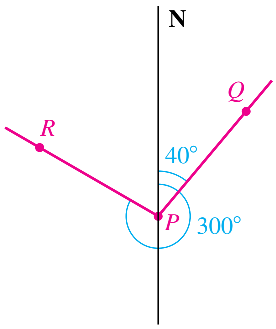


FIGURA 7



En navegación aérea, las direcciones y rumbos se especifican al medir desde el norte en una dirección *en el sentido de giro de las manecillas de un reloj*. En este caso, se asigna una medida positiva al ángulo en lugar de la medida negativa a la que estamos acostumbrados para rotaciones en el sentido de giro de las manecillas de un reloj. Por consulta de la figura 7, vemos que la dirección de PQ es de 40° y la dirección de PR es 300°.

EJEMPLO 5 **Usar rumbos**

Dos naves salen de puerto al mismo tiempo, una de ellas navega en la dirección N23°E a una rapidez de 11 mi/h, y la segunda navega en dirección S67°E a 15 mi/h. Calcule el rumbo de la segunda nave con respecto a la primera, una hora después.

FIGURA 8

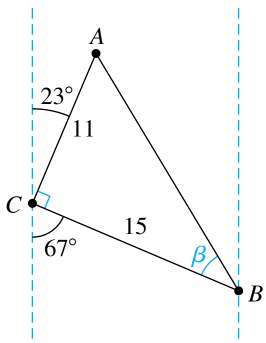
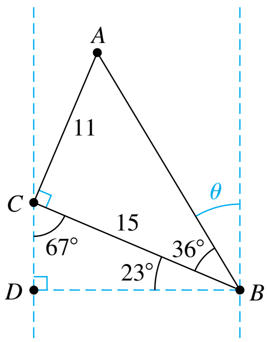


FIGURA 9



SOLUCIÓN El trazo de la figura 8 indica las posiciones de la primera y segunda naves en los puntos A y B, respectivamente, después de una hora. El punto C representa el puerto. Deseamos hallar el rumbo de B a A. Note que

$$\angle ACB = 180° - 23° - 67° = 90°,$$

y en consecuencia el triángulo ACB es rectángulo. Por tanto,

$$\tan \beta = \frac{11}{15} \qquad \text{tan } \beta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$\beta = \tan^{-1} \tfrac{11}{15} \approx 36°. \qquad \text{despeje } \beta\text{; aproxime}$$

Hemos redondeado β al grado más cercano porque los lados del triángulo se dan con dos cifras significativas.

Al consultar la figura 9 obtenemos lo siguiente:

$$\angle CBD = 90° - \angle BCD = 90° - 67° = 23°$$
$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD \approx 36° + 23° = 59°$$
$$\theta = 90° - \angle ABD \approx 90° - 59° = 31°$$

Entonces, el rumbo de B a A es aproximadamente N31°O. ■

Las funciones trigonométricas son útiles en la investigación de movimiento vibratorio u oscilatorio, por ejemplo el movimiento de una partícula en una cuerda de guitarra en vibración o un resorte que se ha comprimido o alargado y luego se suelta para oscilar en una y otra dirección. El tipo fundamental de desplazamiento de partículas en estas ilustraciones es *movimiento armónico.*

Definición de movimiento armónico simple

Un punto que se mueve en una recta coordenada está en **movimiento armónico simple** si su distancia d desde el origen en el tiempo t está dada por

$$d = a \cos \omega t \qquad \text{o bien} \qquad d = a \operatorname{sen} \omega t,$$

donde a y ω son constantes, con $\omega > 0$.

En la definición precedente, la **amplitud** del movimiento es el máximo desplazamiento $|a|$ del punto desde el origen. El **periodo** es el tiempo $2\pi/\omega$ necesario para una oscilación completa. El recíproco del periodo, $\omega/(2\pi)$, es el número de oscilaciones por unidad de tiempo y recibe el nombre de **frecuencia.**

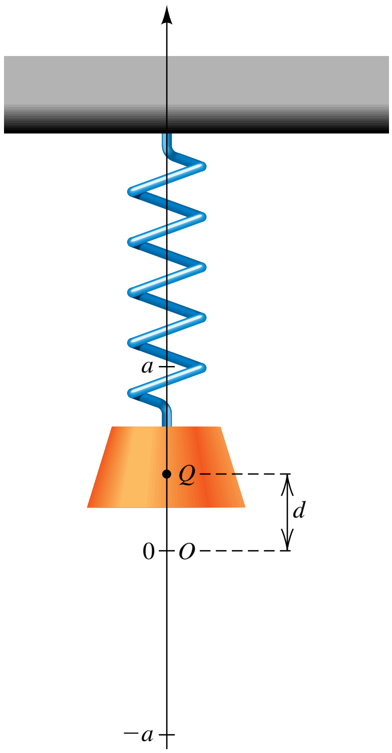
Una interpretación física del movimiento armónico simple se puede obtener al considerar un resorte con un peso sujeto que está oscilando verticalmente con respecto a una recta coordenada, como se ilustra en la figura 10. El número d representa la coordenada de un punto fijo Q en el peso, y suponemos que la amplitud a del movimiento es constante. En este caso ninguna fuerza de fricción está retardando el movimiento. Si hay fricción presente, entonces la amplitud disminuye con el tiempo y se dice que el movimiento está *amortiguado.*

EJEMPLO 6 **Describir un movimiento armónico**

Suponga que la oscilación del peso mostrado en la figura 10 está dado por

$$d = 10 \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right),$$

FIGURA 10



con t medido en segundos y d en centímetros. Discuta el movimiento del peso.

SOLUCIÓN Por definición, el movimiento es armónico simple con amplitud $a = 10$ cm. Como $\omega = \pi/6$, obtenemos lo siguiente:

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$$

Entonces, en 12 segundos el peso hace una oscilación completa. La frecuencia es $\frac{1}{12}$, lo cual significa que un doceavo de oscilación tiene lugar cada segundo. La tabla siguiente indica la posición de Q en varios tiempos.

t	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{\pi}{6}t$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
d	10	$5\sqrt{3} \approx 8.7$	5	0	-5	$-5\sqrt{3} \approx -8.7$	-10

La posición inicial de Q es 10 centímetros arriba del origen O. Se mueve hacia abajo, ganando rapidez hasta que llega a O. Note que Q se desplaza aproximadamente $10 - 8.7 = 1.3$ cm durante el primer segundo, $8.7 - 5 = 3.7$ cm durante el siguiente segundo y $5 - 0 = 5$ cm durante el tercer segundo. A continuación disminuye su rapidez hasta que llega a un punto 10 cm debajo de O al final de los 6 segundos. La dirección del movimiento se invierte entonces y el peso se mueve hacia arriba, ganando rapidez hasta que llega a O. Una vez que llega a O, disminuye su rapidez hasta que regresa a su posición original al final de 12 segundos. La dirección de movimiento se invierte entonces otra vez y el patrón se repite indefinidamente. ■

6.7 Ejercicios

Ejer. 1–8: Dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90°$, encuentre los valores exactos de las partes restantes.

1 $\alpha = 30°$, $b = 20$

2 $\beta = 45°$, $b = 35$

3 $\beta = 45°$, $c = 30$

4 $\alpha = 60°$, $c = 6$

5 $a = 5$, $b = 5$

6 $a = 4\sqrt{3}$, $c = 8$

7 $b = 5\sqrt{3}$, $c = 10\sqrt{3}$

8 $b = 7\sqrt{2}$, $c = 14$

Ejer. 9–16: Dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90°$, calcule las partes restantes.

9 $\alpha = 37°$, $b = 24$

10 $\beta = 64°20'$, $a = 20.1$

11 $\beta = 71°51'$, $b = 240.0$

12 $\alpha = 31°10'$, $a = 510$

13 $a = 25$, $b = 45$

14 $a = 31$, $b = 9.0$

15 $c = 5.8$, $b = 2.1$

16 $a = 0.42$, $c = 0.68$

Ejer. 17–24: Dadas las partes indicadas del triángulo *ABC* con $\gamma = 90°$, exprese la tercera parte en términos de las primeras dos.

17 $\alpha, c;\quad b$

18 $\beta, c;\quad b$

19 $\beta, b;\quad a$

20 $\alpha, b;\quad a$

21 $\alpha, a;\quad c$

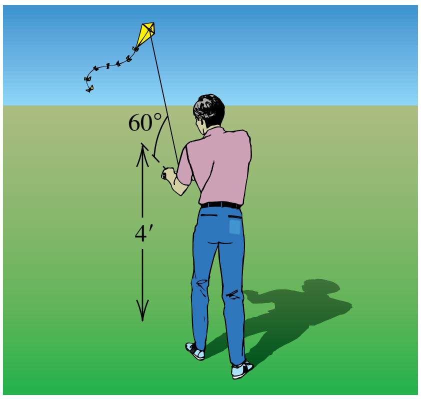
22 $\beta, a;\quad c$

23 $a, c;\quad b$

24 $a, b;\quad c$

25 **Altura de una cometa** Una persona que hace volar una cometa sostiene la cuerda 4 pies arriba del nivel del suelo. La cuerda de la cometa está tensa y forma un ángulo de 60° con la horizontal (vea la figura). Calcule la altura de la cometa arriba del nivel del suelo si se dan 500 pies de cuerda.

EJERCICIO 25



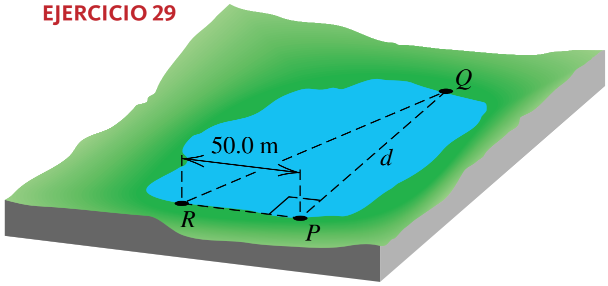
26 **Topografía** Desde un punto a 15 metros sobre el nivel del suelo, un topógrafo mide el ángulo de depresión de un objeto en el suelo a 68°. Calcule la distancia desde el objeto al punto en el suelo directamente abajo del topógrafo.

27 **Aterrizaje de un avión** Un piloto, que vuela a una altitud de 5000 pies, desea aproximarse a los números de una pista a un ángulo de 10°. Calcule, a los 100 pies más cercanos, la distancia desde el avión hasta los números al principio del descenso.

28 **Antena de radio** Un cable está unido a la cima de una antena de radio y a un punto en el suelo horizontal que está a 40.0 metros de la base de la antena. Si el cable forma un ángulo de 58°20′ con el suelo, calcule la longitud del cable.

29 **Topografía** Para hallar la distancia *d* entre dos puntos *P* y *Q* en las orillas opuestas de un lago, un topógrafo localiza un punto *R* que está a 50.0 metros de *P* de manera que *RP* es perpendicular a *PQ*, como se ve en la figura. A continuación, usando un teodolito, el topógrafo mide el ángulo *PRQ* que resulta ser de 72°40′. Encuentre *d*.

EJERCICIO 29

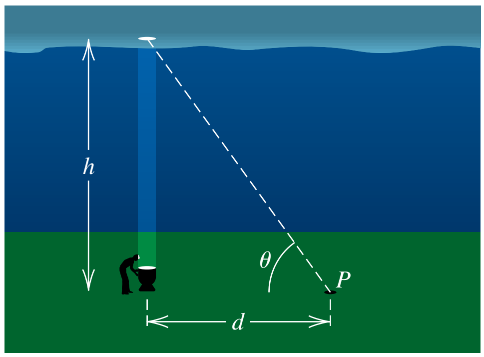


30 **Cálculos meteorológicos** Para medir la altura *h* de una capa de nubes, un estudiante de meteorología dirige un proyector de luz directamente hacia arriba desde el suelo. Desde un punto *P* en el nivel del suelo que está a *d* metros del proyector de luz, el ángulo de elevación θ de la imagen de la luz en las nubes se mide entonces (vea la figura).

(a) Exprese *h* en términos de *d* y θ.

(b) Calcule *h* si $d = 1000$ m y $\theta = 59°$.

EJERCICIO 30



31 **Altitud de un cohete** Un cohete es disparado al nivel del mar y asciende a un ángulo constante de 75° toda una distancia de 10,000 pies. Calcule su altitud al pie más cercano.

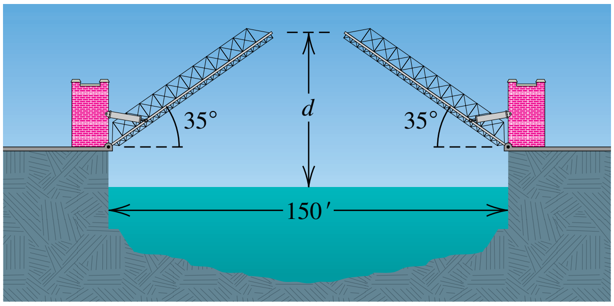
32 **Despegue de un avión** Un avión despega a un ángulo de 10° y vuela a razón de 250 pies/s. ¿Aproximadamente cuánto tarda el avión en alcanzar una altitud de 15,000 pies?

33 **Diseño de un puente levadizo** Un puente levadizo mide 150 pies de largo cuando se tiende de un lado a otro de un río. Como se ve en la figura, las dos secciones del puente se pueden girar hacia arriba un ángulo de 35°.

(a) Si el nivel del agua está 15 pies abajo del puente cerrado, encuentre la distancia *d* entre el extremo de una sección y el nivel del agua cuando el puente está abierto por completo.

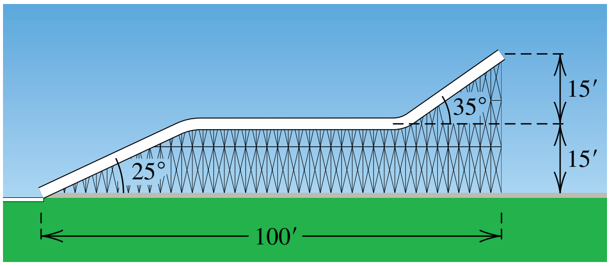
(b) ¿Cuál es la separación aproximada de los extremos de las dos secciones cuando el puente está abierto por completo, como se ve en la figura?

EJERCICIO 33



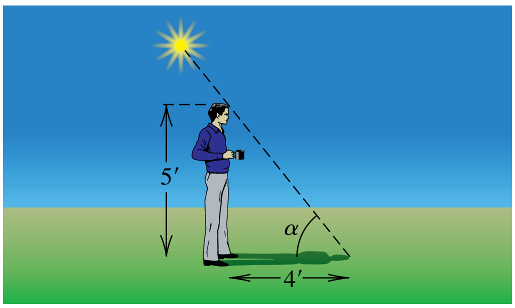
34 Diseño de un tobogán acuático En la figura se muestra parte de un diseño para un tobogán acuático. Encuentre la longitud total del tobogán al pie más cercano.

EJERCICIO 34



35 Elevación del sol Calcule el ángulo de elevación α del sol si una persona que mide 5.0 pies de estatura proyecta una sombra de 4.0 pies de largo en el suelo (vea la figura).

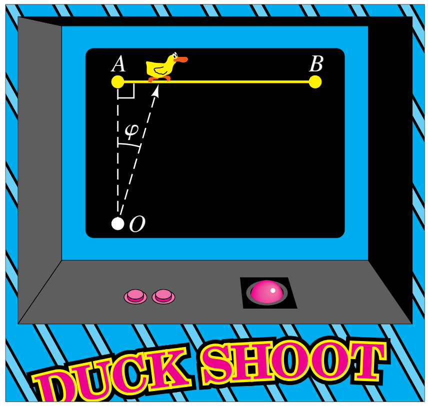
EJERCICIO 35



36 Construcción de una rampa Un constructor desea construir una rampa de 24 pies de largo que suba a una altura de 5.0 pies sobre el nivel del suelo. Calcule el ángulo que la rampa debe formar con la horizontal.

37 Juego de video En la figura se muestra la pantalla de un juego de video sencillo en el que unos patos se mueven de A a B a una velocidad de 7 cm/s. Balas disparadas desde el punto O se mueven a 25 cm/s. Si un jugador dispara tan pronto como aparece un pato en A, ¿a qué ángulo φ debe apuntar el arma para acertar en el blanco?

EJERCICIO 37

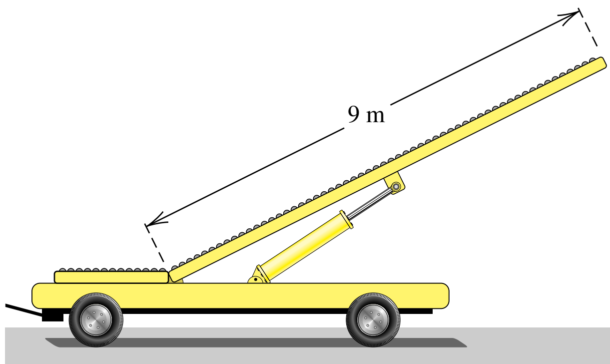


38 Banda transportadora Una banda transportadora de 9 metros de largo puede hacerse girar hidráulicamente hacia arriba a un ángulo de 40° para descargar aviones (vea la figura).

(a) Encuentre, al grado más cercano, el ángulo que la banda transportadora debe girar hacia arriba para llegar a la puerta que está a 4 metros sobre la plataforma que soporta la banda.

(b) Calcule la máxima altura sobre la plataforma que la banda puede alcanzar.

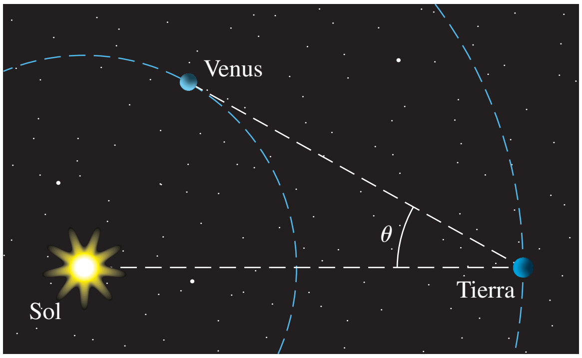
EJERCICIO 38



39 Estructura más alta La estructura artificial más alta del mundo es una torre transmisora de televisión situada cerca de Mayville, Dakota del Norte. Desde una distancia de 1 milla al nivel del suelo, su ángulo de elevación es de 21°20′24″. Determine su altura al pie más cercano.

40 Elongación de Venus La *elongación* del planeta Venus se define como el ángulo θ determinado por el Sol, la Tierra y Venus, como se muestra en la figura. La máxima elongación de Venus ocurre cuando la Tierra está en su máxima distancia D_e del Sol y Venus está en su máxima distancia D_v del Sol. Si $D_e = 91{,}500{,}000$ millas y $D_v = 68{,}000{,}000$ millas, calcule la máxima elongación $\theta_{\text{máx}}$ de Venus. Suponga que la órbita de Venus es circular.

EJERCICIO 40

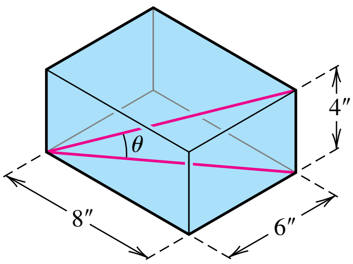


41 **Área del terreno del Pentágono** El Pentágono es el edificio de oficinas más grande del mundo en términos de área de terreno. El perímetro del edificio tiene la forma de un pentágono regular con cada lado de 921 pies de largo. Encuentre el área encerrada por el perímetro del edificio.

42 Un octágono regular está inscrito en un círculo de radio 12.0 centímetros. Calcule el perímetro del octágono.

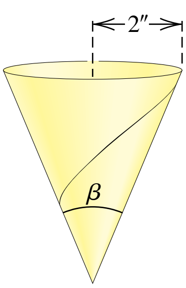
43 Una caja rectangular tiene dimensiones de $8'' \times 6'' \times 4''$. Calcule, al décimo de grado más cercano, el ángulo θ formado por una diagonal de la base y la diagonal de la caja, como se ve en la figura.

EJERCICIO 43



44 **Volumen de un vaso cónico** Un vaso cónico de papel tiene un radio de 2 pulgadas. Aproxime, al grado más cercano, el ángulo β (vea la figura) para que el cono tenga un volumen de 20 pulgadas cúbicas.

EJERCICIO 44



45 **Altura de una torre** Desde un punto P al nivel del suelo, el ángulo de elevación de la cima de una torre es de 26°50′. Desde un punto a 25.0 metros más cercano a la torre y sobre la misma línea con P y la base de la torre, el ángulo de elevación de la cima es 53°30′. Calcule la altura de la torre.

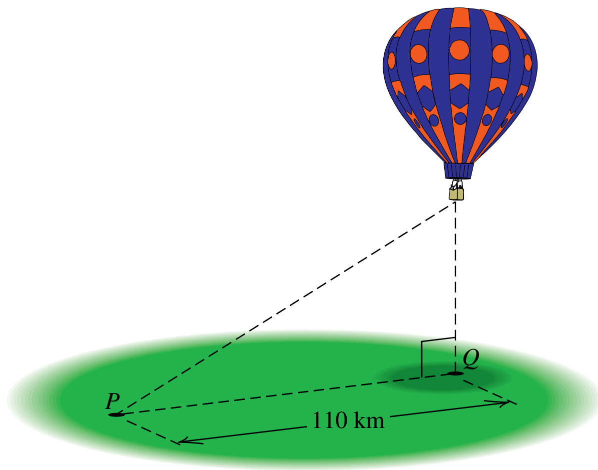
46 **Cálculos de escaleras** Una escalera de 20 pies de largo se inclina contra el costado de un edificio, y el ángulo entre la escalera y el edificio es de 22°.

(a) Calcule la distancia desde la base de la escalera al edificio.

(b) Si la distancia desde la base de la escalera al edificio se aumenta en 3.0 pies, ¿aproximadamente cuánto baja por el edificio la parte alta de la escalera?

47 **Ascenso de un globo de aire caliente** Cuando un globo de aire caliente se eleva verticalmente, su ángulo de elevación, desde un punto P en el nivel del suelo a 110 kilómetros del punto Q directamente debajo del globo, cambia de 19°20′ a 31°50′ (vea la figura). ¿Aproximadamente cuánto sube el globo durante este periodo?

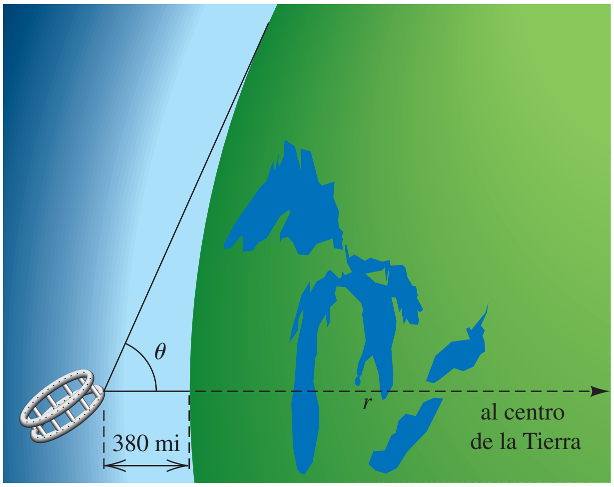
EJERCICIO 47



48 **Altura de un edificio** Desde un punto A que está a 8.20 metros sobre el nivel del suelo, el ángulo de elevación de la cima de un edificio es 31°20′ y el ángulo de depresión de la base del edificio es 12°50′. Calcule la altura del edificio.

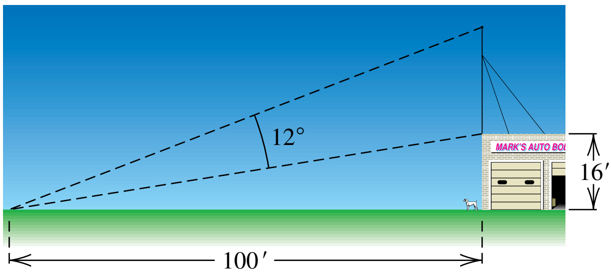
49 **Radio de la Tierra** Una nave espacial gira en torno a la Tierra a una altitud de 380 millas. Cuando un astronauta ve el horizonte de la Tierra, el ángulo θ mostrado en la figura es de 65.8°. Use esta información para estimar el radio de la Tierra.

EJERCICIO 49



50 **Longitud de una antena** Una antena de banda civil está colocada encima de un garaje que mide 16 pies de altura. Desde un punto al nivel del suelo que está a 100 pies de un punto directamente debajo de la antena, la antena subtiende un ángulo de 12°, como se muestra en la figura. Calcule la longitud de la antena.

EJERCICIO 50



51 **Rapidez de un avión** Un avión que vuela a una altitud de 10,000 pies pasa directamente sobre un objeto fijo en el suelo. Un minuto más tarde, el ángulo de depresión del objeto es 42°. Calcule la rapidez del avión a la milla por hora más cercana.

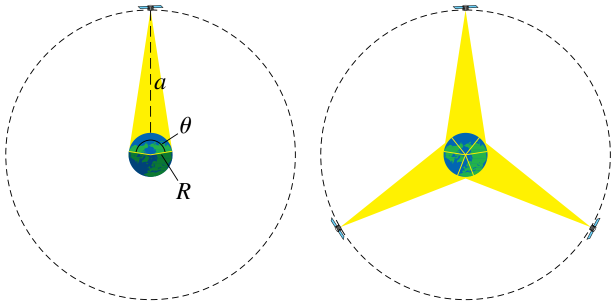
52 **Altura de una montaña** Un automovilista, que viaja a lo largo de una carretera a nivel a una rapidez de 60 km/h directamente hacia una montaña, observa que entre la 1:00 p.m. y la 1:10 p.m., el ángulo de elevación de la cima de la montaña cambia de 10° a 70°. Calcule la altura de la montaña.

53 **Satélite de comunicaciones** En la parte izquierda de la figura se muestra un satélite de comunicaciones con una órbita ecuatorial, es decir, una órbita casi circular en el plano determinado por el ecuador de la Tierra. Si el satélite describe círculos alrededor de la Tierra a una altitud $a =$ 22,300 millas, su rapidez es igual que la rapidez rotacional de la Tierra; para un observador en el ecuador, el satélite parece estar estacionario, es decir, su órbita es sincrónica.

(a) Usando $R = 4000$ millas para el radio de la Tierra, determine el porcentaje del ecuador que está dentro del alcance de señal de este satélite.

(b) Como se ve en la parte derecha de la figura, tres satélites están igualmente espaciados en órbitas ecuatoriales sincrónicas. Utilice el valor de θ obtenido en el inciso (a) para explicar por qué todos los puntos en el ecuador están dentro del alcance de señal de al menos uno de los tres satélites.

EJERCICIO 53

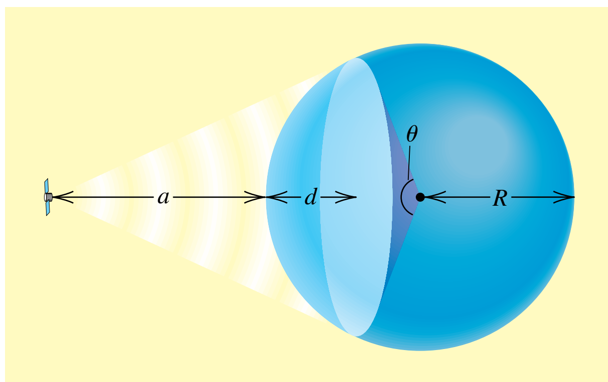


54 **Satélite de comunicaciones** Consulte el ejercicio 53. En la figura se ve el área abarcada por un satélite de comunicaciones que se mueve en círculos alrededor de un planeta de radio R a una altitud a. La parte de la superficie del planeta que está dentro del alcance del satélite es un casquete esférico de profundidad d y área superficial $A = 2\pi Rd$.

(a) Exprese d en términos de R y θ.

(b) Estime el porcentaje de la superficie del planeta que está dentro del alcance de señal de un solo satélite en órbita ecuatorial sincrónica.

EJERCICIO 54



55 **Altura de una cometa** Generalice el ejercicio 25 para el caso donde el ángulo es α, el número de pies de cuerda dado es d y el extremo de la cuerda está sostenido c pies sobre el suelo. Exprese la altura h de la cometa en términos de α, d y c.

56 **Topografía** Generalice el ejercicio 26 para el caso donde el punto está d metros sobre el nivel del suelo y el ángulo de depresión es α. Exprese la distancia x en términos de d y α.

57 **Altura de una torre** Generalice el ejercicio 45 para el caso donde el primer ángulo es α, el segundo ángulo es β y la distancia entre los dos puntos es d. Exprese la altura h de la torre en términos de d, α y β.

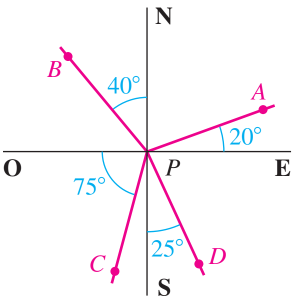
58 Generalice el ejercicio 42 para el caso de un polígono de n lados inscrito en un círculo de radio r. Exprese el perímetro P en términos de n y r.

59 **Ascenso de un globo de aire caliente** Generalice el ejercicio 47 para el caso donde la distancia de P a Q es d kilómetros y el ángulo de elevación cambia de α a β.

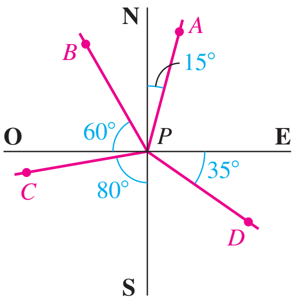
60 **Altura de un edificio** Generalice el ejercicio 48 para el caso donde el punto A está d metros sobre el suelo y los ángulos de elevación y depresión son α y β, respectivamente. Exprese la altura h del edificio en términos de d, α y β.

Ejer. 61–62: Encuentre el rumbo de P a cada uno de los puntos A, B, C y D.

61



62



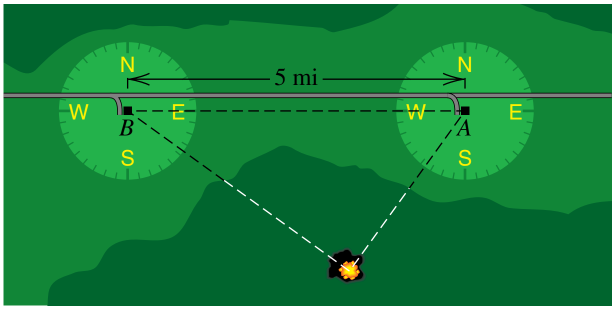
63 **Rumbo de un barco** Un barco sale de puerto a la 1:00 p.m. y navega en la dirección N34°O a una velocidad de 24 mi/h. Otro barco sale de puerto a la 1:30 p.m. y navega en dirección N56°E una velocidad de 18 mi/h.

(a) ¿Aproximadamente a qué distancia están entre sí los barcos a las 3:00 p.m.?

(b) ¿Cuál es el rumbo, al grado más cercano, del primer barco con respecto al segundo?

64 **Localización de un incendio forestal** Desde un punto de observación A, un guardabosque avista un incendio en la dirección S35°50′O (vea la figura). Desde un punto B, a 5 millas al oeste de A, otro guardabosque avista el mismo incendio en la dirección S54°10′E. Calcule, al décimo de milla más cercano, la distancia del incendio desde A.

EJERCICIO 64



65 **Vuelo de un avión** Un avión que vuela con una rapidez de 360 mi/h vuela desde un punto A en la dirección 137° durante 30 minutos y luego en la dirección 227° durante 45 minutos. Calcule, a la milla más cercana, la distancia del avión a A.

66 **Plan de vuelo de un avión** Un avión que vuela con una rapidez de 400 mi/h vuela desde un punto A en la dirección 153° durante 1 hora y luego en la dirección 63° durante 1 hora.

(a) ¿En qué dirección necesita volar el avión para regresar al punto A?

(b) ¿Cuánto tiempo le llevará regresar al punto A?

Ejer. 67–70: La fórmula especifica la posición de un punto P que se mueve armónicamente en un eje vertical, donde t está en segundos y d en centímetros. Determine la amplitud, periodo y frecuencia, y describa el movimiento del punto durante una oscilación completa (empezando en $t = 0$).

67 $d = 10 \operatorname{sen} 6\pi t$

68 $d = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{4} t$

69 $d = 4 \cos \frac{3\pi}{2} t$

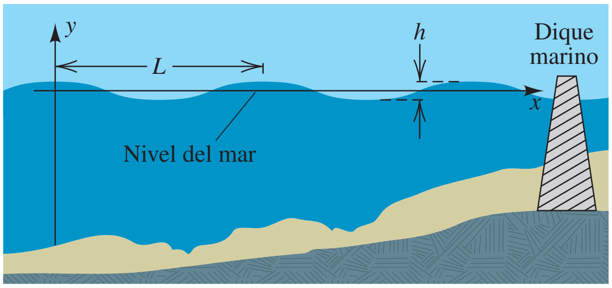
70 $d = 6 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} t$

71 Un punto P en movimiento armónico simple tiene un periodo de 3 segundos y una amplitud de 5 centímetros. Exprese el movimiento de P por medio de una ecuación de la forma $d = a \cos \omega t$.

72 Un punto P en movimiento armónico simple tiene una frecuencia de $\frac{1}{2}$ oscilación por minuto y una amplitud de 4 pies. Exprese el movimiento de P por medio de una ecuación de la forma $d = a \operatorname{sen} \omega t$.

73 **Tsunamis** Un tsunami es una ola de marea causada por un terremoto bajo el mar. Estas olas pueden medir más de 100 pies de altura y desplazarse a grandes velocidades. Los ingenieros a veces representan esas olas por medio de expresiones trigonométricas de la forma $y = a \cos bt$ y usan estas representaciones para estimar la efectividad de diques marinos. Suponga que una ola tiene una altura $h = 50$ pies y periodo de 30 minutos y se mueve a 180 pies/s.

EJERCICIO 73



(a) Sea (x, y) un punto en la ola representado en la figura. Exprese y como función de t si $y = 25$ ft cuando $t = 0$.

(b) La longitud L de la ola es la distancia entre dos crestas sucesivas de la ola. Calcule L en pies.

74 **Algunos tsunamis en Hawai** Durante un intervalo de 45 minutos, los tsunamis cerca de Hawai causados por un terremoto ocurrido en Chile en 1960 pudieron modelarse con la ecuación $y = 8 \text{ sen } \frac{\pi}{6}t$, donde y está en pies y t en minutos.

(a) Encuentre la amplitud y periodo de las olas.

(b) Si la distancia desde una cresta de la ola a la siguiente era de 21 kilómetros, ¿cuál era la velocidad de la ola? (Algunas olas de marea pueden tener velocidades de más de 700 km/h en aguas marinas profundas.)

CAPÍTULO 6 EJERCICIOS DE REPASO

1 Encuentre la medida en radianes que corresponda a cada medida en grados: 330°, 405°, −150°, 240°, 36°.

2 Encuentre la medida en grados que corresponda a cada medida en radianes: $\frac{9\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, 5\pi, \frac{\pi}{5}$.

3 Un ángulo central θ está subtendido por un arco de 20 centímetros de largo en un círculo de 2 metros de radio.

(a) Encuentre la medida de θ en radianes.

(b) Encuentre el área del sector determinado por θ.

4 **(a)** Encuentre la longitud del arco que subtiende un ángulo de medida 70° en un círculo de 15 centímetros de diámetro.

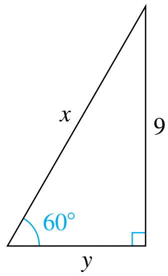
(b) Encuentre el área del sector del inciso (a).

5 **Rapidez angular de discos fonográficos** Dos tipos de discos fonográficos, álbumes de larga duración y sencillos, tienen diámetros de 12 pulgadas y 7 pulgadas, respectivamente. El álbum gira a $33\frac{1}{3}$ rpm, y el sencillo gira a 45 rpm. Encuentre la rapidez angular (en radianes por minuto) del álbum y del sencillo.

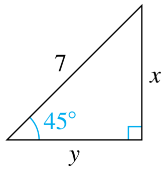
6 **Rapidez lineal en discos fonográficos** Usando la información del ejercicio 5, encuentre la rapidez lineal (en ft/min) de un punto en la circunferencia del álbum y del sencillo.

Ejer. 7–8: Encuentre los valores exactos de x y y.

7



8



Ejer. 9–10: Use identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda, para cualquier ángulo agudo θ.

9 $\tan\theta$, $\sec\theta$

10 $\cot\theta$, $\csc\theta$

Ejer. 11–20: Verifique la identidad transformando el lado izquierdo en el lado derecho.

11 $\text{sen}\,\theta(\csc\theta - \text{sen}\,\theta) = \cos^2\theta$

12 $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \csc\theta$

13 $(\cos^2\theta - 1)(\tan^2\theta + 1) = 1 - \sec^2\theta$

14 $\frac{\sec\theta - \cos\theta}{\tan\theta} = \frac{\tan\theta}{\sec\theta}$

15 $\frac{1 + \tan^2\theta}{\tan^2\theta} = \csc^2\theta$

16 $\frac{\sec\theta + \csc\theta}{\sec\theta - \csc\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}{\text{sen}\,\theta - \cos\theta}$

17 $\frac{\cot\theta - 1}{1 - \tan\theta} = \cot\theta$

18 $\frac{1 + \sec\theta}{\tan\theta + \text{sen}\,\theta} = \csc\theta$

19 $\dfrac{\tan(-\theta) + \cot(-\theta)}{\tan\theta} = -\csc^2\theta$

20 $-\dfrac{1}{\csc(-\theta)} - \dfrac{\cot(-\theta)}{\sec(-\theta)} = \csc\theta$

21 Si θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y si el lado adyacente y la hipotenusa tienen longitudes 4 y 7, respectivamente, encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ.

22 Siempre que sea posible, encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y satisface la condición expresada.

(a) El punto $(30, -40)$ está en el lado terminal de θ.

(b) El lado terminal de θ está en el segundo cuadrante y es paralelo a la recta $2x + 3y + 6 = 0$.

(c) El lado terminal de θ está en el eje y negativo.

23 Encuentre el cuadrante que contiene a θ si θ está en posición estándar.

(a) $\sec\theta < 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$

(b) $\cot\theta > 0$ y $\csc\theta < 0$

(c) $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$

24 Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas restantes si

(a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$ y $\cos\theta = \frac{3}{5}$

(b) $\csc\theta = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ y $\cot\theta = -\dfrac{3}{2}$

Ejer. 25–26: *P*(*t*) denota el punto en la circunferencia unitaria *U* que corresponde al número real *t*.

25 Encuentre las coordenadas rectangulares de $P(7\pi)$, $P(-5\pi/2)$, $P(9\pi/2)$, $P(-3\pi/4)$, $P(18\pi)$ y $P(\pi/6)$.

26 Si $P(t)$ tiene coordenadas $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, encuentre las coordenadas de $P(t + 3\pi)$, $P(t - \pi)$, $P(-t)$ y $P(2\pi - t)$.

27 (a) Encuentre el ángulo de referencia para cada medida en radianes:
$\dfrac{5\pi}{4}, -\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{9\pi}{8}$.

(b) Encuentre el ángulo de referencia para cada medida en grados: 245°, 137°, 892°.

28 Sin usar calculadora, encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas correspondientes a cada número real, siempre que sea posible.

(a) $\dfrac{9\pi}{2}$ (b) $-\dfrac{5\pi}{4}$ (c) 0 (d) $\dfrac{11\pi}{6}$

29 Encuentre el valor exacto.

(a) $\cos 225°$ (b) $\tan 150°$ (c) $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(d) $\sec\dfrac{4\pi}{3}$ (e) $\cot\dfrac{7\pi}{4}$ (f) $\csc 300°$

30 Si $\operatorname{sen}\theta = -0.7604$ y $\sec\theta$ es positiva, aproxime θ al 0.1° más cercano para $0° \le \theta \le 360°$.

31 Si $\tan\theta = 2.7381$, aproxime θ al 0.0001 radián más cercano para $0° \le \theta \le 2\pi$.

32 Si $\sec\theta = 1.6403$, aproxime θ al 0.01° más cercano para $0° \le \theta \le 360°$.

Ejer. 33–40: Encuentre la amplitud y periodo y trace la gráfica de la ecuación.

33 $y = 5\cos x$

34 $y = \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$

35 $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$

36 $y = -\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}x$

37 $y = -3\cos\frac{1}{2}x$

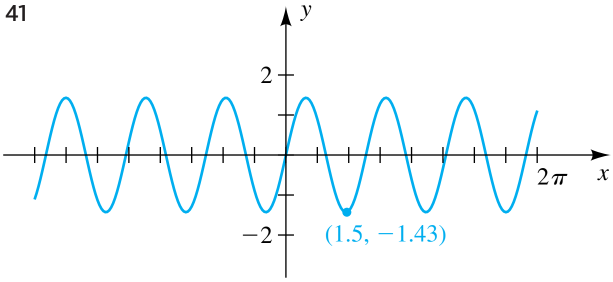
38 $y = 4\operatorname{sen} 2x$

39 $y = 2\operatorname{sen}\pi x$

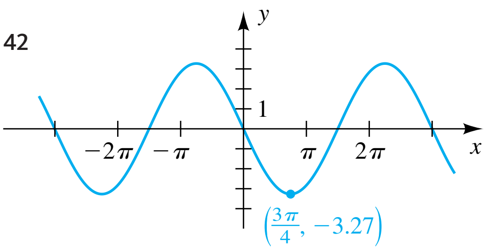
40 $y = 4\cos\dfrac{\pi}{2}x - 2$

Ejer. 41–44: La gráfica de una ecuación se muestra en la figura. (a) Encuentre la amplitud y el periodo. (b) Exprese la ecuación en la forma $y = a$ sen bx o en la forma $y = a \cos bx$.

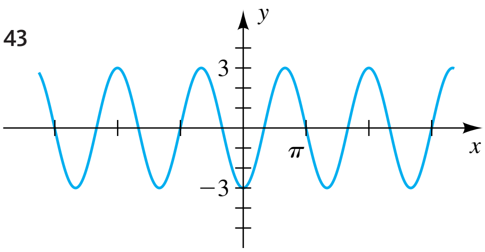
41



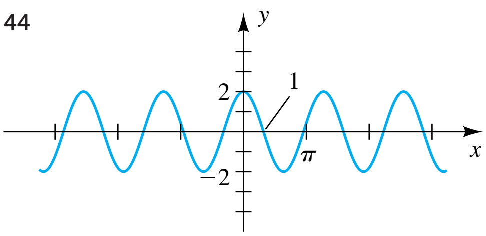
42



43



44



Ejer. 45–56: Trace la gráfica de la ecuación.

45 $y = 2 \text{ sen} \left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

46 $y = -3 \text{ sen} \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

47 $y = -4 \cos \left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

48 $y = 5 \cos \left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

49 $y = 2 \tan \left(\dfrac{1}{2}x - \pi\right)$

50 $y = -3 \tan \left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

51 $y = -4 \cot \left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

52 $y = 2 \cot \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

53 $y = \sec \left(\dfrac{1}{2}x + \pi\right)$

54 $y = \sec \left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

55 $y = \csc \left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

56 $y = \csc \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Ejer. 57–60: Dadas las partes indicadas del triángulo *ABC* con $\gamma = 90°$, calcule las partes restantes.

57 $\beta = 60°$, $b = 40$

58 $\alpha = 54°40'$, $b = 220$

59 $a = 62$, $b = 25$

60 $a = 9.0$, $c = 41$

61 **Hélice de un avión** La longitud de la hélice más grande de avión jamás usada fue de 22 pies 7.5 pulgadas. El avión era impulsado por cuatro motores que giraban las hélices a 545 revoluciones por minuto.

(a) ¿Cuál era la rapidez angular de la hélice en radianes por segundo?

(b) Aproximadamente, ¿con qué rapidez (en mi/h) se movía la punta de la hélice a lo largo de la circunferencia que generaba?

62 **La Torre Eiffel** Cuando la cima de la Torre Eiffel se ve a una distancia de 200 pies de la base, el ángulo de elevación es 79.2°. Estime la altura de la torre.

63 **Rayos láser y velocidades** Se usan rayos láser para medir con precisión velocidades de objetos. La luz láser produce un campo electromagnético oscilante E con una frecuencia constante f que puede ser descrita por

$$E = E_0 \cos (2\pi f t).$$

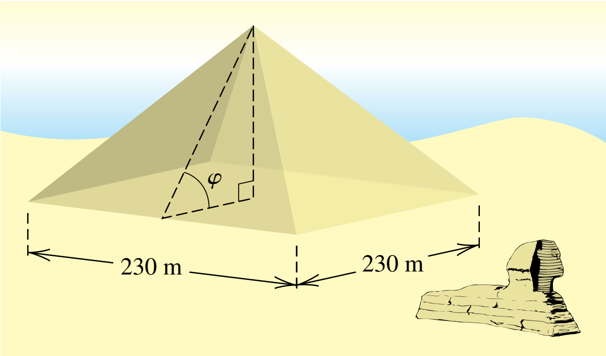
Si un rayo láser se apunta a un objeto que se mueve hacia el láser, se reflejará luz hacia el láser a una frecuencia ligeramente más alta, en forma muy parecida a como suena más alto el silbato de un tren cuando se mueve hacia el oyente. Si Δf es este cambio en frecuencia y v es la velocidad del objeto, entonces la ecuación

$$\Delta f = \frac{2fv}{c}$$

se puede usar para determinar v, donde $c = 186{,}000$ mi/s es la velocidad de la luz. Aproxime la velocidad v de un objeto si $\Delta f = 10^8$ y $f = 10^{14}$.

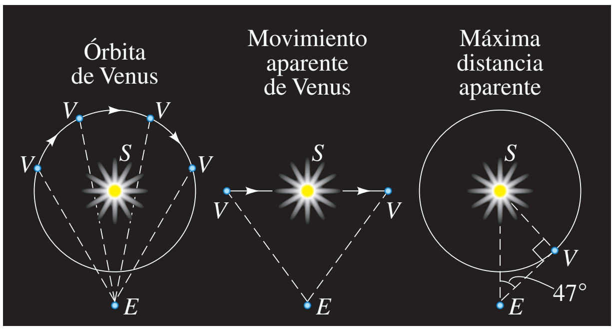
64 **La Gran Pirámide** La Gran Pirámide de Egipto mide 147 metros de altura, con una base cuadrada de 230 metros por lado (vea la figura). Calcule, al grado más cercano, el ángulo φ formado cuando un observador está de pie en el punto medio de uno de los lados y ve la cima de la pirámide.

EJERCICIO 64



65 **Venus** Cuando se ve desde la Tierra durante un tiempo, el planeta Venus parece moverse hacia adelante y atrás a lo largo de un segmento de recta con el Sol en su punto medio (vea la figura). Si *ES* es aproximadamente 92,900,000 millas, entonces la máxima distancia aparente de Venus desde el Sol ocurre cuando el ángulo *SEV* es aproximadamente 47°. Suponga que la órbita de Venus es circular y estime la distancia de Venus al Sol.

EJERCICIO 65



66 **Topografía** Desde un punto a 233 metros sobre el nivel del suelo, un topógrafo mide el ángulo de depresión de un objeto sobre el terreno que es de 17°. Aproxime la distancia desde el objeto hasta el punto en el suelo directamente debajo del topógrafo.

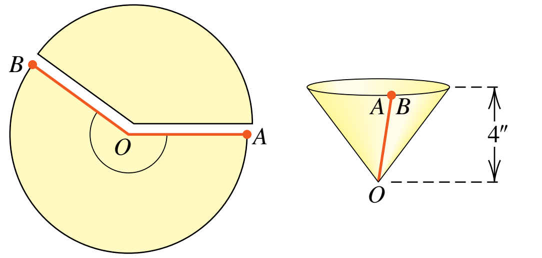
67 **Cálculos para una escalera** Una escalera de 16 pies de largo se apoya contra la pared de un edificio y el ángulo entre la escalera y el edificio es de 25°.

(a) Calcule la distancia aproximada desde la parte inferior de la escalera a la construcción.

(b) Si la distancia desde la parte inferior de la escalera a la construcción se reduce en 1.5 metros, aproximadamente ¿qué tan lejos llega la parte superior de la escalera moviéndose hacia la parte alta del edificio?

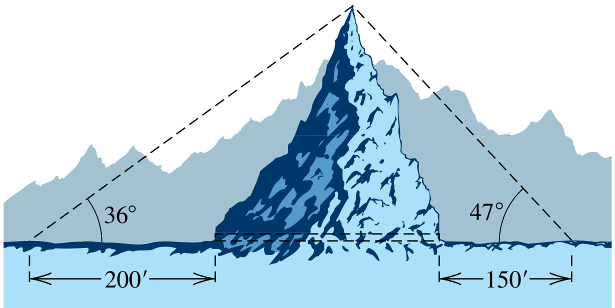
68 **Construcción de un vaso cónico** Un vaso cónico de papel se construye al remover un sector de un círculo de 5 pulgadas de radio y unir el borde *OA* con *OB* (vea la figura). Encuentre el ángulo *AOB* para que el vaso tenga una profundidad de 4 pulgadas.

EJERCICIO 68



69 **Longitud de túnel** Un túnel para una nueva carretera se ha de cortar a través de una montaña que mide 260 pies de altura. A una distancia de 200 pies de la base de la montaña, el ángulo de elevación es 36° (vea la figura). Desde una distancia de 150 pies en el otro lado, el ángulo de elevación es 47°. Aproxime la longitud del túnel al pie más cercano.

EJERCICIO 69

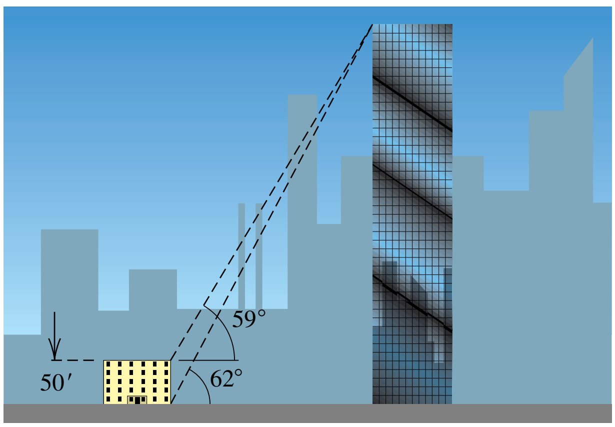


70 **Altura de un rascacielos** Cuando cierto rascacielos se observa desde lo alto de un edificio de 50 pies de altura, el ángulo de elevación es 59° (vea la figura). Cuando se ve desde la calle junto al edificio más pequeño, el ángulo de elevación es de 62°.

(a) ¿Aproximadamente cuál es la distancia entre las dos estructuras?

(b) Aproxime la altura del rascacielos al décimo de pie más cercano.

EJERCICIO 70



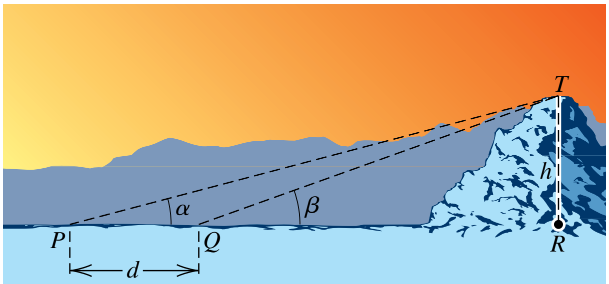
71 **Altura de una montaña** Cuando la cima de una montaña se observa desde el punto P que se muestra en la figura, el ángulo de elevación es α. Desde un punto Q, que está d millas más cerca de la montaña, el ángulo de elevación aumenta a β.

(a) Demuestre que la altura h de la montaña está dada por

$$h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}.$$

(b) Si $d = 2$ mi, $\alpha = 15°$ y $\beta = 20°$, aproxime la altura de la montaña.

EJERCICIO 71

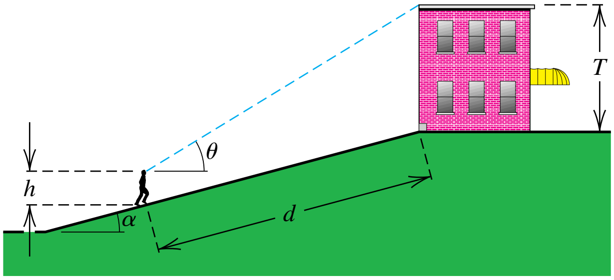


72 **Altura de un edificio** Un observador de estatura h se encuentra en un terreno inclinado a una distancia d de la base de un edificio de altura T, como se ve en la figura. El ángulo de elevación del observador a la cima del edificio es θ y el terreno inclinado forma un ángulo de α con la horizontal.

(a) Exprese T en términos de h, d, α y θ.

(b) Si $h = 6$ pies, $d = 50$ pies, $\alpha = 15°$ y $\theta = 31.4°$, estime la altura del edificio.

EJERCICIO 72



73 **Iluminación** Un proyector de luz con intensidad de 5000 candelas está situado a 15 pies sobre un escenario. Si el proyector se hace girar todo un ángulo θ como se muestra en la figura, la iluminancia E (en pies-candelas) en el área iluminada del escenario está dada por

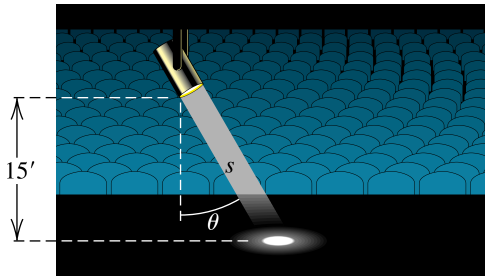
$$E = \frac{5000 \cos \theta}{s^2},$$

donde s es la distancia (en pies) que la luz debe recorrer.

(a) Encuentre la iluminancia si el proyector se hace girar un ángulo de 30°.

(b) La máxima iluminación ocurre cuando $\theta = 0°$. ¿Para qué valor de θ la iluminación es la mitad del valor máximo?

EJERCICIO 73



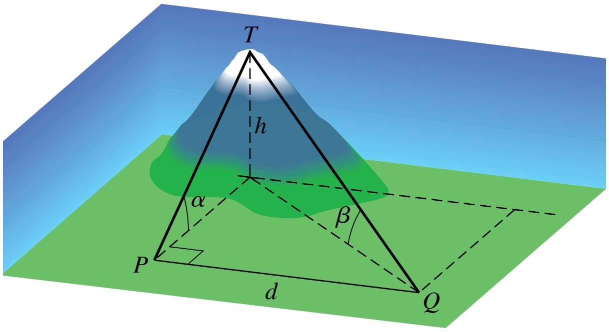
74 **Altura de una montaña** Si la cima de una montaña se ve desde un punto P al sur de la montaña, el ángulo de elevación es α (vea la figura). Si se ve desde un punto Q que está d millas al este de P, el ángulo de elevación es β.

(a) Demuestre que la altura h de la montaña está dada por

$$h = \frac{d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta}}.$$

(b) Si $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$, y $d = 10$ mi, aproxime h al centésimo de milla más cercano.

EJERCICIO 74

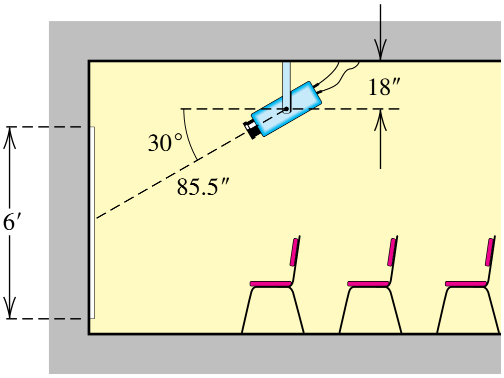


75 **Montaje de una unidad de proyección** El fabricante de un sistema computarizado de proyección recomienda que una unidad de proyección se instale en el cielo de una sala, como se ve en la figura. La distancia desde el extremo del soporte de montaje al centro de la pantalla es de 85.5 pulgadas y el ángulo de depresión es 30°.

(a) Si el grosor de la pantalla es insignificante, ¿a qué distancia de la pared debe montarse el soporte?

(b) Si el soporte mide 18 pulgadas de largo y la pantalla es de 6 pies de alto, determine la distancia desde el cielo al borde superior de la pantalla.

EJERCICIO 75

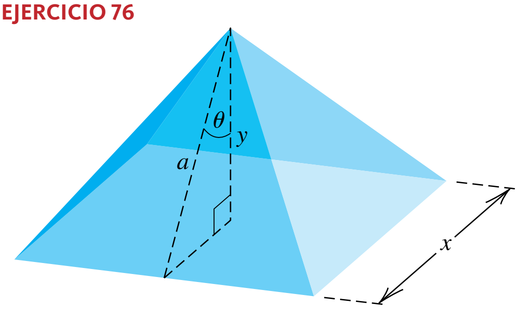


76 Relaciones de pirámide Una pirámide tiene una base cuadrada y caras triangulares congruentes. Sea θ el ángulo que la altura a de una cara triangular forma con la altura y de la pirámide y sea x la longitud de un lado (vea la figura).

(a) Exprese el área superficial total S de las cuatro caras en términos de a y θ.

(b) El volumen V de la pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura. Exprese V en términos de a y θ.

EJERCICIO 76

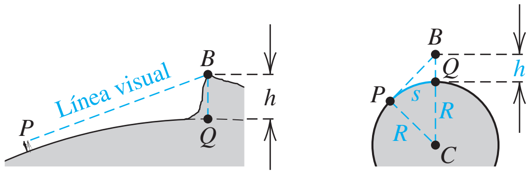


77 Levantar el plano de un acantilado Un topógrafo, con el uso de un teodolito, avista el borde B de un acantilado, como se ve en la parte izquierda de la figura (no trazado a escala). Debido a la curvatura de la Tierra, la verdadera elevación h del acantilado es mayor que la medida por el topógrafo. Una vista esquemática en sección transversal de la Tierra se muestra en la parte derecha de la figura.

(a) Si s es la longitud del arco PQ y R es la distancia de P al centro C de nuestro planeta, exprese h en términos de R y s.

(b) Si $R = 4000$ mi y $s = 50$ millas, estime la elevación del acantilado en pies.

EJERCICIO 77

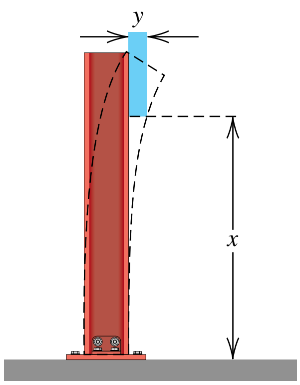


78 Respuesta a un terremoto Para simular la respuesta de una estructura a un terremoto, un ingeniero debe seleccionar una forma para el desplazamiento inicial de las vigas del edificio. Cuando la viga tiene una longitud L pies y el máximo desplazamiento es a pies, la ecuación

$$y = a - a\cos\frac{\pi}{2L}x$$

ha sido empleada por ingenieros para estimar el desplazamiento y (vea la figura). Si $a = 1$ y $L = 10$, trace la gráfica de la ecuación para $0 \le x \le 10$.

EJERCICIO 78



79 Ritmos circadianos La variación en la temperatura del cuerpo es un ejemplo de un ritmo circadiano, ciclo de un proceso biológico que se repite aproximadamente cada 24 horas. La temperatura del cuerpo es máxima alrededor de las 5:00 p.m. y mínima a las 5:00 a.m. Denote con y la temperatura del cuerpo (en °F), y sea $t = 0$ correspondiente a la medianoche. Si las temperaturas alta y baja del cuerpo son 98.3° y 98.9°, respectivamente, encuentre una ecuación que tenga la forma $y = 98.6 + a\,\text{sen}\,(bt + c)$ que ajuste esta información.

80 Variación de temperatura en Ottawa La variación anual de temperatura T (en °C) en Ottawa, Canadá, se puede aproximar con

$$T(t) = 15.8\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{6}(t - 3)\right] + 5,$$

donde t es el tiempo en meses y $t = 0$ corresponde al 1 de enero.

(a) Trace la gráfica de T para $0 \le t \le 12$.

(b) Encuentre la temperatura más alta del año y la fecha en la que ocurre.

81 **Demanda de agua** Un depósito suministra agua a una comunidad. Durante los meses de verano, la demanda $D(t)$ de agua (en pies^3/día) está dada por

$$D(t) = 2000 \operatorname{sen} \frac{\pi}{90} t + 4000,$$

donde t es el tiempo en días y $t = 0$ corresponde al principio del verano.

(a) Trace la gráfica de D para $0 \leq t \leq 90$.

(b) ¿Cuándo es máxima la demanda de agua?

82 **Corcho flotante** Un corcho sube y baja en un lago. La distancia del fondo del lago al centro del corcho en el tiempo $t \geq 0$ está dada por $s(t) = 12 + \cos \pi t$, donde $s(t)$ está en pies y t es en segundos.

(a) Describa el movimiento del corcho para $0 \leq t \leq 2$.

(b) ¿Durante cuáles intervalos sube el corcho?

CAPÍTULO 6 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 Grafique $y = \operatorname{sen}(ax)$ en $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1,1]$ para $a = 15$, 30 y 45. Discuta la precisión de las gráficas y la capacidad de graficación (en términos de precisión) de su calculadora. (*Nota:* si no ocurre algo extraño para $a = 45$, siga aumentando a hasta que ocurra.)

2 Encuentre el máximo entero k en su calculadora tal que $\operatorname{sen}(10^k)$ se pueda evaluar. Ahora discuta cómo se puede evaluar $\operatorname{sen}(10^{k+1})$ en la misma calculadora y luego encuentre realmente ese valor.

3 Determine el número de soluciones de la ecuación

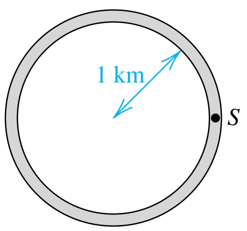
$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \pi.$$

4 Discuta las relaciones entre funciones periódicas, funciones biunívocas y funciones inversas. Con estas relaciones en mente, discuta qué debe ocurrir para que las funciones trigonométricas tengan inversas.

5 Grafique $y_1 = x$, $y_2 = \operatorname{sen} x$ y $y_3 = \tan x$ en $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.1]$. Escriba una tabla de valores para estas tres funciones, con valores positivos pequeños (del orden de 10^{-10} o algo así). ¿Qué conclusiones puede sacar de la gráfica y la tabla?

6 **Coordenadas en una pista de carreras** En la figura se muestra una pista circular de carreras de 2 kilómetros de diámetro. Todas las carreras se inician en S y continúan en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj. Aproxime, a cuatro lugares decimales, las coordenadas del punto en el que las siguientes carreras terminan con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares, con origen en el centro de la pista y S en el eje x positivo.

EJERCICIO 6

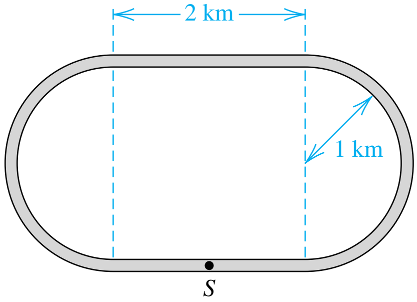


(a) Una carrera de velocidad de 2 kilómetros de longitud.

(b) Una carrera de resistencia de 500 kilómetros de longitud.

7 **Coordenadas de pista de carreras** Trabaje el ejercicio 6 para la pista que se ve en la figura, si el origen del sistema de coordenadas rectangulares está en el centro de la pista y S está en el eje y negativo.

EJERCICIO 7



8 **Hélice de motor fuera de borda** Un motor fuera de borda de 90 hp acelerado al máximo hará girar su hélice a 5000 revoluciones por minuto.

(a) Encuentre la rapidez angular ω de la hélice en radianes por segundo.

(b) El centro de una hélice de 10 pulgadas de diámetro está situado a 18 pulgadas bajo la superficie del agua. Exprese la profundidad $D(t) = a \cos(\omega t + c) + d$ de un punto en el borde de una pala de la hélice como función del tiempo t, donde t está en segundos. Suponga que el punto está inicialmente a una profundidad de 23 pulgadas.

(c) Gráficamente determine el número de veces que la hélice gira en 0.12 segundos.

CAPÍTULO 6 EXAMEN DE CAPÍTULO

1 Si un arco circular de 14 centímetros subtiende el ángulo central de 35° en una circunferencia, aproxime el radio del círculo.

2 Aproxime, a dos lugares decimales, el área de un sector de un círculo que tiene radio de 8 pulgadas y un ángulo central de 32°17′.

3 Encuentre el área de un sector que tiene un arco de 6 pies de longitud en un círculo que tiene un diámetro de 4 pies.

4 Determine la medida en grados, al minuto más cercano, de un ángulo central de un sector que tiene un arco de 9 metros en un círculo que tiene 4 metros de radio.

5 Una rueda de 7 pulgadas de diámetro está rotando a 1200 rpm.

(a) Encuentre la rapidez angular en radianes por minuto.

(b) Encuentre la rapidez lineal de un punto de la circunferencia en pies por minuto.

6 En un triángulo rectángulo, se sabe que sen $\theta = \frac{5}{8}$. Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas para el ángulo agudo θ.

7 Use las identidades fundamentales para escribir cot θ en términos de cos θ para cualquier ángulo agudo θ.

8 Verifique la identidad $\left(\dfrac{\csc\theta - 1}{\csc\theta}\right)\left(\dfrac{\csc\theta + 1}{\csc\theta}\right) = \dfrac{1}{\sec^2\theta}$.

9 Determine los valores exactos de las funciones trigonométricas de θ si θ está en su posición estándar y $P(12, -5)$ está en el lado final.

10 Determine los valores exactos de las funciones trigonométricas de θ dado que tan $\theta = \frac{3}{4}$ y sen $\theta < 0$.

11 Reescriba $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$ en forma no radical sin usar valores absolutos si $\pi/2 < \theta < \pi$.

12 Si $P(t) = \left(-\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$ es un punto en la circunferencia unitaria U que corresponde a un ángulo t, entonces encuentre las coordenadas rectangulares para $P(-t - \pi)$.

13 Verifique la identidad sen $(-x)\sec^2(-x) = -\tan x \sec x$.

14 Encuentre todos los valores de x tales que sen $x > -\frac{1}{2}$ en el intervalo $[\pi, 2\pi]$.

15 Determine el ángulo de referencia θ_R si $\theta = 60$ radianes.

16 Encuentre el valor exacto de $\csc \dfrac{4\pi}{3}$.

17 Aproxime, al 0.1° más cercano, todos los ángulos θ en el intervalo $[0°, 360°)$ que satisfacen $\cos\ \theta = 0.6357$.

18 Aproxime, al 0.01 de radián más cercano, todos los ángulos θ en el intervalo $[0, 2\pi)$ que satisfacen $\tan\ \theta = -1.8224$.

19 ¿Cuántos ciclos de $y = 4 \text{ sen } 3\pi x + 2$ hay en el intervalo $[0, 50]$?

20 Encuentre las coordenadas de cualquiera de los puntos más altos de la gráfica de $y = f(x) = 3 \cos\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 1$.

21 Grafique un ciclo de $y = -2 \text{ sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Marque los puntos más alto y más bajo así como los puntos extremos.

22 Una función de la forma $y = f(x) = a \text{ sen } bx + d$ tiene su punto más alto en $(\pi, 5)$ y su punto más bajo en $(3\pi, -1)$. Encuentre una función para f.

23 Encuentre las ecuaciones de dos asíntotas verticales consecutivas de la gráfica de $y = \tan(3x - 7)$.

24 Encuentre la intersección de la gráfica de $y = \cot\left(\dfrac{1}{8}x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ con el eje x.

25 Encuentre el punto más bajo en una rama superior de $y = 2 \sec(2x + \pi)$.

26 Determine el rango de $y = 3 \csc(x - \pi) - 2$.

27 Encuentre una ecuación usando la función cosecante que tiene la misma gráfica que $y = |\sec x|$.

28 Se sabe que en el triángulo ABC, $\beta = 45°$, $\gamma = 90°$ y $c = 20°$. Determine los valores exactos del resto de las partes.

29 Se sabe que en el triángulo ABC, $\beta = 73°14'$, $\gamma = 90°$ y $b = 821.0$. Determine los valores aproximados del resto de las partes.

30 Dados α y b en el triángulo ABC con $\gamma = 90°$, exprese a en términos de las partes dadas.

31 Un pentágono regular está inscrito en un círculo de 18 pulgadas de radio. Aproxime, a un lugar decimal, el perímetro del pentágono.

32 A partir de un punto A que está a 10 metros sobre el nivel del suelo, el ángulo de elevación de la parte más alta de un edificio es 42° y el ángulo de depresión de la base del edificio es 8°. Aproxime la altura del edificio.

7

Trigonometría analítica

En matemáticas avanzadas, ciencias naturales e ingeniería, a veces es necesario simplificar complicadas expresiones trigonométricas y resolver ecuaciones que contienen funciones trigonométricas. Estos temas se estudian en las primeras dos secciones de este capítulo, a continuación de las cuales deducimos numerosas fórmulas útiles con respecto a sumas, diferencias y múltiplos; para referencia, se citan en la tercera de forros del texto. Además de manipulaciones formales, también consideramos numerosas aplicaciones de estas fórmulas. La última sección contiene las definiciones y propiedades de las funciones trigonométricas inversas.

7.1 Verificación de identidades trigonométricas

Una **expresión trigonométrica** contiene símbolos que se refieren a funciones trigonométricas.

ILUSTRACIÓN **Expresiones trigonométricas**

- $x + \operatorname{sen} x$
- $\dfrac{\sqrt{\theta} + 2^{\operatorname{sen}\theta}}{\cot\theta}$
- $\dfrac{\cos(3t+1)}{t^2 + \tan^2(2-t^2)}$

Suponemos que el dominio de cada variable en una expresión trigonométrica es el conjunto de números reales o ángulos para los que la expresión tiene significado. Para adquirir práctica en manipulaciones al simplificar complicadas expresiones trigonométricas, usaremos las identidades fundamentales (vea la página 382) y manipulaciones algebraicas, como hicimos en los ejemplos 5 y 6 de la sección 6.2. En los primeros tres ejemplos nuestro método consiste en transformar el lado izquierdo de una identidad dada en el lado derecho o viceversa.

EJEMPLO 1 Verificar una identidad

Verifique la identidad $\sec\alpha - \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\tan\alpha$.

SOLUCIÓN Transformamos el lado izquierdo en el derecho:

$$\begin{aligned}
\sec\alpha - \cos\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha && \text{identidad recíproca}\\
&= \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} && \text{sume expresiones}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} && \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\\
&= \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) && \text{expresión equivalente}\\
&= \operatorname{sen}\alpha\tan\alpha && \text{identidad tangente}
\end{aligned}$$

■

En la sección 6.2 estudiamos dar apoyo numérico a identidades al examinar una tabla de valores. También podemos dar apoyo gráfico a identidades al examinar las gráficas del lado izquierdo y el lado derecho de la identidad propuesta. Si las gráficas son iguales (con excepción de huecos en ellas), decimos que apoyan la identidad. Si las gráficas no se relacionan, entonces la identidad propuesta es falsa.

La gráfica de la figura 1 presta apoyo gráfico a nuestra verificación del ejemplo 1. Es la gráfica (en modo de radianes y punto) de

$$Y_1 = 1/\cos(X) - \cos(X) \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \text{sen}(X)\tan(X).$$

FIGURA 1
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-5, 5]$

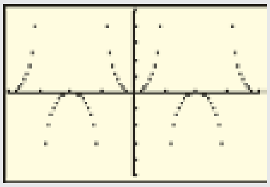
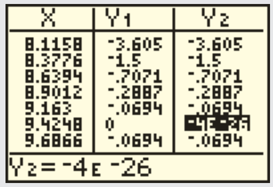


FIGURA 2



X	Y1	Y2
8.1158	⁻3.605	⁻3.605
8.3776	⁻1.5	⁻1.5
8.6394	⁻.7071	⁻.7071
8.9012	⁻.2887	⁻.2887
9.163	⁻.0694	⁻.0694
9.4248	0	[illegible]
9.6866	⁻.0694	⁻.0694

Y2=⁻4E⁻26

Los valores de Y_1 y Y_2 de la figura 2 también prestan apoyo numérico a nuestra verificación. Puede haber pequeñas discrepancias en los valores, como lo ilustra el valor resaltado.

Otras variaciones de apoyo gráfico para el ejemplo 1

(1) Grafique Y_1 y $Y_3 = Y_2 + 1$, como se ve en las figuras 3 y 4. Esto nos permite ver la gráfica de Y_2 desplazada una unidad hacia arriba, en lugar de sobre Y_1.

FIGURA 3

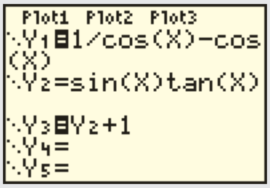
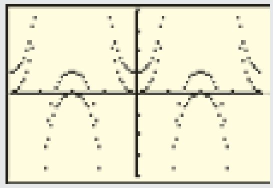


FIGURA 4
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$



(2) Grafique $Y_3 = Y_1 - Y_2 + 1$, como se ve en las figuras 5 y 6. Si la identidad propuesta es verdadera, entonces $Y_1 - Y_1$ será cero, de modo que la gráfica de Y_3 será la gráfica de la recta $y = 1$ con huecos donde Y_1 o Y_2 no está definida.

FIGURA 5

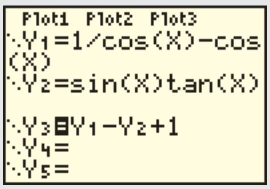
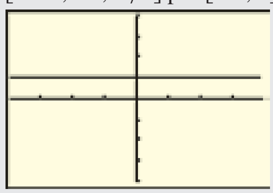


FIGURA 6
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$



(3) Grafique $Y_3 = (Y_1 = Y_2)$, como se ve en las figuras 7 y 8. Cuando $Y_1 = Y_2$ es verdadero, el valor de Y_3 es 1. La gráfica de Y_3 será la gráfica de la recta $y = 1$ con huecos donde Y_1 o Y_2 no está definida.

FIGURA 7

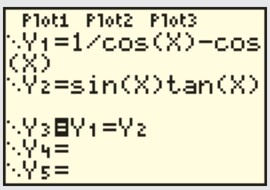
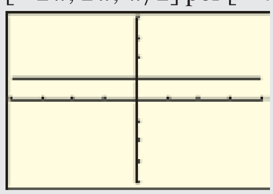


FIGURA 8
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$



EJEMPLO 2 **Verificar una identidad**

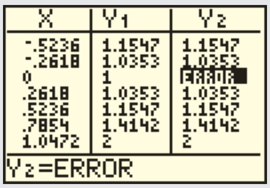
Verifique la identidad $\sec\theta = \operatorname{sen}\theta\,(\tan\theta + \cot\theta)$.

SOLUCIÓN Como la expresión del lado derecho es más complicada que la del lado izquierdo, transformamos el lado derecho en el izquierdo:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta\,(\tan\theta + \cot\theta) &= \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) && \text{identidades tangente y cotangente}\\
&= \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\right) && \text{sume fracciones}\\
&= \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\right) && \text{identidad de Pitágoras}\\
&= \frac{1}{\cos\theta} && \text{cancele sen }\theta\\
&= \sec\theta && \text{identidad recíproca}
\end{aligned}
$$

■

FIGURA 9



X	Y1	Y2
-.5236	1.1547	1.1547
-.2618	1.0353	1.0353
0	1	ERROR
.2618	1.0353	1.0353
.5236	1.1547	1.1547
.7854	1.4142	1.4142
1.0472	2	2

Y2=ERROR

La tabla (con $\triangle$Tbl $= \pi/12$) de la figura 9 muestra algunos valores de

$$Y_1 = 1/\cos(X) \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \operatorname{sen}(X)(\tan(X) + 1/\tan(X)),$$

los lados izquierdo y derecho de la identidad del ejemplo 2. Note que $X = 0$, $Y_1 = 1$, pero Y_2 tiene "ERROR". Esto resulta del uso de $1/\tan(X)$ por $\cot(X)$ en Y_2; para $X = 0$, estamos tratando de dividir entre cero.

EJEMPLO 3 **Verificar una identidad**

Verifique la identidad $\dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$.

SOLUCIÓN Como el denominador del lado izquierdo es un binomio y el denominador del lado derecho es un monomio, cambiamos la forma de la fracción del lado izquierdo al multiplicar el numerador y denominador por el conjugado del denominador y luego usamos una de las identidades de Pitágoras:

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} &= \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}\cdot\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} && \text{multiplique numerador y denominador por } 1 + \operatorname{sen} x\\
&= \frac{\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{propiedad de cocientes}\\
&= \frac{\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} && \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1\\
&= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} && \text{cancele } \cos x
\end{aligned}
$$

■

Otra técnica para mostrar que una ecuación $p = q$ es una identidad consiste en transformar el lado izquierdo p en otra expresión s, asegurándose de que cada paso sea *reversible*; es decir, que sea posible transformar s de nuevo en p al invertir el procedimiento empleado en cada paso. En este caso, la ecuación $p = s$ es una identidad. A continuación, como ejercicio *separado*, mostramos que el lado derecho q también se puede transformar en la expresión s por medio de pasos reversibles y, por tanto, que $q = s$ es una identidad. Se deduce entonces que $p = q$ es una identidad. Este método está ilustrado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 **Verificar una identidad**

Verifique la identidad $(\tan\theta - \sec\theta)^2 = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

SOLUCIÓN Vamos a verificar la identidad demostrando que cada lado de la ecuación se puede transformar en la misma expresión. Primero trabajamos sólo con el lado izquierdo:

Trabaje con el lado izquierdo.

$$(\tan\theta - \sec\theta)^2 = \tan^2\theta - 2\tan\theta\sec\theta + \sec^2\theta \qquad \text{expresión al cuadrado}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 - 2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) + \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 \qquad \text{identidades tangente y recíproca}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \text{expresión equivalente}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos^2\theta} \qquad \text{sume fracciones}$$

En este punto puede no ser obvio cómo podemos obtener el lado derecho de la ecuación dada a partir de la última expresión. Entonces, a continuación trabajamos sólo con el lado derecho y tratamos de obtener la última expresión. Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador nos da lo siguiente:

expresiones equivalentes

Trabaje con el lado derecho.

$$\frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} \qquad \text{multiplique numerador y denominador por } 1 - \operatorname{sen}\theta$$

$$= \frac{1 - 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{1 - \operatorname{sen}^2\theta} \qquad \text{propiedad de cocientes}$$

$$= \frac{1 - 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

La última expresión es la misma que se obtuvo de $(\tan\theta - \sec\theta)^2$. Como todos los pasos son reversibles, la ecuación dada es una identidad. ■

EJEMPLO 5 **Demostrar que una ecuación no es una identidad**

Demuestre que $\cot x = \sqrt{\csc^2 x - 1}$ no es una identidad.

SOLUCIÓN Sólo tenemos que encontrar un valor de x que hace que cada lado de la ecuación tenga un valor diferente. Podríamos tratar con valores aleatorios de x, pero la investigación de una identidad conocida nos puede ayudar con la elección de un valor para x.

(continúa)

Una identidad pitagórica, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$, relaciona las funciones cotangente (cot) y cosecante (csc). Despejando de la identidad cot x, tenemos $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ y a continuación $\cot x = \pm\sqrt{\csc^2 x - 1}$. El símbolo $\pm$ es la clave, cualquier valor de x que hace cot x negativa muestra que la ecuación dada *no* es una identidad. En concreto, ya que cot es negativa en los cuadrantes segundo y cuarto, tomaremos $(3\pi/4)$ para nuestro valor de x. El lado izquierdo es entonces cot $(3\pi/4)$ y el lado derecho es

$$\sqrt{\csc^2(3\pi/4) - 1} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1.$$

Los lados no son iguales, por lo tanto la ecuación dada no es una identidad. ■

En cálculo a veces es conveniente cambiar la forma de ciertas expresiones algebraicas al hacer una **sustitución trigonométrica,** como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Hacer una sustitución trigonométrica

Exprese $\sqrt{a^2 - x^2}$ en términos de una función trigonométrica de θ, sin radicales, haciendo la sustitución $x = a \operatorname{sen}\theta$ para $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ y $a > 0$.

SOLUCIÓN Procedemos como sigue:

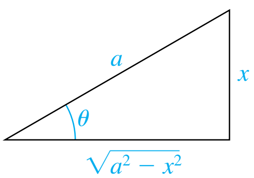
$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen}\theta)^2} && \text{sea } x = a \operatorname{sen}\theta \\
&= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} && \text{ley de exponentes} \\
&= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} && \text{factorice } a^2 \\
&= \sqrt{a^2 \cos^2\theta} && \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\
&= \sqrt{(a\cos\theta)^2} && c^2d^2 = (cd)^2 \\
&= |a\cos\theta| && \sqrt{c^2} = |c| \\
&= |a||\cos\theta| && |cd| = |c||d| \\
&= a\cos\theta && \text{vea a continuación}
\end{aligned}$$

La última igualdad es verdadera porque (1) si $a > 0$, entonces $|a| = a$ y (2) si $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, entonces $\cos\theta > 0$ y por tanto $|\cos\theta| = \cos\theta$.

También podemos usar una solución geométrica. Si $x = a \operatorname{sen}\theta$, entonces $\operatorname{sen}\theta = x/a$ y el triángulo de la figura 10 ilustra el problema para $0 < \theta < \pi/2$. El tercer lado del triángulo, $\sqrt{a^2 - x^2}$, se puede hallar usando el teorema de Pitágoras. De la figura podemos ver que

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta. \quad ■$$

FIGURA 10



7.1 Ejercicios

Ejer. 1–50: Verifique la identidad.

1 $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \cot\theta\cos\theta$

2 $\operatorname{sen} x + \cos x \cot x = \csc x$

3 $\dfrac{\sec^2 2u - 1}{\sec^2 2u} = \operatorname{sen}^2 2u$

4 $\tan t + 2\cos t \csc t = \sec t \csc t + \cot t$

5 $\dfrac{\csc^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cot^2\theta$

6 $(\tan u+\cot u)(\cos u+\operatorname{sen} u)=\csc u+\sec u$

7 $\dfrac{1+\cos 3t}{\operatorname{sen} 3t}+\dfrac{\operatorname{sen} 3t}{1+\cos 3t}=2\csc 3t$

8 $\tan^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\tan^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$

9 $\dfrac{1}{1-\cos\gamma}+\dfrac{1}{1+\cos\gamma}=2\csc^2\gamma$

10 $\dfrac{1+\csc 3\beta}{\sec 3\beta}-\cot 3\beta=\cos 3\beta$

11 $(\sec u-\tan u)(\csc u+1)=\cot u$

12 $\dfrac{\cot\theta-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}=\csc\theta-\sec\theta$

13 $\csc^4 t-\cot^4 t=\csc^2 t+\cot^2 t$

14 $\cos^4 2\theta+\operatorname{sen}^2 2\theta=\cos^2 2\theta+\operatorname{sen}^4 2\theta$

15 $\dfrac{\cos\beta}{1-\operatorname{sen}\beta}=\sec\beta+\tan\beta$

16 $\dfrac{1}{\csc y-\cot y}=\csc y+\cot y$

17 $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x+1}=\dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

18 $\dfrac{\cot x}{\csc x+1}=\dfrac{\csc x-1}{\cot x}$

19 $\dfrac{\cot 4u-1}{\cot 4u+1}=\dfrac{1-\tan 4u}{1+\tan 4u}$

20 $\dfrac{1+\sec 4x}{\operatorname{sen} 4x+\tan 4x}=\csc 4x$

21 $\operatorname{sen}^4 r-\cos^4 r=\operatorname{sen}^2 r-\cos^2 r$

22 $\operatorname{sen}^4\theta+2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$

23 $\tan^4 k-\sec^4 k=1-2\sec^2 k$

24 $\sec^4 u-\sec^2 u=\tan^2 u+\tan^4 u$

25 $(\sec t+\tan t)^2=\dfrac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}$

26 $\sec^2\gamma+\tan^2\gamma=(1-\operatorname{sen}^4\gamma)\sec^4\gamma$

27 $(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)^3=1$

28 $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t}=\csc t+\cot t$

29 $\dfrac{1+\csc\beta}{\cot\beta+\cos\beta}=\sec\beta$

30 $\dfrac{\cos^3 x-\operatorname{sen}^3 x}{\cos x-\operatorname{sen} x}=1+\operatorname{sen} x\cos x$

31 $(\csc t-\cot t)^4(\csc t+\cot t)^4=1$

32 $(a\cos t-b\operatorname{sen} t)^2+(a\operatorname{sen} t+b\cos t)^2=a^2+b^2$

33 $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

34 $\dfrac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v}=\dfrac{\cot v-\cot u}{\cot u\cot v+1}$

35 $\dfrac{\tan\alpha}{1+\sec\alpha}+\dfrac{1+\sec\alpha}{\tan\alpha}=2\csc\alpha$

36 $\dfrac{\csc x}{1+\csc x}-\dfrac{\csc x}{1-\csc x}=2\sec^2 x$

37 $\dfrac{1}{\tan\beta+\cot\beta}=\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

38 $\dfrac{\cot y-\tan y}{\operatorname{sen} y\cos y}=\csc^2 y-\sec^2 y$

39 $\sec\theta+\csc\theta-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\theta\tan\theta+\cos\theta\cot\theta$

40 $\operatorname{sen}^3 t+\cos^3 t=(1-\operatorname{sen} t\cos t)(\operatorname{sen} t+\cos t)$

41 $(1-\tan^2\phi)^2=\sec^4\phi-4\tan^2\phi$

42 $\cos^4 w+1-\operatorname{sen}^4 w=2\cos^2 w$

43 $\dfrac{\cot(-t)+\tan(-t)}{\cot t}=-\sec^2 t$

44 $\dfrac{\csc(-t)-\operatorname{sen}(-t)}{\operatorname{sen}(-t)}=\cot^2 t$

45 $\log 10^{\tan t}=\tan t$

46 $10^{\log|\operatorname{sen} t|}=|\operatorname{sen} t|$

47 $\ln\cot x=-\ln\tan x$

48 $\ln\sec\theta=-\ln\cos\theta$

49 $\ln|\sec\theta+\tan\theta|=-\ln|\sec\theta-\tan\theta|$

50 $\ln|\csc x-\cot x|=-\ln|\csc x+\cot x|$

Ejer. 51–60: Demuestre que la ecuación *no es* una identidad. (*Sugerencia:* encuentre un número para el cual la ecuación es falsa.)

51 $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$

52 $\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = \operatorname{sen} t + \cos t$

53 $\sqrt{\operatorname{sen}^2 t} = \operatorname{sen} t$

54 $\sec t = \sqrt{\tan^2 t + 1}$

55 $(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2 = \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta$

56 $\log \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} t}\right) = \dfrac{1}{\log \operatorname{sen} t}$

57 $\cos(-t) = -\cos t$

58 $\operatorname{sen}(t + \pi) = \operatorname{sen} t$

59 $\cos(\sec t) = 1$

60 $\cot(\tan \theta) = 1$

Ejer. 61–64: Muestre que la ecuación *es* una identidad o que la ecuación *no es* una identidad.

61 $(\sec x + \tan x)^2 = 2 \tan x (\tan x + \sec x)$

62 $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \sec x$

63 $\cos x(\tan x + \cot x) = \csc x$

64 $\csc^2 x + \sec^2 x = \csc^2 x \sec^2 x$

Ejer. 65–68: Consulte el ejemplo 5. Haga la sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen} \theta$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$. Use identidades fundamentales para simplificar la expresión resultante.

65 $\dfrac{x^2}{a^2 - x^2}$

66 $\dfrac{(a^2 - x^2)^2}{x^3}$

67 $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$

68 $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Ejer. 69–72: Haga la sustitución trigonométrica

$$x = a \tan \theta \quad \text{para} \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \text{ y } a > 0.$$

Simplifique la expresión resultante.

69 $\dfrac{x^4}{(a^2 + x^2)^2}$

70 $\dfrac{a^2 + x^2}{x^2}$

71 $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

72 $\dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}$

Ejer. 73–76: Haga la sustitución trigonométrica

$$x = a \sec \theta \quad \text{para} \quad 0 < \theta < \pi/2 \text{ y } a > 0.$$

Simplifique la expresión resultante.

73 $\dfrac{(x^2 - a^2)^2}{x^2}$

74 $\dfrac{x}{x^2 - a^2}$

75 $\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$

76 $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Ejer. 77–80: Use la gráfica de *f* para hallar la expresión más sencilla *g*(*x*) tal que la ecuación *f*(*x*) = *g*(*x*) sea una identidad. Verifique esta identidad.

77 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x}{(1 - \sec^2 x)\cos^4 x}$

78 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x + \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x}$

79 $f(x) = \sec x(\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) - \operatorname{sen} x$

80 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x}{\csc x} + \dfrac{\cos^3 x + \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\sec x}$

7.2 Ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación que contiene expresiones trigonométricas. Cada identidad considerada en la sección precedente es un ejemplo de una ecuación trigonométrica con cada número (o ángulo) en el dominio de la variable como una solución de la ecuación. Si una ecuación trigonométrica no es una identidad, con frecuencia hallamos soluciones mediante el uso de técnicas semejantes a las empleadas para ecuaciones algebraicas. La principal diferencia es que de la ecuación trigonométrica primero despejamos sen x, cos θ, etcétera, y luego hallamos valores de x o θ que satisfagan la ecuación. Se pueden expresar las soluciones ya sea como números reales o como ángulos. En todo nuestro trabajo usaremos la regla siguiente: *si la medida en grados no está especificada, entonces las soluciones de una ecuación trigonométrica deben expresarse medidas en radianes (o como números reales)*. Si se desean soluciones medidas en grados, se incluirá un enunciado apropiado en el ejemplo o ejercicio.

EJEMPLO 1 **Resolver una ecuación trigonométrica que contiene la función seno**

Encuentre las soluciones de la ecuación sen $\theta = \frac{1}{2}$ si

(a) θ está en el intervalo $[0, 2\pi)$

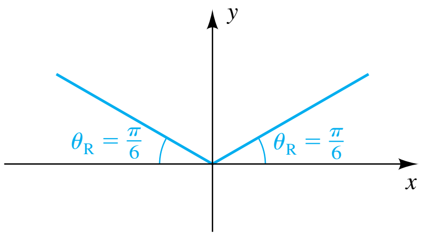
(b) θ es cualquier número real

SOLUCIÓN

(a) Si sen $\theta = \frac{1}{2}$, entonces el ángulo de referencia para θ es $\theta_R = \pi/6$. Si consideremos θ como un ángulo en posición estándar, entonces, como sen $\theta > 0$, el lado terminal está en el primero o en el segundo cuadrantes, como se ilustra en la figura 1. Por tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

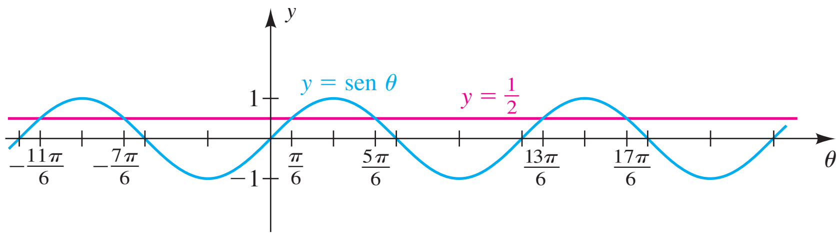
FIGURA 1



(b) Como la función seno tiene periodo 2π, podemos obtener todas las soluciones al sumar múltiplos de 2π a $\pi/6$ y $5\pi/6$. Esto nos da

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

FIGURA 2



Una solución alternativa (gráfica) involucra determinar dónde es que la gráfica de $y =$ sen θ interseca la recta horizontal $y = \frac{1}{2}$, como se ilustra en la figura 2. ■

EJEMPLO 2 **Resolver una ecuación trigonométrica que contenga la función tangente**

Hállense las soluciones de la ecuación $\tan u = -1$.

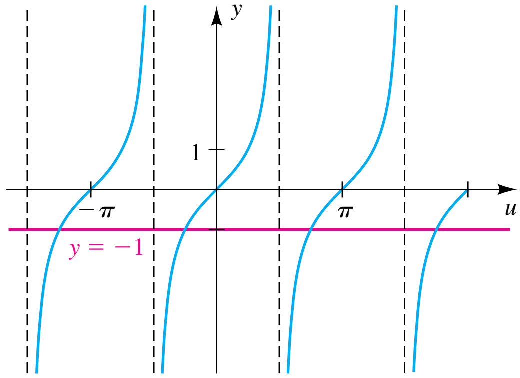
SOLUCIÓN Como la función tangente tiene periodo π, es suficiente hallar un número real u tal que $\tan u = -1$ y luego sumar múltiplos de π.

Una parte de la gráfica de $y = \tan u$ está trazada en la figura 3 en la página siguiente. Como $\tan(3\pi/4) = -1$, una solución es $3\pi/4$; por tanto,

$$\text{si} \quad \tan u = -1, \quad \text{entonces} \quad u = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

(continúa)

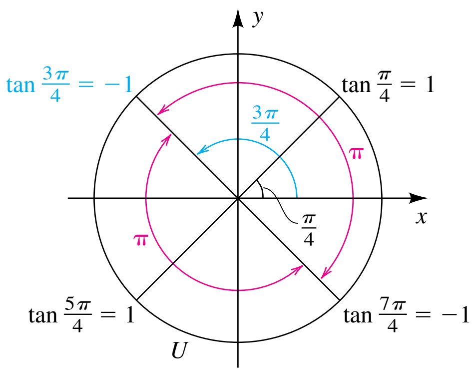
FIGURA 3 $y = \tan u$



También podríamos haber escogido $-\pi/4$ (o algún otro número u tal que $\tan u = -1$) para la solución inicial y escrito

$$u = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

FIGURA 4



Una solución alternativa involucra un círculo unitario. Usando $\tan 3\pi/4 = -1$ y el hecho de que el periodo de la tangente es π, podemos ver de la figura 4 que las soluciones deseadas son

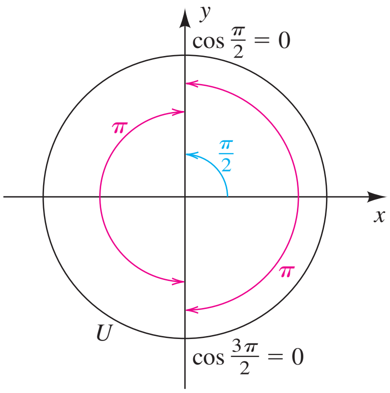
$$u = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 **Resolver una ecuación trigonométrica que contiene ángulos múltiples**

(a) Resuelva la ecuación $\cos 2x = 0$, y exprese las soluciones en radianes y en grados.

(b) Encuentre las soluciones que están en el intervalo $[0, 2\pi)$ y, lo que es equivalente, $[0°, 360°)$.

FIGURA 5



SOLUCIÓN

(a) Procedemos como sigue, donde n denota cualquier entero:

$$\cos 2x = 0 \qquad \text{enunciado}$$

$$\cos\theta = 0 \qquad \text{sea } \theta = 2x$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n \qquad \text{consulte la figura 5}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \qquad \theta = 2x$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \qquad \text{divida entre 2}$$

En grados, tenemos $x = 45° + 90°n$.

(b) Podemos hallar soluciones particulares de la ecuación al sustituir enteros por n en cualquiera de las fórmulas para x obtenidas en el inciso (a). Varias de estas soluciones aparecen en la tabla siguiente.

n	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$	$45° + 90°n$
-1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(-1) = -\frac{\pi}{4}$	$45° + 90°(-1) = -45°$
0	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(0) = \frac{\pi}{4}$	$45° + 90°(0) = 45°$
1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(1) = \frac{3\pi}{4}$	$45° + 90°(1) = 135°$
2	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2) = \frac{5\pi}{4}$	$45° + 90°(2) = 225°$
3	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(3) = \frac{7\pi}{4}$	$45° + 90°(3) = 315°$
4	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(4) = \frac{9\pi}{4}$	$45° + 90°(4) = 405°$

Note que las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ o, lo que es equivalente, $[0°, 360°)$ están dadas por $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. Estas soluciones son

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad 45°, 135°, 225°, 315°.$$ ■

EJEMPLO 4 **Resolver una ecuación trigonométrica por factorización**

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}\theta \tan\theta = \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta\tan\theta &= \operatorname{sen}\theta && \text{enunciado}\\
\operatorname{sen}\theta\tan\theta - \operatorname{sen}\theta &= 0 && \text{iguale a 0 un lado}\\
\operatorname{sen}\theta(\tan\theta - 1) &= 0 && \text{factorice sen } \theta\\
\operatorname{sen}\theta = 0, \quad \tan\theta - 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
\operatorname{sen}\theta = 0, \quad \tan\theta &= 1 && \text{despeje sen } \theta \text{ y tan } \theta
\end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}\theta = 0$ son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Por tanto,

$$\text{si} \quad \operatorname{sen}\theta = 0, \quad \text{entonces} \quad \theta = \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

La función tangente tiene periodo π y por tanto encontramos las soluciones de la ecuación $\tan\theta = 1$ que están en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y luego sumamos múltiplos de π. Como la única solución de $\tan\theta = 1$ en $(-\pi/2, \pi/2)$ es $\pi/4$, vemos que

$$\text{si} \quad \tan\theta = 1, \quad \text{entonces} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

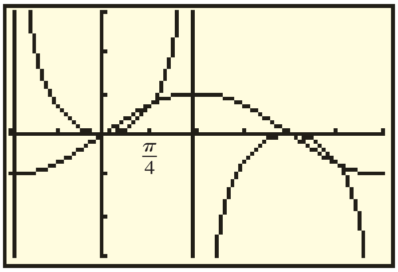
Entonces, las soluciones de la ecuación dada son

$$\pi n \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

FIGURA 6

$Y_1 = \operatorname{sen}(X)\tan(X)$

$Y_2 = \operatorname{sen}(X)$



$[-\pi/2, 3\pi/2, \pi/4]$ por $[-3, 3]$

Algunas soluciones *particulares*, obtenidas al hacer $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, y $n = -1$, son

$$0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad 2\pi, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad -\pi \quad \text{y} \quad -\frac{3\pi}{4}.$$

La gráfica de la figura 6 apoya nuestra conclusión. ■

En el ejemplo 4 hubiera sido incorrecto empezar por dividir ambos lados entre $\operatorname{sen}\theta$, porque hubiéramos perdido las soluciones de $\operatorname{sen}\theta = 0$.

EJEMPLO 5 Resolver una ecuación trigonométrica por factorización

Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1 = 0$ y exprese las soluciones en radianes y en grados.

SOLUCIÓN Tal parece que tenemos una ecuación cuadrática con sen t o cos t. No tenemos una sustitución sencilla para cos t en términos de sen t, pero tenemos una para $\operatorname{sen}^2 t$ en términos de $\cos^2 t$ ($\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t$), de modo que primero expresaremos la ecuación en términos de cos t solamente y luego resolvemos por factorización.

Esta es una ecuación cuadrática con cos t *y el lector podría usar la fórmula cuadrática en este punto. Si lo hace, recuerde despejar* cos t, *no* t. →

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1 &= 0 && \text{enunciado}\\
2(1 - \cos^2 t) - \cos t - 1 &= 0 && \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1\\
-2\cos^2 t - \cos t + 1 &= 0 && \text{simplifique}\\
2\cos^2 t + \cos t - 1 &= 0 && \text{multiplique por } -1\\
(2\cos t - 1)(\cos t + 1) &= 0 && \text{factorice}\\
2\cos t - 1 = 0, \quad \cos t + 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
\cos t = \tfrac{1}{2}, \quad \cos t &= -1 && \text{despeje } \cos t
\end{aligned}$$

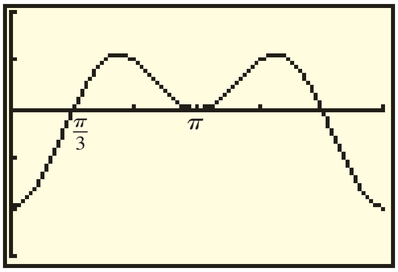
Como la función coseno tiene periodo 2π, podemos hallar todas las soluciones de estas ecuaciones al sumar múltiplos de 2π a las soluciones que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Si $\cos t = \frac{1}{2}$, el ángulo de referencia es $\pi/3$ (o 60°). Como cos t es positivo, el ángulo t medido en radianes está en el primero o en el cuarto cuadrante. En consecuencia, en el intervalo $[0, 2\pi)$, vemos que

$$\text{si} \quad \cos t = \frac{1}{2}, \quad \text{entonces} \quad t = \frac{\pi}{3} \quad \text{o} \quad t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

FIGURA 7

$Y_1 = 2(\text{sen }(X))^2 - \cos(X) - 1$



$[0,\ 2\pi,\ \pi/3]$ por $[-3, 2]$

Al consultar la gráfica de la función coseno, vemos que

$$\text{si} \quad \cos t = -1, \quad \text{entonces} \quad t = \pi.$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son las siguientes, donde n es cualquier entero:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \pi + 2\pi n$$

En medidas con grados tenemos

$$60° + 360°n, \quad 300° + 360°n \quad \text{y} \quad 180° + 360°n.$$

La gráfica de la figura 7 apoya nuestra conclusión. ■

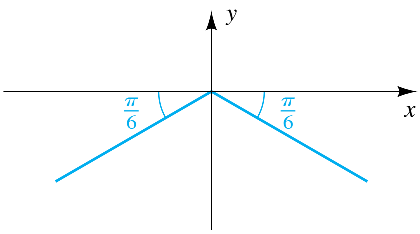
EJEMPLO 6 **Resolver una ecuación trigonométrica por factorización**

Encuentre las soluciones de $4 \text{ sen}^2 x \tan x - \tan x = 0$ que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN

	$4 \text{ sen}^2 x \tan x - \tan x = 0$	enunciado
	$\tan x\,(4 \text{ sen}^2 x - 1) = 0$	factorice tan x
$\tan x = 0,$	$4 \text{ sen}^2 x - 1 = 0$	teorema del factor cero
$\tan x = 0,$	$\text{sen}^2 x = \frac{1}{4}$	despeje tan x, sen^2 x
$\tan x = 0,$	$\text{sen } x = \pm\frac{1}{2}$	despeje sen x

FIGURA 8



El ángulo de referencia $\pi/6$ para los cuadrantes tercero y cuarto se ve en la figura 8. Estos ángulos, $7\pi/6$ y $11\pi/6$, son las soluciones de la ecuación $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$ para $0 \le x \le 2\pi$. Las soluciones de las tres ecuaciones aparecen en la tabla siguiente.

Ecuación	Soluciones en $[0, 2\pi)$	Consulte
$\tan x = 0$	$0, \pi$	Figura 3
$\text{sen } x = \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	Ejemplo 1
$\text{sen } x = -\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$	Figura 8 (use ángulo de referencia)

Entonces, la ecuación dada tiene las seis soluciones que aparecen en la segunda columna de la tabla. ■

EJEMPLO 7 **Resolver una ecuación trigonométrica que contenga ángulos múltiples**

Encuentre las soluciones de $\csc^4 2u - 4 = 0$.

SOLUCIÓN

$\csc^4 2u - 4 = 0$	enunciado
$(\csc^2 2u - 2)(\csc^2 2u + 2) = 0$	diferencia de dos cuadrados
$\csc^2 2u - 2 = 0, \quad \csc^2 2u + 2 = 0$	teorema del factor cero
$\csc^2 2u = 2, \quad \csc^2 2u = -2$	despeje $\csc^2 2u$
$\csc 2u = \pm\sqrt{2}, \quad \csc 2u = \pm\sqrt{-2}$	saque raíces cuadradas

La segunda ecuación no tiene soluciones porque $\sqrt{-2}$ no es un número real. La primera ecuación es equivalente a

$$\text{sen } 2u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como el ángulo de referencia para $2u$ es $\pi/4$, obtenemos la tabla siguiente, en la cual n denota cualquier entero.

Ecuación	Solución para $2u$	Solución para u
$\text{sen } 2u = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{3\pi}{8} + \pi n$
$\text{sen } 2u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{5\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{7\pi}{8} + \pi n$

Las soluciones de la ecuación dada aparecen en la última columna. Note que *todas* estas soluciones se pueden escribir en la forma

$$u = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n.$$

■

El ejemplo siguiente ilustra el uso de una calculadora para resolver una ecuación trigonométrica.

EJEMPLO 8 Calcular las soluciones de una ecuación trigonométrica

Calcule, al grado más cercano, las soluciones de la siguiente ecuación en el intervalo $[0°, 360°)$:

$$5 \text{ sen } \theta \tan \theta - 10 \tan \theta + 3 \text{ sen } \theta - 6 = 0$$

SOLUCIÓN

$5 \text{ sen } \theta \tan \theta - 10 \tan \theta + 3 \text{ sen } \theta - 6 = 0$	enunciado
$(5 \text{ sen } \theta \tan \theta - 10 \tan \theta) + (3 \text{ sen } \theta - 6) = 0$	agrupe términos
$5 \tan \theta (\text{sen } \theta - 2) + 3(\text{sen } \theta - 2) = 0$	factorice cada grupo
$(5 \tan \theta + 3)(\text{sen } \theta - 2) = 0$	factorice $(\text{sen } \theta - 2)$
$5 \tan \theta + 3 = 0, \quad \text{sen } \theta - 2 = 0$	teorema del factor cero
$\tan \theta = -\frac{3}{5}, \quad \text{sen } \theta = 2$	despeje $\tan \theta$ y $\text{sen } \theta$

La ecuación sen $\theta = 2$ no tiene solución, porque $-1 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$ para todo θ. Para tan $\theta = -\frac{3}{5}$, usamos una calculadora en el modo de grados, obteniendo

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\tfrac{3}{5}\right) \approx -31°.$$

Por tanto, el ángulo de referencia es $\theta_R \approx 31°$. Como θ está en el segundo o en el cuarto cuadrante, obtenemos las soluciones siguientes:

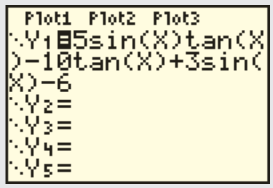
$$\theta = 180° - \theta_R \approx 180° - 31° = 149°$$
$$\theta = 360° - \theta_R \approx 360° - 31° = 329°$$

■

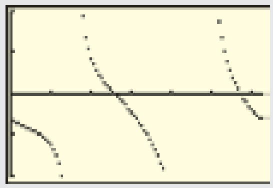
Veamos cómo una calculadora de gráficas puede ayudarnos a resolver la ecuación del ejemplo 8.

Calcular las soluciones de una ecuación trigonométrica

Seleccione modo de radianes y punto. Asigne el lado izquierdo de la ecuación a Y_1.



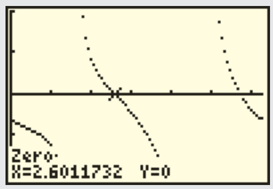
Ajuste la pantalla a $[0, 2\pi]$ por $[-20, 20, 10]$. Grafique Y_1.



Calcule el cero entre 2 y 3.

2nd CALC 2

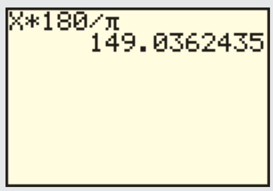
2 ENTER 3 ENTER 2.5 ENTER



Convierta en grados; la ubicación X de la memoria contiene la estimación de raíz.

2nd QUIT X,T,θ,n

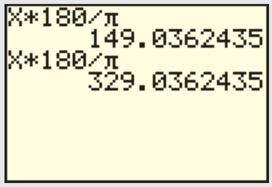
× 180 ÷ 2nd π ENTER



(continúa)

Estime el cero entre 5 y 6.

GRAPH 2nd CALC 2
5 ENTER 6 ENTER 5.5 ENTER
2nd QUIT 2nd ENTRY ENTER



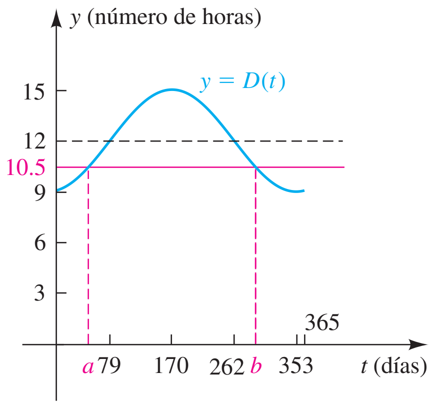
EJEMPLO 9 Investigar el número de horas de luz diurna

En Boston, el número de horas de luz diurna $D(t)$ en un tiempo particular del año se puede aproximar con

$$D(t) = 3 \text{ sen} \left[\frac{2\pi}{365}(t - 79) \right] + 12,$$

con t en días y $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. ¿Cuántos días del año tienen más de 10.5 horas de luz diurna?

FIGURA 9



SOLUCIÓN La gráfica de D se estudió en el ejemplo 12 de la sección 6.5 y se vuelve a trazar en la figura 9. Como se ilustra en la figura, si podemos hallar dos números a y b con $D(a) = 10.5$, $D(b) = 10.5$ y $0 < a < b < 365$, entonces habrá más de 10.5 horas de luz diurna el t-ésimo día del año si $a < t < b$.

Resolvamos la ecuación $D(t) = 10.5$ como sigue:

$$3 \text{ sen} \left[\frac{2\pi}{365}(t - 79) \right] + 12 = 10.5 \qquad \text{sea } D(t) = 10.5$$

$$3 \text{ sen} \left[\frac{2\pi}{365}(t - 79) \right] = -1.5 \qquad \text{reste 12}$$

$$\text{sen} \left[\frac{2\pi}{365}(t - 79) \right] = -0.5 = -\frac{1}{2} \qquad \text{divida entre 3}$$

Si sen $\theta = -\frac{1}{2}$, entonces el ángulo de referencia es $\pi/6$ y el ángulo θ está en el tercer o en el cuarto cuadrante. Así, podemos hallar los números a y b al resolver las ecuaciones

$$\frac{2\pi}{365}(t - 79) = \frac{7\pi}{6} \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{365}(t - 79) = \frac{11\pi}{6}.$$

De la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$t - 79 = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{365}{2\pi} = \frac{2555}{12} \approx 213,$$

y por lo tanto $\qquad t \approx 213 + 79, \qquad$ o sea $\qquad t \approx 292.$

Del mismo modo, la segunda ecuación nos da $t \approx 414$. Como el periodo de la función D es 365 días (vea la figura 9), obtenemos

$$t \approx 414 - 365 \quad \text{o} \quad t \approx 49.$$

Entonces, habrá al menos 10.5 horas de luz diurna de $t = 49$ a $t = 292$; es decir, durante 243 días del año. ■

Una solución gráfica del siguiente ejemplo se dio en el ejemplo 14 de la sección 6.5.

EJEMPLO 10 **Hallar la corriente mínima en un circuito eléctrico**

La corriente I (en amperes) en un circuito de corriente alterna en el tiempo t (en segundos) está dada por

$$I = 30 \text{ sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right).$$

Encuentre el mínimo valor exacto de t para el cual $I = 15$.

SOLUCIÓN Haciendo $I = 15$ en la fórmula dada, obtenemos

$$15 = 30 \text{ sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right) \quad \text{o bien, lo que es equivalente,}$$

$$\text{sen} \left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el ángulo de referencia es $\pi/6$ y por consiguiente

$$50\pi t - \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \qquad \text{o sea} \qquad 50\pi t - \frac{7\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

donde n es cualquier entero. Despejando t obtenemos

$$t = \frac{\frac{15}{6} + 2n}{50} \qquad \text{o bien,} \qquad t = \frac{\frac{19}{6} + 2n}{50}.$$

El mínimo valor positivo de t ocurrirá cuando uno de los numeradores de estas dos fracciones tenga su mínimo valor posible. Como $\frac{15}{6} = 2.5$, $\frac{19}{6} \approx 3.17$, y $2(-1) = -2$, vemos que el mínimo valor posible de t ocurre cuando $n = -1$ en la primera fracción; es decir, cuando

$$t = \frac{\frac{15}{6} + 2(-1)}{50} = \frac{1}{100}.$$ ■

El siguiente ejemplo ilustra cómo una calculadora de gráficas puede ayudar a resolver una complicada ecuación trigonométrica.

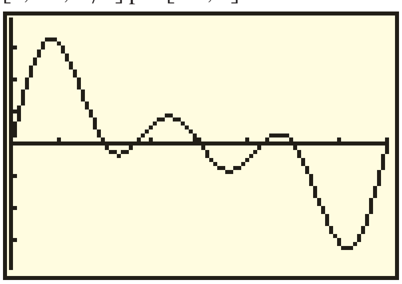
EJEMPLO 11 **Usar una gráfica para determinar soluciones de una ecuación trigonométrica**

Encuentre las soluciones de la siguiente ecuación que están en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$\text{sen } x + \text{sen } 2x + \text{sen } 3x = 0$$

SOLUCIÓN Asignamos sen x + sen $2x$ + sen $3x$ a Y_1. Como $|\text{sen } \theta| \leq 1$ para $\theta = x$, $2x$ y $3x$, el lado izquierdo de la ecuación está entre -3 y 3, y escogemos la pantalla $[0, 2\pi, \pi/4]$ por $[-3, 3]$ y obtenemos un trazo semejante al de la figura 10. Usando una función de raíz, obtenemos las siguientes aproximaciones para los puntos de cruce con el eje x, es decir, soluciones aproximadas de la ecuación dada en $[0, 2\pi)$:

FIGURA 10
$[0, 2\pi, \pi/4]$ por $[-3, 3]$



$$0, \quad 1.57, \quad 2.09, \quad 3.14, \quad 4.19, \quad 4.71$$

(continúa)

Cambiando a medida en grados y redondeando al grado más cercano, obtenemos

$$0°, \quad 90°, \quad 120°, \quad 180°, \quad 240° \quad \text{y} \quad 270°.$$

La conversión de estas medidas en grados a radianes nos dará

$$0, \ \frac{\pi}{2}, \ \frac{2\pi}{3}, \quad \pi, \ \frac{4\pi}{3} \quad \text{y} \quad \frac{3\pi}{2}.$$

Al verificar estos valores en la ecuación dada, vemos que las seis son soluciones. La figura 10 sugiere que la gráfica tiene periodo 2π. Después de estudiar la sección 7.4, el estudiante podrá cambiar la forma de Y_1 y *demostrar* que el período es 2π y, por lo tanto, que *todas* las soluciones de la ecuación dada se pueden obtener al sumar múltiplos enteros de 2π. ■

En el ejemplo procedente pudimos usar calculadora de gráficas para ayudarnos a hallar las soluciones *exactas* de la ecuación, pero para muchas ecuaciones que se presentan en aplicaciones sólo es posible aproximar las soluciones.

7.2 Ejercicios

Ejer. 1–42: Hallar todas las soluciones de la ecuación.

1 $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 $\cos t = -1$

3 $\tan \theta = \sqrt{3}$

4 $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

5 $\sec \beta = 2$

6 $\csc \gamma = \sqrt{2}$

7 $\operatorname{sen} x = \frac{\pi}{2}$

8 $\cos x = -\frac{\pi}{3}$

9 $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$

10 $\csc \theta \operatorname{sen} \theta = 1$

11 $2 \cos 2\theta - \sqrt{3} = 0$

12 $2 \operatorname{sen} 3\theta + \sqrt{2} = 0$

13 $\sqrt{3} \tan \frac{1}{3} t = 1$

14 $\cos \frac{1}{4} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

15 $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

16 $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

17 $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

18 $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

19 $2 \cos t + 1 = 0$

20 $4 \cos \theta - 2 = 0$

21 $\sqrt{3} + 2 \operatorname{sen} \beta = 0$

22 $2 \cos x = \sqrt{3}$

23 $(\cos \theta - 1) \operatorname{sen} \theta = 0$

24 $(\operatorname{sen} t - 1) \cos t = 0$

25 $\tan^2 x = 1$

26 $\cot^2 \theta - 1 = 0$

27 $\sec^2 \alpha - 4 = 0$

28 $3 - \tan^2 \beta = 0$

29 $\cot^2 x - 3 = 0$

30 $4 \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$

31 $(2 \operatorname{sen} \theta + 1)(2 \cos \theta + 3) = 0$

32 $(2 \operatorname{sen} u - 1)\left(\cos u - \sqrt{2}\right) = 0$

33 $\cos x + 1 = 2 \operatorname{sen}^2 x$

34 $2 \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$

35 $\text{sen } 2x\,(\csc 2x - 2) = 0$

36 $\cos 2x\,(\sec 2x + 2) = 0$

37 $\cot x + \cot^2 x = 0$

38 $\tan \alpha + \tan^2 \alpha = 0$

39 $\cos(\ln x) = 0$

40 $\text{sen}(\log x) = 0$

41 $\log(\cos x) = 0$

42 $\ln(\text{sen } x) = 0$

Ejer. 43–70: Hallar las soluciones de la ecuación que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

43 $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

44 $\text{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

45 $2 - 8\cos^2 t = 0$

46 $1 + 8\,\text{sen}^3 x = 0$

47 $\tan^2 x = \tan x$

48 $\cot^2 \theta - \cot \theta = 0$

49 $2\,\text{sen}^2 u = 1 - \text{sen } u$

50 $2\cos^2 t + 3\cos t = -1$

51 $\tan^2 x\,\text{sen } x = \text{sen } x$

52 $\sec^2 x \cos x = \cos x$

53 $\sec x \csc x = \sqrt{2}\sec x$

54 $\sec \beta \csc \beta = 2\csc \beta$

55 $2\cos^2 \gamma + \cos \gamma = 0$

56 $\text{sen } x - \cos x = 0$

57 $\text{sen}^2 \theta + \text{sen } \theta - 6 = 0$

58 $2\,\text{sen}^2 u + \text{sen } u - 6 = 0$

59 $1 - \text{sen } t = \sqrt{3}\cos t$

60 $\cos \theta - \text{sen } \theta = 1$

61 $\cos \alpha + \text{sen } \alpha = 1$

62 $\sqrt{3}\,\text{sen } t + \cos t = 1$

63 $2\tan t - \sec^2 t = 0$

64 $\tan \theta + \sec \theta = 1$

65 $\cot \alpha + \tan \alpha = \csc \alpha \sec \alpha$

66 $\text{sen } x + \cos x \cot x = \csc x$

67 $2\,\text{sen}^3 x + \text{sen}^2 x - 2\,\text{sen } x - 1 = 0$

68 $\sec^5 \theta = 4\sec \theta$

69 $2\tan t \csc t + 2\csc t + \tan t + 1 = 0$

70 $2\,\text{sen } v \csc v - \csc v = 4\,\text{sen } v - 2$

Ejer. 71–76: Calcule, a los 10′ más cercanos, las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0°, 360°)$.

71 $\text{sen}^2 t - 4\,\text{sen } t + 1 = 0$

72 $\cos^2 t - 4\cos t + 2 = 0$

73 $\tan^2 \theta + 3\tan \theta + 2 = 0$

74 $2\tan^2 x - 3\tan x - 1 = 0$

75 $12\,\text{sen}^2 u - 5\,\text{sen } u - 2 = 0$

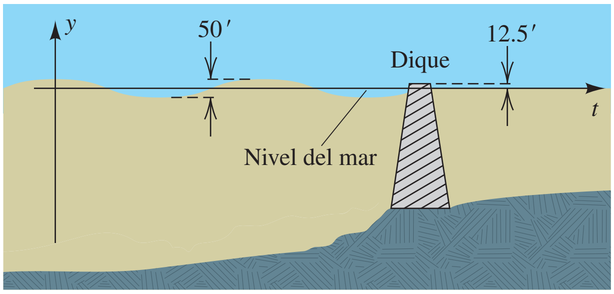
76 $5\cos^2 \alpha + 3\cos \alpha - 2 = 0$

77 **Olas de mareas** Una ola de marea, de 50 pies de altura y periodo de 30 minutos, se aproxima a un dique que está a 12.5 pies sobre el nivel del mar (vea la figura). Desde un punto particular en la orilla, la distancia y del nivel del mar a la cresta de la ola está dada por

$$y = 25\cos\frac{\pi}{15}t,$$

con t en minutos. ¿Durante aproximadamente cuántos minutos de cada periodo de 30 minutos está la cresta de la ola arriba del nivel de la cima del dique?

EJERCICIO 77



78 **Temperatura en Fairbanks** La temperatura T baja (en °F) esperada en Fairbanks, Alaska, se puede aproximar con

$$T = 36 \text{ sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right] + 14,$$

donde t está en días, con $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. ¿Cuántos días durante el año se espera que la temperatura baja sea menor que -4°F?

79 **Temperatura en Chicago** El promedio mensual de temperatura alta T (en °F) en Chicago, Illinois, se puede aproximar con la función

$$T(t) = 26.5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{2\pi}{3}\right) + 56.5,$$

donde t está en meses y $t = 1$ corresponde a enero.

(a) Grafique T sobre el intervalo de dos años [1, 25].

(b) Calcule el promedio de temperatura alta en julio y octubre.

(c) Aproximar gráficamente los meses cuando el promedio de temperatura alta sea de 69°F o más.

(d) Examine por qué una función seno es apropiada para calcular estas temperaturas.

80 **Temperatura en Augusta** El promedio mensual de alta temperatura T (en °F) en Augusta, Georgia, puede aproximarse con la función

$$T(t) = 17 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) + 75,$$

donde t está en meses y $t = 1$ corresponde a enero.

(a) Grafique T sobre el intervalo de dos años [1, 25].

(b) Calcule el promedio de alta temperatura en abril y diciembre.

(c) Gráficamente aproxime los meses cuando el promedio de alta temperatura sea de 67°F o menor.

81 **Intensidad de luz diurna** En un día despejado con D horas de luz diurna, la intensidad de la luz diurna I (en calorías/cm^2) puede aproximarse con

$$I = I_M \text{ sen}^3 \frac{\pi t}{D} \quad \text{para} \quad 0 \le t \le D,$$

donde $t = 0$ corresponde al amanecer e I_M es la máxima intensidad. Si $D = 12$, ¿aproximadamente cuántas horas después del amanecer es $I = \frac{1}{2}I_M$?

82 **Intensidad de luz diurna** Consulte el ejercicio 81. En días nublados, un mejor cálculo de la intensidad I solar está dado por

$$I = I_M \text{ sen}^2 \frac{\pi t}{D}.$$

Si $D = 12$, ¿cuántas horas después del amanecer es $I = \frac{1}{2}I_M$?

83 **Protección contra luz diurna** Consulte los ejercicios 81 y 82. Un dermatólogo recomienda protegerse del sol cuando la intensidad I sea mayor que 75% de la intensidad máxima. Si $D = 12$ horas, aproxime el número de horas para las que se requiere protección en

(a) un día despejado

(b) un día nublado

84 **Ingeniería de carreteras** En un estudio de problemas de penetración de heladas en ingeniería de carreteras, la temperatura T a las t horas y profundidad x pies está dada por

$$T = T_0 e^{-\lambda x} \text{ sen } (\omega t - \lambda x),$$

donde T_0, ω y λ son constantes y el periodo de T es de 24 horas.

(a) Encuentre una fórmula para la temperatura en la superficie.

(b) ¿A qué horas es mínima la temperatura de la superficie?

(c) Si $\lambda = 2.5$, encuentre las horas cuando la temperatura sea mínima a una profundidad de 1 pie.

85 **Población de conejos** Muchas poblaciones de animales, por ejemplo la de conejos, fluctúan durante ciclos de diez años. Suponga que el número de conejos en el tiempo t (en años) está dado por

$$N(t) = 1000 \cos \frac{\pi}{5}t + 4000.$$

(a) Trace la gráfica de N para $0 \le t \le 10$.

(b) ¿Para qué valores de t en el inciso (a) la población de conejos es mayor que 4500?

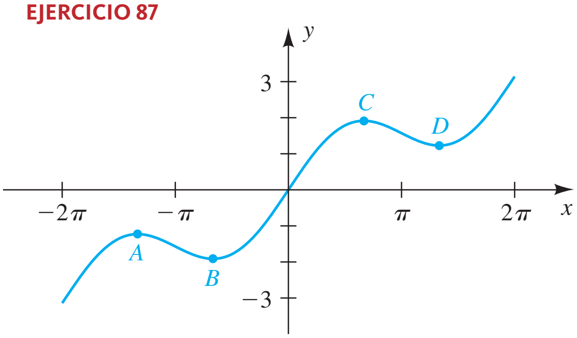
86 **Caudal de un río** El caudal (o descarga de agua) en la desembocadura del río Orinoco en Sudamérica puede aproximarse con

$$F(t) = 26{,}000 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{6}(t - 5.5)\right] + 34{,}000,$$

donde t es el tiempo en meses y $F(t)$ es el caudal en m^3/s. ¿Durante aproximadamente cuántos meses de cada año el flujo rebasa los 55,000 m^3/s?

87 En la figura se muestra una gráfica de $y = \frac{1}{2}x + \text{sen } x$ para $-2\pi \le x \le 2\pi$. Usando cálculo se puede demostrar que las coordenadas x de los puntos de inflexión A, B, C y D en la gráfica son soluciones de la ecuación $\frac{1}{2} + \cos x = 0$. Determine las coordenadas de estos puntos.

EJERCICIO 87

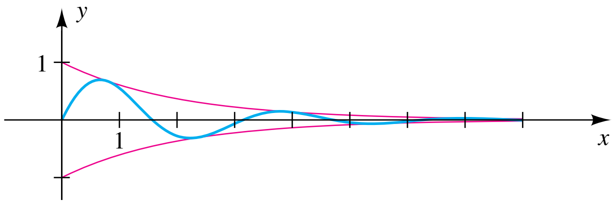


88 En la figura se muestra la gráfica de la ecuación

$$y = e^{-x/2} \operatorname{sen} 2x.$$

Las coordenadas x de los puntos de inflexión en la gráfica son soluciones de $4 \cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0$. Aproxime las coordenadas x de estos puntos para $x > 0$.

EJERCICIO 88



Ejer. 89–90: Si $I(t)$ es la corriente (en amperes) en un circuito de corriente alterna en el tiempo t (en segundos), encuentre el mínimo valor exacto de t para el que $I(t) = k$.

89 $I(t) = 20 \operatorname{sen}(60\pi t - 6\pi); \quad k = -10$

90 $I(t) = 40 \operatorname{sen}(100\pi t - 4\pi); \quad k = 20$

Ejer. 91–94: Aproxime la solución a cada desigualdad en el intervalo $[0, 2\pi]$.

91 $\cos x \geq 0.3$

92 $\operatorname{sen} x < -0.6$

93 $\cos 3x < 2 \operatorname{sen} x$

94 $\tan \dfrac{1}{2} x \leq \operatorname{sen} 2x$

Ejer. 95–96: Grafique f en la pantalla $[0, 3]$ por $[-1.5, 1.5]$.

(a) Aproxime a no menos de cuatro lugares decimales la máxima solución de $f(x) = 0$ en $[0, 3]$.

(b) Discuta lo que ocurre a la gráfica de f cuando x aumenta.

(c) Examine gráficas de la función f en el intervalo $[0, c]$, donde $c = 0.1, 0.01, 0.001$. ¿Cuántos ceros parece tener f en el intervalo $[0, c]$, donde $c > 0$?

95 $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$

96 $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$

Ejer. 97–100: Debido a que los planetas no se mueven en órbitas precisamente circulares, el cálculo de la posición de un planeta requiere la solución de la ecuación de Kepler. La ecuación de Kepler no se puede resolver algebraicamente. Tiene la forma $M = \theta + e \operatorname{sen} \theta$, donde M es la anomalía media, e es la excentricidad de la órbita y θ un ángulo llamado anomalía excéntrica. Para los valores especificados de M y e, use técnicas gráficas para resolver la ecuación de Kepler y determinar θ a tres lugares decimales.

97 Posición de Mercurio $M = 5.241, \quad e = 0.206$

98 Posición de Marte $M = 4.028, \quad e = 0.093$

99 Posición de la Tierra $M = 3.611, \quad e = 0.0167$

100 Posición de Plutón $M = 0.09424, \quad e = 0.255$

Ejer. 101–106: Calcule las soluciones de la ecuación del intervalo $[-\pi, \pi]$.

101 $\operatorname{sen} 2x = 2 - x^2$

102 $\cos^3 x + \cos 3x - 2 \operatorname{sen}^3 x = 0$

103 $\ln(1 + \operatorname{sen}^2 x) = \cos x$

104 $e^{\operatorname{sen} x} = \sec\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)$

105 $3 \cos^4 x - 2 \cos^3 x + \cos x - 1 = 0$

106 $\cos 2x + \operatorname{sen} 3x + \tan \frac{1}{3}x = 0$

107 Peso en varias latitudes El peso W de una persona en la superficie terrestre es directamente proporcional a la fuerza de la gravedad g (en m/s^2). Debido a la rotación, la Tierra está aplanada en los polos y por ello el peso varía en diferentes latitudes. Si θ es la latitud, entonces g se puede aproximar con $g = 9.8066(1 - 0.00264 \cos 2\theta)$.

(a) ¿En qué latitud es $g = 9.8$?

(b) Si una persona pesa 150 libras en el ecuador ($\theta = 0°$), ¿en qué latitud la persona pesará 150.5 libras?

7.3 Fórmulas de suma y resta

En esta sección deducimos fórmulas que contienen funciones trigonométricas de $u + v$ o $u - v$ para cualesquiera números reales o ángulos u y v. Estas fórmulas se conocen como *fórmulas de suma y resta,* respectivamente, o como *identidades de suma* y *diferencia*. La primera fórmula que consideraremos puede expresarse como sigue.

Fórmula de la resta para el coseno

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

FIGURA 1

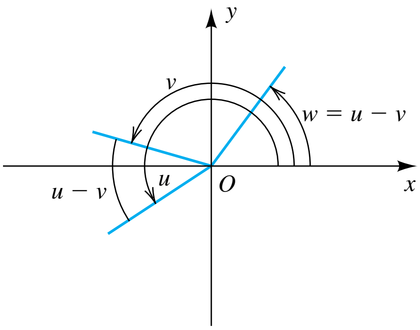
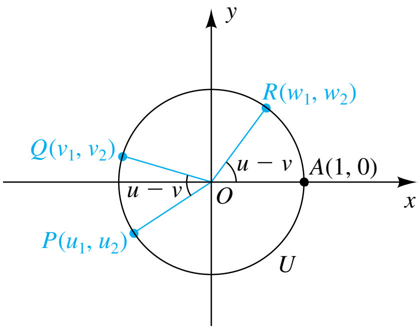


FIGURA 2



DEMOSTRACIÓN Sean u y v números reales cualesquiera, y considere ángulos medidos en radianes u y v. Sea $w = u - v$. La figura 1 ilustra una posibilidad con los ángulos en posición estándar. Por comodidad hemos supuesto que u y v son positivos y que $0 \leq u - v < v$.

Al igual que en la figura 2, sean $P(u_1, u_2)$, $Q(v_1, v_2)$ y $R(w_1, w_2)$ los puntos en los lados terminales de los ángulos indicados que están cada uno a una distancia 1 del origen. En este caso P, Q y R están en la circunferencia unitaria U con centro en el origen. A partir de la definición de funciones trigonométricas en términos de una circunferencia unitaria,

$$\begin{array}{lll} \cos u = u_1 & \cos v = v_1 & \cos(u - v) = w_1 \\ \operatorname{sen} u = u_2 & \operatorname{sen} v = v_2 & \operatorname{sen}(u - v) = w_2. \end{array} \qquad (*)$$

A continuación observamos que la distancia entre $A(1, 0)$ y R debe ser igual a la distancia entre Q y P, porque los ángulos AOR y QOP tienen la misma medida, $u - v$. Con la fórmula de la distancia tendremos

$$d(A, R) = d(Q, P)$$
$$\sqrt{(w_1 - 1)^2 + (w_2 - 0)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos las expresiones bajo los radicales tendremos

$$w_1^2 - 2w_1 + 1 + w_2^2 = u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2.$$

Como los puntos (u_1, u_2), (v_1, v_2) y (w_1, w_2) están en la circunferencia unitaria U y como una ecuación para U es $x^2 + y^2 = 1$, podemos sustituir 1 por cada uno de $u_1^2 + u_2^2$, $v_1^2 + v_2^2$ y $w_1^2 + w_2^2$. Al hacer esto y simplificar, obtenemos

$$2 - 2w_1 = 2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2,$$

que se reduce a

$$w_1 = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Sustituyendo de las fórmulas expresadas en (*) nos da

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$

que es lo que deseábamos demostrar. Es posible ampliar nuestra exposición a todos los valores de u y v. ■

El siguiente ejemplo demuestra el uso de la fórmula de la resta para hallar el valor *exacto* de cos 15°. Desde luego, si sólo se desea una aproximación, se podría usar calculadora.

EJEMPLO 1 **Usar la fórmula de la resta para el coseno**

Encuentre el valor exacto de cos 15° usando el hecho que $15° = 60° - 45°$.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula de la resta para el coseno con $u = 60°$ y $v = 45°$:

$$\begin{aligned}\cos 15° &= \cos(60° - 45°)\\ &= \cos 60° \cos 45° + \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen} 45°\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

■

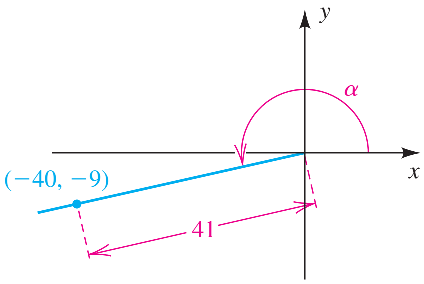
EJEMPLO 2 **Usar la fórmula de la resta para la cosecante**

Si $\csc \alpha = -\frac{41}{9}$ y $\cot \alpha > 0$, encuentre el valor exacto de $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

SOLUCIÓN Como la cosecante de α es negativa y la cotangente de α es positiva, α debe estar en el tercer cuadrante. Por la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, sabemos que x y y son negativos y que $\csc \alpha = \frac{r}{y} = \frac{41}{-9}$. Para encontrar x, tenemos $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 = r^2 - y^2$, que nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned}x &= -\sqrt{r^2 - y^2} && x \text{ es negativa}\\ &= -\sqrt{41^2 - (-9)^2} && \text{sea } r = 41,\ y = -9\\ &= -40 && \text{simplifique el radical}\end{aligned}$$

FIGURA 3



El ángulo α y el punto $(-40, -9)$ en el lado del terminal de α se ilustran en la figura 3. Ahora podemos usar la fórmula de la resta para el coseno para encontrar el valor exacto deseado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} && \text{fórmula de la resta}\\ &= \frac{-40}{41}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-9}{41}\frac{1}{2} && \text{de la figura 3}\\ &= \frac{-40\sqrt{3} - 9}{82} && \text{sume las fracciones}\end{aligned}$$

■

Es relativamente fácil obtener una fórmula para $\cos(u + v)$. Empezamos por escribir $u + v$ como $u - (-v)$ y luego usamos la fórmula de la resta para el coseno:

$$\begin{aligned}\cos(u + v) &= \cos[u - (-v)]\\ &= \cos u \cos(-v) + \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(-v)\end{aligned}$$

Usando las fórmulas para negativos, $\cos(-v) = \cos v$ y $\operatorname{sen}(-v) = -\operatorname{sen} v$, nos da la siguiente fórmula de suma para el coseno.

Fórmula de la suma para coseno

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

EJEMPLO 3 Usar la fórmula de la suma para el coseno

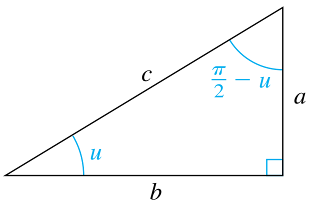
Encuentre el valor exacto de $\cos \frac{7\pi}{12}$ usando el hecho que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula de la suma para el coseno:

$$\begin{aligned}\cos \frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

■

FIGURA 4



Nos referimos a las funciones seno y coseno como **cofunciones** una de la otra. Del mismo modo, las funciones tangente y cotangente son cofunciones, como son la secante y cosecante. Si u es la medida en radianes de un ángulo agudo, entonces el ángulo medido en radianes $\pi/2 - u$ es complementario de u y podemos considerar el triángulo rectángulo mostrado en la figura 4. Usando razones, vemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} u &= \frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\\ \cos u &= \frac{b}{c} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\\ \tan u &= \frac{a}{b} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right).\end{aligned}$$

Estas tres fórmulas y sus análogas para sec u, csc u y cot u expresan que *el valor de función de u es igual a la cofunción del ángulo complementario* $\pi/2 - u$.

En las fórmulas siguientes usamos las fórmulas de la resta para ampliar estas relaciones a cualquier número real u, siempre que los valores de la función estén definidos.

Fórmulas de cofunción

Si u es un número real o la medida en radianes de un ángulo, entonces,

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$ **(2)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$

(3) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$ **(4)** $\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$

(5) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$ **(6)** $\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$

DEMOSTRACIONES Usando la fórmula de la resta para el coseno, tenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u$$
$$= (0)\cos u + (1)\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u.$$

Esto nos da la fórmula 1.

Si sustituimos $\pi/2 - v$ por u en la primera fórmula, obtenemos

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$

o $$\cos v = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

Como el símbolo v es arbitrario, esta ecuación es equivalente a la segunda fórmula de cofunción:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

Usando la identidad tangente, las fórmulas de cofunción 1 y 2 , y la identidad cotangente, obtenemos una demostración para la tercera fórmula:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} = \cot u$$

Las demostraciones de las restantes tres fórmulas son semejantes. ■

Una forma fácil de recordar las fórmulas de cofunción es consultar el triángulo de la figura 4.

Podemos ahora demostrar las identidades siguientes.

Fórmulas de suma y resta para seno y tangente

(1) $\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$

(2) $\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

(3) $\tan(u + v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$

(4) $\tan(u - v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$

DEMOSTRACIONES Demostraremos las fórmulas 1 y 3. Usando las fórmulas de cofunción y la fórmula de la resta para el coseno, podemos verificar la fórmula 1:

$$\operatorname{sen}(u + v) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (u + v)\right]$$
$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos v + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\operatorname{sen} v$$
$$= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

Para verificar la fórmula 3, empezamos como sigue:

$$\tan(u+v) = \frac{\operatorname{sen}(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}$$

Dividiendo entre cos *u* cos *v nos dará una expresión que contenga tangentes; dividiendo entre* sen *u* sen *v nos dará una expresión que contenga cotangentes.*

Si $\cos u \cos v \neq 0$, entonces podemos dividir el numerador y el denominador entre $\cos u \cos v$, obteniendo

$$\tan(u+v) = \frac{\left(\dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\cos v}{\cos v}\right) + \left(\dfrac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right)}{\left(\dfrac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\cos v}{\cos v}\right) - \left(\dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right)} = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}.$$

Si $\cos u \cos v = 0$, entonces $\cos u = 0$ o $\cos v = 0$. En este caso, $\tan u$ o $\tan v$ no están definidas y la fórmula es inválida. Las demostraciones de las fórmulas 2 y 4 se dejan como ejercicios. ■

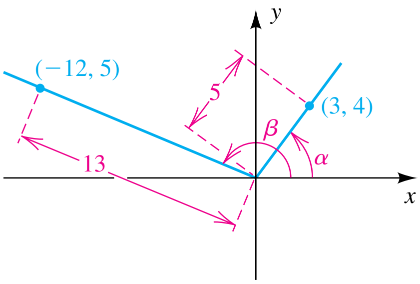
EJEMPLO 4 **Usar fórmulas de la suma para hallar el cuadrante que contiene un ángulo**

Suponga $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos \beta = -\frac{12}{13}$, donde α está en el primer cuadrante y β está en el segundo cuadrante.

(a) Encuentre los valores exactos de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\tan(\alpha+\beta)$.

(b) Encuentre el cuadrante que contenga a $\alpha+\beta$.

FIGURA 5



SOLUCIÓN Los ángulos α y β están ilustrados en la figura 5. No hay pérdida de generalidad respecto a α y β como ángulos positivos entre 0 y 2π, como hemos hecho en la figura. Como $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$, podemos escoger el punto (3, 4) en el lado terminal de α. Del mismo modo, como $\cos \beta = -\frac{12}{13}$, el punto $(-12, 5)$ está en el lado terminal de β. Si consultamos la figura 5 y usamos la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, tenemos

$$\cos \alpha = \tfrac{3}{5}, \quad \tan \alpha = \tfrac{4}{3}, \quad \operatorname{sen} \beta = \tfrac{5}{13}, \quad \tan \beta = -\tfrac{5}{12}.$$

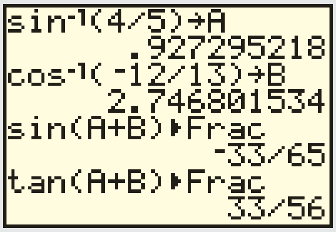
(a) Las fórmulas de la suma nos dan:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \left(\tfrac{4}{5}\right)\left(-\tfrac{12}{13}\right) + \left(\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{5}{13}\right) = -\tfrac{33}{65}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{4}{3} + \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{12}\right)} \cdot \frac{36}{36} = \frac{33}{56}$$

(b) Como $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ es negativo y $\tan(\alpha+\beta)$ es positivo, el ángulo $\alpha+\beta$ debe estar en el tercer cuadrante. ■

FIGURA 6



A continuación veamos cómo se puede aplicar una calculadora de gráficas para hallar los valores exactos del ejemplo 4. Como α está en el primer cuadrante, sen $\alpha = \frac{4}{5}$ implica que $\alpha = \text{sen}^{-1}\frac{4}{5}$; y como β está en el segundo cuadrante, cos $\beta = -\frac{12}{13}$ implica que $\beta = \cos^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)$. (Si los ángulos estuvieran en cuadrantes diferentes, podríamos usar ángulos de referencia como hicimos en la sección 6.4.) En la figura 6, guardamos los ángulos α y β en las locaciones A y B y luego encontramos los valores exactos de sen $(\alpha + \beta)$ y tan $(\alpha + \beta)$ como fracciones. Los valores concuerdan con los hallados en el ejemplo 4.

El siguiente ejemplo ilustra un tipo de simplificación del cociente de diferencias (introducido en la sección 3.4) con la función seno. La forma resultante es útil en cálculo.

EJEMPLO 5 **Una fórmula empleada en cálculo**

Si $f(x) = \text{sen}\, x$ y $h \neq 0$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{sen}\, x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \left(\frac{\text{sen}\, h}{h}\right).$$

SOLUCIÓN Usamos la definición de f y la fórmula de la suma para el seno:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\text{sen}\,(x+h) - \text{sen}\, x}{h} \\
&= \frac{\text{sen}\, x \cos h + \cos x\, \text{sen}\, h - \text{sen}\, x}{h} \\
&= \frac{\text{sen}\, x\,(\cos h - 1) + \cos x\, \text{sen}\, h}{h} \\
&= \text{sen}\, x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \left(\frac{\text{sen}\, h}{h}\right)
\end{aligned}$$

■

Las fórmulas de la suma también se pueden usar para deducir **fórmulas de reducción.** Las fórmulas de reducción se pueden usar para cambiar expresiones como

$$\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{y} \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{para cualquier entero } n$$

por expresiones que contengan sólo sen θ o cos θ . Fórmulas similares son verdaderas para las otras funciones trigonométricas. En lugar de deducir fórmulas generales de reducción, ilustraremos dos casos especiales en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 **Obtener fórmulas de reducción**

Exprese en términos de una función trigonométrica sólo de θ:

(a) $\text{sen}\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos\,(\theta + \pi)$

SOLUCIÓN Utilizando las fórmulas de resta y suma, obtenemos lo siguiente:

(a) $$\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\theta\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$$
$$= \operatorname{sen}\theta\cdot(0) - \cos\theta\cdot(-1) = \cos\theta$$

(b) $$\cos(\theta + \pi) = \cos\theta\cos\pi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi$$
$$= \cos\theta\cdot(-1) - \operatorname{sen}\theta\cdot(0) = -\cos\theta$$ ■

EJEMPLO 7 **Combinar una suma que contenga las funciones seno y coseno**

Como $\cos u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$, *también podríamos escribir la suma en términos de una función seno.*

Sean a y b números reales con $a > 0$. Demuestre que para toda x,

$$a\cos Bx + b\operatorname{sen}Bx = A\cos(Bx - C),$$

donde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan C = \dfrac{b}{a}$ con $-\dfrac{\pi}{2} < C < \dfrac{\pi}{2}$.

SOLUCIÓN Dado $a\cos Bx + b\operatorname{sen}Bx$, consideremos que $\tan C = b/a$ con $-\pi/2 < C < \pi/2$. Por tanto, $b = a\tan C$, y podemos escribir

$$\begin{aligned} a\cos Bx + b\operatorname{sen}Bx &= a\cos Bx + (a\tan C)\operatorname{sen}Bx \\ &= a\cos Bx + a\frac{\operatorname{sen}C}{\cos C}\operatorname{sen}Bx \\ &= \frac{a}{\cos C}(\cos C\cos Bx + \operatorname{sen}C\operatorname{sen}Bx) \\ &= (a\sec C)\cos(Bx - C). \end{aligned}$$

Completaremos la demostración mostrando que $a\sec C = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como $-\pi/2 < C < \pi/2$, se deduce que $\sec C$ es positivo, y por tanto

$$a\sec C = a\sqrt{1 + \tan^2 C}.$$

Usando $\tan C = b/a$ y $a > 0$, obtenemos

$$a\sec C = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$ ■

EJEMPLO 8 **Una aplicación del ejemplo 6**

Si $f(x) = \cos x + \operatorname{sen}x$, use las fórmulas dadas en el ejemplo 7 para expresar $f(x)$ en la forma $A\cos(Bx - C)$, y luego trace la gráfica de f.

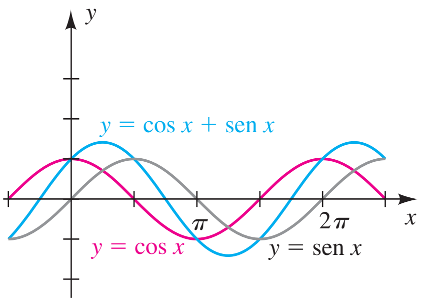
SOLUCIÓN Haciendo $a = 1$, $b = 1$ y $B = 1$ en las fórmulas del ejemplo 7, tenemos

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \tan C = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1.$$

Como $\tan C = 1$ y $-\pi/2 < C < \pi/2$, tenemos $C = \pi/4$. Sustituyendo por a, b, A, B y C en la fórmula

$$a\cos Bx + b\operatorname{sen}Bx = A\cos(Bx - C)$$

FIGURA 7



nos da

$$f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Comparando la última fórmula con la ecuación $y = a\cos(bx + c)$, que hemos estudiado en la sección 6.5, vemos que la amplitud de la gráfica es $\sqrt{2}$, el periodo es 2π y el desplazamiento de fase es $\pi/4$. La gráfica de f está trazada en la figura 7, donde también hemos mostrado las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$. Nuestro trazo está acorde con el obtenido en el capítulo 6 usando calculadora. (Vea la figura 10 en la sección 6.6.) ■

7.3 Ejercicios

Ejer. 1–4: Exprese como cofunción de un ángulo complementario.

1 (a) $\operatorname{sen} 15°20'$ (b) $\cos 73°12'$

(c) $\tan\frac{\pi}{6}$ (d) $\sec 17.28°$

2 (a) $\tan 37°50'$ (b) $\operatorname{sen} 89°41'$

(c) $\cos\frac{\pi}{3}$ (d) $\cot 61.87°$

3 (a) $\cos\frac{\pi}{8}$ (b) $\operatorname{sen}\frac{1}{4}$

(c) $\tan 1$ (d) $\csc 0.53$

4 (a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ (b) $\cos\frac{1}{5}$

(c) $\tan\sqrt{2}$ (d) $\sec 1.2$

Ejer. 5–10: Encuentre los valores exactos.

5 (a) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}$

(b) $\cos\frac{5\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

6 (a) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$

(b) $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

7 (a) $\tan 60° + \tan 225°$

(b) $\tan 285°$ (use $285° = 60° + 225°$)

8 (a) $\cos 225° - \cos 30°$

(b) $\cos 195°$ (use $195° = 225° - 30°$)

9 (a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

(b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

10 (a) $\tan\frac{3\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}$

(b) $\tan\frac{7\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

Ejer. 11–16: Exprese como una función trigonométrica de un ángulo.

11 $\cos 70° \cos 53° + \operatorname{sen} 70° \operatorname{sen} 53°$

12 $\cos 6° \cos 25° - \operatorname{sen} 6° \operatorname{sen} 25°$

13 $\cos 61° \operatorname{sen} 82° - \operatorname{sen} 61° \cos 82°$

14 $\operatorname{sen} 57° \cos 4° + \cos 57° \operatorname{sen} 4°$

15 $\cos 3 \operatorname{sen}(-2) - \cos 2 \operatorname{sen} 3$

16 $\operatorname{sen}(-5) \cos 2 + \cos 5 \operatorname{sen}(-2)$

Ejer. 17–22: Utilice las condiciones dadas para encontrar el valor exacto de la expresión

17 $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{5}{13}$, $\tan \alpha > 0$, $\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$

18 $\cos \alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{sen} \alpha < 0$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$

19 $\sec x = 3$, $\csc x < 0$, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

20 $\tan x = \frac{1}{4}$, $\sec x > 0$, $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

21 $\cot x = \sqrt{3}$, $\cos x < 0$, $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

22 $\csc x = -\frac{5}{3}$, $\cot x > 0$, $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

23 Si α y β son ángulos agudos tales que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ y $\tan \beta = \frac{8}{15}$, encuentre

(a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ (b) $\cos(\alpha + \beta)$

(c) el cuadrante que contiene a $\alpha + \beta$

24 Si α y β son ángulos agudos tales que $\csc \alpha = \frac{13}{12}$ y $\cot \beta = \frac{4}{3}$, encuentre

(a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ (b) $\tan(\alpha + \beta)$

(c) el cuadrante que contiene a $\alpha + \beta$

25 Si $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$ y $\sec \beta = \frac{5}{3}$ para un ángulo α en el tercer cuadrante y un ángulo β en primer cuadrante, encuentre

(a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ (b) $\tan(\alpha + \beta)$

(c) el cuadrante que contiene a $\alpha + \beta$

26 Si $\tan \alpha = -\frac{7}{24}$ y $\cot \beta = \frac{3}{4}$ para un ángulo α del segundo cuadrante y un ángulo β del tercer cuadrante, encuentre

(a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ (b) $\cos(\alpha + \beta)$ (c) $\tan(\alpha + \beta)$

(d) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ (e) $\cos(\alpha - \beta)$ (f) $\tan(\alpha - \beta)$

27 Si α y β son ángulos del tercer cuadrante tales que $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ y $\cos \beta = -\frac{3}{5}$, encuentre

(a) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ (b) $\cos(\alpha - \beta)$

(c) el cuadrante que contiene a $\alpha - \beta$

28 Si α y β son ángulos del segundo cuadrante tales que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$ y $\cos \beta = -\frac{1}{3}$, encuentre

(a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ (b) $\tan(\alpha + \beta)$

(c) el cuadrante que contiene a $\alpha + \beta$

Ejer. 29–40: Verifique la fórmula de reducción.

29 $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen} \theta$

30 $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

31 $\operatorname{sen}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = -\cos x$

32 $\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \theta$

33 $\cos(\theta - \pi) = -\cos \theta$

34 $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

35 $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

36 $\cos\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \theta$

37 $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$

38 $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$

39 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$

40 $\tan(x + \pi) = \tan x$

Ejer. 41–50: Verifique la identidad.

41 $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$

42 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)$

43 $\tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$

44 $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$

45 $\cos(u + v) + \cos(u - v) = 2 \cos u \cos v$

46 $\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v$

47 $\operatorname{sen}(u + v) \cdot \operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

48 $\cos(u + v) \cdot \cos(u - v) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

49 $\frac{1}{\cot \alpha - \cot \beta} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$

50 $\frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

51 Exprese $\operatorname{sen}(u + v + w)$ en términos de funciones trigonométricas de u, v y w. (*Sugerencia:* escriba

$$\operatorname{sen}(u + v + w) \quad \text{como sen } [(u + v) + w]$$

y use fórmulas de suma.)

52 Exprese $\tan(u + v + w)$ en términos de funciones trigonométricas de u, v y w.

53 Deduzca la fórmula $\cot(u + v) = \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot u + \cot v}$.

54 Si α y β son ángulos complementarios, demuestre que

$$\text{sen}^2\,\alpha + \text{sen}^2\,\beta = 1.$$

55 Deduzca la fórmula de la resta para la función seno.

56 Deduzca la fórmula de la resta para la función tangente.

57 Si $f(x) = \cos x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \text{sen}\,x\left(\frac{\text{sen}\,h}{h}\right).$$

58 Si $f(x) = \tan x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sec^2 x\left(\frac{\text{sen}\,h}{h}\right)\frac{1}{\cos h - \text{sen}\,h\tan x}.$$

Ejer. 59–60: (a) Compare las aproximaciones decimales de ambos lados de la ecuación (1). (b) Encuentre el ángulo agudo x tal que la ecuación (2) sea una identidad. (c) ¿Cómo se relaciona la ecuación (1) con la ecuación (2)?

59 (1) $\text{sen}\,63° - \text{sen}\,57° = \text{sen}\,3°$
(2) $\text{sen}\,(\alpha + \beta) - \text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\beta$

60 (1) $\text{sen}\,35° + \text{sen}\,25° = \cos 5°$
(2) $\text{sen}\,(\alpha + \beta) + \text{sen}\,(\alpha - \beta) = \cos\beta$

Ejer. 61–66: Use una fórmula de suma o resta para hallar las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, \pi)$.

61 $\text{sen}\,4t\cos t = \text{sen}\,t\cos 4t$

62 $\cos 5t\cos 3t = \frac{1}{2} + \text{sen}\,(-5t)\,\text{sen}\,3t$

63 $\cos 5t\cos 2t = -\text{sen}\,5t\,\text{sen}\,2t$

64 $\text{sen}\,3t\cos t + \cos 3t\,\text{sen}\,t = -\frac{1}{2}$

65 $\tan 2t + \tan t = 1 - \tan 2t\tan t$

66 $\tan t - \tan 4t = 1 + \tan 4t\tan t$

Ejer. 67–70: (a) Use la fórmula del ejemplo 7 para expresar f en términos de la función coseno. (b) Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de fase de f. (c) Trace la gráfica de f.

67 $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \text{sen}\,2x$

68 $f(x) = \cos 4x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,4x$

69 $f(x) = 2\cos 3x - 2\,\text{sen}\,3x$

70 $f(x) = 5\cos 10x - 5\,\text{sen}\,10x$

Ejer. 71–72: Para ciertas aplicaciones en ingeniería eléctrica, la suma de varias señales de voltaje u ondas de radio de la misma frecuencia se expresa en la forma compacta $y = A\cos(Bt - C)$. Exprese la señal dada en esta forma.

71 $y = 50\,\text{sen}\,60\pi t + 40\cos 60\pi t$

72 $y = 10\,\text{sen}\left(120\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right) + 5\,\text{sen}\,120\pi t$

73 **Movimiento de una masa** Si una masa que está unida a un resorte se eleva y_0 pies y se suelta con una velocidad vertical inicial de v_0 pies/s, entonces la subsiguiente posición y de la masa está dada por

$$y = y_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t,$$

donde t es el tiempo en segundos y ω es una constante positiva.

(a) Si $\omega = 1$, $y_0 = 2$ pies y $v_0 = 3$ ft/s, exprese y en la forma $A\cos(Bt - C)$, y encuentre la amplitud y al periodo del movimiento resultante.

(b) Determine los tiempos cuando $y = 0$; es decir, los tiempos cuando la masa pasa por la posición de equilibrio.

74 **Movimiento de una masa** Consulte el ejercicio 73. Si $y_0 = 1$ y $\omega = 2$, encuentre las velocidades iniciales que resulten en una amplitud de 4 pies.

75 **Presión en el tímpano** Si un diapasón se toca ligeramente y luego se sostiene a cierta distancia del tímpano, la presión $p_1(t)$ en el exterior del tímpano en el tiempo t puede estar representada por $p_1(t) = A\,\text{sen}\,\omega t$, donde A y ω son constantes positivas. Si un segundo diapasón idéntico se toca con una fuerza posiblemente diferente y se sostiene a una distancia diferente del tímpano (vea la figura), su efecto puede estar representado por la ecuación $p_2(t) = B\,\text{sen}\,(\omega t + \tau)$, donde B es una constante positiva y $0 \le \tau \le 2\pi$. La presión total $p(t)$ en el tímpano está dada por

$$p(t) = A\,\text{sen}\,\omega t + B\,\text{sen}\,(\omega t + \tau).$$

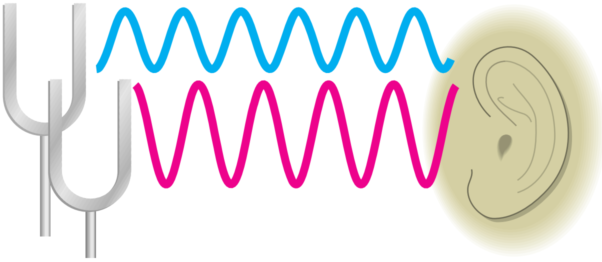
(a) Demuestre que $p(t) = a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t$, donde

$$a = B\,\text{sen}\,\tau \quad \text{y} \quad b = A + B\cos\tau.$$

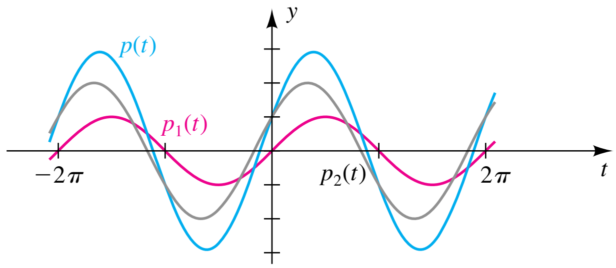
(b) Demuestre que la amplitud C de p está dada por

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\tau.$$

EJERCICIO 75



EJERCICIO 77



76 Interferencia destructiva Consulte el ejercicio 75. Cuando se golpean dos diapasones ocurre interferencia destructiva si la amplitud de la onda de sonido resultante es menor que A. Suponga que los dos diapasones se golpean con la misma fuerza; es decir, $A = B$.

(a) Cuando ocurre interferencia destructiva total, la amplitud de p es cero y no se escucha sonido alguno. Encuentre el mínimo valor positivo de τ para el cual esto sucede.

(b) Determine el intervalo (a, b) de τ para el cual se presenta interferencia destructiva y a tiene su mínimo valor positivo.

77 Interferencia constructiva Consulte el ejercicio 75. Cuando se golpean dos diapasones, ocurre interferencia constructiva si la amplitud C de la onda de sonido resultante es mayor que A o B (vea la figura).

(a) Demuestre que $C \leq A + B$.

(b) Encuentre los valores de τ tales que $C = A + B$.

(c) Si $A \geq B$, determine una condición en la cual ocurrirá interferencia constructiva.

78 Presión en el tímpano Consulte el ejercicio 75. Si dos diapasones con diferentes frecuencias se golpean simultáneamente con fuerzas diferentes, entonces la presión total $p(t)$ en el tímpano en el tiempo t está dada por

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = A \text{ sen } \omega_1 t + B \text{ sen } (\omega_2 t + \tau),$$

donde A, B, ω_1, ω_2 y τ son constantes.

(a) Grafique p para $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ y si $A = B = 2$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 20$ y $\tau = 3$.

(b) Use la gráfica para describir la variación de tono que se produce.

Ejer. 79–80: Consulte el ejercicio 77. Grafique la ecuación para $-\pi \leq t \leq \pi$ y estime los intervalos en los que ocurre interferencia constructiva.

79 $y = 3 \text{ sen } 2t + 2 \text{ sen } (4t + 1)$

80 $y = 2 \text{ sen } t + 2 \text{ sen } (3t + 3)$

7.4 Fórmulas de ángulos múltiples

Nos referimos a las fórmulas consideradas en esta sección como **fórmulas de ángulos múltiples.** En particular, las siguientes identidades son **fórmulas de ángulo doble**, porque contienen la expresión $2u$.

Fórmulas de ángulo doble

(1) $\text{sen } 2u = 2 \text{ sen } u \cos u$

(2) **(a)** $\cos 2u = \cos^2 u - \text{sen}^2 u$

(b) $\cos 2u = 1 - 2 \text{ sen}^2 u$

(c) $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$

(3) $\tan 2u = \dfrac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$

DEMOSTRACIONES Cada una de estas fórmulas se puede demostrar al hacer $v = u$ en las fórmulas de suma apropiadas. Si usamos la fórmula para $\text{sen } (u + v)$, entonces

$$\begin{aligned}\text{sen } 2u &= \text{sen } (u + u)\\ &= \text{sen } u \cos u + \cos u \text{ sen } u\\ &= 2 \text{ sen } u \cos u.\end{aligned}$$

Usando la fórmula para $\cos (u + v)$, tenemos

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos (u + u)\\ &= \cos u \cos u - \text{sen } u \text{ sen } u\\ &= \cos^2 u - \text{sen}^2 u.\end{aligned}$$

Para obtener las otras dos formas para $\cos 2u$ en 2(b) y 2(c), usamos la identidad fundamental $\text{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$. Así,

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos^2 u - \text{sen}^2 u\\ &= (1 - \text{sen}^2 u) - \text{sen}^2 u\\ &= 1 - 2 \text{ sen}^2 u.\end{aligned}$$

Del mismo modo, si sustituimos $\text{sen}^2 u$ en lugar de $\cos^2 u$, obtenemos

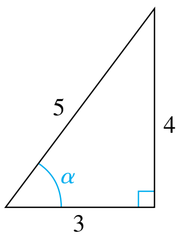
$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos^2 u - (1 - \cos^2 u)\\ &= 2 \cos^2 u - 1.\end{aligned}$$

La fórmula 3 para $\tan 2u$ se puede obtener al hacer $v = u$ en la fórmula para $\tan (u + v)$. ■

EJEMPLO 1 Usar fórmulas de ángulo doble

Si $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ es un ángulo agudo, encuentre los valores exactos de $\text{sen } 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

FIGURA 1



SOLUCIÓN Si consideramos α como un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, como se ve en la figura 1, obtenemos $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. A continuación sustituimos en las fórmulas de ángulo doble:

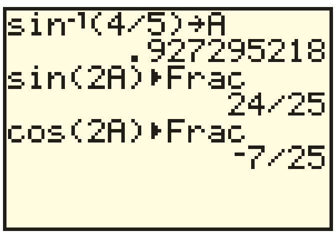
$$\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha = 2\left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 - \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 = \tfrac{9}{25} - \tfrac{16}{25} = -\tfrac{7}{25}$$ ■

La figura 2 muestra una forma de calcular los valores del ejemplo 1 en calculadora.

El siguiente ejemplo demuestra cómo cambiar una expresión de ángulo múltiple a una expresión de un solo ángulo.

FIGURA 2



EJEMPLO 2 Cambiar la forma de $\cos 3\theta$

Exprese $\cos 3\theta$ en términos de $\cos \theta$.

SOLUCIÓN

$\cos 3\theta = \cos (2\theta + \theta)$	$3\theta = 2\theta + \theta$
$= \cos 2\theta \cos \theta - \text{sen } 2\theta \text{ sen } \theta$	fórmula de la suma
$= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - (2 \text{ sen } \theta \cos \theta) \text{ sen } \theta$	fórmulas de ángulo doble
$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta \text{ sen}^2 \theta$	multiplique
$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$	$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
$= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$	simplifique ■

A cada una de las siguientes tres fórmulas se les da el nombre de **identidad de semiángulo,** porque el número u es la mitad del número $2u$.

Identidades de semiángulo

(1) $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$ **(2)** $\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$

(3) $\tan^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$

DEMOSTRACIONES La primera identidad puede verificarse como sigue:

$$\cos 2u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u \quad \text{fórmula 2(b) de ángulo doble}$$
$$2\operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos 2u \quad \text{aísle } 2\operatorname{sen}^2 u$$
$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \quad \text{divida entre 2}$$

La segunda identidad se puede deducir en forma semejante empezando con

$$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1.$$

La tercera identidad puede obtenerse de las identidades 1 y 2 al notar que

$$\tan^2 u = (\tan u)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}.$$ ■

Es posible usar identidades de semiángulo para expresar potencias pares de funciones trigonométricas en términos de funciones con exponente 1, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 3 Usar identidades de semiángulo para verificar una identidad

Verifique la identidad $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$.

SOLUCIÓN

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \quad \text{identidades de semiángulo}$$
$$= \tfrac{1}{4}(1 - \cos^2 2x) \quad \text{multiplique}$$
$$= \tfrac{1}{4}(\operatorname{sen}^2 2x) \quad \operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x = 1$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) \quad \text{identidad de semiángulo con } u = 2x$$
$$= \tfrac{1}{8}(1 - \cos 4x) \quad \text{multiplique}$$ ■

EJEMPLO 4 Usar identidades de semiángulo para reducir una potencia de cos t

Exprese $\cos^4 t$ en términos de valores de la función coseno con exponente 1.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\cos^4 t &= (\cos^2 t)^2 && \text{ley de exponentes}\\
&= \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 && \text{identidad de semiángulo}\\
&= \tfrac{1}{4}(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) && \text{eleve al cuadrado}\\
&= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) && \text{dentidad de semiángulo con } u = 2t\\
&= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\cos 2t + \tfrac{1}{8}\cos 4t && \text{simplifique}
\end{aligned}$$

■

Sustituyendo $v/2$ por u en las tres identidades de semiángulo nos da

$$\operatorname{sen}^2\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{2} \qquad \cos^2\frac{v}{2} = \frac{1+\cos v}{2} \qquad \tan^2\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{1+\cos v}.$$

Sacando las raíces cuadradas de ambos lados de cada una de estas ecuaciones, obtenemos lo siguiente, a las que llamamos *fórmulas de semiángulo* para distinguirlas de las identidades de semiángulo.

Fórmulas de semiángulo

(1) $\operatorname{sen}\dfrac{v}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos v}{2}}$ **(2)** $\cos\dfrac{v}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos v}{2}}$

(3) $\tan\dfrac{v}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos v}{1+\cos v}}$

Al usar una fórmula de semiángulo, escogemos ya sea + o −, dependiendo del cuadrante que contenga el ángulo $v/2$ medido en radianes. Entonces, para sen $(v/2)$ usamos + si $v/2$ es un ángulo en el primer cuadrante o en el segundo, o − si $v/2$ está en los cuadrantes tercero o cuarto. Para cos $(v/2)$ usamos + si $v/2$ está en los cuadrantes primero o cuarto, y así sucesivamente.

EJEMPLO 5 **Usar fórmulas de semiángulo para el seno y coseno**

Encuentre valores exactos para

(a) sen 22.5° **(b)** cos 112.5°

SOLUCIÓN

(a) Escogemos el signo positivo porque 22.5° está en el primer cuadrante y, por tanto, sen 22.5° > 0.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 22.5° &= +\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} && \text{fórmula de semiángulo para seno con } v = 45°\\
&= \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} && \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} && \text{multiplique el radicando por } \frac{2}{2} \text{ y simplificar}
\end{aligned}$$

(continúa)

(b) De manera similar, escogemos el signo negativo porque 112.5° está en el segundo cuadrante y por tanto $\cos 112.5° < 0$.

$$\begin{aligned}\cos 112.5° &= -\sqrt{\frac{1+\cos 225°}{2}} && \text{fórmula del semiángulo para coseno con } v = 225° \\ &= -\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} && \cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} && \text{multiplique el radicando por } \frac{2}{2} \text{ y simplifique}\end{aligned}$$

■

Podemos obtener una forma alternativa para la fórmula de semiángulo con $\tan(v/2)$. Multiplicar el numerador y denominador del radicando de la tercera fórmula del semiángulo por $1 - \cos v$ nos dará

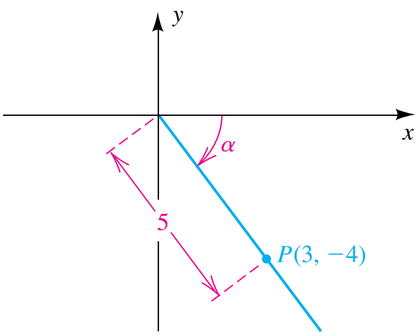
$$\begin{aligned}\tan\frac{v}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}\cdot\frac{1-\cos v}{1-\cos v}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos v)^2}{1-\cos^2 v}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos v)^2}{\operatorname{sen}^2 v}} = \pm\frac{1-\cos v}{\operatorname{sen} v}.\end{aligned}$$

Podemos eliminar el signo ± de la fórmula precedente. Primero observe que el numerador $1 - \cos v$ nunca es negativo. Podemos demostrar que $\tan(v/2)$ y $\operatorname{sen} v$ siempre tienen el mismo signo. Por ejemplo, si $0 < v < \pi$, entonces $0 < v/2 < \pi/2$ y en consecuencia $\operatorname{sen} v$ y $\tan(v/2)$ son positivos. Si $\pi < v < 2\pi$, entonces $\pi/2 < v/2 < \pi$ y por lo tanto $\operatorname{sen} v$ y $\tan(v/2)$ son negativos, lo cual nos da la primera de las siguientes dos identidades. La segunda identidad para $\tan(v/2)$ puede obtenerse al multiplicar el numerador y el denominador del radicando de la tercera fórmula del semiángulo por $1 + \cos v$.

Fórmulas del semiángulo para la tangente

(1) $\tan\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{\operatorname{sen} v}$ **(2)** $\tan\frac{v}{2} = \frac{\operatorname{sen} v}{1+\cos v}$

FIGURA 3



EJEMPLO 6 **Usar una fórmula del semiángulo para la tangente**

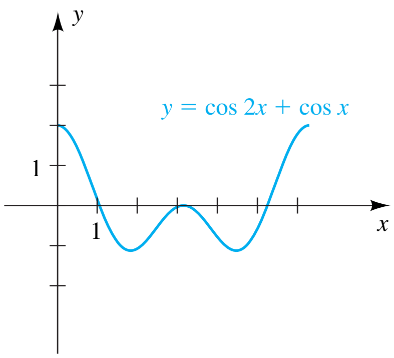
Si $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$ y α está en el cuarto cuadrante, encuentre $\tan\frac{\alpha}{2}$.

SOLUCIÓN Si escogemos el punto $(3, -4)$ en el lado terminal de α, como se ilustra en la figura 3, entonces $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$ y $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Aplicando la primera fórmula del semiángulo para la tangente, obtenemos

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{1}{2}.$$

■

FIGURA 4



EJEMPLO 7 **Hallar los puntos de intersección con el eje x de la gráfica**

Una gráfica de la ecuación $y = \cos 2x + \cos x$ para $0 \le x \le 2\pi$ aparece en la figura 4. Los puntos de intersección con el eje x parecen estar aproximadamente en 1.1, 3.1 y 5.2. Encuentre los valores exactos y aproximaciones a tres lugares decimales.

SOLUCIÓN Para hallar los puntos de intersección con el eje x, procedemos como sigue:

$$\cos 2x + \cos x = 0 \qquad \text{sea } y = 0$$

$$(2\cos^2 x - 1) + \cos x = 0 \qquad \text{fórmula 2(c) del ángulo doble}$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \qquad \text{ecuación equivalente}$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \qquad \text{factorice}$$

$$2\cos x - 1 = 0, \quad \cos x + 1 = 0 \qquad \text{teorema del factor cero}$$

$$\cos x = \tfrac{1}{2}, \quad \cos x = -1 \qquad \text{despeje } \cos x$$

Las soluciones de las últimas dos ecuaciones del intervalo $[0, 2\pi]$ nos dan los siguientes puntos de intersección con el eje x exactos y aproximados:

$$\frac{\pi}{3} \approx 1.047, \quad \frac{5\pi}{3} \approx 5.236, \quad \pi \approx 3.142$$

■

EJEMPLO 8 **Deducir una fórmula para el área de un triángulo isósceles**

FIGURA 5

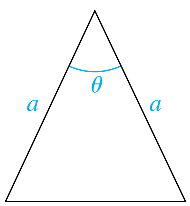
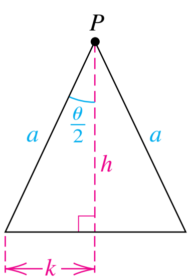


FIGURA 6



Un **triángulo isósceles** tiene dos lados iguales de longitud a y el ángulo entre ellos es θ (vea la figura 5). Exprese el área A del triángulo en términos de a y θ.

SOLUCIÓN En la figura 6 vemos que la altura desde el punto P biseca θ y que $A = \frac{1}{2}(2k)h = kh$. Entonces, tenemos lo siguiente, donde $\theta/2$ es un ángulo agudo:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{k}{a} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{h}{a} \qquad \text{vea la figura 6}$$

$$k = a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \qquad h = a\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{despeje } k \text{ y } h$$

A continuación hallamos el área:

$$A = a^2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{sustituya en } A = kh \qquad (*)$$

$$= a^2\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \text{fórmulas del semiángulo con } \theta/2 \text{ en el primer cuadrante}$$

$$= a^2\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{4}} \qquad \text{ley de radicales}$$

$$= a^2\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{4}} \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2|\operatorname{sen}\theta| \qquad \text{saque la raíz cuadrada}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}\theta \qquad \operatorname{sen}\theta > 0 \text{ para } 0° < \theta < 180°$$

Otro método para simplificar $(*)$ es escribir la fórmula del ángulo doble para el seno, $\operatorname{sen} 2u = 2\operatorname{sen} u \cos u$, como

(continúa)

$$\text{sen } u \cos u = \tfrac{1}{2} \text{ sen } 2u \qquad (**)$$

y procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} A &= a^2 \text{ sen } \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} && \text{sustituya en } A = kh \\ &= a^2 \cdot \frac{1}{2} \text{ sen } \left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) && \text{sea } u = \frac{\theta}{2} \text{ en } (**) \\ &= \tfrac{1}{2} a^2 \text{ sen } \theta && \text{simplifique} \end{aligned}$$

■

7.4 Ejercicios

Ejer. 1–4: Encuentre los valores exactos de sen 2θ, cos 2θ y tan 2θ para los valores dados de θ.

1 $\cos \theta = \frac{3}{5}$; $0° < \theta < 90°$

2 $\cot \theta = \frac{4}{3}$; $180° < \theta < 270°$

3 $\sec \theta = -\frac{13}{12}$; $90° < \theta < 180°$

4 $\text{sen } \theta = -\frac{12}{13}$; $270° < \theta < 360°$

5 Si $\tan \alpha = 3$ y α es un ángulo agudo, encuentre el valor exacto de sen 2α.

6 Si $\cot \alpha = 2$ y α es agudo, encuentre el valor exacto de $\cos 2\alpha$.

Ejer. 7–12: Encuentre los valores exactos de sen ($\theta/2$), cos ($\theta/2$) y tan ($\theta/2$) para las condiciones dadas.

7 $\sec \theta = \frac{5}{4}$; $0° < \theta < 90°$

8 $\csc \theta = -\frac{5}{3}$; $-90° < \theta < 0°$

9 $\text{sen } \theta = \frac{12}{13}$; $90° < \theta < 180°$

10 $\tan \theta = -\frac{5}{12}$; $270° < \theta < 360°$

11 $\tan \theta = 1$; $-180° < \theta < -90°$

12 $\sec \theta = -4$; $180° < \theta < 270°$

13 Si $\cos \beta = \frac{9}{41}$ y β está en el cuarto cuadrante, encuentre el valor exacto de $\tan(\beta/2)$.

14 Si $\sec \theta = -\frac{25}{7}$ ¿qué posibles valores puede tener $(\theta/2)$?

Ejer. 15–16: Use fórmulas del semiángulo para hallar los valores exactos.

15 **(a)** $\cos 67°30'$ **(b)** sen $15°$ **(c)** $\tan \dfrac{3\pi}{8}$

16 **(a)** $\cos 165°$ **(b)** sen $157°30'$ **(c)** $\tan \dfrac{\pi}{8}$

Ejer. 17–38: Verifique la identidad.

17 $\text{sen } 10\theta = 2 \text{ sen } 5\theta \cos 5\theta$

18 $\cos^2 3x - \text{sen}^2 3x = \cos 6x$

19 $4 \text{ sen } \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2} = 2 \text{ sen } x$

20 $\dfrac{\text{sen}^2 2\alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = 4 - 4 \text{ sen}^2 \alpha$

21 $\text{sen}^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{2(1 + \cos x)}$

22 $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{2(1 - \cos x)}$

23 $(\text{sen } t + \cos t)^2 = 1 + \text{sen } 2t$

24 $\csc 2u = \frac{1}{2} \csc u \sec u$

25 $\text{sen } 3u = \text{sen } u\,(3 - 4 \text{ sen}^2 u)$

26 $\text{sen } 4t = 4 \text{ sen } t \cos t\,(1 - 2 \text{ sen}^2 t)$

27 $\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$

28 $\cos 6t = 32 \cos^6 t - 48 \cos^4 t + 18 \cos^2 t - 1$

29 $\operatorname{sen}^4 t = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t$

30 $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$

31 $\sec 2\theta = \dfrac{\sec^2\theta}{2 - \sec^2\theta}$ **32** $\cot 2u = \dfrac{\cot^2 u - 1}{2\cot u}$

33 $2\operatorname{sen}^2 2t + \cos 4t = 1$

34 $\tan\theta + \cot\theta = 2\csc 2\theta$

35 $\tan 3u = \dfrac{\tan u\,(3 - \tan^2 u)}{1 - 3\tan^2 u}$

36 $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2v + \cos 2v}{1 + \operatorname{sen} 2v - \cos 2v} = \cot v$

37 $\tan\dfrac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta$

38 $\tan^2\dfrac{\theta}{2} = 1 - 2\cot\theta\csc\theta + 2\cot^2\theta$

Ejer. 39–42: Exprese en términos de la función coseno con exponente 1.

39 $\cos^4\dfrac{\theta}{2}$ **40** $\cos^4 2x$

41 $\operatorname{sen}^4 2x$ **42** $\operatorname{sen}^4\dfrac{\theta}{2}$

Ejer. 43–52: Encuentre las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

43 $\operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} t = 0$ **44** $\cos t - \operatorname{sen} 2t = 0$

45 $\cos u + \cos 2u = 0$ **46** $\cos 2\theta - \tan\theta = 1$

47 $\tan 2x = \tan x$ **48** $\tan 2t - 2\cos t = 0$

49 $\operatorname{sen}\frac{1}{2}u + \cos u = 1$ **50** $2 - \cos^2 x = 4\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x$

51 $\tan(x/2) = \operatorname{sen} x$ **52** $\tan(x/2) = \cot x$

53 Si $a > 0$, $b > 0$ y $0 < u < \pi/2$, demuestre que

$$a\operatorname{sen} u + b\cos u = \sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{sen}(u + v)$$

para $0 < v < \pi/2$, con

$$\operatorname{sen} v = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{y} \quad \cos v = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

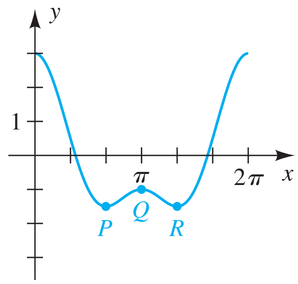
54 Use el ejercicio 53 para expresar $8\operatorname{sen} u + 15\cos u$ en la forma $c\operatorname{sen}(u + v)$.

55 Una gráfica de $y = \cos 2x + 2\cos x$ para $0 \le x \le 2\pi$ se muestra en la figura.

(a) Aproxime los puntos de intersección con el eje x a dos lugares decimales.

(b) Las coordenadas x de los puntos de inflexión P, Q y R en la gráfica son soluciones de $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$. Encuentre las coordenadas de estos puntos.

EJERCICIO 55

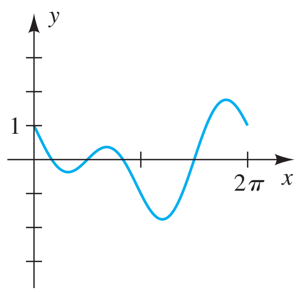


56 Una gráfica de $y = \cos x - \operatorname{sen} 2x$ para $0 \le x \le 2\pi$ se muestra en la figura.

(a) Encuentre los puntos de intersección con el eje x.

(b) Las coordenadas x de los ocho puntos de inflexión en la gráfica son soluciones de $\operatorname{sen} x + 2\cos 2x = 0$. Aproxime estas coordenadas x a dos lugares decimales.

EJERCICIO 56

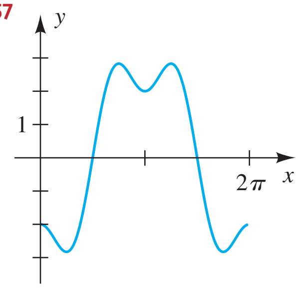


57 Una gráfica de $y = \cos 3x - 3\cos x$ para $0 \le x \le 2\pi$ se ve en la figura en la página siguiente.

(a) Encuentre los puntos de intersección con el eje x. (*Sugerencia:* use la fórmula para $\cos 3\theta$ dada en el ejemplo 2.)

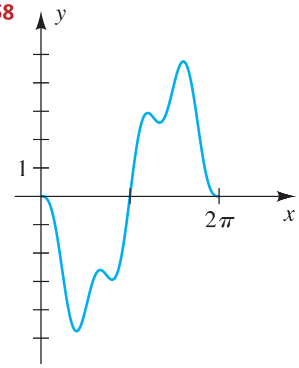
(b) Las coordenadas x de los siete puntos de inflexión en la gráfica son soluciones de $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$. Encuentre estas coordenadas x. (*Sugerencia:* use la fórmula para $\operatorname{sen} 3u$ del ejercicio 25.)

EJERCICIO 57



58 Una gráfica de $y = \operatorname{sen} 4x - 4 \operatorname{sen} x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ se ve en la figura. Encuentre los puntos de intersección con el eje x. (*Sugerencia:* use la fórmula para sen $4t$ del ejercicio 26.)

EJERCICIO 58

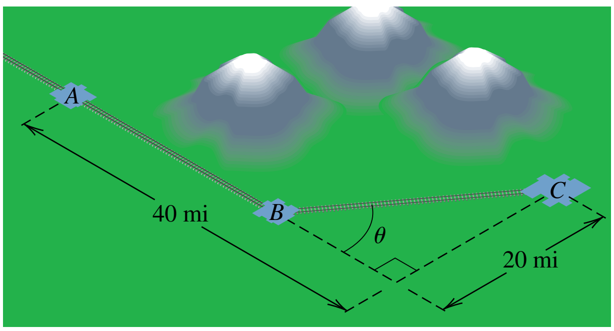


59 **Planeación de una ruta de ferrocarril** En la figura se muestra una ruta de ferrocarril propuesta que pasa por tres ciudades localizadas en los puntos A, B y C. En B, la vía da vuelta hacia C a un ángulo θ.

(a) Demuestre que la distancia total d de A a C está dada por $d = 20 \tan \frac{1}{2}\theta + 40$.

(b) Debido a las montañas entre A y C, el punto de inflexión B debe estar al menos a 20 millas de A. ¿Hay una ruta que evite las montañas y mida exactamente 50 millas?

EJERCICIO 59



60 **Alcance de un proyectil** Si un proyectil es disparado desde el nivel del suelo a una velocidad inicial de v pies/s y a un ángulo de θ grados con la horizontal, el alcance R del proyectil está dado por

$$R = \frac{v^2}{16} \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

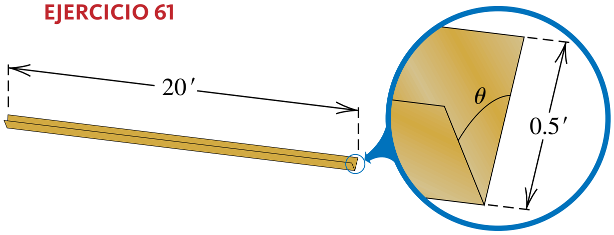
Si $v = 80$ ft/s, aproxime los ángulos que resulten en un alcance de 150 pies.

61 **Construcción de un canal para lluvia** En la figura se muestra un diseño de un canal para lluvia.

(a) Exprese el volumen V como función de θ. (*Sugerencia:* vea el ejemplo 8.)

(b) Aproxime el ángulo agudo θ que resulte en un volumen de 2 pies^3.

EJERCICIO 61

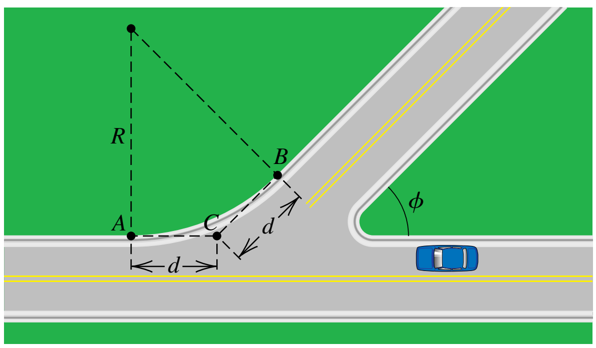


62 **Diseño de una guarnición** Un ingeniero de caminos está diseñando una guarnición para una calle en un crucero donde dos carreteras se encuentran a un ángulo ϕ, como se muestra en la figura. Se ha de construir una guarnición entre los puntos A y B usando un círculo que sea tangente a la carretera en estos dos puntos.

(a) Demuestre que la relación entre el radio R del círculo y la distancia d de la figura está dada por la ecuación $d = R \tan(\phi/2)$.

(b) Si $\phi = 45°$ y $d = 20$ pies, calcule R y la longitud de la guarnición.

EJERCICIO 62

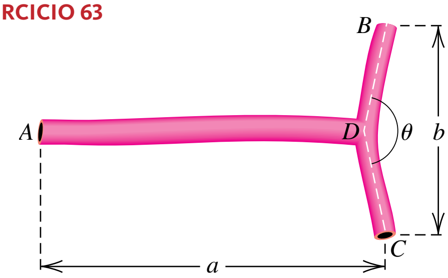


63 **Bifurcación arterial** Una forma común de derivación cardiovascular es una bifurcación, donde una arteria se divide en dos vasos sanguíneos más pequeños. El ángulo θ de bifurcación es el ángulo formado por las dos arterias más pequeñas. En la figura, la línea que va de A a D biseca el ángulo θ y es perpendicular a la línea que va de B a C.

(a) Demuestre que la longitud l de la arteria de A a B está dada por $l = a + \dfrac{b}{2} \tan \dfrac{\theta}{4}$.

(b) Calcule la longitud l de las tres mediciones $a = 10$ mm, $b = 6$ mm y $\theta = 156°$.

EJERCICIO 63

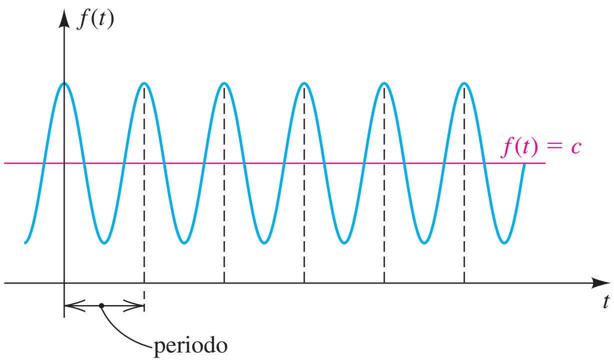


64 Producción de calor en un circuito de CA Por definición, el valor promedio de $f(t) = c + a \cos bt$ para uno o más ciclos completos es c (vea la figura).

(a) Use una fórmula de ángulo doble para hallar el valor promedio de $f(t) = \operatorname{sen}^2 \omega t$ para $0 \le t \le 2\pi/\omega$, con t en segundos.

(b) En un circuito eléctrico con una corriente alterna $I = I_0 \operatorname{sen} \omega t$, la tasa r (en calorías/s) a la cual se produce calor en un resistor de R ohms está dada por $r = RI^2$. Encuentre la tasa promedio a la cual se produce calor durante un ciclo completo.

EJERCICIO 64



Ejer. 65–66: Ejer. 65-66: Use la gráfica de f para hallar la expresión más sencilla $g(x)$ tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Verifique esta identidad.

65 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x}{\cos 2x + \cos x + 1}$

66 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x\,(1 + \cos 2x)}{\operatorname{sen} 2x}$

Ejer. 67–72: Resuelva gráficamente la ecuación trigonométrica en el intervalo indicado a dos lugares decimales.

67 $\tan\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x;$ $[-2\pi, 2\pi]$

68 $\sec(2x + 1) = \cos \frac{1}{2}x + 1;$ $[-\pi/2, \pi/2]$

69 $\csc\left(\frac{1}{4}x + 1\right) = 1.5 - \cos 2x;$ $[-\pi, \pi]$

70 $3 \operatorname{sen}(2x) + 0.5 = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x + 1\right);$ $[-\pi, \pi]$

71 $2 \cot \frac{1}{4}x = 1 - \sec \frac{1}{2}x;$ $[-2\pi, 2\pi]$

72 $\tan\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x;$ $[-\pi, \pi]$

7.5 Fórmulas de producto a suma y suma a producto

Las siguientes fórmulas se pueden usar para cambiar la forma de ciertas expresiones trigonométricas de productos a sumas. Nos referimos a éstas como **fórmulas de producto a suma** aun cuando dos de las fórmulas expresan un producto como una diferencia, porque cualquier diferencia $x - y$ entre dos números reales también es una suma $x + (-y)$. Estas fórmulas se usan con frecuencia en cálculo como ayuda en un proceso llamado *integración.*

Fórmulas de producto a suma

(1) $\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$

(2) $\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$

(3) $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$

(4) $\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

DEMOSTRACIONES Sumemos los lados izquierdo y derecho de las fórmulas para la suma y resta para la función seno, como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(u+v) &= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen}(u-v) &= \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v \\ \hline \operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v) &= 2 \operatorname{sen} u \cos v \end{aligned}$$

Dividiendo entre 2 ambos lados de la última ecuación tendremos la fórmula 1.

La fórmula 2 se obtiene *restando* el lado izquierdo y el derecho de las fórmulas de suma y resta para la función seno. Las fórmulas 3 y 4 se desarrollan de modo semejante, usando las fórmulas de suma y resta para la función coseno. ■

EJEMPLO 1 **Usar fórmulas de producto a suma**

Exprese como suma:

(a) $\operatorname{sen} 4\theta \cos 3\theta$ **(b)** $\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN

(a) Usamos la formula 1 de producto a suma con $u = 4\theta$ y $v = 3\theta$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 4\theta \cos 3\theta &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(4\theta + 3\theta) + \operatorname{sen}(4\theta - 3\theta)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 7\theta + \operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

También podemos obtener esta relación usando la fórmula 2 de producto a suma.

(b) Usamos la fórmula 4 de producto a suma con $u = 3x$ y $v = x$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x &= \tfrac{1}{2}[\cos(3x - x) - \cos(3x + x)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \end{aligned}$$ ■

Podemos usar las fórmulas de producto a suma para expresar una suma o diferencia como producto. Para obtener formas que se puedan aplicar con más facilidad, cambiaremos la notación como sigue. Si hacemos

$$u + v = a \qquad \text{y} \qquad u - v = b,$$

entonces $(u + v) + (u - v) = a + b$, que se simplifica a

$$u = \frac{a + b}{2}.$$

Del mismo modo, como $(u + v) - (u - v) = a - b$, obtenemos

$$v = \frac{a - b}{2}.$$

Ahora sustituimos por $u + v$ y $u - v$ en los lados derechos de las fórmulas de producto a suma y por u y v en los lados izquierdos. Si entonces multiplicamos por 2, obtenemos las siguientes fórmulas de suma a producto.

Fórmulas de suma a producto

(1) $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$

(2) $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2}$

(3) $\cos a + \cos b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$

(4) $\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2} \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2}$

EJEMPLO 2 **Usar una fórmula de suma a producto**

Exprese $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x$ como producto.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula 2 de suma a producto con $a = 5x$ y $b = 3x$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x &= 2 \cos \frac{5x+3x}{2} \operatorname{sen} \frac{5x-3x}{2} \\ &= 2 \cos 4x \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 **Usar fórmulas de suma a producto para verificar una identidad**

Verifique la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 5t}{\cos 3t - \cos 5t} = \cot t$.

SOLUCIÓN Primero usamos una fórmula de suma a producto para el numerador y una para el denominador:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 5t}{\cos 3t - \cos 5t} &= \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{3t+5t}{2} \cos \dfrac{3t-5t}{2}}{-2 \operatorname{sen} \dfrac{3t+5t}{2} \operatorname{sen} \dfrac{3t-5t}{2}} && \text{fórmulas 1 y 4 de suma a producto} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} 4t \cos(-t)}{-2 \operatorname{sen} 4t \operatorname{sen}(-t)} && \text{simplifique} \\ &= \frac{\cos(-t)}{-\operatorname{sen}(-t)} && \text{cancele } 2 \operatorname{sen} 4t \\ &= \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} && \text{fórmulas para negativos} \\ &= \cot t && \text{identidad cotangente}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 **Usar una fórmula de suma a producto para resolver una ecuación**

Encuentre las soluciones de $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x = 0$.

SOLUCIÓN Cambiar una suma a producto nos permite usar el teorema del factor cero para resolver la ecuación.

(continúa)

$$\text{sen } 5x + \text{sen } x = 0 \quad \text{enunciado}$$

$$2 \text{ sen } \frac{5x + x}{2} \cos \frac{5x - x}{2} = 0 \quad \text{fórmula 1 de suma a producto}$$

$$\text{sen } 3x \cos 2x = 0 \quad \text{simplifique y divida entre 2}$$

$$\text{sen } 3x = 0, \quad \cos 2x = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$

Las soluciones de las últimas dos ecuaciones son

$$3x = \pi n \quad \text{y} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

Dividiendo entre 3 y 2, respectivamente, obtenemos

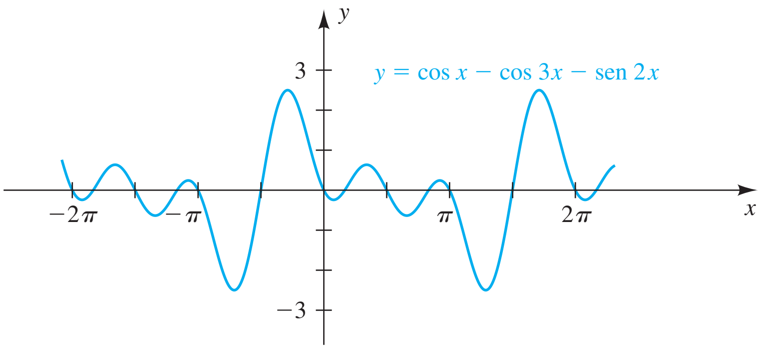
$$\frac{\pi}{3}n \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \quad \text{para todo entero } n.$$

■

EJEMPLO 5 **Hallar los puntos de intersección con el eje *x* de una gráfica**

Una gráfica de la ecuación $y = \cos x - \cos 3x - \text{sen } 2x$ se muestra en la figura 1. Encuentre los 13 puntos de intersección con el eje x que están en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

FIGURA 1



SOLUCIÓN Para hallar los puntos de intersección con el eje x, procedemos como sigue:

$$\cos x - \cos 3x - \text{sen } 2x = 0 \quad \text{sea } y = 0$$

$$(\cos x - \cos 3x) - \text{sen } 2x = 0 \quad \text{agrupe los primeros dos términos}$$

$$-2 \text{ sen } \frac{x + 3x}{2} \text{ sen } \frac{x - 3x}{2} - \text{sen } 2x = 0 \quad \text{fórmula 4 de suma a producto}$$

$$-2 \text{ sen } 2x \text{ sen } (-x) - \text{sen } 2x = 0 \quad \text{simplifique}$$

$$2 \text{ sen } 2x \text{ sen } x - \text{sen } 2x = 0 \quad \text{fórmula para negativos}$$

$$\text{sen } 2x\,(2 \text{ sen } x - 1) = 0 \quad \text{factorice sen } 2x$$

$$\text{sen } 2x = 0, \quad 2 \text{ sen } x - 1 = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$

$$\text{sen } 2x = 0, \quad \text{sen } x = \tfrac{1}{2} \quad \text{despeje sen } x$$

La ecuación $\text{sen } 2x = 0$ tiene soluciones $2x = \pi n$, o bien, dividiendo entre 2,

$$x = \frac{\pi}{2}n \quad \text{para todo entero } n.$$

Si hacemos $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 4, obtenemos nueve puntos de intersección con el eje x en $[-2\pi, 2\pi]$:

$$0, \quad \pm\frac{\pi}{2}, \quad \pm\pi, \quad \pm\frac{3\pi}{2}, \quad \pm 2\pi$$

Las soluciones de la ecuación sen $x = \frac{1}{2}$ son

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

Las cuatro soluciones en $[-2\pi, 2\pi]$ se obtienen al hacer $n = 0$ y $n = -1$:

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{11\pi}{6}, \quad -\frac{7\pi}{6}$$ ■

7.5 Ejercicios

Ejer. 1–8: Exprese como una suma o diferencia.

1 $\operatorname{sen} 7t \operatorname{sen} t$

2 $\operatorname{sen} (-4x) \cos 8x$

3 $\cos 6u \cos (-4u)$

4 $\cos 2t \operatorname{sen} 6t$

5 $2 \operatorname{sen} 5\theta \cos 3\theta$

6 $2 \operatorname{sen} 7\theta \operatorname{sen} 5\theta$

7 $3 \cos x \operatorname{sen} 2x$

8 $5 \cos 4u \cos 5u$

Ejer. 9–16: Exprese como producto.

9 $\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 4\theta$

10 $\operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen} 8\theta$

11 $\cos 5x - \cos 3x$

12 $\cos 5t + \cos 6t$

13 $\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} 9t$

14 $\cos 3\theta - \cos 5\theta$

15 $\cos x + \cos 2x$

16 $\operatorname{sen} 8t + \operatorname{sen} 2t$

Ejer. 17–24: Verifique la identidad.

17 $\dfrac{\operatorname{sen} 4t + \operatorname{sen} 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \cot t$

18 $\dfrac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta}{\cos \theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$

19 $\dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\cos u + \cos v} = \tan \dfrac{1}{2}(u + v)$

20 $\dfrac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v}{\cos u - \cos v} = -\cot \dfrac{1}{2}(u + v)$

21 $\dfrac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v} = \dfrac{\tan \frac{1}{2}(u - v)}{\tan \frac{1}{2}(u + v)}$

22 $\dfrac{\cos u - \cos v}{\cos u + \cos v} = -\tan \dfrac{1}{2}(u + v) \tan \dfrac{1}{2}(u - v)$

23 $4 \cos x \cos 2x \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x$

24 $\dfrac{\cos t + \cos 4t + \cos 7t}{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 4t + \operatorname{sen} 7t} = \cot 4t$

Ejer. 25–26: Exprese como suma.

25 $(\operatorname{sen} ax)(\cos bx)$

26 $(\cos au)(\cos bu)$

Ejer. 27–34: Use fórmulas de suma a producto para hallar las soluciones de la ecuación.

27 $\operatorname{sen} 5t + \operatorname{sen} 3t = 0$

28 $\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3t = \operatorname{sen} 2t$

29 $\cos x = \cos 3x$

30 $\cos 4x - \cos 3x = 0$

31 $\cos 3x + \cos 5x = \cos x$

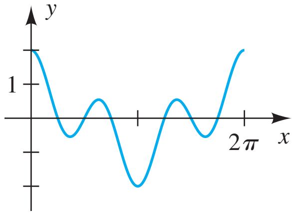
32 $\cos 3x = -\cos 6x$

33 $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 5x = 0$

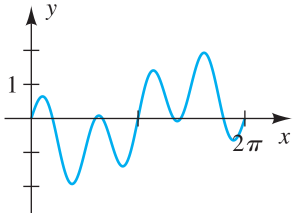
34 $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x = 2 \cos 3x$

Ejer. 35–36: En la figura se muestra una gráfica de la función f para $0 \leq x \leq 2\pi$. Use una fórmula de suma a producto para ayudar a hallar los puntos de intersección con el eje x.

35 $f(x) = \cos x + \cos 3x$



36 $f(x) = \text{sen } 4x - \text{sen } x$



37 Consulte el ejercicio 57 de la sección 7.4. La gráfica de la ecuación $y = \cos 3x - 3 \cos x$ tiene 7 puntos de inflexión para $0 \leq x \leq 2\pi$. Las coordenadas x de estos puntos son soluciones de la ecuación $\text{sen } 3x - \text{sen } x = 0$. Use una fórmula de suma a producto para hallar estas coordenadas x.

38 Consulte el ejercicio 58 de la sección 7.4. Las coordenadas x de los puntos de inflexión en la gráfica de $y = \text{sen } 4x - 4 \text{ sen } x$ son soluciones para $\cos 4x - \cos x = 0$. Use una fórmula de suma a producto para encontrar estas coordenadas x para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

39 **Vibración de una cuerda de violín** El análisis matemático de una cuerda de violín de longitud l en vibración contiene funciones como

$$f(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \cos\left(\frac{k\pi n}{l}t\right),$$

donde n es un entero, k es una constante y t es el tiempo. Exprese f como una suma de dos funciones senoidales.

40 **Presión en el tímpano** Si dos diapasones se golpean simultáneamente con la misma fuerza y luego se sostienen a la misma distancia del tímpano, la presión en el exterior el tímpano en el tiempo t está dada por

$$p(t) = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t,$$

donde a, ω_1 y ω_2 son constantes. Si ω_1 y ω_2 son casi iguales, se produce un tono que alterna entre sonoridad y silencio virtual. Este fenómeno se conoce como pulsación.

(a) Use una fórmula de suma a producto para expresar $p(t)$ como producto.

(b) Demuestre que $p(t)$ puede ser considerada como una onda coseno con periodo aproximado de $2\pi/\omega_1$ y amplitud variable $f(t) = 2a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$. Encuentre la máxima amplitud.

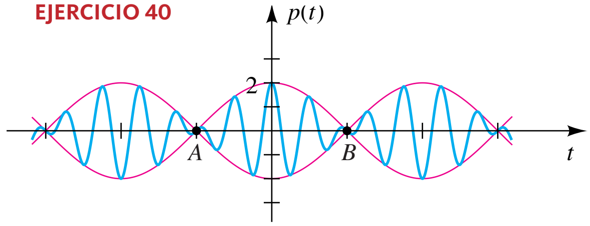
(c) En la figura se ve una gráfica de la ecuación

$$p(t) = \cos 4.5t + \cos 3.5t.$$

Casi el silencio se presenta en los puntos A y B, donde la amplitud variable $f(t)$ en el inciso (b) es cero. Encuentre las coordenadas de estos puntos y determine con qué frecuencia se presenta el casi silencio.

(d) Use la gráfica para demostrar que la función p en el inciso (c) tiene periodo 4π. Concluya que la máxima amplitud de 2 ocurre cada 4π unidades de tiempo.

EJERCICIO 40



Ejer. 41–42: Grafique f en el intervalo $[-\pi, \pi]$. (a) Estime los puntos de intersección con el eje x. (b) Use fórmulas de suma a producto para hallar los valores exactos de los puntos de intersección con el eje x.

41 $f(x) = \text{sen } 4x + \text{sen } 2x$ **42** $f(x) = \cos 3x - \cos 2x$

Ejer. 43–44: Use la gráfica de f para hallar la expresión más sencilla $g(x)$ tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Verifique esta identidad.

43 $f(x) = \dfrac{\text{sen } x + \text{sen } 2x + \text{sen } 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$

44 $f(x) = \dfrac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\text{sen } x - \text{sen } 2x + \text{sen } 3x}$

7.6 Funciones trigonométricas inversas

Recuerde de la sección 5.1 que para definir la función inversa f^{-1} de una función f, es esencial que f sea biunívoca; esto es, si $a \neq b$ en el dominio de f, entonces $f(a) \neq f(b)$. La función inversa f^{-1} invierte la correspondencia dada por f; esto es,

$$u = f(v) \qquad \text{si y sólo si} \qquad v = f^{-1}(u).$$

Las siguientes relaciones generales que involucran f y f^{-1} se estudiaron en la sección 5.1

Relaciones entre f^{-1} y f

(1) $y = f^{-1}(x)$ si y sólo si $x = f(y)$, donde x está en el dominio de f^{-1} y y está en el dominio de f

(2) dominio de f^{-1} = rango de f

(3) rango de f^{-1} = dominio de f

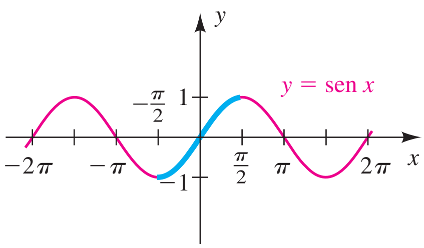
(4) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

(5) $f^{-1}(f(y)) = y$ para toda y en el dominio de f

(6) El punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}.

(7) Las gráficas de f^{-1} y f son reflexiones entre sí a través de la recta $y = x$.

FIGURA 1



Usaremos la relación 1 para definir cada una de las funciones trigonométricas inversas.

La función seno no es biunívoca, porque números diferentes, por ejemplo $\pi/6$, $5\pi/6$ y $-7\pi/6$, dan el mismo valor de función $\left(\frac{1}{2}\right)$. Si restringimos el dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$, entonces, como está ilustrado por la parte azul de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en la figura 1, obtenemos una función biunívoca (creciente) que toma todo valor de la función seno una vez y sólo una vez. Usamos esta nueva función con dominio $[-\pi/2, \pi/2]$ y rango $[-1, 1]$ para definir la *función seno inversa.*

Definición de la función seno inversa

La **función seno inversa,** denotada por sen^{-1} está definida por

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \operatorname{sen} y$$

para $-1 \le x \le 1$ y $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

Nota sobre notación: si bien $(\operatorname{sen} x)^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$, ***ninguna*** *de éstas es igual a* $\operatorname{sen}^{-1} x$.

El dominio de la función seno inversa es $[-1, 1]$, y el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

La notación $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ a veces se lee "y es el seno inverso de x". La ecuación $x = \operatorname{sen} y$ de la definición nos permite ver a y como ángulo, de modo que $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ también se puede leer "y es el ángulo cuyo seno es x" (con $-\pi/2 \le y \le \pi/2$).

La función seno inversa también se denomina **función arcseno** y arcsen x se puede usar en lugar de $\operatorname{sen}^{-1} x$. Si $t = \operatorname{arcsen} x$, entonces $\operatorname{sen} t = x$, y t se puede interpretar como una longitud de arco en el círculo unitario U con centro en el origen. Usaremos ambas notaciones, sen^{-1} y arcsen, en todo nuestro trabajo.

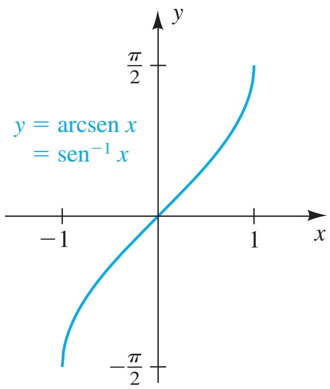
En la tabla siguiente aparecen diversos valores de la función seno inversa.

¡Atención!

Es *esencial* seleccionar el valor de y en el rango $[-\pi/2, \pi/2]$ de sen^{-1}. Así, aun cuando $\operatorname{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2}$, el número $y = 5\pi/6$ no es el valor de la función inversa $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$.

Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{6}$
$y = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{6}$
$y = \operatorname{sen}^{-1}(1)$	$\operatorname{sen} y = 1$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arcsen}(0)$	$\operatorname{sen} y = 0$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = 0$
$y = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\operatorname{sen} y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{3}$

FIGURA 2



Hemos justificado el método de resolver una ecuación de la forma sen $\theta = k$ como se estudió en el capítulo 6. Vemos que la tecla SIN⁻¹ de la calculadora empleada para obtener $\theta = \operatorname{sen}^{-1} k$ nos da el valor de la función seno inversa.

La relación 7 para las gráficas de f y f^{-1} nos dice que podemos trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ al reflejar la parte azul de la figura 1 a través de la recta $y = x$. También podemos usar la ecuación $x = \operatorname{sen} y$ con la restricción $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ para hallar puntos en la gráfica. Esto nos da la figura 2.

La relación 4, $f(f^{-1}(x)) = x$ y la relación 5, $f^{-1}(f(y)) = y$, que se cumple para cualquier función inversa f^{-1}, nos dan las siguientes propiedades.

Propiedades de sen⁻¹

(1) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \quad \text{si} \quad -1 \le x \le 1$

(2) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} y) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = y \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

EJEMPLO 1 **Usar las propiedades de sen⁻¹**

Encuentre el valor exacto:

(a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

SOLUCIÓN

(a) La forma *difícil* de hallar el valor de esta expresión es primero hallar el ángulo $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$, a saber $\pi/6$, y luego evaluar sen $(\pi/6)$, obteniendo $\frac{1}{2}$. La forma *fácil* es usar la propiedad 1 de sen^{-1}:

$$\text{como} \qquad -1 \le \tfrac{1}{2} \le 1, \qquad \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

(b) Como $-\pi/2 \le \pi/4 \le \pi/2$, podemos usar la propiedad 2 de sen^{-1} para obtener

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

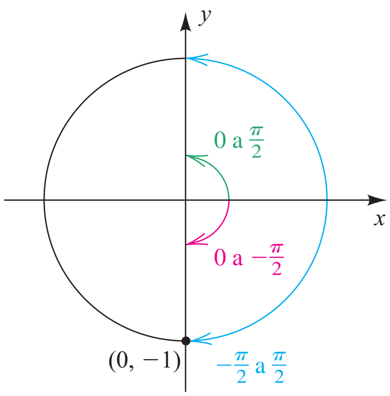
(c) ¡Tenga cuidado! Como $2\pi/3$ *no está* entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, no podemos usar la propiedad 2 de sen^{-1}. En cambio, primero evaluamos la expresión interior, sen $(2\pi/3)$, y luego usamos la definición de sen^{-1}, como sigue:

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$ ■

EJEMPLO 2 **Hallar un valor de sen^{-1}**

Encuentre el valor exacto de y si $y = \text{sen}^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$.

FIGURA 3



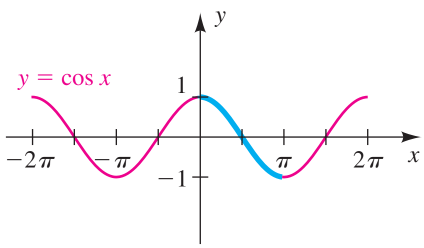
SOLUCIÓN Primero evaluamos la expresión interior, $\tan(3\pi/4)$, y luego encontramos el seno inverso de ese número:

$$y = \text{sen}^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \text{sen}^{-1}(-1)$$

En otras palabras, tenemos "y es el ángulo cuyo seno es -1". Puede ser útil recordar los valores de arcseno al asociarlos con los ángulos correspondientes a la parte azul del círculo unitario que se ve en la figura 3. De la figura observamos que $-\pi/2$ es el ángulo cuyo seno es -1. Se deduce que $y = -\pi/2$ y por tanto

$$y = \text{sen}^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$ ■

FIGURA 4



Las otras funciones trigonométricas también se pueden usar para introducir funciones trigonométricas inversas. El procedimiento es primero determinar un subconjunto cómodo del dominio para obtener una función biunívoca. Si el dominio de la función coseno está restringido al intervalo $[0, \pi]$, como está ilustrado por la parte azul de la gráfica de $y = \cos x$ en la figura 4, obtenemos una función biunívoca (decreciente) que toma todo valor de la función coseno una vez y sólo una vez. Entonces, usamos esta *nueva* función con dominio $[0, \pi]$ y rango $[-1, 1]$ para definir la *función coseno inversa*.

Definición de la función coseno inversa

La **función coseno inversa,** denotada por $\cos^{-1}$, está definida por

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cos y$$

para $-1 \le x \le 1$ y $0 \le y \le \pi$.

El dominio de la función coseno inversa es $[-1, 1]$ y el rango es $[0, \pi]$. Note que el rango de $\cos^{-1}$ *no es* el mismo que el rango de sen^{-1} pero sus dominios son iguales.

La notación $y = \cos^{-1} x$ se puede leer "y es el coseno inverso de x" o "y es el ángulo cuyo coseno es x" (con $0 \le y \le \pi$).

La función coseno inversa también se llama **función arccoseno** y la notación arccos x se usa indistintamente con $\cos^{-1} x$.

Diversos valores de la función coseno inversa aparecen en la tabla siguiente.

¡Atención!

Es *esencial* escoger el valor y en el rango $[0, \pi]$ de $\cos^{-1}$.

Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cos y = \frac{1}{2}$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{\pi}{3}$
$y = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\cos y = -\frac{1}{2}$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{2\pi}{3}$
$y = \cos^{-1}(1)$	$\cos y = 1$ y $0 \le y \le \pi$	$y = 0$
$y = \arccos(0)$	$\cos y = 0$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{5\pi}{6}$

Podemos trazar la gráfica de $y = \cos^{-1} x$ al reflejar la parte azul de la figura 4 a través de la recta $y = x$, lo cual nos da el trazo de la figura 5. También podríamos usar la ecuación $x = \cos y$, con $0 \le y \le \pi$, para hallar puntos en la gráfica. Como está indicado por la gráfica, *los valores de la función coseno inverso nunca son negativos.*

Al igual que en el ejemplo 2 y la figura 3 para arcseno, puede ser útil asociar los valores arccoseno con los ángulos correspondientes al arco azul de la figura 6.

FIGURA 5

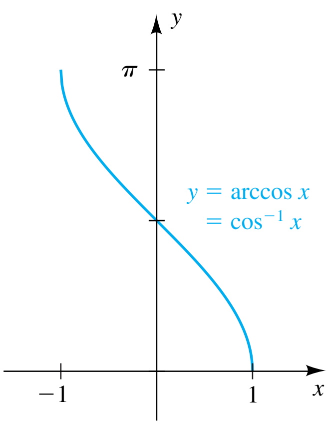
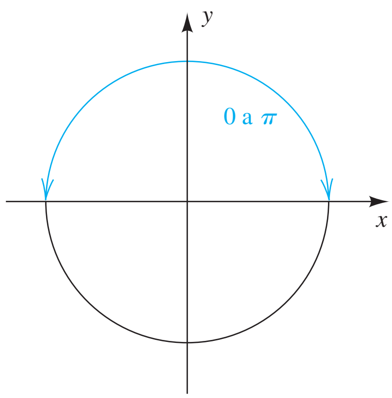


FIGURA 6



Usando las relaciones 4 y 5 para las funciones inversas generales f y f^{-1}, obtenemos las siguientes propiedades.

Propiedades de $\cos^{-1}$

(1) $\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x$ si $-1 \le x \le 1$

(2) $\cos^{-1}(\cos y) = \arccos(\cos y) = y$ si $0 \le y \le \pi$

EJEMPLO 3 **Usar propiedades de $\cos^{-1}$**

Encuentre el valor exacto:

(a) $\cos[\cos^{-1}(-0.5)]$ **(b)** $\cos^{-1}(\cos 3.14)$ **(c)** $\cos^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

SOLUCIÓN Para los incisos (a) y (b) podemos usar las propiedades 1 y 2 de $\cos^{-1}$, respectivamente.

(a) Como $-1 \leq -0.5 \leq 1$, $\cos[\cos^{-1}(-0.5)] = -0.5$.

(b) Como $0 \leq 3.14 \leq \pi$, $\cos^{-1}(\cos 3.14) = 3.14$.

(c) Primero hallamos $\operatorname{sen}(-\pi/6)$ y luego usamos la definición de $\cos^{-1}$, como sigue:

$$\cos^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$ ■

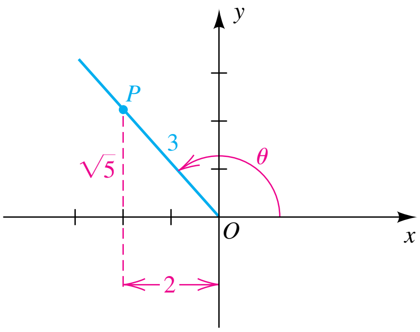
EJEMPLO 4 **Hallar el valor de una función trigonométrica**

Encuentre el valor exacto de $\operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$.

SOLUCIÓN Si hacemos $\theta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, entonces, usando la definición de la función coseno inversa, tenemos

$$\cos\theta = -\tfrac{2}{3} \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

FIGURA 7



En consecuencia, θ está en el segundo cuadrante, como se ilustra en la figura 7. Si escogemos el punto P en el lado terminal con coordenada x de -2, la hipotenusa del triángulo de la figura debe tener longitud 3, porque $\cos\theta = -\frac{2}{3}$. Entonces, por el teorema de Pitágoras, la coordenada y de P es

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5},$$

y por lo tanto

$$\operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$ ■

Si restringimos el dominio de la función tangente de la rama definida en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, obtenemos una función biunívoca (creciente) (vea la figura 3 en la sección 7.2). Usamos esta nueva función para definir la *función tangente inversa.*

Definición de la función tangente inversa

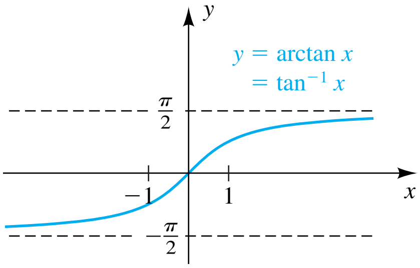
La **función tangente inversa,** o **función arctangente**, denotada por $\tan^{-1}$ o arctan, está definida por

$$y = \tan^{-1}x = \arctan x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan y$$

para cualquier número real x y para $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

El dominio de la función arctan es $\mathbb{R}$, y el rango es el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$.

FIGURA 8



Podemos obtener la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ en la figura 8 al trazar la gráfica de $x = \tan y$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$. Nótese que las dos asíntotas *verticales*, $x = \pm\pi/2$, de la función tangente corresponden a las dos asíntotas *horizontales*, $y = \pm\pi/2$, de la función arctan.

Al igual que con sen−1 y $\cos^{-1}$, tenemos las siguientes propiedades para $\tan^{-1}$.

Propiedades de $\tan^{-1}$

(1) $\tan(\tan^{-1} x) = \tan(\arctan x) = x$ para toda x

(2) $\tan^{-1}(\tan y) = \arctan(\tan y) = y$ si $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

EJEMPLO 5 **Usar propiedades de $\tan^{-1}$**

Encuentre el valor exacto:

(a) $\tan(\tan^{-1} 1000)$ **(b)** $\tan^{-1}\left(\tan \dfrac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $\arctan(\tan \pi)$

SOLUCIÓN

(a) Por la propiedad 1 de $\tan^{-1}$,

$$\tan(\tan^{-1} 1000) = 1000.$$

(b) Como $-\pi/2 < \pi/4 < \pi/2$, tenemos, por la propiedad 2 de $\tan^{-1}$,

$$\tan^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Como $\pi > \pi/2$, no podemos usar la segunda propiedad de $\tan^{-1}$. Entonces, primero hallamos $\tan \pi$ y luego evaluamos, como sigue:

$$\arctan(\tan \pi) = \arctan 0 = 0$$ ■

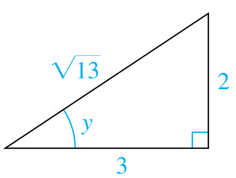
EJEMPLO 6 **Hallar el valor de una función trigonométrica**

Encuentre el valor exacto de $\sec\left(\arctan \frac{2}{3}\right)$.

SOLUCIÓN Si hacemos $y = \arctan \frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Deseamos hallar $\sec y$. Como $-\pi/2 < \arctan x < \pi/2$ para toda x y $\tan y > 0$, se deduce que $0 < y < \pi/2$. Así, podemos considerar a y como la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo tal que $\tan y = \frac{2}{3}$, como se ilustra en la figura 9. Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa es $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Con respecto al triángulo, obtenemos

$$\sec\left(\arctan \frac{2}{3}\right) = \sec y = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$ ■

FIGURA 9



EJEMPLO 7 **Hallar el valor de una función trigonométrica**

Encuentre el valor exacto de sen $\left(\arctan \frac{1}{2} - \arccos \frac{4}{5}\right)$.

SOLUCIÓN Si hacemos

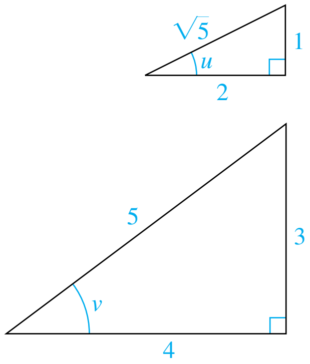
$$u = \arctan \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad v = \arccos \tfrac{4}{5},$$

entonces

$$\tan u = \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos v = \tfrac{4}{5}.$$

Deseamos hallar sen $(u - v)$. Como u y v están en el intervalo $(0, \pi/2)$, se pueden considerar como las medidas en radianes de ángulos agudos positivos y podemos consultar los triángulos rectángulos de la figura 10. Esto nos da

FIGURA 10



$$\operatorname{sen} u = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos u = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{sen} v = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \cos v = \frac{4}{5}.$$

Por la fórmula de resta para el seno,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(u - v) &= \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{3}{5} \\ &= \frac{-2}{5\sqrt{5}}, \quad \text{o} \quad \frac{-2\sqrt{5}}{25}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 8 **Cambiar una expresión que contenga $\operatorname{sen}^{-1} x$ por una expresión algebraica**

Si $-1 \le x \le 1$, reescriba cos $(\operatorname{sen}^{-1} x)$ como una expresión algebraica en x.

SOLUCIÓN Sea

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{o, lo que es equivalente,} \qquad \operatorname{sen} y = x.$$

Deseamos expresar cos y en términos de x. Como $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, se deduce que $\cos y \ge 0$ y por tanto (de $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$)

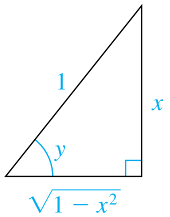
$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

En consecuencia,

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

La última identidad también es evidente geométricamente si $0 < x < 1$. En este caso $0 < y < \pi/2$ y podemos considerar a y como la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo tal que sen $y = x$, como se ilustra en la figura 11. (El lado de longitud $\sqrt{1 - x^2}$ se encuentra por el teorema de Pitágoras.) Al consultar el triángulo, tenemos

FIGURA 11



Observe que sen $y = \dfrac{x}{1} = x$.

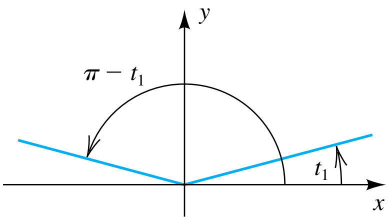
$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \cos y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}.$$

■

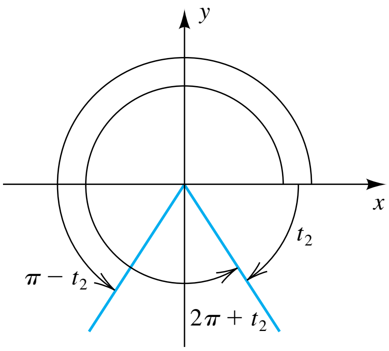
La mayor parte de las ecuaciones trigonométricas consideradas en la sección 7.2 tenían soluciones que eran múltiplos racionales de π, por ejemplo $\pi/3$, $3\pi/4$, π, y así sucesivamente. Si las soluciones de ecuaciones trigonométricos no son de ese tipo, podemos a veces usar funciones inversas para expresarlas en forma exacta, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 12

(a)



(b)



EJEMPLO 9 Usar funciones trigonométricas inversas para resolver una ecuación

Encuentre las soluciones de $5 \operatorname{sen}^2 t + 3 \operatorname{sen} t - 1 = 0$ en $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN La ecuación puede ser considerada como cuadrática con sen t. Aplicando la fórmula cuadrática tendremos

$$\operatorname{sen} t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}.$$

Usando la definición de la función seno inverso, obtenemos las siguientes soluciones:

$$t_1 = \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{10}\left(-3 + \sqrt{29}\right) \approx 0.2408$$
$$t_2 = \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{10}\left(-3 - \sqrt{29}\right) \approx -0.9946$$

Como el rango de arcsen es $[-\pi/2, \pi/2]$, sabemos que t_1 está en $[0, \pi/2]$ y t_2 está en $[-\pi/2, 0]$. Usando t_1 como ángulo de referencia, también tenemos $\pi - t_1$ como solución en el segundo cuadrante, como se ve en la figura 12(a). Podemos sumar 2π a t_2 para obtener una solución en el cuarto cuadrante, como se ve en la figura 12(b). La solución en el tercer cuadrante es $\pi - t_2$, no $\pi + t_2$, porque t_2 es negativa.

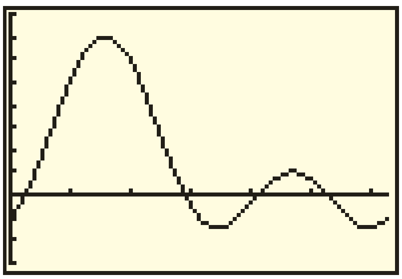
Por lo tanto, con t_1 y t_2 como se definieron previamente, las cuatro soluciones exactas son

$$t_1, \quad \pi - t_1, \quad \pi - t_2, \quad \text{y} \quad 2\pi + t_2,$$

y las cuatro soluciones aproximadas son

$$0.2408, \quad 2.9008, \quad 4.1361 \quad \text{y} \quad 5.2886.$$

FIGURA 13
$[0, 2\pi]$ por $[-3, 8]$



Si sólo se piden soluciones aproximadas, podemos usar una calculadora de gráficas para hallar los puntos de intersección con el eje x de $Y_1 = 5 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 1$. Graficando Y_1 como se ve en la figura 13 y usando una función de raíz, obtenemos las mismas cuatro soluciones aproximadas que se dan líneas antes. ■

El siguiente ejemplo ilustra una de muchas identidades que son verdaderas para funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 10 Verificar una identidad que contenga funciones trigonométricas inversas

Verifique la identidad $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ para $-1 \le x \le 1$.

SOLUCIÓN Sean

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{y} \qquad \beta = \cos^{-1} x.$$

Deseamos demostrar que $\alpha + \beta = \pi/2$. De las definiciones de sen^{-1} y $\cos^{-1}$,

$$\operatorname{sen} \alpha = x \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

y

$$\cos \beta = x \quad \text{para} \quad 0 \le \beta \le \pi.$$

Sumando las dos desigualdades de la derecha, vemos que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Note también que

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$$

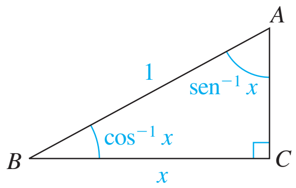
y

$$\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Usando la fórmula de suma para seno, obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \\ &= x \cdot x + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x^2} \\ &= x^2 + (1 - x^2) = 1. \end{aligned}$$

FIGURA 14



Como $\alpha + \beta$ está en el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$, la ecuación $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 1$ tiene sólo una solución, $\alpha + \beta = \pi/2$, que es lo que deseábamos demostrar.

Podemos interpretar geométricamente la identidad si $0 < x < 1$. Si construimos un triángulo rectángulo con un lado de longitud x e hipotenusa de longitud 1, como se ilustra en la figura 14, entonces el ángulo β en B es un ángulo cuyo coseno es x; esto es, $\beta = \cos^{-1} x$. Del mismo modo, el ángulo α en A es un ángulo cuyo sen es x; esto es, $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x$. Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, $\alpha + \beta = \pi/2$, o bien, lo que es equivalente,

$$\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$ ■

Cada una de las restantes funciones trigonométricas inversas se define en la misma forma que las tres primeras, al escoger un dominio D en el que la función trigonométrica correspondiente sea biunívoca y luego usar la técnica usual (donde y está en D):

$$\begin{aligned} y = \cot^{-1} x \quad &\text{si y sólo si} \quad x = \cot y \\ y = \sec^{-1} x \quad &\text{si y sólo si} \quad x = \sec y \\ y = \csc^{-1} x \quad &\text{si y sólo si} \quad x = \csc y \end{aligned}$$

La función $\sec^{-1}$ se usa en cálculo, pero $\cot^{-1}$ y $\csc^{-1}$ raras veces se usan. Debido a su limitado uso en aplicaciones, no consideraremos ejemplos o ejercicios respecto a estas funciones, sólo resumiremos dominios, rangos y gráficas comunes en la tabla siguiente. Un resumen similar para las seis funciones trigonométricas y sus inversas aparece en el Apéndice III.

A veces es difícil verificar una identidad que contenga funciones trigonométricas inversas, como vimos en el ejemplo 10. Una calculadora de gráficas puede ser muy útil para determinar si una ecuación que contiene funciones trigonométricas inversas es una identidad y, si no lo es, para hallar cualesquiera soluciones de la ecuación. El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

EJEMPLO 11 **Investigar una ecuación**

Sabemos que $\tan x = (\operatorname{sen} x)/\cos x$ es una identidad. Determine si la ecuación

$$\arctan x = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\arccos x}$$

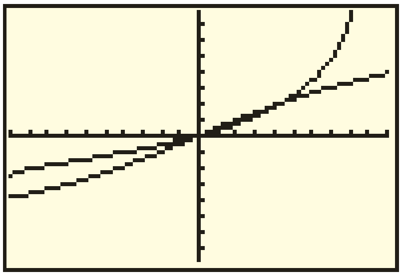
es una identidad; si no lo es, calcule los valores de x para lo cual la ecuación es verdadera, es decir, resuelva la ecuación.

SOLUCIÓN Empezamos por hacer las asignaciones

$$Y_1 = \tan^{-1} x \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \operatorname{sen}^{-1} x/\cos^{-1} x.$$

Como el dominio de sen^{-1} y $\cos^{-1}$ es $[-1, 1]$ y el rango de $\tan^{-1}$ es $(-\pi/2, \pi/2)$, escogemos la pantalla que se muestra en la figura 15.

FIGURA 15
$[-1, 1, 0.1]$ por $[-\pi/2, \pi/2, 0.2]$

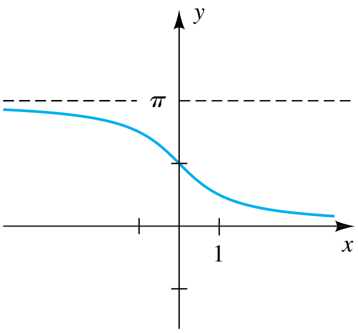
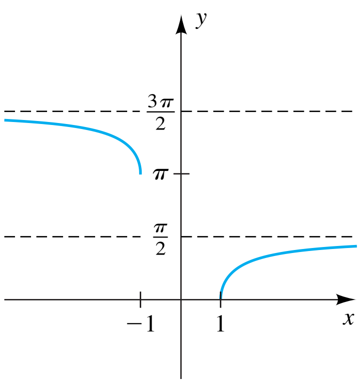
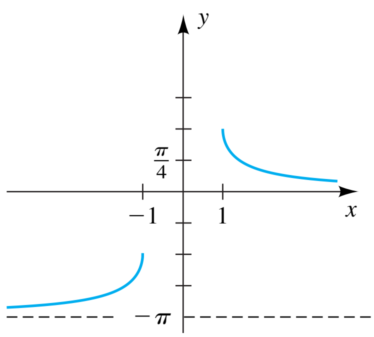


Como las gráficas que representan a Y_1 y Y_2 no son iguales, sabemos que *la ecuación dada no es una identidad*, pero debido a que las gráficas se intersecan dos veces sabemos que la ecuación tiene dos soluciones. Parece que $x = 0$ es una solución y una rápida verificación en la ecuación dada comprueba que esto es cierto. Para calcular el punto de intersección en el primer cuadrante, usamos una función *intersect* para determinar que el punto tiene las coordenadas aproximadas (0.450, 0.423). Por tanto,

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x \approx 0.450$$

son los valores de x para los cuales la ecuación dada es verdadera. ■

Resumen de funciones de $\cot^{-1}$, $\sec^{-1}$ y $\csc^{-1}$

Función	$y = \cot^{-1} x$	$y = \sec^{-1} x$	$y = \csc^{-1} x$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$\lvert x \rvert \geq 1$
Rango	$(0, \pi)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$
Gráfica			

7.6 Ejercicios

Ejer. 1–22: Encuentre el valor exacto de la expresión siempre que esté definido.

1 (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

2 (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(c) $\tan^{-1}(-1)$

3 (a) $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$

4 (a) $\operatorname{arcsen} 0$ (b) $\arccos(-1)$ (c) $\arctan 0$

5 (a) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\pi}{3}$ (b) $\cos^{-1}\frac{\pi}{2}$ (c) $\tan^{-1} 1$

6 (a) $\operatorname{arcsen}\frac{\pi}{2}$ (b) $\arccos\frac{\pi}{3}$

(c) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7 (a) $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{3}{10}\right)\right]$ (b) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$

(c) $\tan(\arctan 14)$

8 (a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\right)$ (b) $\cos\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)\right]$

(c) $\tan\left[\tan^{-1}(-9)\right]$

9 (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

(c) $\tan^{-1}\left[\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

10 (a) $\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ (b) $\arccos(\cos 0)$

(c) $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$

11 (a) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$ (b) $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{4}\right)$

12 (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

13 (a) $\operatorname{sen}\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (b) $\cos\left(\tan^{-1} 1\right)$

(c) $\tan\left[\operatorname{sen}^{-1}(-1)\right]$

14 (a) $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\sqrt{3}\right)$ (b) $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} 1\right)$

(c) $\tan\left(\cos^{-1} 0\right)$

15 (a) $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\right)$ (b) $\sec\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

(c) $\csc\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

16 (a) $\cot\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right)\right]$ (b) $\sec\left(\tan^{-1}\frac{7}{4}\right)$

(c) $\csc\left(\cos^{-1}\frac{1}{5}\right)$

17 (a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + \arccos 0\right)$

(b) $\cos\left[\arctan\left(-\frac{3}{4}\right) - \operatorname{arcsen}\frac{4}{5}\right]$

(c) $\tan\left(\arctan\frac{4}{3} + \arccos\frac{8}{17}\right)$

18 (a) $\text{sen}\left[\text{sen}^{-1}\frac{5}{13} - \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

(b) $\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$

(c) $\tan\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} - \text{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right)$

19 (a) $\text{sen}\left[2\ \text{arccos}\left(-\frac{24}{25}\right)\right]$ (b) $\cos\left(2\ \text{sen}^{-1}\frac{15}{17}\right)$

(c) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$

20 (a) $\text{sen}\left(2\tan^{-1}\frac{5}{12}\right)$ (b) $\cos\left(2\ \text{arccos}\frac{9}{41}\right)$

(c) $\tan\left[2\ \text{arcsen}\left(-\frac{15}{17}\right)\right]$

21 (a) $\text{sen}\left[\frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\left(-\frac{7}{25}\right)\right]$ (b) $\cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{8}{15}\right)$

(c) $\tan\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$

22 (a) $\text{sen}\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ (b) $\cos\left(\frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\frac{12}{13}\right)$

(c) $\tan\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{40}{9}\right)$

Ejer. 23–34: Escriba la expresión como una expresión algebraica con x para $x > 0$.

23 $\text{sen}\ (\tan^{-1} x)$ 24 $\tan\ (\text{arccos}\ x)$

25 $\sec\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right)$ 26 $\csc\left(\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$

27 $\sec\left(\text{sen}^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$ 28 $\cot\left(\text{sen}^{-1}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right)$

29 $\text{sen}\ (2\ \text{sen}^{-1} x)$ 30 $\cos\ (2\tan^{-1} x)$

31 $\tan\left(2\cos^{-1}\frac{1}{x}\right)$ 32 $\cos\ (2\ \text{sen}^{-1} x)$

33 $\cos\left(\frac{1}{2}\ \text{arccos}\ x\right)$ 34 $\tan\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{x}\right)$

Ejer. 35–36: Complete los enunciados.

35 (a) Cuando $x \to -1^+$, $\text{sen}^{-1} x \to$ ___

(b) Cuando $x \to 1^-$, $\cos^{-1} x \to$ ___

(c) Cuando $x \to \infty$, $\tan^{-1} x \to$ ___

36 (a) Cuando $x \to 1^-$, $\text{sen}^{-1} x \to$ ___

(b) Cuando $x \to -1^+$, $\cos^{-1} x \to$ ___

(c) Cuando $x \to -\infty$, $\tan^{-1} x \to$ ___

Ejer. 37–50: Trace la gráfica de la ecuación.

37 $y = \text{sen}^{-1} 2x$ 38 $y = \frac{1}{2}\text{sen}^{-1} x$

39 $y = \text{sen}^{-1}(x + 1)$ 40 $y = \text{sen}^{-1}(x - 2) + \frac{\pi}{2}$

41 $y = \cos^{-1}\frac{1}{2}x$ 42 $y = 2\cos^{-1} x$

43 $y = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$ 44 $y = \cos^{-1}(x + 1)$

45 $y = 2 + \tan^{-1} x$ 46 $y = \tan^{-1} 2x$

47 $y = \frac{6}{\pi}\tan^{-1} x$ 48 $y = \tan^{-1}(x - \pi)$

49 $y = \text{sen}\ (\text{arccos}\ x)$ 50 $y = \text{sen}\ (\text{sen}^{-1} x)$

Ejer. 51–54: La ecuación dada tiene la forma $y = f(x)$. (a) Encuentre el dominio de f. (b) Encuentre el rango de f. (c) Despeje x en términos de y.

51 $y = \frac{1}{2}\text{sen}^{-1}(x - 3)$ 52 $y = 3\tan^{-1}(2x + 1)$

53 $y = 4\cos^{-1}\frac{2}{3}x$ 54 $y = 2\ \text{sen}^{-1}(3x - 4)$

Ejer. 55–58: De la ecuación despeje x en términos de y si x está restringida al intervalo dado.

55 $y = -3 - \text{sen}\ x;\quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

56 $y = 2 + 3\ \text{sen}\ x;\quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

57 $y = 15 - 2\cos x;\ [0, \pi]$

58 $y = 6 - 3\cos x;\quad [0, \pi]$

Ejer. 59–60: De la ecuación despeje x en términos de y si $0 < x < \pi$ y $0 < y < \pi$.

59 $\dfrac{\operatorname{sen} x}{3} = \dfrac{\operatorname{sen} y}{4}$

60 $\dfrac{4}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{7}{\operatorname{sen} y}$

Ejer. 61–72: Use funciones trigonométricas inversas para hallar las soluciones de la ecuación que están en el intervalo dado y calcule las soluciones a cuatro lugares decimales.

61 $\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0;$ $[0, 2\pi)$

62 $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0;$ $[0, 2\pi)$

63 $2\tan^2 t + 9\tan t + 3 = 0;$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

64 $3\operatorname{sen}^2 t + 7\operatorname{sen} t + 3 = 0;$ $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

65 $15\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0;$ $[0, \pi]$

66 $3\tan^4 \theta - 19\tan^2 \theta + 2 = 0;$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

67 $6\operatorname{sen}^3 \theta + 18\operatorname{sen}^2 \theta - 5\operatorname{sen} \theta - 15 = 0;$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

68 $6\operatorname{sen} 2x - 8\cos x + 9\operatorname{sen} x - 6 = 0;$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

69 $(\cos x)(15\cos x + 4) = 3;$ $[0, 2\pi)$

70 $6\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x + 2;$ $[0, 2\pi)$

71 $3\cos 2x - 7\cos x + 5 = 0;$ $[0, 2\pi)$

72 $\operatorname{sen} 2x = -1.5\cos x;$ $[0, 2\pi)$

Ejer. 73–74: Si un terremoto tiene un desplazamiento horizontal total de S metros a lo largo de su línea de falla, entonces el movimiento horizontal M de un punto en la superficie de la Tierra a d kilómetros de la línea de falla se puede calcular usando la fórmula

$$M = \frac{S}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{d}{D}\right),$$

donde D es la profundidad (en kilómetros) bajo la superficie del punto focal del terremoto.

73 **Movimiento de un terremoto** Para el terremoto de San Francisco en 1906, S fue de 4 metros y D de 3.5 kilómetros. Calcule M para los valores expresados de d.

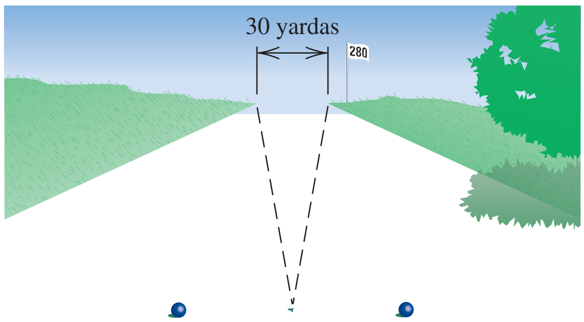
(a) 1 kilómetro (b) 4 kilómetros

(c) 10 kilómetross

74 **Movimiento de un terremoto** Calcule la profundidad D del punto focal de un terremoto con $S = 3$ m si un punto en la superficie de la Tierra, a 5 kilómetros de la línea de falla, se movió 0.6 metros horizontalmente.

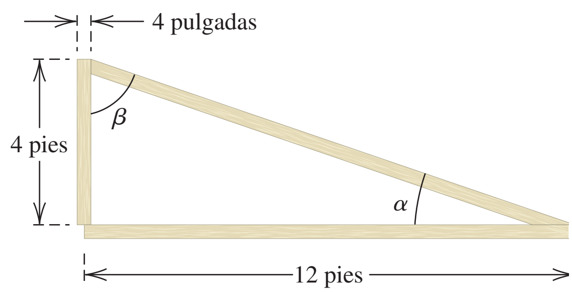
75 **Tiro de un golfista** Un golfista, centrado en un *fairway* recto de 30 yardas de ancho, golpea una bola lanzándola a 280 yardas. Aproxime el ángulo más grande que el tiro pueda tener desde el centro del *fairway* si la pelota debe permanecer en el *fairway* (vea la figura).

EJERCICIO 75



76 **Colocar un puntal de madera** Una pieza de madera de 14 pies se ha de colocar como puntal, como se muestra en la figura. Suponiendo que toda la pieza es de 2 pulgadas por 4 pulgadas, encuentre α y β.

EJERCICIO 76

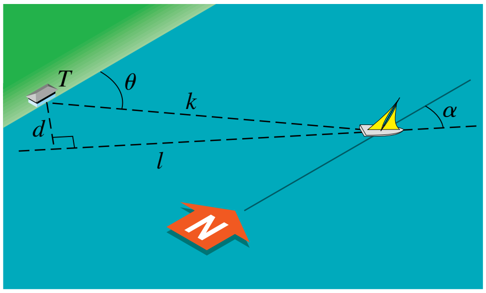


77 **Seguimiento de un velero** Como se ve en la figura, un velero está siguiendo un rumbo l en línea recta. (Suponga que la orilla es paralela a la línea norte-sur.) La distancia más corta desde una estación de seguimiento T al rumbo es d millas. A medida que el velero navega, la estación de seguimiento registra su distancia k desde T y su dirección θ con respecto a T. El ángulo α especifica la dirección del velero.

(a) Exprese α en términos de d, k y θ.

(b) Calcule α al grado más cercano si $d = 50$ millas, $k = 210$ millas y $\theta = 53.4°$.

EJERCICIO 77



78 **Cálculo de ángulos de visibilidad** Una crítica de arte cuyo nivel visual es de 6 pies sobre el piso ve una pintura de 10 pies de alto que está montada a 4 pies sobre el piso, como se muestra en la figura.

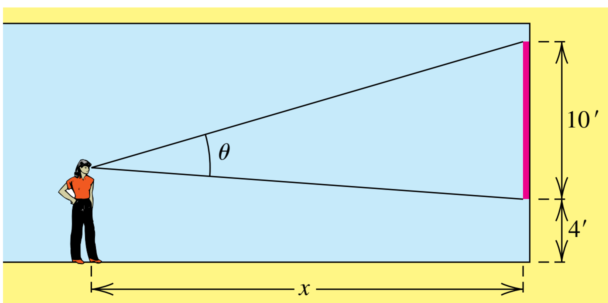
(a) Si la crítica de arte está de pie a x pies de la pared, exprese el ángulo de visibilidad θ en términos de x.

(b) Use la fórmula de suma para tangente para demostrar que

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10x}{x^2 - 16}\right).$$

(c) ¿Para qué valor de x es $\theta = 45°$?

EJERCICIO 78



Ejer. 79–84: Verifique la identidad.

79 $\operatorname{sen}^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

80 $\arccos x + \arccos \sqrt{1 - x^2} = \dfrac{\pi}{2}, \ 0 \le x \le 1$

81 $\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen} x$

82 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

83 $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}, \ x > 0$

84 $2 \cos^{-1} x = \cos^{-1}(2x^2 - 1), \ 0 \le x \le 1$

Ejer. 85–86: Grafique *f* y determine su dominio y rango.

85 $f(x) = 2 \operatorname{sen}^{-1}(x - 1) + \cos^{-1} \frac{1}{2}x$

86 $f(x) = \frac{1}{2} \tan^{-1}(1 - 2x) + 3 \tan^{-1} \sqrt{x + 2}$

Ejer. 87–88: Use una gráfica para estimar las soluciones de la ecuación.

87 $\operatorname{sen}^{-1} 2x = \tan^{-1}(1 - x)$

88 $\cos^{-1}\left(x - \frac{1}{5}\right) = 2 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2} - x\right)$

89 **Diseño de un colector solar** Al diseñar un colector para energía solar, una consideración importante es la cantidad de luz solar que se transmite a través del vidrio al agua que habrá de calentarse. Si el ángulo de incidencia θ de los rayos solares se mide desde una línea perpendicular a la superficie del vidrio, entonces la fracción $f(\theta)$ de luz solar reflejada desde el vidrio se puede calcular con

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \beta} + \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \beta}\right),$$

donde

$$\alpha = \theta - \gamma, \quad \beta = \theta + \gamma, \quad \text{y} \quad \gamma = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{1.52}\right).$$

Grafique f para $0 < \theta < \pi/2$, y calcule θ cuando $f(\theta) = 0.2$.

90 **Diseño de un colector solar** La altura del sol es el ángulo ϕ que los rayos del sol forman con el horizonte en un tiempo y lugar dados. Determinar ϕ es importante al inclinar un colector solar para obtener máxima eficiencia. El 21 de junio en una latitud de 51.7°N, la altura del sol se puede calcular con la fórmula

$$\operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} 23.5° \operatorname{sen} 51.7° + \cos 23.5° \cos 51.7° \cos H,$$

donde H es el ángulo horario, con $H = -\pi/2$ a las 6:00 a.m., $H = 0$ al mediodía y $H = \pi/2$ a las 6:00 p.m.

(a) De la fórmula despeje ϕ y grafique la ecuación resultante para $-\pi/2 < H < \pi/2$.

(b) Calcule las horas cuando $\phi = 45°$.

Ejer. 91–94: Muchas calculadoras tienen pantallas que son más anchas que altas. La razón aproximada entre la altura y el ancho es a veces 2 : 3. Pensemos que la altura real de la pantalla de una calculadora a lo largo del eje y es de 2 unidades, que el ancho real de la pantalla a lo largo del eje x es 3 unidades y Xscl = Yscl = 1. Como la recta $y = x$ debe pasar por el punto (1, 1), la pendiente real m_A de esta recta en la pantalla de la calculadora está dada por

$$m_A = \frac{\text{distancia real entre divisiones en el eje } y}{\text{distancia real entre divisiones en el eje } x}.$$

Usando esta información, grafique $y = x$ en la pantalla dado el rectángulo y prediga el ángulo real θ que la gráfica forma con el eje x en la pantalla.

91 $[0, 3]$ por $[0, 2]$

92 $[0, 6]$ por $[0, 2]$

93 $[0, 3]$ por $[0, 4]$

94 $[0, 2]$ por $[0, 2]$

CAPÍTULO 7 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–22: Verifique la identidad.

1 $(\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = 1$

2 $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \tan\theta = \sec\theta$

3 $\dfrac{(\sec^2\theta - 1)\cot\theta}{\tan\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \operatorname{sen}\theta$

4 $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x \csc^2 x$

5 $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} t} = (\sec t - \tan t)\sec t$

6 $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

7 $\tan 2u = \dfrac{2\cot u}{\csc^2 u - 2}$

8 $\cos^2\dfrac{v}{2} = \dfrac{1 + \sec v}{2\sec v}$

9 $\dfrac{\tan^3\phi - \cot^3\phi}{\tan^2\phi + \csc^2\phi} = \tan\phi - \cot\phi$

10 $\dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\csc u + \csc v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{-1 + \csc u \csc v}$

11 $\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan^4 x}\right)^3\left(\dfrac{\csc^3 x}{\cot^6 x}\right)^2 = 1$

12 $\dfrac{\cos\gamma}{1 - \tan\gamma} + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{1 - \cot\gamma} = \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma$

13 $\dfrac{\cos(-t)}{\sec(-t) + \tan(-t)} = 1 + \operatorname{sen} t$

14 $\dfrac{\cot(-t) + \csc(-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \dfrac{1}{1 - \cos t}$

15 $\sqrt{\dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \dfrac{1 - \cos t}{|\operatorname{sen} t|}$

16 $\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{|\cos\theta|}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

17 $\cos\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

18 $\tan\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$

19 $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\beta = \operatorname{sen}\beta\cos^3\beta - \cos\beta\operatorname{sen}^3\beta$

20 $\tan\frac{1}{2}\theta = \csc\theta - \cot\theta$

21 $\operatorname{sen} 8\theta = 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)(1 - 8\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta)$

22 $\arctan x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1 - x^2},\ -1 < x < 1$

Ejer. 23–40: Encuentre las soluciones de la ecuación que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

23 $2\cos^3\theta - \cos\theta = 0$

24 $2\cos\alpha + \tan\alpha = \sec\alpha$

25 $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta$

26 $\csc^5\theta - 4\csc\theta = 0$

27 $2\cos^3 t + \cos^2 t - 2\cos t - 1 = 0$

28 $\cos x\cot^2 x = \cos x$

29 $\operatorname{sen}\beta + 2\cos^2\beta = 1$

30 $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$

31 $2\sec u\operatorname{sen} u + 2 = 4\operatorname{sen} u + \sec u$

32 $\tan 2x\cos 2x = \operatorname{sen} 2x$

33 $2\cos 3x\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 2x$

34 $\operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x = 0$

35 $\cos \pi x + \operatorname{sen} \pi x = 0$

36 $\operatorname{sen} 2u = \operatorname{sen} u$

37 $2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta - 3 \cos \theta = 0$

38 $\sec 2x \csc 2x = 2 \csc 2x$

39 $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 3x$

40 $\cos 3x = -\cos 2x$

Ejer. 41–44: Encuentre el valor exacto.

41 $\cos 75°$

42 $\tan 285°$

43 $\operatorname{sen} 195°$

44 $\csc \dfrac{\pi}{8}$

Ejer. 45–58: Si θ y ϕ son ángulos agudos tales que $\csc \theta = \frac{5}{3}$ y $\cos \phi = \frac{8}{17}$, encuentre el valor exacto.

45 $\operatorname{sen} (\theta + \phi)$

46 $\cos (\theta + \phi)$

47 $\tan (\phi + \theta)$

48 $\tan (\theta - \phi)$

49 $\operatorname{sen} (\phi - \theta)$

50 $\operatorname{sen} (\theta - \phi)$

51 $\cos (\phi - \theta)$

52 $\cos (\theta - \phi)$

53 $\operatorname{sen} 2\phi$

54 $\cos 2\phi$

55 $\tan 2\theta$

56 $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$

57 $\tan \frac{1}{2}\theta$

58 $\cos \frac{1}{2}\phi$

59 Exprese como suma o diferencia:
(a) $\operatorname{sen} 7t \operatorname{sen} 4t$
(b) $\cos \frac{1}{4}u \cos \left(-\frac{1}{6}u\right)$
(c) $6 \cos 5x \operatorname{sen} 3x$
(d) $4 \operatorname{sen} 3\theta \cos 7\theta$

60 Exprese como producto:
(a) $\operatorname{sen} 8u + \operatorname{sen} 2u$
(b) $\cos 3\theta - \cos 8\theta$
(c) $\operatorname{sen} \frac{1}{4}t - \operatorname{sen} \frac{1}{5}t$
(d) $3 \cos 2x + 3 \cos 6x$

Ejer. 61–76: Encuentre el valor exacto de la expresión siempre que esté definida.

61 $\cos^{-1} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

62 $\operatorname{arcsen} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

63 $\arctan \sqrt{3}$

64 $\arccos \left(\tan \dfrac{3\pi}{4}\right)$

65 $\operatorname{arcsen} \left(\operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{4}\right)$

66 $\cos^{-1} \left(\cos \dfrac{5\pi}{4}\right)$

67 $\operatorname{sen} \left[\arccos \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

68 $\tan (\tan^{-1} 2)$

69 $\cos^{-1} \left(\tan \dfrac{\pi}{3}\right)$

70 $\sec (2 \tan^{-1} 1)$

71 $\sec \left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{2}\right)$

72 $\cos^{-1} (\operatorname{sen} 0)$

73 $\cos \left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{15}{17} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{8}{17}\right)$

74 $\cos \left(2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{4}{5}\right)$

75 $\operatorname{sen} (2 \tan^{-1} 7)$

76 $\tan \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{4}{5}\right)$

Ejer. 77–80: Trace la gráfica de la ecuación.

77 $y = \cos^{-1} 3x$

78 $y = 4 \operatorname{sen}^{-1} x$

79 $y = 1 - \operatorname{sen}^{-1} x$

80 $y = \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \cos^{-1} x\right)$

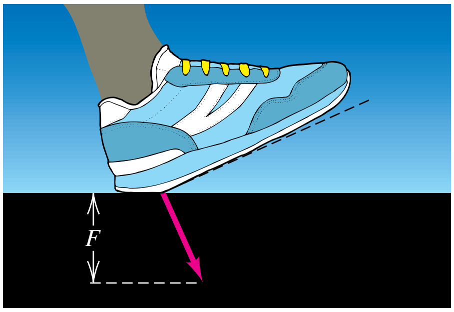
81 Exprese $\cos (\alpha + \beta + \gamma)$ en términos de funciones trigonométricas de α, β y γ.

82 **Fuerza de un pie** Cuando una persona camina, la magnitud F de la fuerza vertical de un pie sobre el suelo (vea la figura) puede describirse con

$$F = A(\cos bt - a \cos 3bt),$$

donde t es el tiempo en segundos, $A > 0$, $b > 0$ y $0 < a < 1$.

EJERCICIO 82



(a) Demuestre que $F = 0$ cuando $t = -\pi/(2b)$ y $t = \pi/(2b)$. (El tiempo $t = -\pi/(2b)$ corresponde al momento cuando el pie toca primero el suelo y el peso del cuerpo está siendo soportado por el otro pie.)

(b) La fuerza máxima ocurre cuando

$$3a \operatorname{sen} 3bt = \operatorname{sen} bt.$$

Si $a = \frac{1}{3}$, encuentre las soluciones de esta ecuación para el intervalo $-\pi/(2b) < t < \pi/(2b)$.

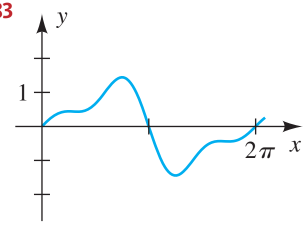
(c) Si $a = \frac{1}{3}$, exprese la máxima fuerza en términos de A.

83 En la figura se muestra una gráfica de la ecuación

$$y = \text{sen } x - \tfrac{1}{2} \text{ sen } 2x + \tfrac{1}{3} \text{ sen } 3x.$$

Las coordenadas x de los puntos de inflexión son soluciones de la ecuación $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$. Use una fórmula de suma a producto para hallar estas coordenadas x.

EJERCICIO 83

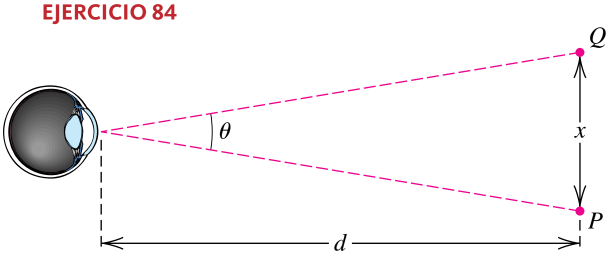


84 **Diferenciación visual** El ojo humano puede distinguir entre dos puntos distantes P y Q siempre que el ángulo de resolución θ no sea demasiado pequeño. Suponga que P y Q están a x unidades entre sí y a d unidades del ojo, como se ilustra en la figura.

(a) Exprese x en términos de d y θ.

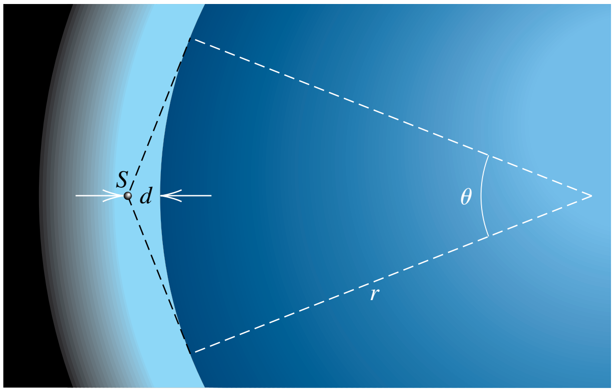
(b) Para una persona con visión normal, el mínimo ángulo de resolución distinguible es de unos 0.0005 radianes. Si una pluma de 6 pulgadas de largo es vista por dicha persona a una distancia de d pies, ¿para qué valores de d serán distinguibles los puntos extremos de la pluma?

EJERCICIO 84



85 **Satélites** Un satélite S gira alrededor de un planeta a una distancia de d millas de la superficie del planeta. La parte de la superficie del planeta que es visible desde el satélite está determinada por el ángulo θ indicado en la figura.

EJERCICIO 85



(a) Suponiendo que el planeta es de forma esférica, exprese d en términos de θ y el radio r del planeta.

(b) Calcule θ para un satélite a 300 millas de la superficie de la Tierra, usando $r = 4000$ millas.

86 **Cañones urbanos** Debido a los edificios altos y a calles relativamente angostas de algunas ciudades interiores, la cantidad de luz solar que ilumina estos "cañones" se reduce mucho. Si h es la altura promedio de los edificios y w es el ancho de la calle, la estrechez N de la calle está definida por $N = h/w$. El ángulo θ del horizonte está definido por $\tan \theta = N$. (El valor $\theta = 63°$ puede resultar en una pérdida de iluminación de 85%.) Aproxime el ángulo del horizonte para los siguientes valores de h y w.

(a) $h = 400$ pies, $w = 80$ pies

(b) $h = 55$ m, $w = 30$ m

CAPÍTULO 7 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 Verifique la siguiente identidad:

$$\frac{\tan x}{1 - \cot x} + \frac{\cot x}{1 - \tan x} = 1 + \sec x \csc x$$

(*Sugerencia:* en algún punto, considere una factorización especial.)

2 Consulte el ejemplo 6 de la sección 7.1. Suponga que $0 \le \theta < 2\pi$ y reescriba la conclusión usando una función definida por tramos.

3 ¿Cuántas soluciones tiene la siguiente ecuación en $[0, 2\pi)$? Encuentre la mayor.

$$3 \cos 45x + 4 \text{ sen } 45x = 5$$



4 Grafique el cociente de diferencias para $f(x) = \text{sen } x$ y $h = 0.5$, 0.1 y 0.001 en la pantalla $[0, 2\pi, \pi/2]$ por $[-1, 1]$. ¿Qué generalización puede hacer el lector a partir de estas gráficas? Demuestre que este cociente se puede escribir como

$$\text{sen } x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \left(\frac{\text{sen } h}{h}\right).$$

5 Hay varias relaciones exactas interesantes entre π y funciones trigonométricas inversas tales como

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right).$$

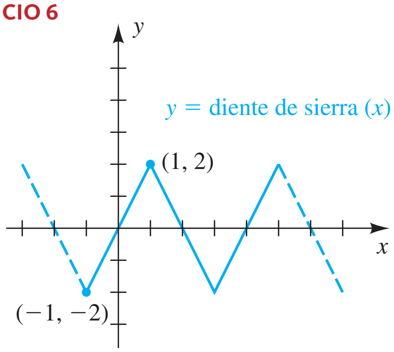
Use identidades trigonométricas para demostrar que esta relación es verdadera. Las otras dos relaciones son

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$$

y $$\pi = \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3.$$

6 En la figura se muestra una función llamada *función diente de sierra.*

EJERCICIO 6



(a) Defina una función diente de sierra inversa **(arcsierra),** incluyendo su dominio y rango

(b) Encuentre arcsierra (1.7) y arcsierra (-0.8).

(c) Formule dos propiedades de arcsierra (semejantes a la propiedad sen (sen^{-1})).

(d) Grafique la función arcsierra.

7 Verifique la siguiente identidad:

$$\frac{\text{sen}^4(x/2) - \cos^4(x/2)}{\text{sen}^4(x/2)\cos^4(x/2)} = \frac{-16\cos x}{\text{sen}^4 x}$$

CAPÍTULO 7 EXAMEN DE CAPÍTULO

1 Verifique la identidad: $\left(\dfrac{1}{\text{sen } x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)^{-1} = \csc x + \cot x$

2 Verifique la identidad: $\dfrac{\tan x}{1 + \sec x} + \dfrac{1 + \cos x}{\text{sen } x} = 2 \csc x$

3 Demuestre que $\tan x = \sqrt{\sec^2 x - 1}$ *no* es una identidad.

4 Haga la sustitución trigonométrica $x = a \text{ sen } \theta$ en $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2x^2}$, donde $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ y $a > 0$, y use identidades fundamentales para simplificar la expresión resultante.

5 Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\sec \dfrac{\pi}{4}x = -\sqrt{2}$.

6 Encuentre una expresión para las coordenadas en x de los puntos más altos de la gráfica $y = \cos(4x + 3)$.

7 Determine todas las intersecciones de $f(x) = \sec\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 2$ con el eje x.

8 Encuentre todas las soluciones de la ecuación $-\cos x + 1 = 2 \text{ sen}^2 x$.

9 Utilice el hecho de que $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$ para encontrar un valor exacto para $\cos \dfrac{\pi}{12}$.

10 Si $\text{sen } \alpha = -\dfrac{12}{13}$ y $\tan \alpha < 0$, encuentre el valor exacto de $\text{sen}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

11 Si α y β son ángulos que están en el segundo cuadrante tales que $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$ y $\cos \beta = -\dfrac{8}{17}$, encuentre $\tan(\alpha + \beta)$.

12 Verifique la formula de reducción: $\cos\left(x + \dfrac{5\pi}{2}\right) = -\text{sen } x$

13 Use una fórmula de suma o resta para hallar las soluciones de la ecuación $\text{sen } \pi x \cos \dfrac{\pi}{2}x = \text{sen } \dfrac{\pi}{2}x \cos \pi x + 1$ que están en el intervalo $[0, 10)$.

14 Dado que sen $\theta = -\frac{5}{13}$ y cos $\theta = \frac{12}{13}$, encuentre los valores exactos de sen 2θ, cos 2θ y tan 2θ.

15 Dado que sec $\theta = \frac{5}{3}$ y $-90° < \theta < 0°$, encuentre los valores exactos de sen $(\theta/2)$, cos $(\theta/2)$ y tan $(\theta/2)$.

16 Verifique la identidad: $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x\,(4\cos^2 x - 1)$

17 Encuentre las soluciones de la ecuación $\cos 2x + 3\cos x = -2$ que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

18 Exprese $4\cos x \cos 7x$ como una suma o resta simplificada.

19 Exprese $\cos x - \cos 7x$ como un producto simplificado.

20 Verifique la identidad: $\dfrac{\cos 8x + \cos 4x}{\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 4x} = \cot 2x$

21 Encuentre las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} x = 0$.

22 Encuentre el valor exacto de $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

23 Encuentre los valores de θ para los que $\arctan(\tan\theta) = \theta$.

24 Encuentre el valor exacto de $\cos\left(2\arccos\dfrac{7}{25}\right)$.

25 Escriba $\cos\left(2\arccos\dfrac{a}{c}\right)$ como una expresión algebraica con a y c y para a y c positivas.

26 Complete el enunciado: cuando $x \to 2$, $\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x^3 - 7}{2}\right) \to$ ____.

27 Despeje x de $y = 3\cos^{-1}\dfrac{2}{5}x$.

28 Encuentre las soluciones exactas con aproximaciones a dos lugares decimales para las soluciones de la ecuación $\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

8

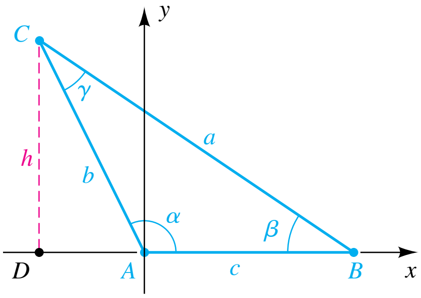
Aplicaciones de trigonometría

En las primeras dos secciones de este capítulo consideramos métodos para resolver triángulos oblicuángulos usando la ley de los senos y la ley de los cosenos. Las siguientes dos secciones contienen una introducción a vectores, tema que tiene numerosas aplicaciones en ingeniería, ciencias naturales y matemáticas avanzadas. A continuación introducimos la forma trigonométrica para números complejos y la usamos para hallar todas las n soluciones de ecuaciones de la forma $w^n = z$, donde n es cualquier entero positivo y w y z son números complejos.

8.1 La ley de los senos

Un **triángulo oblicuángulo** es aquel que no contiene un ángulo recto. Usaremos las letras A, B, C, a, b, c, α, β y γ para partes de triángulos, como hicimos en el capítulo 6. Dado el triángulo ABC, pongamos el ángulo α en posición estándar para que B quede en el eje x positivo. El caso para α obtuso se ilustra en la figura 1, pero la siguiente exposición también es válida si α es agudo.

FIGURA 1



Considere la recta que pasa por C paralela al eje y y que cruza el eje x en el punto D. Si hacemos $d(C, D) = h$, entonces la coordenada y de C es h. De la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{b}, \quad \text{así} \quad h = b \operatorname{sen} \alpha.$$

Por consulta al triángulo rectángulo BDC, vemos que

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{h}{a}, \quad \text{así} \quad h = a \operatorname{sen} \beta.$$

Igualando las dos expresiones para h nos dará

$$b \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \beta,$$

que podemos escribir como $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} \beta}{b}$.

Si ponemos α en posición estándar con C en el eje x positivo, entonces por el mismo razonamiento

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}.$$

Las últimas dos igualdades nos dan el siguiente resultado.

La ley de los senos

Si ABC es un triángulo oblicuángulo marcado en la forma usual (como en la figura 1), entonces

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}.$$

Note que la ley de los senos está formada por las siguientes tres fórmulas:

$$\textbf{(1)}\ \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} \qquad \textbf{(2)}\ \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} \qquad \textbf{(3)}\ \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Para aplicar cualquiera de estas fórmulas a un triángulo específico, debemos conocer los valores de tres de las cuatro variables. Si sustituimos estos tres valores en la fórmula apropiada, podemos entonces encontrar el valor de la cuarta variable. Se deduce que la ley de los senos se puede usar para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuángulo, siempre que conozcamos cualquiera de lo siguiente (las tres letras entre paréntesis se usan para denotar las partes conocidas, con S representando un lado y A un ángulo):

(1) dos lados y un ángulo *opuesto* a uno de ellos (LLA)

(2) dos ángulos y cualquier lado (AAL o ALA)

En la sección siguiente estudiamos la ley de los cosenos y demostramos cómo se puede usar para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuángulo cuando se da lo siguiente:

(1) dos lados y el ángulo *entre* ellos (LAL)

(2) tres lados (LLL)

La ley de los senos no se puede aplicar directamente a los últimos dos casos.

La ley de los senos también se puede escribir en la siguiente forma

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

En lugar de memorizar las tres fórmulas asociadas con la ley de los senos, puede ser mejor recordar el siguiente enunciado que las toma en cuenta a todas.

La ley de los senos (forma general)

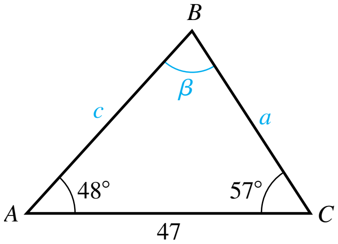
En cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a ese ángulo.

En ejemplos y ejercicios referentes a triángulos, supondremos que las longitudes conocidas de los lados, así como los ángulos, se han obtenido por mediciones y por tanto son aproximaciones a valores exactos. A menos que se indique de otro modo, cuando hallemos partes de triángulos redondearemos respuestas de acuerdo con la regla siguiente: *si los ángulos o lados conocidos se expresan a cierta precisión, entonces los ángulos o lados desconocidos deben calculares a la misma precisión.* Para ilustrar, si los lados conocidos se expresan al 0.1 más cercano, entonces los lados desconocidos deben calcularse al 0.1 más cercano. Si los ángulos conocidos se expresan a los 10′ más cercanos, entonces los ángulos desconocidos deben calcularse a los 10′ más cercanos. Observaciones similares se cumplen también para precisión al más cercano 0.01, 0.1°, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 **Usar la ley de los senos (ALA)**

Resuelva $\triangle ABC$, dados $\alpha = 48°$, $\gamma = 57°$ y $b = 47$.

FIGURA 2



SOLUCIÓN El triángulo está trazado en la figura 2. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°,

$$\beta = 180° - 57° - 48° = 75°.$$

Como el lado b y los tres ángulos se conocen, podemos hallar a usando una forma de la ley de los senos que contenga a, α, b y β:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \quad \text{despeje } a$$

$$= \frac{47 \operatorname{sen} 48°}{\operatorname{sen} 75°} \quad \text{sustituya } b,\ \alpha \text{ y } \beta$$

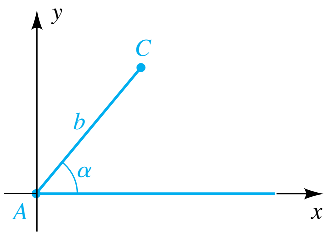
$$\approx 36 \quad \text{calcule al entero más cercano}$$

(continúa)

Para hallar c, simplemente sustituimos $\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$ con $\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$ en la solución precedente para a, obteniendo

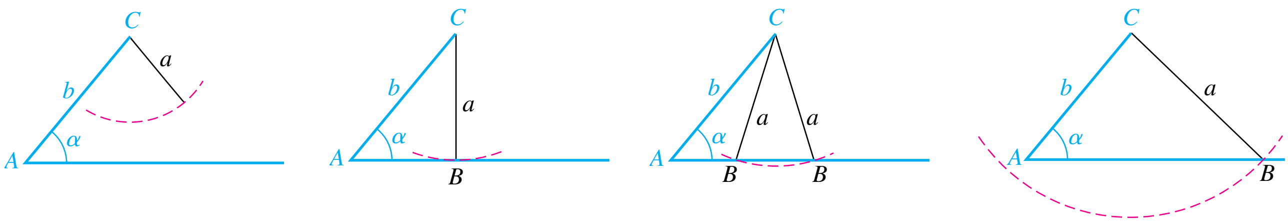
$$c = \frac{b \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{47 \operatorname{sen} 57^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ} \approx 41. \quad ■$$

FIGURA 3



Datos como los del ejemplo 1 llevan a exactamente un triángulo ABC, pero si se dan dos lados y un ángulo *opuesto* a uno de ellos, no siempre se determina un triángulo único. Para ilustrar, suponga que a y b son las longitudes de lados del triángulo ABC y que un ángulo α es opuesto al lado de longitud a. Examinemos el caso para α agudo. Ponga α en posición estándar y considere el segmento de recta AC de longitud b en el lado terminal de α, como se ve en la figura 3. El tercer vértice, B, debe estar en algún punto en el eje x. Como nos dan la longitud a del lado opuesto a α, podemos hallar B al trazar un arco circular de longitud a con centro en C. Los cuatro posibles resultados se ilustran en la figura 4 (sin los ejes de coordenadas).

FIGURA 4



Las cuatro posibilidades en la figura se pueden describir como sigue:

(a) El arco no intersecta al eje x y no se forma triángulo.

(b) El arco es tangente al eje x y se forma un triángulo rectángulo.

(c) El arco intersecta el eje x positivo en dos puntos distintos y se forman dos triángulos.

(d) El arco intersecta las partes positivas y no positivas del eje x y se forman dos triángulos.

El caso particular que ocurre en un problema dado se hará evidente cuando tratemos de hallar la solución. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación

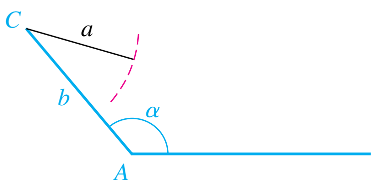
$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b}$$

y obtenemos $\operatorname{sen} \beta > 1$, entonces no existe triángulo y tenemos el caso (a). Si obtenemos $\operatorname{sen} \beta = 1$, entonces $\beta = 90^\circ$ y por tanto ocurrirá (b). Si $\operatorname{sen} \beta < 1$, entonces hay dos posibles opciones para el ángulo β. Al comprobar ambas posibilidades, podemos determinar si ocurre (c) o (d).

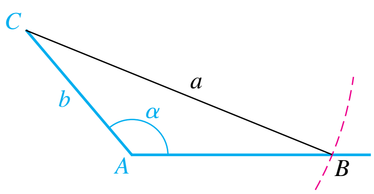
Si la medida de α es mayor que 90°, entonces existe un triángulo si y sólo si $a > b$ (vea figura 5). Como podemos tener más de una posibilidad cuando se dan dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, esta situación a veces recibe el nombre de **caso ambiguo.**

FIGURA 5

(a) $a < b$



(b) $a > b$



EJEMPLO 2 **Usar la ley de los senos (LLA)**

Resuelva $\triangle ABC$, dados $\alpha = 67°$, $a = 100$ y $c = 125$.

SOLUCIÓN En vista que conocemos α, a y c, podemos hallar γ al emplear una forma de la ley de los senos que contenga a, α, c y γ.

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{c \operatorname{sen}\alpha}{a} \qquad \text{despeje sen } \gamma$$

$$= \frac{125 \operatorname{sen} 67°}{100} \qquad \text{sustituya por } c, \alpha, \text{ y } a$$

$$\approx 1.1506 \qquad \text{aproxime}$$

Como sen γ *no puede* ser mayor que 1, no se puede construir un triángulo con las partes dadas. ■

EJEMPLO 3 **Usar la ley de los senos (LLA)**

Resuelva $\triangle ABC$, dados $a = 12.4$, $b = 8.7$ y $\beta = 36.7°$.

SOLUCIÓN Para hallar α, procedemos como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a \operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{despeje sen } \alpha$$

$$= \frac{12.4 \operatorname{sen} 36.7°}{8.7} \qquad \text{sustituya por } a, \beta \text{ y } b$$

$$\approx 0.8518 \qquad \text{aproxime}$$

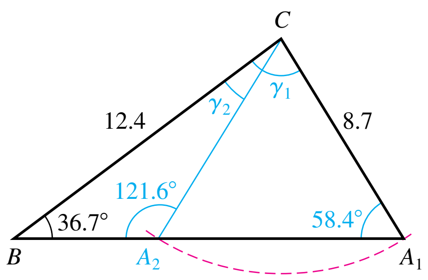
Hay dos posibles ángulos α entre 0° y 180° tales que sen α es aproximadamente 0.8518. El ángulo de referencia α_R es

$$\alpha_R \approx \operatorname{sen}^{-1}(0.8518) \approx 58.4°.$$

En consecuencia, las dos posibilidades para α son

$$\alpha_1 \approx 58.4° \qquad \text{y} \qquad \alpha_2 = 180° - \alpha_1 \approx 121.6°.$$

FIGURA 6



El ángulo $\alpha_1 \approx 58.4°$ nos da un triángulo A_1BC en la figura 6, y $\alpha_2 \approx 121.6°$ nos da el triángulo A_2BC.

Si con γ_1 y γ_2 denotamos los terceros ángulos de los triángulos A_1BC y A_2BC correspondientes a los ángulos α_1 y α_2, respectivamente, entonces

$$\gamma_1 = 180° - \alpha_1 - \beta \approx 180° - 58.4° - 36.7° \approx 84.9°$$

$$\gamma_2 = 180° - \alpha_2 - \beta \approx 180° - 121.6° - 36.7° \approx 21.7°.$$

Si $c_1 = \overline{BA_1}$ es el lado opuesto a γ_1 en el triángulo A_1BC, entonces

$$\frac{c_1}{\operatorname{sen}\gamma_1} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha_1} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$c_1 = \frac{a \operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha_1} \qquad \text{despeje } c_1$$

$$\approx \frac{12.4 \operatorname{sen} 84.9°}{\operatorname{sen} 58.4°} \approx 14.5. \qquad \text{sustituya y aproxime}$$

(continúa)

Entonces, las partes restantes del triángulo A_1BC son

$$\alpha_1 \approx 58.4°, \quad \gamma_1 \approx 84.9° \quad \text{y} \quad c_1 \approx 14.5$$

Del mismo modo, si $c_2 = \overline{BA_2}$ es el lado opuesto a γ_2 en $\triangle A_2BC$, entonces

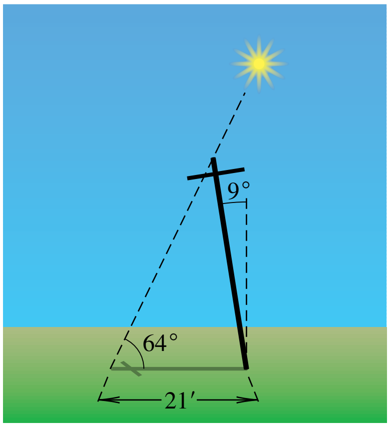
$$c_2 = \frac{a \text{ sen } \gamma_2}{\text{sen } \alpha_2} \approx \frac{12.4 \text{ sen } 21.7°}{\text{sen } 121.6°} \approx 5.4,$$

y las partes restantes del triángulo A_2BC son

$$\alpha_2 \approx 121.6°, \quad \gamma_2 \approx 21.7° \quad \text{y} \quad c_2 \approx 5.4.$$

■

FIGURA 7

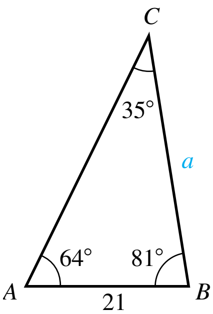


EJEMPLO 4 Usar un ángulo de elevación

Cuando el ángulo de elevación del sol es 64°, un poste de teléfono que está inclinado a un ángulo de 9° directamente alejándose del sol proyecta una sombra de 21 pies de largo en un terreno nivelado. Calcule la longitud del poste.

SOLUCIÓN El problema está ilustrado en la figura 7. El triángulo ABC de la figura 8 también muestra los datos dados. Note que en la figura 8 hemos calculado los ángulos siguientes:

FIGURA 8



$$\beta = 90° - 9° = 81°$$
$$\gamma = 180° - 64° - 81° = 35°$$

Para hallar la longitud del poste, es decir, el lado a del triángulo ABC, procedemos como sigue:

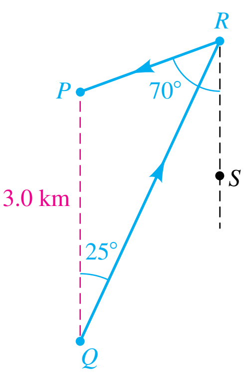
$$\frac{a}{\text{sen } 64°} = \frac{21}{\text{sen } 35°} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{21 \text{ sen } 64°}{\text{sen } 35°} \approx 33 \qquad \text{despeje } a \text{ y calcule}$$

Así, el poste de teléfono mide aproximadamente 33 pies de largo. ■

EJEMPLO 5 Usar rumbos

FIGURA 9



Un punto P a nivel del suelo está a 3.0 kilómetros al norte de un punto Q. Un corredor avanza en la dirección N25°E de Q al punto R, y luego de R a P en la dirección S70°O. Calcule la distancia recorrida.

SOLUCIÓN La notación empleada para especificar direcciones se introdujo en la sección 6.7. Las flechas de la figura 9 muestran la trayectoria del corredor, junto con una recta de norte a sur (interrumpida) de R a otro punto S.

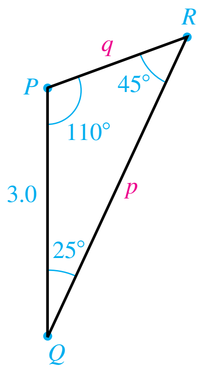
Como las rectas que pasan por PQ y RS son paralelas, se deduce de la geometría que los ángulos alternos internos PQR y QRS miden 25° cada uno. Por lo tanto,

$$\angle PRQ = \angle PRS - \angle QRS = 70° - 25° = 45°.$$

Estas observaciones nos dan el triángulo PQR de la figura 10 con

$$\angle QPR = 180° - 25° - 45° = 110°.$$

FIGURA 10



Aplicamos la ley de los senos para hallar q y p:

$$\frac{q}{\text{sen } 25°} = \frac{3.0}{\text{sen } 45°} \qquad \text{y} \qquad \frac{p}{\text{sen } 110°} = \frac{3.0}{\text{sen } 45°}$$

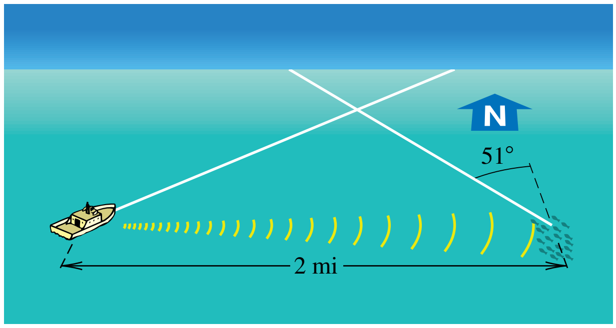
$$q = \frac{3.0 \text{ sen } 25°}{\text{sen } 45°} \approx 1.8 \qquad \text{y} \qquad p = \frac{3.0 \text{ sen } 110°}{\text{sen } 45°} \approx 4.0$$

La distancia recorrida, $p + q$, es aproximadamente $4.0 + 1.8 = 5.8$ km. ■

EJEMPLO 6 **Localizar un banco (o cardumen) de peces**

Un bote pesquero mercante utiliza un equipo de sonar para detectar un banco de peces a 2 millas al este del bote y que se desplaza en la dirección N51°O a razón de 8 mi/h (vea la figura 11).

FIGURA 11

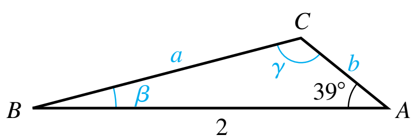


(a) Si el bote navega a 20 mi/h, calcule, al 0.1° más cercano, la dirección a la que debe dirigirse para interceptar el banco de peces.

(b) Encuentre, al minuto más cercano, el tiempo que tardará el bote en llegar a los peces.

SOLUCIÓN

FIGURA 12



(a) El problema está ilustrado por el triángulo de la figura 12, con el banco de peces en A, el bote en B y el punto de intercepción en C. Note que el ángulo $\alpha = 90° - 51° = 39°$. Para obtener β, empezamos como sigue:

$$\frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } 39°}{a} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{a} \text{ sen } 39° \qquad \text{despeje sen } \beta \qquad (*)$$

A continuación hallamos b/a, con t denotando el tiempo necesario para que el bote y los peces se encuentren en C:

$$a = 20t, \qquad b = 8t \qquad \text{(distancia)} = \text{(velocidad)(tiempo)}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{8t}{20t} = \frac{2}{5} \qquad \text{divida } b \text{ entre } a$$

$$\text{sen } \beta = \tfrac{2}{5} \text{ sen } 39° \qquad \text{sustituya por } b/a \text{ en } (*)$$

$$\beta = \text{sen}^{-1}\left(\tfrac{2}{5} \text{ sen } 39°\right) \approx 14.6° \qquad \text{aproxime}$$

Como $90° - 14.6° = 75.4°$, el bote debe avanzar en la dirección (aproximada) de N75.4E.

(continúa)

(b) Podemos hallar t usando la relación $a = 20t$. Hallemos primero la distancia a de B a C. Como el único lado conocido es 2, necesitamos hallar el ángulo γ opuesto al lado de longitud 2 para usar la ley de los senos. Empezamos por observar que

$$\gamma \approx 180° - 39° - 14.6° = 126.4°.$$

Para hallar el lado a, tenemos

$$\frac{a}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{c}{\text{sen}\ \gamma} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{c\ \text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \gamma} \qquad \text{despeje } a$$

$$\approx \frac{2\ \text{sen}\ 39°}{\text{sen}\ 126.4°} \approx 1.56\ \text{mi.} \qquad \text{sustituya y aproxime}$$

Usando $a = 20t$, encontramos el tiempo t para que el bote llegue a C:

$$t = \frac{a}{20} \approx \frac{1.56}{20} \approx 0.08\ \text{hr} \approx 5\ \text{min}$$

■

8.1 Ejercicios

Ejer. 1-16: Resuelva el $\triangle ABC$.

1 $\alpha = 52°$, $\gamma = 65°$, $a = 23.7$

2 $\beta = 25°$, $\gamma = 41°$, $b = 170$

3 $\alpha = 27°40'$, $\beta = 52°10'$, $a = 32.4$

4 $\beta = 50°50'$, $\gamma = 70°30'$, $c = 537$

5 $\alpha = 42°10'$, $\gamma = 61°20'$, $b = 19.7$

6 $\alpha = 103.45°$, $\gamma = 27.19°$, $b = 38.84$

7 $\gamma = 81°$, $c = 11$, $b = 12$

8 $\alpha = 27°$, $c = 75$, $a = 34$

9 $\gamma = 53°20'$, $a = 140$, $c = 115$

10 $\alpha = 27°30'$, $c = 52.8$, $a = 28.1$

11 $\gamma = 47.74°$, $a = 131.08$, $c = 97.84$

12 $\alpha = 42.17°$, $a = 5.01$, $b = 6.12$

13 $\alpha = 47°20'$, $a = 86.3$, $b = 77.7$

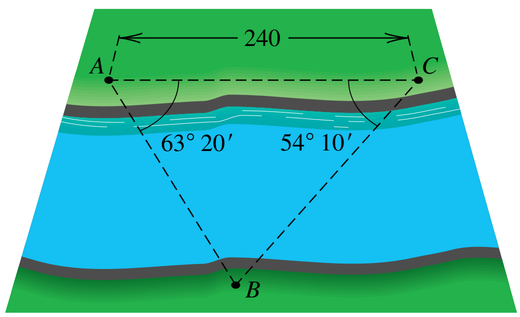
14 $\beta = 113°10'$, $b = 248$, $c = 195$

15 $\beta = 121.624°$, $b = 0.283$, $c = 0.178$

16 $\gamma = 73.01°$, $a = 17.31$, $c = 20.24$

17 **Topografía** Para hallar la distancia entre dos puntos A y B que se encuentran en márgenes opuestas de un río, un topógrafo traza un segmento de recta AC de 240 yardas de longitud a lo largo de una de las márgenes y determina que las medidas de los $\angle BAC$ y $\angle ACB$ son $63°20'$ y $54°10'$, respectivamente (vea la figura). Calcule la distancia entre A y B.

EJERCICIO 17



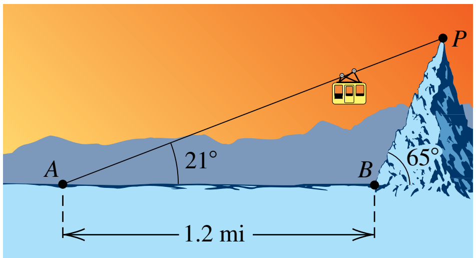
18 **Topografía** Para determinar la distancia entre dos puntos A y B, un topógrafo selecciona un punto C que está a 375 yardas de A y 530 yardas de B. Si $\angle BAC$ mide $49°30'$, calcule la distancia entre A y B.

19 **Ruta de un funicular** Como se ilustra en la figura de la página siguiente, un funicular lleva pasajeros de un punto A, que está a 1.2 millas de un punto B en la base de una montaña, a un punto P en la cima de la montaña. Los ángulos de elevación de P desde A y B son 21° y 65°, respectivamente.

(a) Calcule la distancia entre *A* y *P*.

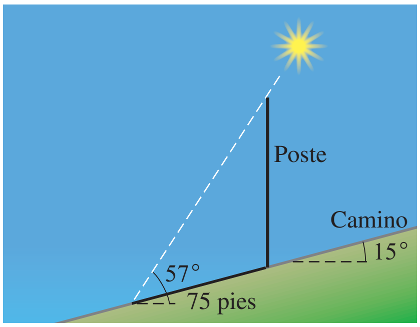
(b) Calcule la altura de la montaña.

EJERCICIO 19



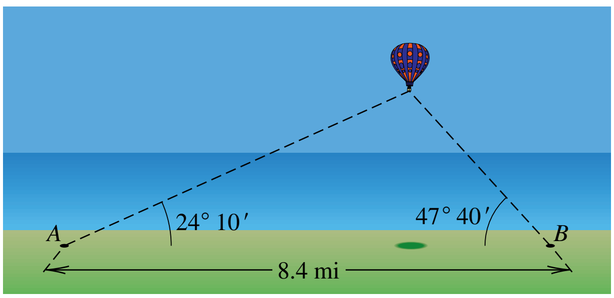
20 **Longitud de una sombra** Un camino recto forma un ángulo de 15° con la horizontal. Cuando el ángulo de elevación del sol es 57°, un poste vertical al lado del camino proyecta una sombra de 75 pies de largo directamente en el camino, como se muestra en la figura. Calcule la longitud del poste.

EJERCICIO 20



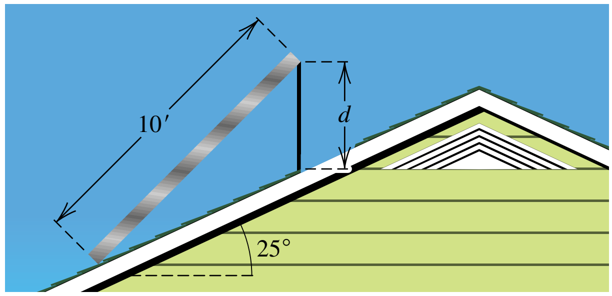
21 **Altura de un globo de aire caliente** Los ángulos de elevación de un globo desde dos puntos *A* y *B* al nivel del suelo son 24°10′ y 47°40′, respectivamente. Como se muestra en la figura, los puntos *A* y *B* están a 8.4 millas entre sí y el globo está entre los puntos, en el mismo plano vertical. Calcule la altura del globo sobre el suelo.

EJERCICIO 21



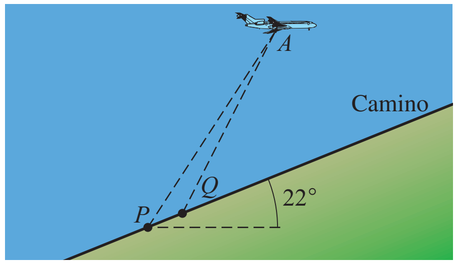
22 **Instalación de un panel solar** En la figura se muestra un panel solar de 10 pies de ancho que se va a unir a un techo que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Calcule la longitud *d* del puntal que es necesario para que el panel forme un ángulo de 45° con la horizontal.

EJERCICIO 22



23 **Distancia a un avión** Un camino recto forma un ángulo de 22° con la horizontal. Desde un cierto punto *P* en el camino, el ángulo de elevación de un avión en el punto *A* es 57°. En el mismo instante, desde otro punto *Q*, a 100 metros más arriba en el camino, el ángulo de elevación es 63°. Como se indica en la figura, los puntos *P*, *Q* y *A* se encuentran en el mismo plano vertical. Calcule la distancia de *P* al avión.

EJERCICIO 23



24 **Topografía** Un topógrafo observa que la dirección del punto *A* al *B* es S63°O y la dirección de *A* a *C* es S38°O. La distancia de *A* a *B* es 239 yardas y la distancia de *B* a *C* es 374 yardas. Calcule la distancia de *A* a *C*.

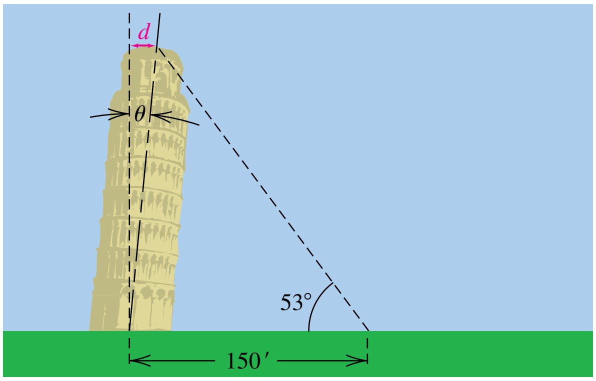
25 **Avistar un incendio forestal** Un guardabosque que se encuentra en un punto de observación *A* avista un incendio en la dirección N27°10′E. Otro guardabosque que está en un punto de observación *B*, a 6.0 millas al este de *A* avista el mismo incendio en N52°40′O. Calcule la distancia desde cada uno de los puntos de observación al incendio.

26 **La torre inclinada de Pisa** La torre inclinada de Pisa estaba originalmente perpendicular al suelo y tenía 179 pies de altura. Debido al hundimiento de la tierra, ahora está inclinada a un cierto ángulo θ con respecto a la perpendicular, como se ve en la figura. Cuando la cima de la torre se ve desde un punto a 150 pies del centro de su base, el ángulo de elevación es 53°.

(a) Calcule el ángulo θ.

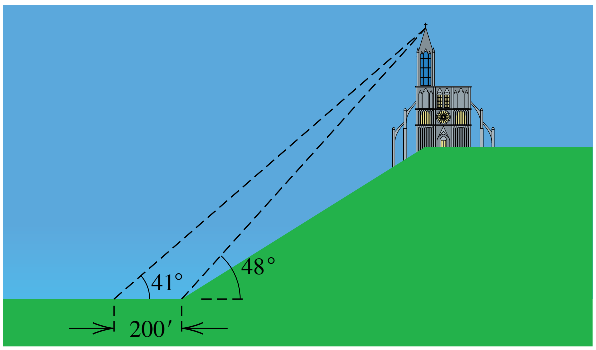
(b) Calcule la distancia *d* que el centro de la cima de la torre se ha movido de la perpendicular.

EJERCICIO 26



27 **Altura de una catedral** Una catedral está situada en una colina, como se ve en la figura. Cuando la cima de la torre se ve desde la base de la colina, el ángulo de elevación es 48°; cuando se ve a una distancia de 200 pies de la base de la colina, el ángulo de elevación es 41°. La colina sube a un ángulo de 32°. Calcule la altura de la catedral.

EJERCICIO 27

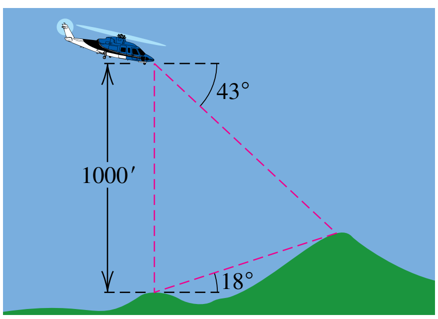


28 **Avistamiento desde un helicóptero** Un helicóptero permanece en posición fija a una altitud de 1000 pies sobre el pico de una montaña de 5210 pies, como se ve en la figura; un segundo pico más alto se ve desde la cima de la montaña y el helicóptero. De este último, el ángulo de depresión es 43° y desde la cima de la montaña el ángulo de elevación es 18°.

(a) Calcule la distancia de pico a pico.

(b) Calcule la altitud del pico más alto.

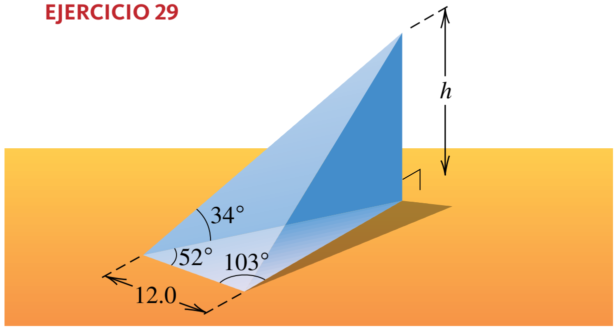
EJERCICIO 28



29 El volumen V del prisma triangular recto que se muestra en la figura es $\frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura del prisma.

(a) Calcule h. **(b)** Calcule V.

EJERCICIO 29



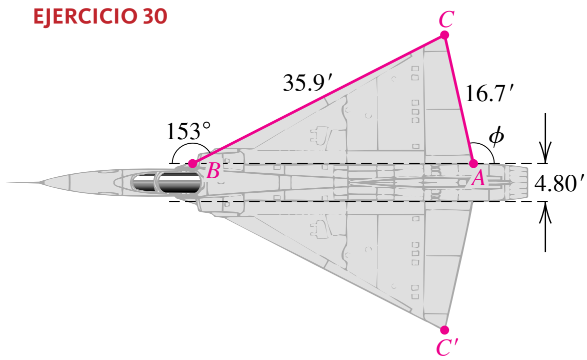
30 **Diseño de un avión caza a reacción** En la figura se muestra un plano de la parte superior del ala de un avión caza a reacción.

(a) Calcule el ángulo ϕ.

(b) Si el fuselaje mide 4.80 pies de ancho, calcule la envergadura del ala CC'.

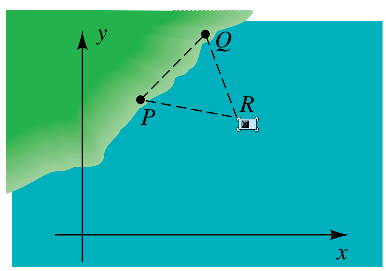
(c) Calcule el área del triángulo ABC.

EJERCICIO 30



31 **Software para topógrafos** El software para topógrafos hace uso de sistemas de coordenadas para localizar posiciones geográficas. Un pozo petrolífero situado frente a la costa se ve desde los puntos P y Q, y se encuentra que $\angle QPR$ y $\angle RQP$ miden 55°50′ y 65°22′, respectivamente. Si los puntos P y Q tienen coordenadas (1487.7, 3452.8) y (3145.8, 5127.5), respectivamente, calcule las coordenadas de R.

EJERCICIO 31



8.2 La ley de los cosenos

En la sección precedente expresamos que la ley de los senos no se puede aplicar directamente para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuángulo cuando se da cualquiera de los siguientes:

(1) dos lados y el ángulo *entre* ellos (LAL)

(2) tres lados (LLL)

Para estos casos podemos aplicar la *ley de los cosenos* que sigue:

La ley de los cosenos

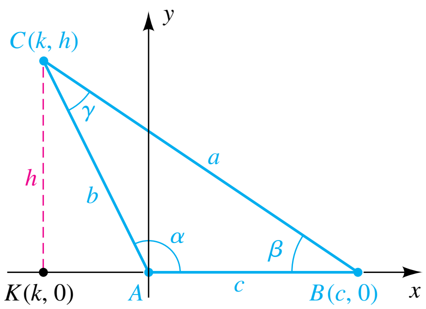
Si ABC es un triángulo marcado en la forma acostumbrada (como en la figura 1), entonces

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

FIGURA 1



DEMOSTRACIÓN Demostremos la primera fórmula. Dado el triángulo ABC, ponga α en posición estándar, como se ilustra en la figura 1. Hemos dibujado α como obtuso, pero nuestra exposición también es válida si α es agudo. Considere la línea interrumpida que pasa por C, paralela al eje y y que cruza el eje x en el punto $K(k, 0)$. Si hacemos $d(C, K) = h$, entonces C tiene coordenadas (k, h). Por la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo,

$$\cos \alpha = \frac{k}{b} \qquad \text{y} \qquad \text{sen } \alpha = \frac{h}{b}.$$

Despejando k y h obtenemos

$$k = b \cos \alpha \qquad \text{y} \qquad h = b \text{ sen } \alpha.$$

Como el segmento AB tiene longitud c, las coordenadas de B son $(c, 0)$ y obtenemos lo siguiente:

$a^2 = [d(B, C)]^2 = (k - c)^2 + (h - 0)^2$	fórmula de la distancia
$= (b \cos \alpha - c)^2 + (b \sin \alpha)^2$	sustituya por k y h
$= b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 + b^2 \sin^2 \alpha$	eleve al cuadrado
$= b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha$	factorice los términos primero y último
$= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$	identidad de Pitágoras

Nuestro resultado es la primera fórmula expresada en la ley de los cosenos. Las fórmulas segunda y tercera se pueden obtener al poner β y γ, respectivamente, en posición estándar en un sistema de coordenadas. ■

Note que si $\alpha = 90°$ en la figura 1, entonces $\cos \alpha = 0$ y la ley de los cosenos se reduce a $a^2 = b^2 + c^2$. Esto demuestra que el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

En lugar de memorizar cada una de las tres fórmulas de la ley de los cosenos, es más cómodo recordar el siguiente enunciado, que toma todos ellas en cuenta.

La ley de los cosenos (forma general)

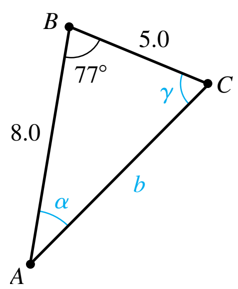
El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los otros dos lados y el coseno del ángulo entre ellos

Dados dos lados y el ángulo incluido de un triángulo, podemos usar la ley de los cosenos para hallar el tercer lado. Entonces podemos usar la ley de los senos para hallar otro ángulo del triángulo. Siempre que se siga este procedimiento, es mejor hallar el ángulo opuesto al lado más corto, puesto que ese ángulo es siempre agudo. En esta forma, evitamos la posibilidad de obtener dos soluciones cuando resolvamos una ecuación trigonométrica que contenga ese ángulo, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 **Usar la ley de los cosenos (LAL)**

Resuelva el $\triangle ABC$, dados $a = 5.0$, $c = 8.0$ y $\beta = 77°$.

FIGURA 2



SOLUCIÓN El triángulo se encuentra en la figura 2. Como β es el ángulo *entre* los lados a y c, empezamos por aproximar b (el lado opuesto a β) como sigue:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta && \text{ley de los cosenos} \\ &= (5.0)^2 + (8.0)^2 - 2(5.0)(8.0)\cos 77° && \text{sustituya por } a, c \text{ y } \beta \\ &= 89 - 80\cos 77° \approx 71.0 && \text{simplifique y aproxime} \\ b &\approx \sqrt{71.0} \approx 8.4 && \text{tome la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Encontremos primero otro ángulo del triángulo usando la ley de los senos. De acuerdo con las observaciones que preceden a este ejemplo, aplicaremos la ley de los senos y hallaremos α porque es el ángulo opuesto al lado más corto a.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} &= \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} && \text{ley de los senos} \\ \operatorname{sen}\alpha &= \frac{a\operatorname{sen}\beta}{b} && \text{despeje sen } \alpha \\ &\approx \frac{5.0\operatorname{sen}77°}{\sqrt{71.0}} \approx 0.5782 && \text{sustituya y aproxime} \end{aligned}$$

Como α es agudo,

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0.5782) \approx 35.3° \approx 35°.$$

Por último, como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, tenemos

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 35° - 77° = 68°.$$ ■

Dados los tres lados de un triángulo, podemos usar la ley de los cosenos para hallar *cualquiera* de los tres ángulos. Siempre encontraremos primero el ángulo más grande, es decir, *el ángulo opuesto al lado más largo* porque esta práctica garantiza que los ángulos restantes sean agudos. A continuación podemos hallar otro ángulo del triángulo al usar ya sea la ley de los senos o la ley de los cosenos. Note que cuando un ángulo se encuentra por medio de la ley de los cosenos, no hay caso ambiguo porque siempre obtenemos un ángulo único entre 0° y 180°.

EJEMPLO 2 Usar la ley de los cosenos (LLL)

Si el triángulo *ABC* tiene lados $a = 90$, $b = 70$ y $c = 40$, calcule los ángulos α, β y γ al grado más cercano.

SOLUCIÓN De acuerdo con las observaciones que preceden a este ejemplo, primero hallamos al ángulo opuesto al lado más largo *a*. Así, escogemos la forma de la ley de los cosenos que contiene a α y procedemos como sigue:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{despeje } \cos\alpha$$

$$= \frac{70^2 + 40^2 - 90^2}{2(70)(40)} = -\frac{2}{7} \qquad \text{sustituya y simplifique}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\tfrac{2}{7}\right) \approx 106.6° \approx 107° \qquad \text{aproxime } \alpha$$

Ahora podemos usar ya sea la ley de los senos o la ley de los cosenos para hallar β. Usemos la ley de los cosenos en este caso:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \text{despeje } \cos\beta$$

$$= \frac{90^2 + 40^2 - 70^2}{2(90)(40)} = \frac{2}{3} \qquad \text{sustituya y simplifique}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\right) \approx 48.2° \approx 48° \qquad \text{aproxime } \beta$$

En este punto en la solución, podríamos hallar γ si usamos la relación $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Pero si α o β se calcularon de manera incorrecta, entonces γ sería incorrecta. Alternativamente, podemos calcular γ y luego comprobar que la suma de los tres ángulos sea 180°. Así,

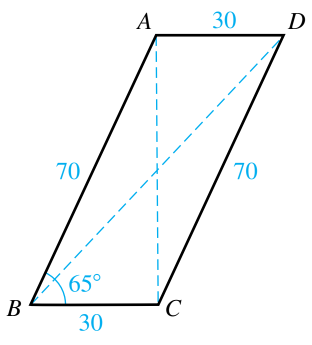
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \text{de modo que} \quad \gamma = \cos^{-1}\frac{90^2 + 70^2 - 40^2}{2(90)(70)} \approx 25°.$$

Note que $\alpha + \beta + \gamma = 107° + 48° + 25° = 180°$. ■

EJEMPLO 3 Calcular las diagonales de un paralelogramo

Un paralelogramo tiene lados de longitudes de 30 centímetros y 70 centímetros y un ángulo de 65°. Calcule la longitud de cada diagonal al centímetro más cercano

FIGURA 3



SOLUCIÓN El paralelogramo *ABCD* y sus diagonales *AC* y *BD* se muestran en la figura 3. Usando el triángulo *ABC* con $\angle ABC = 65°$, podemos calcular *AC* como sigue:

$$(AC)^2 = 30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 65° \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$\approx 900 + 4900 - 1775 = 4025 \qquad \text{aproxime}$$

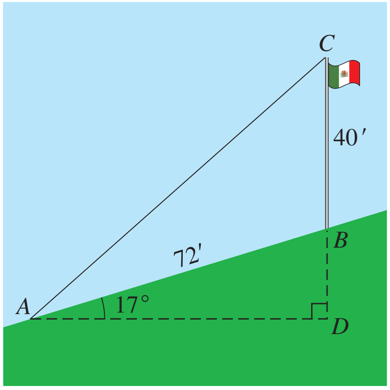
$$AC \approx \sqrt{4025} \approx 63 \text{ cm} \qquad \text{saque la raíz cuadrada}$$

Del mismo modo, usando el triángulo *BAD* y $\angle BAD = 180° - 65° = 115°$ podemos aproximar *BD* como sigue:

$$(BD)^2 = 30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 115° \approx 7575 \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$BD \approx \sqrt{7575} \approx 87 \text{ cm} \qquad \text{tome la raíz cuadrada}$$ ■

FIGURA 4



EJEMPLO 4 Hallar la longitud de un cable

Un poste vertical de 40 pies de alto se encuentra sobre una ladera que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Calcule la longitud mínima de cable que llegará de lo alto del poste a un punto situado a 72 pies colina abajo desde la base del poste.

SOLUCIÓN El diagrama de la figura 4 describe la información dada. Deseamos hallar AC. Al consultar la figura, vemos que

$$\angle ABD = 90° - 17° = 73° \qquad \text{y} \qquad \angle ABC = 180° - 73° = 107°.$$

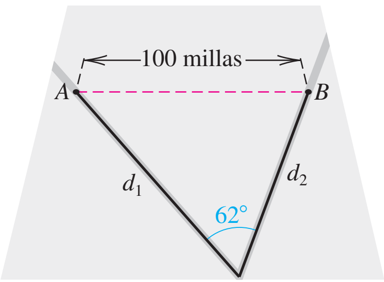
Usando el triángulo ABC, podemos calcular AC como sigue:

$$(AC)^2 = 72^2 + 40^2 - 2(72)(40)\cos 107° \approx 8468 \qquad \text{ley de los cosenos}$$
$$AC \approx \sqrt{8468} \approx 92 \text{ ft} \qquad \text{saque la raíz cuadrada}$$ ■

EJEMPLO 5 Encontrar la distancia entre objetos en movimiento

Dos camiones dejan una ciudad al mismo tiempo y viajan a lo largo de carreteras rectas que difieren en dirección por 62°. Si su velocidad es de 50 y 40 millas/horas, respectivamente, aproximadamente cuánto tiempo le toma a los camiones separarse 100 millas?

FIGURA 5



SOLUCIÓN Sea t el tiempo en horas después de que los camiones salen de la ciudad. Las distancias recorridas por éstos se ilustran en la figura 5. Podemos encontrar una expresión para AB de la siguiente manera:

$$(AB)^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos 62° \qquad \text{ley de los cosenos}$$
$$(AB)^2 = (50t)^2 + (40t)^2 - 2(50t)(40t)\cos 62° \qquad \text{use } d = rt$$
$$(AB)^2 = 2500t^2 + 1600t^2 - 4000t^2\cos 62° \qquad \text{multiplique}$$
$$(AB)^2 = (4100 - 4000\cos 62°)t^2 \qquad \text{factorice } t^2$$

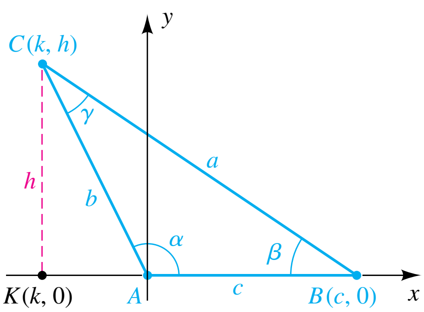
Queremos saber el valor de t para el cual los camiones están a 100 kilómetros de distancia, así que utilizamos la última ecuación para evaluar t^2, sustituimos 100 por AB y despejamos t:

$$t^2 = \frac{(AB)^2}{4100 - 4000\cos 62°} = \frac{100^2}{4100 - 4000\cos 62°},$$

entonces $$t = \frac{100}{\sqrt{4100 - 4000\cos 62°}} \approx 2.12 \text{ hr.}$$

Por lo tanto, los camiones estarán separados por 100 kilómetros de distancia en aproximadamente 2 horas y 7 minutos. ■

FIGURA 6



La ley de los cosenos se puede usar para deducir una fórmula para el área de un triángulo. Primero demostremos un resultado preliminar.

Dado el triángulo ABC, ponga el ángulo α en posición estándar (vea la figura 6). Como se ve en la demostración de la ley de los cosenos, la altura h del vértice C es $h = b$ sen α. Como el área $\mathcal{A}$ del triángulo está dada por $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ch$,vemos que

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha.$$

Nuestro argumento es independiente del ángulo específico que está en posición estándar. Al tomar β y γ en posición estándar, obtenemos las fórmulas

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ac \operatorname{sen} \beta \qquad \text{y} \qquad \mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma.$$

Las tres fórmulas están incluidas en el siguiente enunciado.

Área de un triángulo	El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados cualesquiera y el seno del ángulo entre ellos.

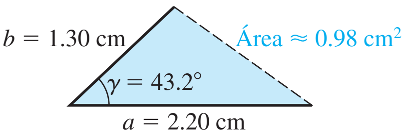
Los dos ejemplos siguientes ilustran usos de este resultado.

EJEMPLO 6 **Calcular el área de un triángulo**

Calcule el área del triángulo *ABC* si $a = 2.20$ cm, $b = 1.30$ cm y $\gamma = 43.2°$.

SOLUCIÓN Como γ es el ángulo entre los lados a y b como se muestra en la figura 6, podemos usar directamente el resultado precedente, como sigue:

FIGURA 7



$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma \qquad \text{fórmula del área de un triángulo}$$
$$= \tfrac{1}{2}(2.20)(1.30) \operatorname{sen} 43.2° \approx 0.98 \text{ cm}^2 \qquad \text{sustituya y calcule}$$ ■

EJEMPLO 7 **Calcular el área de un triángulo**

Aproxime el área del triángulo *ABC* si $a = 5.0$ cm, $b = 3.0$ cm y $\alpha = 37°$.

SOLUCIÓN Para aplicar la fórmula del área de un triángulo, debemos hallar el ángulo γ entre lados conocidos a y b. Como nos dan a, b y α, primero encontremos β como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} \qquad \text{ley de los senos}$$
$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} \qquad \text{despeje sen } \beta$$
$$= \frac{3.0 \operatorname{sen} 37°}{5.0} \qquad \text{sustituya por } b, \alpha \text{ y } a$$
$$\beta_R = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3.0 \operatorname{sen} 37°}{5.0}\right) \approx 21° \qquad \text{ángulo de referencia para } \beta$$
$$\beta \approx 21° \quad \text{o} \quad \beta \approx 159° \qquad \beta_R \text{ o } 180° - \beta_R$$

Rechazamos $\beta \approx 159°$, porque entonces $\alpha + \beta = 196° > 180°$. En consecuencia, $\beta \approx 21°$ y

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 37° - 21° = 122°.$$

Por último, calculamos el área del triángulo como sigue:

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma \qquad \text{fórmula del área de un triángulo}$$
$$\approx \tfrac{1}{2}(5.0)(3.0) \operatorname{sen} 122° \approx 6.4 \text{ cm}^2 \qquad \text{sustituya y aproxime}$$ ■

Usaremos el resultado precedente para el área de un triángulo para deducir la *fórmula de Herón*, que expresa el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados.

Fórmula de Heron

El área $\mathcal{A}$ de un triángulo de lados a, b y c está dada por

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

donde s es la mitad del perímetro, es decir, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

DEMOSTRACIÓN Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2(1 - \cos^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}bc(1 + \cos \alpha) \cdot \tfrac{1}{2}bc(1 - \cos \alpha)}\end{aligned}$$

Obtendremos la fórmula de Herón al sustituir las expresiones bajo el último signo de radical por expresiones que contengan sólo a, b y c. De la fórmula 1 de la ley de los cosenos despejamos $\cos \alpha$ y luego sustituimos, como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}bc(1 + \cos \alpha) &= \frac{1}{2}bc\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{1}{2}bc\left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4} \\ &= \frac{(b + c)^2 - a^2}{4} \\ &= \frac{(b + c) + a}{2} \cdot \frac{(b + c) - a}{2}\end{aligned}$$

Usamos el mismo tipo de manipulaciones en la segunda expresión bajo el signo de radical:

$$\frac{1}{2}bc(1 - \cos \alpha) = \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}$$

Si ahora sustituimos por las expresiones bajo el signo de radical, obtenemos

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{b + c + a}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}}.$$

Haciendo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, vemos que

$$s - a = \frac{b + c - a}{2}, \quad s - b = \frac{a - b + c}{2}, \quad s - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

La sustitución en la fórmula anterior para $\mathcal{A}$ nos da la fórmula de Herón. ■

EJEMPLO 8 **Usar la fórmula de Herón**

Un campo triangular tiene lados de longitudes 125 yardas, 160 yardas y 225 yardas. Calcule el número de acres en el campo. (Un acre equivale a 4840 yardas cuadradas.)

SOLUCIÓN Primero hallamos la mitad del perímetro del campo con $a = 125$, $b = 160$ y $c = 225$, así como los valores de $s - a$, $s - b$ y $s - c$:

$$s = \tfrac{1}{2}(125 + 160 + 225) = \tfrac{1}{2}(510) = 255$$
$$s - a = 255 - 125 = 130$$
$$s - b = 255 - 160 = 95$$
$$s - c = 255 - 225 = 30$$

Sustituyendo en la fórmula de Herón nos da

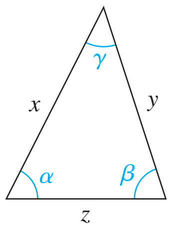
$$\mathscr{A} = \sqrt{(255)(130)(95)(30)} \approx 9720 \text{ yd}^2.$$

Como hay 4840 yardas cuadradas en un acre, el número de acres es $\frac{9720}{4840}$ o aproximadamente 2 ■

8.2 Ejercicios

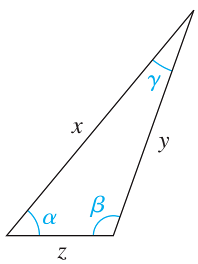
Ejer. 1–2: Use sentido común para relacionar las variables y los valores. (Los triángulos están trazados a escala y los ángulos se miden en radianes.)

1



(a) α	**(A)** 12.60
(b) β	**(B)** 1.10
(c) γ	**(C)** 10
(d) x	**(D)** 0.79
(e) y	**(E)** 13.45
(f) z	**(F)** 1.26

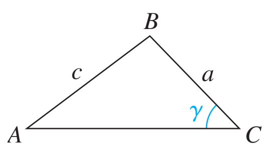
2



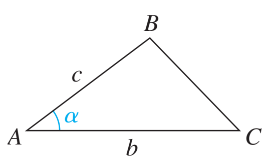
(a) α	**(A)** 3
(b) β	**(B)** 0.87
(c) γ	**(C)** 8.24
(d) x	**(D)** 1.92
(e) y	**(E)** 6.72
(f) z	**(F)** 0.35

Ejer. 3–4: Dadas las partes indicadas del $\triangle ABC$, ¿qué ángulo (α, β o γ) o lado (a, b o c) encontraría el lector a continuación y qué usaría para hallarlo?

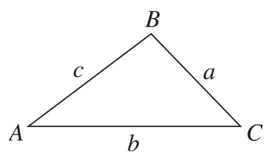
3 (a)



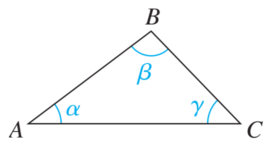
(b)



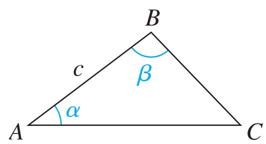
(c)



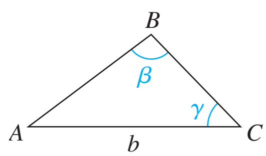
(d)



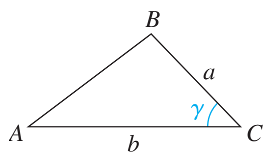
(e)



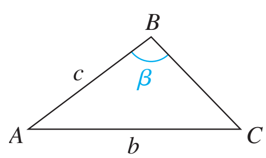
(f)



4 (a)

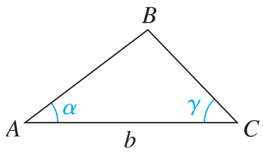


(b)

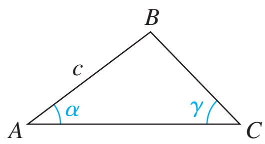


(continúa)

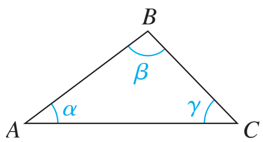
(c)



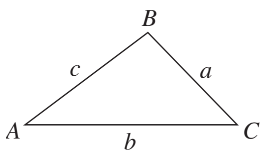
(d)



(e)



(f)



Ejer. 5–18: Resuelva el $\triangle ABC$

5	$\alpha = 60°$,	$b = 20$,	$c = 30$
6	$\gamma = 45°$,	$b = 10.0$,	$a = 15.0$
7	$\beta = 150°$,	$a = 150$,	$c = 30$
8	$\beta = 73°50'$,	$c = 14.0$,	$a = 87.0$
9	$\gamma = 115°10'$,	$a = 1.10$,	$b = 2.10$
10	$\alpha = 23°40'$,	$c = 4.30$,	$b = 70.0$
11	$a = 10$,	$b = 11$,	$c = 22$
12	$a = 3.7$,	$b = 5.6$,	$c = 9.8$
13	$a = 2.0$,	$b = 3.0$,	$c = 4.0$
14	$a = 10$,	$b = 15$,	$c = 12$
15	$a = 25.0$,	$b = 80.0$,	$c = 60.0$
16	$a = 8.5$,	$b = 11.7$,	$c = 13.1$
17	$a = 286.5$,	$b = 286.5$,	$c = 10.0$
18	$a = 20.0$,	$b = 20.0$,	$c = 10.0$

19 **Dimensiones de un terreno triangular** El ángulo en una esquina de un terreno triangular es 73°40′ y los lados que coinciden en esta esquina miden 175 pies y 150 pies de largo. Calcule la longitud del tercer lado.

20 **Topografía** Para hallar la distancia entre dos puntos *A* y *B*, un topógrafo selecciona un punto *C* que está a 420 yardas de *A* y a 540 yardas de *B*. Si el ángulo *ACB* mide 63°10’, calcule la distancia entre *A* y *B*.

21 **Distancia entre automóviles** Dos automóviles salen de una ciudad al mismo tiempo y viajan a lo largo de carreteras rectas que difieren en dirección por 84°. Si sus velocidades son 60 mi/h y 45 mi/h, respectivamente, ¿aproximadamente a qué distancia están uno de otro al término de 20 minutos?

22 **Ángulos de un terreno triangular** Un terrero triangular tiene lados de longitudes 420 pies, 350 pies y 180 pies. Calcule el mínimo ángulo entre los lados.

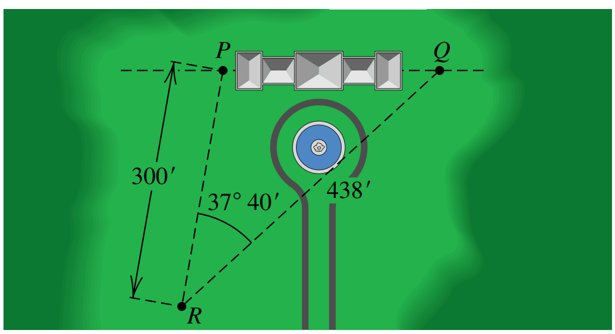
23 **Distancia entre barcos** Un barco sale de puerto a la 1:00 p.m. y navega al S35°E a una velocidad de 24 mi/h. Otro barco sale del mismo puerto a la 1:30 p.m. y navega al S20°O a 18 mi/h. ¿Aproximadamente a qué distancia están uno del otro a las 3:00 p.m.?

24 **Distancia de vuelo** Un avión vuela 165 millas desde el punto *A* en la dirección 130° y luego en la dirección 245° otras 80 millas. ¿Aproximadamente a qué distancia de *A* está el avión?

25 **Ruta de un corredor** Un deportista corre con velocidad constante de una milla cada 8 minutos en dirección S40°E durante 20 minutos y luego en dirección N20°E los siguientes 16 minutos. Calcule, al décimo de milla más cercano, la distancia en línea recta de la meta al punto de partida de la ruta del corredor.

26 **Topografía** Dos puntos *P* y *Q* al nivel del terreno están en lados opuestos de un edificio. Para hallar las distancias entre los puntos, un topógrafo selecciona un punto *R* que está a 300 pies de *P* y a 438 pies de *Q*, y luego determina que el ángulo *PRQ* mide 37°40′ (vea la figura). Calcule la distancia entre *P* y *Q*.

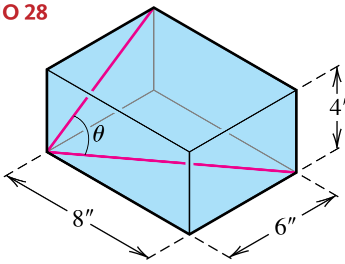
EJERCICIO 26



27 **Curso de un bote de motor** Un bote de motor se desplaza a lo largo de un curso triangular que tiene lados de longitudes 2 kilómetros, 4 kilómetros y 3 kilómetros, respectivamente. El primer lado fue recorrido en la dirección N20°O y el segundo en una dirección Sθ°O, donde θ° es la medida en grados de un ángulo agudo. Calcule, al minuto más cercano, la dirección en la que se recorrió el tercer lado.

28 **Ángulo de una caja** La caja rectangular que se ilustra en la figura tiene dimensiones de $8'' \times 6'' \times 4''$. Calcule el ángulo θ formado por una diagonal de la base y una diagonal del lado de $6'' \times 4''$.

EJERCICIO 28

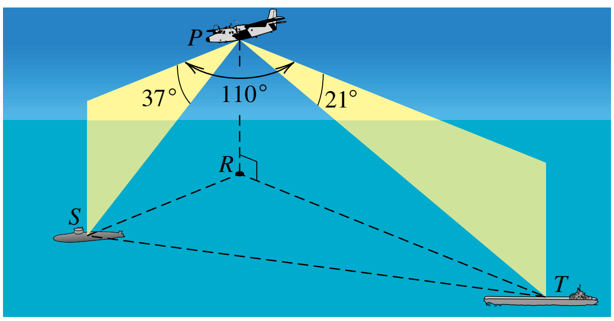


29 **Distancias en un diamante de béisbol** Un diamante de béisbol tiene cuatro bases (que forman un cuadro) que están a 90 pies entre sí; el montículo del pitcher está a 60.5 pies de la placa del *home*. Calcule la distancia del montículo del pitcher a cada una de las otras tres bases.

30 Un rombo tiene lados de 100 centímetros de longitud y el ángulo en uno de los vértices es 70°. Aproxime las longitudes de las diagonales al décimo de centímetro más cercano.

31 **Reconocimiento** Un avión de reconocimiento P, que vuela a 10,000 pies sobre un punto R en la superficie del agua, localiza un submarino S a un ángulo de depresión de 37° y a un buque tanque T a un ángulo de depresión de 21°, como se muestra en la figura. Además, se encuentra que $\angle SPT$ mide 110°. Calcule la distancia entre el submarino y el buque tanque.

EJERCICIO 31

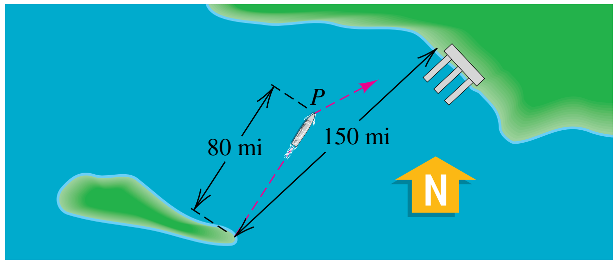


32 **Corrección del curso de un barco** Un barco de excursión fija un rumbo N47°E desde una isla a un puerto en tierra firme, que está a 150 millas de distancia. Después de avanzar en fuertes corrientes, el barco está fuera de curso en una posición P que está a N33°E y a 80 millas de la isla, como se ilustra en la figura.

(a) ¿Aproximadamente a qué distancia está el barco del puerto?

(b) ¿Qué dirección debe tomar el barco para corregir su curso?

EJERCICIO 32

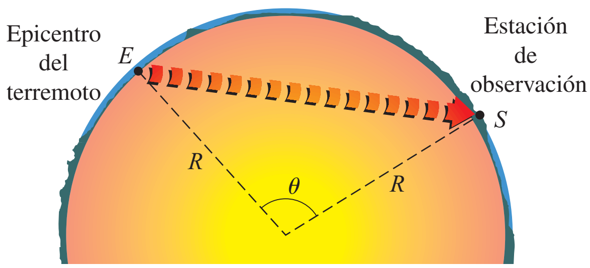


33 **Sismología** Unos sismólogos investigan la estructura del interior de la Tierra al analizar ondas sísmicas causadas por terremotos. Si se supone que el interior de nuestro planeta es homogéneo, entonces estas ondas se desplazarán en líneas rectas a una velocidad v constante. La figura muestra una vista en sección transversal de la Tierra, con el epicentro en E y una estación de observación en S. Use la ley de los cosenos para demostrar que el tiempo t para que una onda se desplace por el interior de la Tierra de E a S está dado por

$$t = \frac{2R}{v} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2},$$

donde R es el radio de la Tierra y θ es el ángulo indicado con vértice en el centro de la Tierra.

EJERCICIO 33

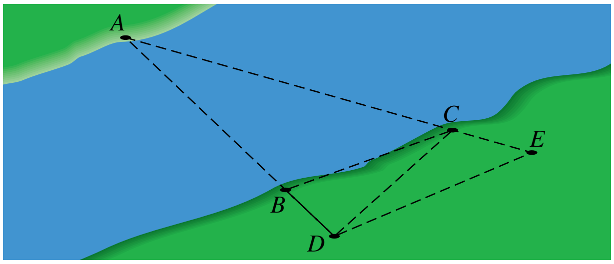


34 **Cálculo de distancias** La distancia entre las márgenes del río que se ve en la figura de la siguiente página se puede hallar sin medir ángulos. Se seleccionan dos puntos B y C de la orilla opuesta y los segmentos de recta AB y AC se prolongan como se muestra. Los puntos D y E se seleccionan como se indica y se miden las distancias BC, BD, BE, CD y CE. Suponga que BC = 184 ft, BD = 102 ft, BE = 218 ft, CD = 236 ft y CE = 80 ft.

(a) Calcule las distancias AB y AC.

(b) Calcule la distancia más corta que hay del punto A al otro lado del río.

EJERCICIO 34



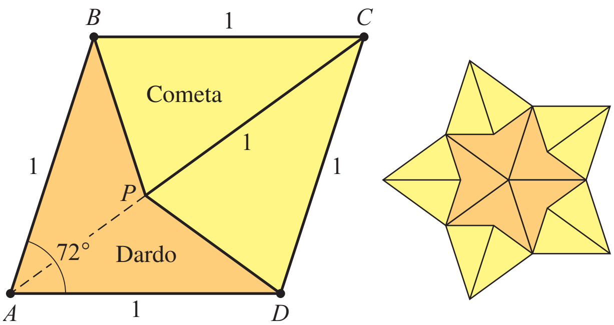
35 **Tejas de Penrose** Estas tejas de cerámica se forman de un rombo *ABCD* con lados de longitud 1 y un ángulo interior de 72°. Primero se localiza un punto *P* que se encuentra en la diagonal *AC* y está a una distancia 1 del vértice *C*, y luego se trazan los segmentos *PB* y *PD* a los otros vértices de la diagonal, como se ve en la figura. Las dos tejas formadas se llaman dardo y cometa. Las contrapartes tridimensionales de estas tejas se han aplicado en química molecular.

(a) Encuentre las medidas en grados de $\angle BPC$, $\angle APB$ y $\angle ABP$.

(b) Calcule, al 0.01 más cercano, la longitud del segmento *BP*.

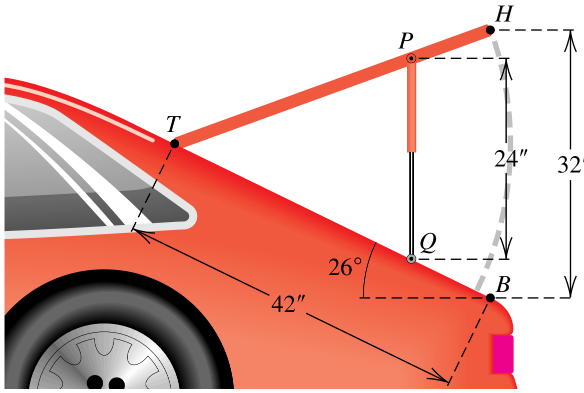
(c) Calcule, al 0.01 más cercano, el área de una cometa y el área de un dardo.

EJERCICIO 35



36 **Diseño de automotores** La puerta del portamaletas de un vehículo mide 42 pulgadas de largo. Un soporte de 24 pulgadas de largo se ha de conectar a la puerta y carrocería del auto de modo que, cuando la puerta se abra por completo, el soporte sea vertical y el espacio libre trasero sea de 32 pulgadas, como se ve en la figura. Calcule las longitudes de los segmentos *TQ* y *TP*.

EJERCICIO 36



Ejer. 37–44: Calcule el área del triángulo *ABC*.

37 $\alpha = 60°$, $b = 20$, $c = 30$

38 $\gamma = 45°$, $b = 10.0$, $a = 15.0$

39 $\alpha = 40.3°$, $\beta = 62.9°$, $b = 5.63$

40 $\alpha = 35.7°$, $\gamma = 105.2°$, $b = 17.2$

41 $\alpha = 80.1°$, $a = 8.0$, $b = 3.4$

42 $\gamma = 32.1°$, $a = 14.6$, $c = 15.8$

43 $a = 25.0$, $b = 80.0$, $c = 60.0$

44 $a = 50.0$, $b = 50.0$, $c = 25.0$

Ejer. 45–46: Un campo triangular tiene lados de longitudes *a*, *b* y *c* (en yardas). Calcule el número de acres del campo (1 acre = 4840 yardas^2).

45 $a = 600$, $b = 700$, $c = 724$

46 $a = 320$, $b = 350$, $c = 500$

Ejer. 47–48: Calcule el área de un paralelogramo que tiene lados de longitudes *a* y *b* (en pies) si un ángulo en un vértice tiene la medida de θ.

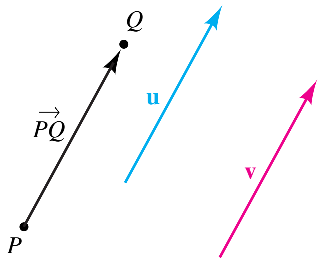
47 $a = 12.0$, $b = 16.0$, $\theta = 40°$

48 $a = 40.3$, $b = 52.6$, $\theta = 100°$

8.3 Vectores

Cantidades como área, volumen, longitud, temperatura y tiempo tienen sólo magnitudes y pueden ser caracterizadas por completo por un solo número real (con una unidad apropiada de medida como por ejemplo pulg^2, pies^3, cm, grado o segundo). Una cantidad de este tipo es una **cantidad escalar** y el número real correspondiente es un **escalar.** Un concepto como el de velocidad o fuerza tienen magnitud y dirección y con frecuencia se representan con un **segmento de recta dirigido**; es decir, un segmento de recta al que se le asigna una dirección. Otro nombre para un segmento de recta dirigido es **vector.**

FIGURA 1
Vectores iguales



Como se ve en la figura 1, usamos $\overrightarrow{PQ}$ para denotar el vector con **punto inicial** P y **punto terminal** Q, e indicamos la dirección del vector al poner la punta de la flecha en Q. La **magnitud** de $\overrightarrow{PQ}$ es la longitud del segmento PQ y está denotada por $\|\overrightarrow{PQ}\|$. Al igual que en la figura, usamos letras en negritas como **u** y **v** para denotar vectores cuyos puntos finales no están especificados. En trabajos manuscritos, con frecuencia se usa notación como $\vec{u}$ o $\vec{v}$.

Se dice que los vectores que tienen la misma magnitud y dirección son **equivalentes**. En matemáticas, un vector está determinado sólo por su magnitud y dirección, no por su ubicación. Así, consideramos vectores equivalentes, semejantes a los de la figura 1, como **iguales** y escribimos

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

De este modo, *un vector puede ser trasladado de un lugar a otro siempre que no se cambie su magnitud ni su dirección.*

Podemos representar muchos conceptos físicos por medio de vectores. Para ilustrar, suponga que un avión está descendiendo a una velocidad constante 100 mi/h y la línea de vuelo forma un ángulo de 20° con la horizontal. Estos dos hechos están representados por el vector **v** de magnitud 100 en la figura 2. El vector **v** es un **vector velocidad.**

FIGURA 2 Vector velocidad

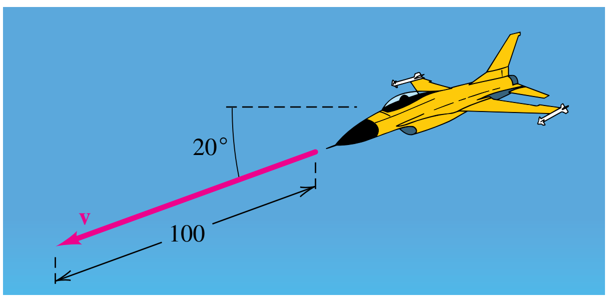
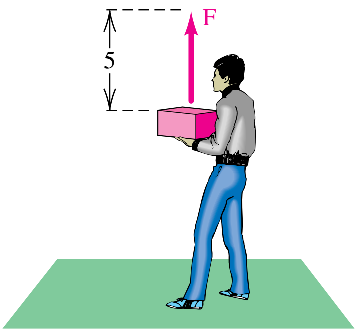


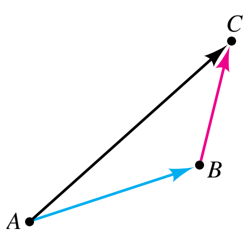
FIGURA 3
Vector fuerza



Un vector que representa un empuje o tracción de algún tipo es un **vector fuerza.** La fuerza ejercida cuando una persona sostiene un peso de 5 libras está ilustrada por el vector **F** de magnitud 5 en la figura 3. Esta fuerza tiene la misma magnitud que la fuerza ejercida sobre el peso por la gravedad, pero actúa en dirección opuesta. En consecuencia, no hay movimiento hacia arriba o hacia abajo.

A veces usamos $\overrightarrow{AB}$ para representar la trayectoria de un punto (o partícula) cuando se mueve a lo largo del segmento de recta de A a B. En esos casos decimos que $\overrightarrow{AB}$ es un **desplazamiento** del punto (o partícula). Al igual que en la figura 4, un desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ seguido por un desplazamiento $\overrightarrow{BC}$ lleva al mismo punto que el solo desplazamiento $\overrightarrow{AC}$. Por definición, el vector AC es la **suma** de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, y escribimos

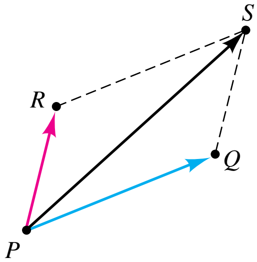
FIGURA 4
Suma de vectores



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Debido a que los vectores se pueden trasladar de una ubicación a otra, dos vectores *cualesquiera* se pueden sumar si se coloca el punto inicial del segundo vector en el punto terminal del primero y luego se dibuja un segmento de recta del punto inicial del primero al punto terminal del segundo, como en la figura 4. A este método de suma vectorial se le conoce como la **ley del triángulo.**

FIGURA 5
Fuerza resultante



Otra forma de hallar la suma es escoger el vector PQ y el vector PR que son iguales a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, y tienen el mismo punto inicial P, como se ve en la figura 5. Si construimos el paralelogramo $RPQS$, entonces, como $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$, se deduce que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$. Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son dos fuerzas que actúan en P, entonces $\overrightarrow{PS}$ es la **fuerza resultante**; es decir, la fuerza única que produce el mismo efecto que las dos fuerzas combinadas. A este método de suma vectorial se le conoce como la **ley del paralelogramo.**

Si m es un escalar y $\mathbf{v}$ es un vector, entonces $m\mathbf{v}$ se define como un vector cuya magnitud es $|m|$ veces $\|\mathbf{v}\|$ (la magnitud de $\mathbf{v}$) y cuya dirección puede ser la misma de $\mathbf{v}$ (si $m > 0$) u opuesta a la de $\mathbf{v}$ (si $m < 0$). Las ilustraciones se dan en la figura 6. A $m\mathbf{v}$ se le conoce como **múltiplo escalar** de $\mathbf{v}$.

FIGURA 6 Múltiplos escalares

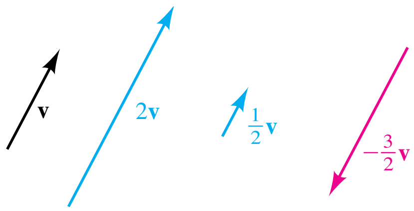
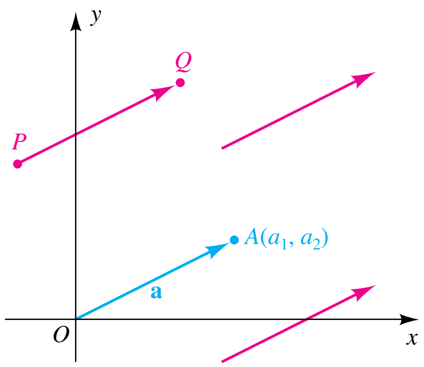
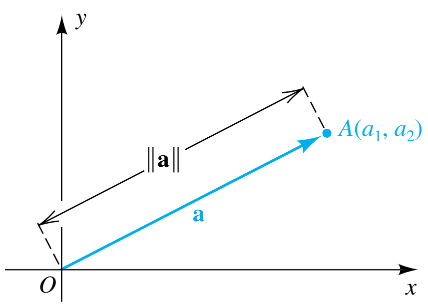


FIGURA 7



En el resto de esta sección restringiremos nuestro estudio a los vectores que se encuentran en un plano xy. Si $\overrightarrow{PQ}$ es uno de estos vectores, entonces, como se indica en la figura 7, existen muchos otros vectores equivalentes a $\overrightarrow{PQ}$; sin embargo, hay exactamente *un* vector $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ equivalente con punto inicial en el origen. En este sentido, *cada vector determina un par ordenado único de números reales,* que son las coordenadas (a_1, a_2) del punto terminal A. Recíprocamente, todo par ordenado (a_1, a_2) determina al vector OA, donde A tiene coordenadas (a_1, a_2). En consecuencia, *hay una correspondencia biunívoca entre vectores en un plano xy y pares ordenados de números reales.* Esta correspondencia nos permite interpretar un vector como un segmento de recta dirigido *y además* como un par ordenado de números reales. Para evitar confusiones con la notación de intervalos abiertos o puntos, se usa el símbolo $\langle a_1, a_2\rangle$ (conocido como *notación de cuña*) para un par ordenado que represente un vector y lo denotamos con una letra en negritas, por ejemplo $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$. Los números a_1 y a_2 son los **componentes** del vector $\langle a_1, a_2\rangle$. Si A es el punto (a_1, a_2), como en la figura 7, a $\overrightarrow{OA}$ se le llama **vector de posición** para $\langle a_1, a_2\rangle$ o para el *punto A*.

FIGURA 8
Magnitud $\|\mathbf{a}\|$



El análisis anterior evidencia que los vectores tienen dos naturalezas, una geométrica y otra algebraica. Muchas veces no distinguimos entre ellas, pero a partir de nuestro estudio debe quedar claro cuándo se hace referencia a pares ordenados o a segmentos de recta dirigidos.

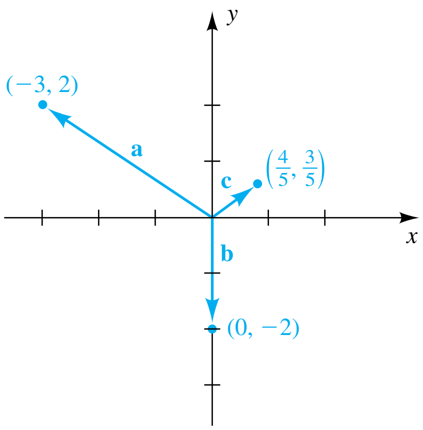
La *magnitud* del vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ es, por definición, la longitud de su vector de posición OA, como se ilustra en la figura 8.

Definición de la magnitud de un vector

La **magnitud del vector a** $= \langle a_1, a_2\rangle$, denotada por $\|\mathbf{a}\|$, está dada por

$$\|\mathbf{a}\| = \|\langle a_1, a_2\rangle\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

FIGURA 9



EJEMPLO 1 **Hallar la magnitud de un vector**

Trace los vectores

$$\mathbf{a} = \langle -3, 2\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 0, -2\rangle, \qquad \mathbf{c} = \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}$$

en un plano de coordenadas y encuentre la magnitud de cada vector.

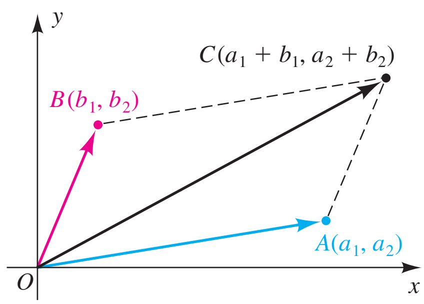
SOLUCIÓN Los vectores están trazados en la figura 9. Por la definición de la magnitud de un vector,

$$\|\mathbf{a}\| = \|\langle -3, 2\rangle\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$\|\mathbf{b}\| = \|\langle 0, -2\rangle\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\|\mathbf{c}\| = \left\|\left\langle \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\right\rangle\right\| = \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{16}{25} + \tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{25}{25}} = 1. \qquad \blacksquare$$

Considere el vector OA y el vector OB correspondientes a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$, respectivamente, como se ilustra en la figura 10. Si $\overrightarrow{OC}$ corresponde a $\mathbf{c} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$ podemos demostrar, usando pendientes, que los puntos O, A, C y B son vértices de un paralelogramo; esto es,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$

FIGURA 10



La expresión de esta ecuación en términos de pares ordenados lleva a lo siguiente.

Definición de suma de vectores	$\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$

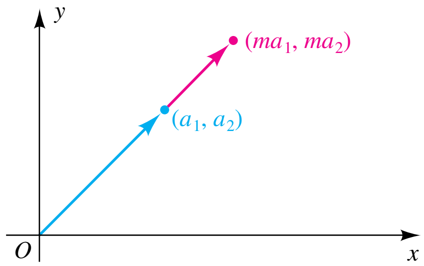
Note que para sumar dos vectores, se suman los componentes correspondientes.

ILUSTRACIÓN **Suma de vectores**

- $\langle 3, -4\rangle + \langle 2, 7\rangle = \langle 3 + 2, -4 + 7\rangle = \langle 5, 3\rangle$
- $\langle 5, 1\rangle + \langle -5, 1\rangle = \langle 5 + (-5), 1 + 1\rangle = \langle 0, 2\rangle$

También se puede demostrar que si m es un escalar y $\overrightarrow{OA}$ corresponde a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, entonces el par ordenado determinado por $m\overrightarrow{OA}$ es (ma_1, ma_2), como se ilustra en la figura 11 para $m > 1$. Esto lleva a la siguiente definición.

FIGURA 11



Definición de un múltiplo escalar de un vector

$$m\langle a_1, a_2\rangle = \langle ma_1, ma_2\rangle$$

Por tanto, para hallar un múltiplo escalar de un vector, multiplicamos cada componente por el escalar.

ILUSTRACIÓN **Múltiplo escalar de un vector**

- $2\langle -3, 4\rangle = \langle 2(-3), 2(4)\rangle = \langle -6, 8\rangle$
- $-2\langle -3, 4\rangle = \langle (-2)(-3), (-2)(4)\rangle = \langle 6, -8\rangle$
- $1\langle 5, 2\rangle = \langle 1 \cdot 5, 1 \cdot 2\rangle = \langle 5, 2\rangle$

EJEMPLO 2 Hallar un múltiplo escalar de un vector

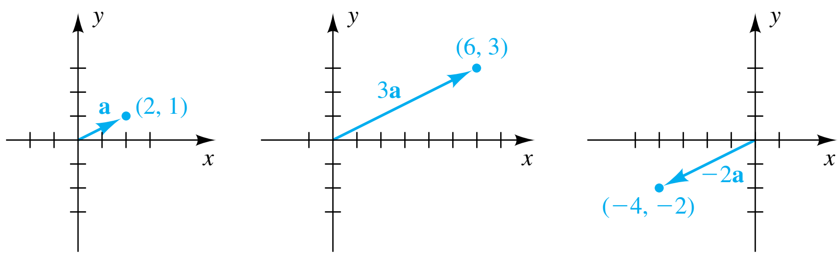
Si $\mathbf{a} = \langle 2, 1\rangle$, encuentre $3\mathbf{a}$ y $-2\mathbf{a}$ y trace cada vector en un plano de coordenadas.

SOLUCIÓN Con la definición de múltiples escalares de vectores encontramos

$$3\mathbf{a} = 3\langle 2, 1\rangle = \langle 3 \cdot 2, 3 \cdot 1\rangle = \langle 6, 3\rangle$$
$$-2\mathbf{a} = -2\langle 2, 1\rangle = \langle (-2) \cdot 2, (-2) \cdot 1\rangle = \langle -4, -2\rangle.$$

Los vectores están trazados en la figura 12.

FIGURA 12



■

El **vector cero** y el **negativo** $-\mathbf{a}$ de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ se definen como sigue.

Definición de 0 y −a	$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle \quad \text{y} \quad -\mathbf{a} = -\langle a_1, a_2 \rangle = \langle -a_1, -a_2 \rangle$

ILUSTRACIÓN **El vector cero y el negativo de un vector**

- $\langle 3, 5 \rangle + \mathbf{0} = \langle 3, 5 \rangle + \langle 0, 0 \rangle = \langle 3 + 0, 5 + 0 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$
- $-\langle 3, -5 \rangle = \langle -3, -(-5) \rangle = \langle -3, 5 \rangle$
- $\langle 3, -5 \rangle + \langle -3, 5 \rangle = \langle 3 + (-3), -5 + 5 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$
- $0\langle 2, 3 \rangle = \langle 0 \cdot 2, 0 \cdot 3 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$
- $5 \cdot \mathbf{0} = 5\langle 0, 0 \rangle = \langle 5 \cdot 0, 5 \cdot 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$

A continuación expresamos las propiedades de suma y múltiplos escalares de vectores para cualesquiera vectores **a, b**, **c** y escalares m y n. El lector tendrá poca dificultad para recordar estas propiedades, ya que son semejantes a las propiedades conocidas de los números reales.

Propiedades de suma y múltiplos escalares de vectores

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	**(5)** $m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$
(2) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$	**(6)** $(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$
(3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	**(7)** $(mn)\mathbf{a} = m(n\mathbf{a}) = n(m\mathbf{a})$
(4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	**(8)** $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
	(9) $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = m\mathbf{0}$

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$. Para demostrar la propiedad 1, observamos que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle = \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

La demostración de la propiedad 5 es como sigue:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= m\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle && \text{definición de adición} \\ &= \langle m(a_1 + b_1), m(a_2 + b_2) \rangle && \text{definición de múltiplo escalar} \\ &= \langle ma_1 + mb_1, ma_2 + mb_2 \rangle && \text{propiedad distributiva} \\ &= \langle ma_1, ma_2 \rangle + \langle mb_1, mb_2 \rangle && \text{definición de adición} \\ &= m\mathbf{a} + m\mathbf{b} && \text{definición de múltiplo escalar} \end{aligned}$$

Las demostraciones de las propiedades restantes son similares y se dejan como ejercicios. ■

La **resta de vectores** (denotada por $-$) está definida por $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Si usamos la notación de par ordenado para **a** y **b,** entonces $-\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2 \rangle$ y obtenemos lo siguiente.

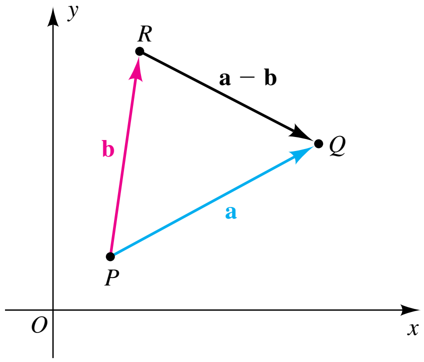
Definición de resta de vectores	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle - \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

Entonces, para hallar, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, simplemente se restan los componentes de $\mathbf{b}$ de los componentes correspondientes de $\mathbf{a}$.

ILUSTRACIÓN **Sustracción de vectores si $\mathbf{a} = \langle 5, -4\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -3, 2\rangle$**

- $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 5, -4\rangle - \langle -3, 2\rangle$
  $= \langle 5 - (-3), -4 - 2\rangle = \langle 8, -6\rangle$
- $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\langle 5, -4\rangle - 3\langle -3, 2\rangle$
  $= \langle 10, -8\rangle - \langle -9, 6\rangle = \langle 10 - (-9), -8 - 6\rangle = \langle 19, -14\rangle$

FIGURA 13



Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores arbitrarios, entonces

$$\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a};$$

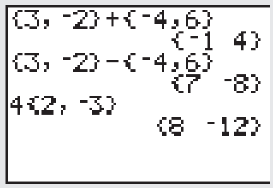
esto es, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *es el vector que, cuando se suma a* $\mathbf{b}$, *dará* $\mathbf{a}$. Si representamos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ por el vector PQ y el vector PR *con el mismo punto inicial*, como en la figura 13, entonces $\overrightarrow{RQ}$ representa a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Veamos algunas de las operaciones con vectores en una calculadora de gráficas. La TI-83/4 Plus no tiene un modo específico de vectores, pero unas *listas* nos servirán bien. Visualmente, basta sustituir con llaves la notación de cuñas empleada en este texto.

Suma de vectores
2nd { 3 , −2 2nd } +
2nd { −4 , 6 2nd } ENTER

Resta de vectores
2nd ENTRY ◁ (7 veces) − ENTER

Múltiplo escalar de un vector
4 2nd { 2 , −3 2nd } ENTER



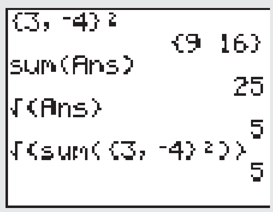
Magnitud de un vector

El "cuadrado de una lista" regresa una lista formada por los cuadrados de los elementos en la lista original. Colmo la magnitud de un vector es

"la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados",

podemos calcular la magnitud de un vector como se ve en la pantalla siguiente. La última entrada es sólo una combinación de las primeras tres entradas.

2nd { 3 , −4 2nd } x^2 ENTER
2nd LIST ◁ 5 2nd ANS) ENTER
2nd √ 2nd ANS) ENTER



Los vectores especiales $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ se definen como sigue.

Definición de i y j	$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle, \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$

Un **vector unitario** es un vector de magnitud 1. Los vectores **i** y **j** son vectores unitarios, como lo es el vector $\mathbf{c} = \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$ en el ejemplo 1.

Los vectores **i** y **j** sirven para obtener una manera alternativa de representar vectores. Específicamente, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1\langle 1, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1 \rangle.$$

Este resultado nos da lo siguiente.

Forma i, j para vectores $\qquad \mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$

ILUSTRACIÓN **Forma i, j**

- $\langle 5, 2 \rangle = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
- $\langle -3, 4 \rangle = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
- $\langle 0, -6 \rangle = 0\mathbf{i} + (-6)\mathbf{j} = -6\mathbf{j}$

Los vectores correspondientes a **i, j** y un vector arbitrario **a** están en la figura 14. Como **i** y **j** son vectores unitarios, $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$ pueden estar representados por vectores horizontales y verticales de magnitudes $|a_1|$ y $|a_2|$, respectivamente, como se ilustra en la figura 15. Por esta razón, a_1 recibe el nombre de **componente horizontal** y a_2 el **componente vertical** del vector **a.**

FIGURA 14 $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$

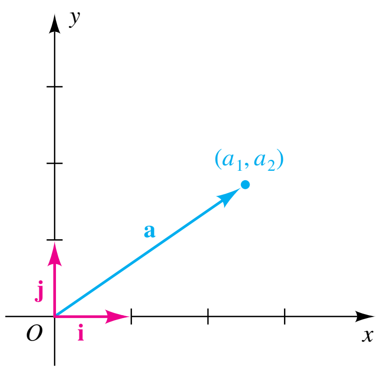
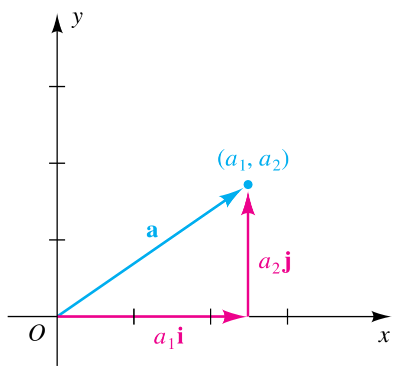


FIGURA 15 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$



El vector suma $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es una **combinación lineal** de **i** y **j**. Las reglas para suma, resta y multiplicación por un escalar m se pueden escribir como sigue, con $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$$
$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) - (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$$
$$m(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = (ma_1)\mathbf{i} + (ma_2)\mathbf{j}$$

Estas fórmulas demuestran que las combinaciones lineales de **i** y **j** se pueden considerar como sumas algebraicas.

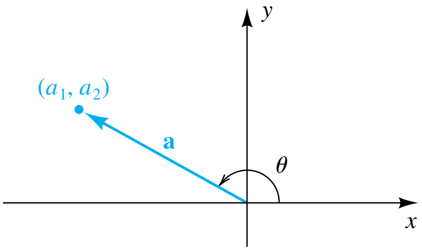
EJEMPLO 3 **Expresar un vector como una combinación lineal de i y j**

Si $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, exprese $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ como una combinación lineal de **i** y **j**.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 3(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2(4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) \\ &= (15\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (8\mathbf{i} - 14\mathbf{j}) \\ &= 7\mathbf{i} + 17\mathbf{j} \end{aligned}$$ ■

FIGURA 16



Sea θ un ángulo en posición estándar, medido desde el eje x positivo al vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, como se ve en la figura 16. Como

$$\cos\theta = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|},$$

obtenemos las fórmulas siguientes.

Fórmulas para componentes horizontales y verticales de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$

Si el vector **a** y el ángulo θ se definen como dijimos antes, entonces

$$a_1 = \|\mathbf{a}\| \cos\theta \qquad \text{y} \qquad a_2 = \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen}\theta.$$

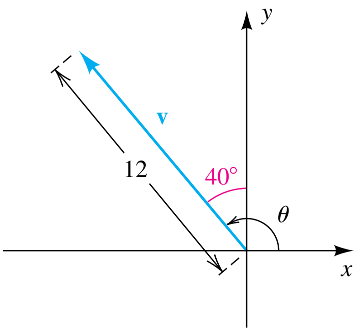
Usando estas fórmulas, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle &= \langle \|\mathbf{a}\| \cos\theta, \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen}\theta \rangle \\ &= \|\mathbf{a}\| \cos\theta\,\mathbf{i} + \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} \\ &= \|\mathbf{a}\|(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}). \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 **Expresar la velocidad del viento como vector**

Si el viento sopla a 12 mi/h en la dirección N40°O, exprese su velocidad como vector **v.**

FIGURA 17



SOLUCIÓN El vector **v** y el ángulo $\theta = 90° + 40° = 130°$ están ilustrados en la figura 17. Usando las fórmulas para componentes horizontales y verticales con $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ tendremos

$$v_1 = \|\mathbf{v}\| \cos\theta = 12 \cos 130°, \qquad v_2 = \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta = 12 \operatorname{sen} 130°.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} \\ &= (12 \cos 130°)\mathbf{i} + (12 \operatorname{sen} 130°)\mathbf{j} \\ &\approx (-7.7)\mathbf{i} + (9.2)\mathbf{j}. \end{aligned}$$ ■

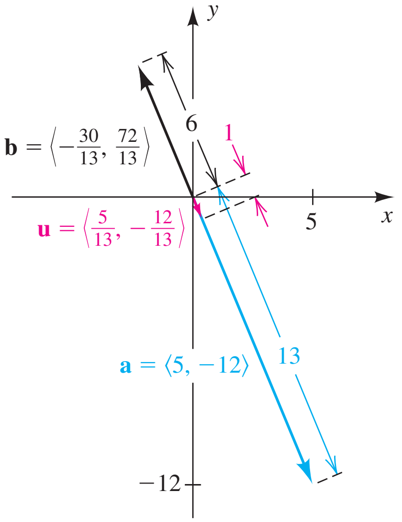
EJEMPLO 5 **Hallar un vector de dirección y magnitud específicas**

Encuentre un vector **b** en la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle 5, -12 \rangle$ que tiene magnitud 6.

SOLUCIÓN La magnitud de **a** está dada por

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

FIGURA 18



Un vector unitario **u** en la dirección de **a** se puede hallar al multiplicar **a** por $1/\|\mathbf{a}\|$. Por tanto,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{13}\langle 5, -12\rangle = \left\langle \frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\rangle.$$

La multiplicación de **u** por 6 nos da un vector de magnitud 6 en la dirección de **a**, de modo que multiplicaremos **u** por −6 para obtener el vector deseado **b** como se ilustra en la figura 18:

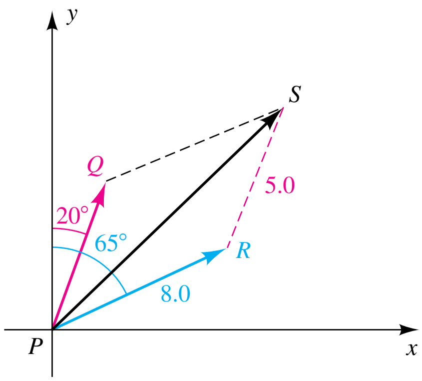
$$\mathbf{b} = -6\mathbf{u} = -6\left\langle \frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\rangle = \left\langle -\frac{30}{13}, \frac{72}{13}\right\rangle$$ ■

EJEMPLO 6 **Hallar un vector resultante**

Dos fuerzas $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ de magnitudes 5.0 kilogramos y 8.0 kilogramos, respectivamente, actúan en un punto P. La dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es N20°E y la dirección de $\overrightarrow{PR}$ es N65°E. Calcule la magnitud y dirección de la resultante $\overrightarrow{PS}$.

SOLUCIÓN Las fuerzas están representadas geométricamente en la figura 19. Note que los ángulos desde el eje x positivo hasta $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ tienen medidas 70° y 25°, respectivamente. Usando las fórmulas para componentes horizontales y verticales, obtenemos lo siguiente:

FIGURA 19



$$\overrightarrow{PQ} = (5 \cos 70°)\mathbf{i} + (5 \operatorname{sen} 70°)\mathbf{j}$$
$$\overrightarrow{PR} = (8 \cos 25°)\mathbf{i} + (8 \operatorname{sen} 25°)\mathbf{j}$$

Como $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$,

$$\overrightarrow{PS} = (5 \cos 70° + 8 \cos 25°)\mathbf{i} + (5 \operatorname{sen} 70° + 8 \operatorname{sen} 25°)\mathbf{j}$$
$$\approx 8.9606\mathbf{i} + 8.0794\mathbf{j} \approx (9.0)\mathbf{i} + (8.1)\mathbf{j}.$$

En consecuencia,

$$\|\overrightarrow{PS}\| \approx \sqrt{(9.0)^2 + (8.1)^2} \approx 12.1.$$

También podemos hallar $\|\overrightarrow{PS}\|$ usando la ley de los cosenos (vea el ejemplo 3 de la sección 8.2). Como $\angle QPR = 45°$, se deduce que $\angle PRS = 135°$ y por tanto

$$\|\overrightarrow{PS}\|^2 = (8.0)^2 + (5.0)^2 - 2(8.0)(5.0) \cos 135° \approx 145.6$$

y

$$\|\overrightarrow{PS}\| \approx \sqrt{145.6} \approx 12.1.$$

Si θ es el ángulo desde el eje x positivo a la resultante PS, entonces usando las coordenadas (aproximadas) (8.9606, 8.0794) de S, obtenemos lo siguiente:

$$\tan \theta \approx \frac{8.0794}{8.9606} \approx 0.9017$$
$$\theta \approx \tan^{-1}(0.9017) \approx 42°$$

Por tanto, la dirección de $\overrightarrow{PS}$ es aproximadamente N(90° − 42°)E = N48°E. ■

8.3 Ejercicios

Ejer. 1–6: Encuentre a + b, a − b, 4a + 5b, 4a − 5b y ‖a‖.

1 $\mathbf{a} = \langle 2, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, -1\rangle$

2 $\mathbf{a} = \langle -2, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3\rangle$

3 $\mathbf{a} = -\langle 7, -2\rangle$, $\mathbf{b} = 3\langle 0, -2\rangle$

4 $\mathbf{a} = 2\langle 5, -4\rangle$, $\mathbf{b} = -\langle 6, 0\rangle$

5 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

6 $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

Ejer. 7–10: Trace vectores correspondientes a a, b, a + b, 2a y −3b.

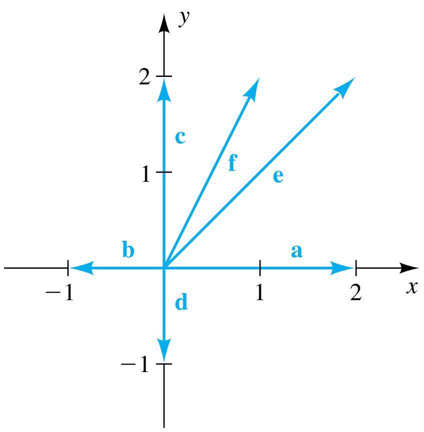
7 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

8 $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

9 $\mathbf{a} = \langle -4, 6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 3\rangle$

10 $\mathbf{a} = \langle 2, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 0\rangle$

Ejer. 11–16: Use componentes para expresar la suma o diferencia como múltiplo escalar de uno de los vectores a, b, c, d, e o f que se muestran en la figura.



11 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

12 $\mathbf{c} - \mathbf{d}$

13 $\mathbf{b} + \mathbf{e}$

14 $\mathbf{f} - \mathbf{b}$

15 $\mathbf{b} + \mathbf{d}$

16 $\mathbf{e} + \mathbf{c}$

Ejer. 17–26: Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$, $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2\rangle$ y m y n son números reales, demuestre la propiedad expresada.

17 $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

18 $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

19 $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

20 $(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$

21 $(mn)\mathbf{a} = m(n\mathbf{a}) = n(m\mathbf{a})$

22 $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

23 $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = m\mathbf{0}$

24 $(-m)\mathbf{a} = -m\mathbf{a}$

25 $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$

26 $m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = m\mathbf{a} - m\mathbf{b}$

27 Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$, demuestre que la magnitud de $2\mathbf{v}$ es el doble de la magnitud de $\mathbf{v}$.

28 Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ y k es cualquier número real, demuestre que la magnitud de $k\mathbf{v}$ es $|k|$ por la magnitud de $\mathbf{v}$.

Ejer. 29–36: Encuentre la magnitud del vector a y el mínimo ángulo θ positivo desde el eje x positivo al vector OP que corresponde a a.

29 $\mathbf{a} = \langle 0, -5\rangle$

30 $\mathbf{a} = \langle 0, 10\rangle$

31 $\mathbf{a} = \langle 3, -3\rangle$

32 $\mathbf{a} = \langle -2, -2\sqrt{3}\rangle$

33 $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

34 $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

35 $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

36 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

Ejer. 37–40: Los vectores a y b representan dos fuerzas que actúan en el mismo punto, y θ es el mínimo ángulo positivo entre a y b. Calcule la magnitud de la fuerza resultante.

37 $\|\mathbf{a}\| = 40$ lb, $\|\mathbf{b}\| = 70$ lb, $\theta = 45°$

38 $\|\mathbf{a}\| = 5.5$ lb, $\|\mathbf{b}\| = 6.2$ lb, $\theta = 60°$

39 $\|\mathbf{a}\| = 2.0$ lb, $\|\mathbf{b}\| = 8.0$ lb, $\theta = 120°$

40 $\|\mathbf{a}\| = 30$ lb, $\|\mathbf{b}\| = 50$ lb, $\theta = 150°$

Ejer. 41–44: Las magnitudes y direcciones de dos fuerzas que actúan en un punto P están dadas en (a) y (b). Aproxime la magnitud y dirección del vector resultante.

41 (a) 90 lb, N75°O (b) 60 lb, S5°E

42 (a) 20 lb, S17°O (b) 50 lb, N82°O

43 (a) 6.0 lb, 110° (b) 2.0 lb, 215°

44 (a) 30 lb, 280° (b) 80 lb, 10°

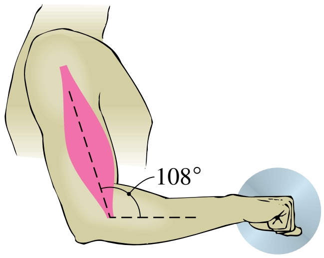
Ejer. 45–48: Calcule los componentes horizontal y vertical del vector que se describe.

45 **Lanzar un balón de futbol** Un mariscal de campo lanza un balón de futbol con una velocidad de 50 pies/s a un ángulo de 35° con la horizontal.

46 **Tirar de un trineo** Un niño tira de un trineo en un campo nevado al ejercer una fuerza de 20 libras a un ángulo de 40° con la horizontal.

47 **Músculo bíceps** El músculo bíceps, al soportar el antebrazo y un peso sostenido en la mano, ejerce una fuerza de 20 libras. Como se ve en la figura, el músculo forma un ángulo de 108° con el antebrazo.

EJERCICIO 47



48 **Aproximación de un avión a reacción** Un avión a reacción se aproxima a una pista a un ángulo de 7.5° con la horizontal, volando a una velocidad de 160 mi/h.

Ejer. 49–52: Encuentre un vector unitario que tenga (a) la misma dirección que el vector a y (b) dirección opuesta al vector a.

49 $\mathbf{a} = -8\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$

50 $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

51 $\mathbf{a} = \langle 2, -5\rangle$

52 $\mathbf{a} = \langle -12, 5\rangle$

53 Encuentre un vector que tenga la misma dirección que $\langle -8, 2\rangle$ y

(a) el doble de magnitud

(b) la mitad de la magnitud

54 Encuentre un vector que tenga la dirección opuesta de $8\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y

(a) tres veces la magnitud

(b) un tercio de la magnitud

55 Encuentre un vector de magnitud 6 que tenga la dirección opuesta de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

56 Encuentre un vector de magnitud 4 que tenga la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle -3, -1\rangle$.

Ejer. 57–60: Si las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ actúan en un punto P, la fuerza F neta (o resultante) es la suma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$. Si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, se dice que las fuerzas están en equilibrio. Las fuerzas dadas actúan en el origen O de un plano xy.

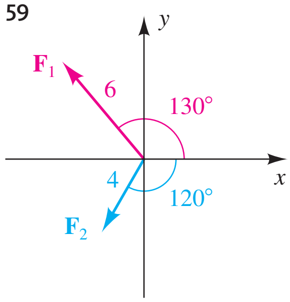
(a) Encuentre la fuerza neta F.

(b) Encuentre una fuerza adicional G tal que ocurra equilibrio.

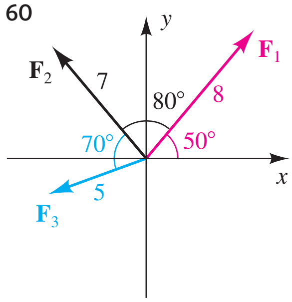
57 $\mathbf{F}_1 = \langle 4, 3\rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle -2, -3\rangle$, $\mathbf{F}_3 = \langle 5, 2\rangle$

58 $\mathbf{F}_1 = \langle -3, -1\rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 0, -3\rangle$, $\mathbf{F}_3 = \langle 3, 4\rangle$

59

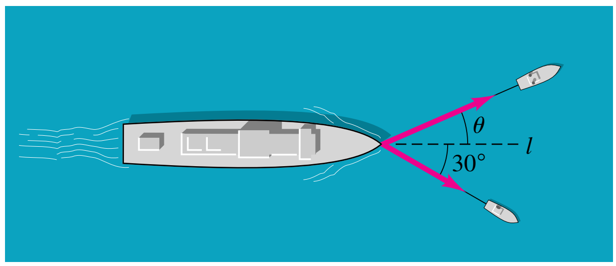


60



61 **Fuerza de un remolque** Dos remolques están tirando de un gran barco hacia puerto, como se muestra en la figura. El mayor de ellos ejerce una fuerza de 4000 libras en su cable y el remolque más pequeño ejerce una fuerza de 3200 libras en su cable. Si el barco ha de moverse en la línea recta l, calcule el ángulo θ que el remolque más grande debe formar con l.

EJERCICIO 61

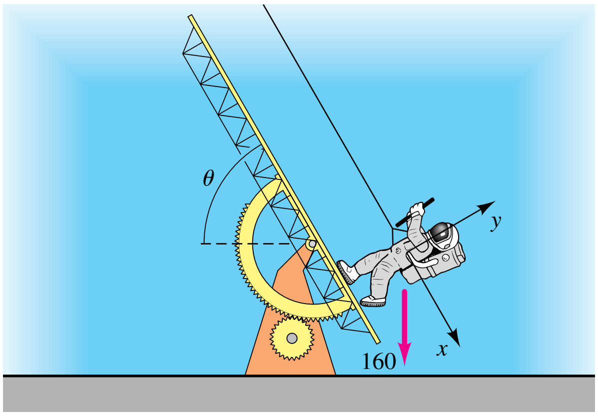


62 **Simulación de la atracción gravitacional** En la figura de la página siguiente se muestra un sencillo aparato que se puede usar para simular condiciones de atracción gravitacional en otros planetas. Una cuerda está atada a un astronauta que maniobra en un plano inclinado que forma un ángulo de θ grados con la horizontal.

(a) Si el astronauta pesa 160 libras, encuentre los componentes x y y de la fuerza hacia abajo (vea los ejes en la figura).

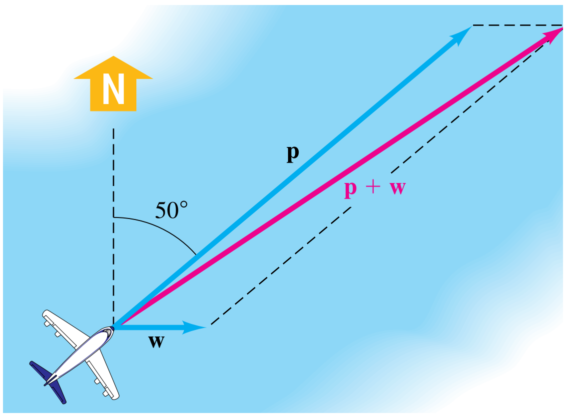
(b) El componente y en el inciso (a) es el peso del astronauta con respecto al plano inclinado. El astronauta pesaría 27 libras en la Luna y 60 libras en Marte. Calcule los ángulos θ (al 0.01° más cercano) para que el aparato de plano inclinado simule caminar en estas superficies.

EJERCICIO 62



63 **Curso de un avión y rapidez en tierra** Un avión con velocidad en el aire de 200 mi/h está volando en la dirección 50°, y un viento de 40 mi/h está soplando directamente desde el oeste. Como se ve en la figura, estos datos pueden ser representados por vectores **p** y **w** de magnitudes 200 y 40, respectivamente. La dirección de la resultante **p** + **w** da el curso verdadero del avión con respecto al suelo y la magnitud $\|\mathbf{p} + \mathbf{w}\|$ es la rapidez del avión en tierra. Calcule el curso verdadero y la rapidez en tierra.

EJERCICIO 63



64 **Curso de un avión y velocidad en tierra** Consulte el ejercicio 63. Un avión está volando en la dirección 140° con una velocidad en el aire de 500 mi/h, y un viento de 30 mi/h está soplando en la dirección 65°. Calcule el curso verdadero y la rapidez en tierra del avión.

65 **Curso de un avión y velocidad en tierra** El piloto de un avión desea mantener un curso verdadero en la dirección 250° con una rapidez en tierra de 400 mi/h, cuando el viento está soplando directamente al norte a 50 mi/h. Calcule la velocidad relativa necesaria y el rumbo de la brújula.

66 **Dirección y rapidez del viento** Un avión está volando en la dirección 20° con una velocidad relativa de 300 mi/h. Su velocidad absoluta y curso verdadero son 350 mi/h y 30°, respectivamente. Calcule la dirección y rapidez del viento.

67 **Navegación en un bote de remos** La corriente en un río se mueve directamente desde oeste a razón de 1.5 pies/s. Una persona que rema en un bote a razón de 4 pies/s en aguas en calma desea remar directamente para cruzar el río. Calcule, al grado más cercano, la dirección en la que la persona debe remar.

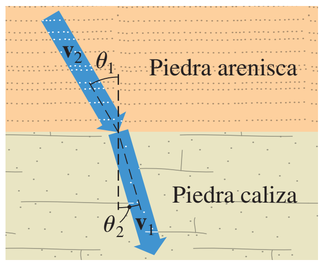
68 **Navegación en bote de motor** Para que un bote de motor en movimiento a una rapidez de 30 mi/h navegue directamente al norte para cruzar un río, debe dirigirse a un punto que tiene el rumbo N15°E. Si la corriente se mueve directamente al oeste, calcule la rapidez a la que se mueve.

69 **Flujo de aguas subterráneas** Los contaminantes de aguas subterráneas pueden entrar al agua potable de una comunidad cuando se mueven a través de piedra porosa y entran al acuífero. Si las aguas subterráneas se mueven con velocidad $\mathbf{v}_1$ por una interfase entre un tipo de roca y un segundo tipo de roca, su velocidad cambia a $\mathbf{v}_2$ y tanto la dirección como la velocidad de flujo se pueden obtener con la fórmula

$$\frac{\|\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{\tan\ \theta_1}{\tan\ \theta_2},$$

donde los ángulos θ_1 y θ_2 son como se muestra en la figura. Para piedra arenisca, $\|\mathbf{v}_1\| = 8.2$ cm al día; para piedra caliza, $\|\mathbf{v}_2\| = 3.8$ cm al día. Si $\theta_1 = 30$ cm, calcule los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en la forma **i, j**.

EJERCICIO 69

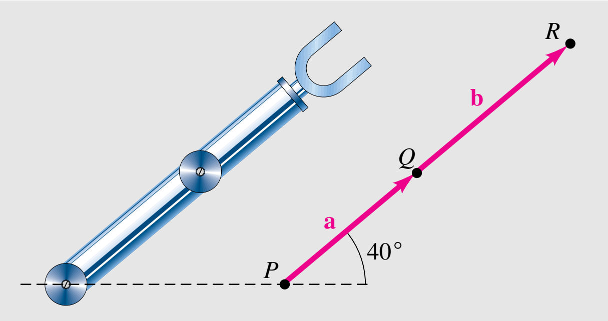


70 **Flujo de aguas subterráneas** Consulte el ejercicio 69. Las aguas subterráneas contaminadas se mueven por arena fangosa con una dirección de flujo θ_1 y velocidad (en cm/día) dada por el vector $\mathbf{v}_1 = 20\mathbf{i} - 82\mathbf{j}$. Cuando el flujo entra a una región de arena limpia, su rapidez aumenta a 725 cm/día. Encuentre la nueva dirección de flujo al calcular θ_2.

71 **Movimiento robótico** Los vectores son útiles para describir el movimiento de robots.

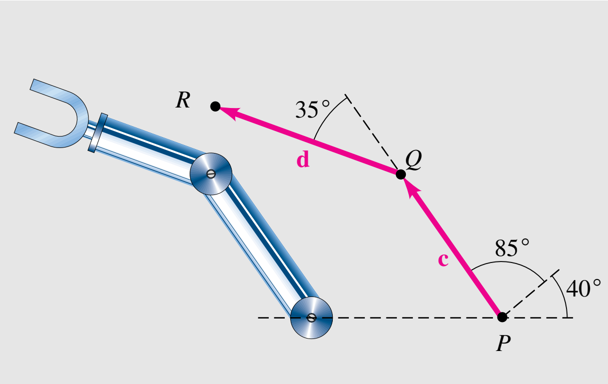
(a) El brazo de robot que se ilustra en la primera figura puede girar en las conexiones articuladas P y Q. El brazo superior, representado por **a**, mide 15 pulgadas de largo y el antebrazo (incluyendo la mano), representado por **b**, mide 17 pulgadas de largo. Calcule las coordenadas del punto R en la mano al usar **a** + **b**.

EJERCICIO 71(a)



(b) Si el brazo superior gira 85° y el antebrazo gira otros 35°, como se ilustra en la segunda figura, calcule las nuevas coordenadas de R al usar $\mathbf{c} + \mathbf{d}$.

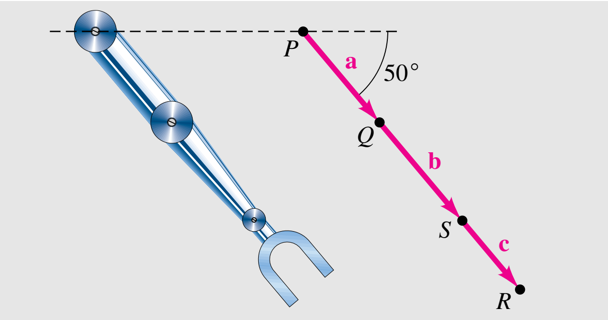
EJERCICIO 71(b)



72 Movimiento robótico Consulte el ejercicio 71.

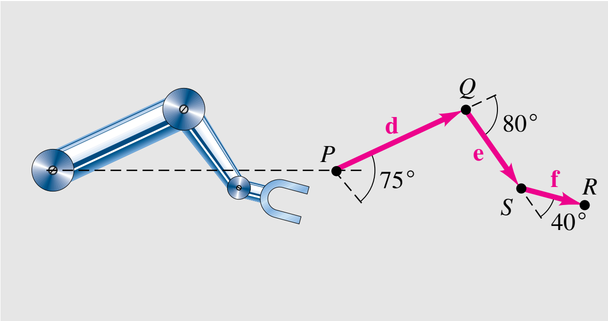
(a) Suponga que a la articulación de la muñeca del brazo del robot se le permite girar en la conexión S y el brazo se coloca como se muestra en la primera figura. El brazo superior tiene una longitud de 15 pulgadas; el antebrazo, sin la mano, tiene una longitud de 10 pulgadas; y la mano tiene una longitud de 7 pulgadas. Calcule las coordenadas de R usando $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

EJERCICIO 72(a)



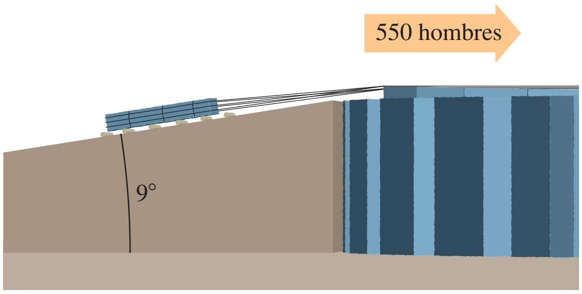
(b) Suponga que el brazo superior del robot gira 75° y luego el antebrazo gira −80°, y finalmente la mano se gira otros 40°, como se ve en la segunda figura. Calcule las nuevas coordenadas de R usando $\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}$.

EJERCICIO 72(b)



73 Fuerzas en Stonehenge Consulte el ejercicio 25 de la sección 6.2. En la construcción de Stonehenge, se emplearon grupos de 550 hombres para subir bloques de 99 000 libras por rampas inclinadas a 9°. Haciendo caso omiso de la fricción, determine la fuerza con la que cada persona tuvo que contribuir para subir la piedra por la rampa.

EJERCICIO 73



8.4 Producto punto

El *producto punto* de dos vectores tiene numerosas aplicaciones. Empecemos con una definición algebraica.

Definición de producto punto

Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. El **producto punto** de **a** y **b**, denotado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1b_1 + a_2b_2.$$

El símbolo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se lee "**a** punto **b**". También nos referimos al producto punto como el **producto escalar** o el **producto interno.** Note que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *es un número real y no un vector,* como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Hallar el producto punto de dos vectores

Encuentre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 2, 6 \rangle$ **(b)** $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

SOLUCIÓN

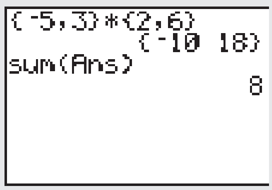
(a) $\langle -5, 3 \rangle \cdot \langle 2, 6 \rangle = (-5)(2) + (3)(6) = -10 + 18 = 8$

(b) $(4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) = (4)(3) + (6)(-7) = 12 - 42 = -30$ ■

Hallar el producto punto de dos vectores

Busquemos el producto punto del ejemplo 1(a) en una calculadora de gráficas. El producto de las listas $\{a_1, a_2\}$ y $\{b_1, b_2\}$ es la lista $\{a_1b_1, a_2b_2\}$. Sumar estos elementos nos da el producto punto.

2nd { −5 , 3 2nd } ×
2nd { 2 , 6 2nd } ENTER
2nd LIST ◁ 5 2nd ANS) ENTER



Propiedades del producto punto

Si **a**, **b** y **c** son vectores y m es un número real, entonces

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

(2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(3) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

(4) $(m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (m\mathbf{b})$

(5) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

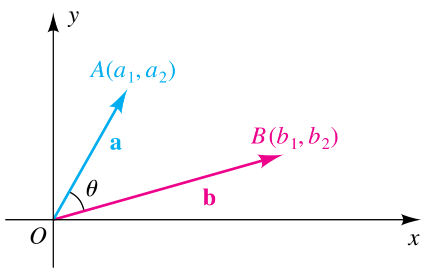
DEMOSTRACIÓN La demostración de cada propiedad se basa en la definición del producto punto y en las propiedades de los números reales. Por tanto, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2 \rangle && \text{definición de suma} \\
&= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) && \text{definición de producto punto} \\
&= (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2) && \text{propiedades de los números reales} \\
&= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, && \text{definición de producto punto}
\end{aligned}$$

que demuestra la propiedad 3. Las demostraciones de las propiedades restantes se dejan como ejercicios. ■

Dos vectores diferentes de cero cualesquiera $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ pueden estar representados en un plano de coordenadas por segmentos de recta dirigidos desde origen O a los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, respectivamente. El **ángulo $\boldsymbol{\theta}$ entre a y b** es, por definición, $\angle AOB$ (vea la figura 1). Note que $0 \leq \theta \leq \pi$ y que $\theta = 0$ si **a** y **b** tienen la misma dirección o $\theta = \pi$ si **a** y **b** tienen direcciones opuestas.

FIGURA 1



Definición de vectores paralelos y ortogonales

Sea θ el ángulo entre dos vectores **a** y **b** diferentes de cero.

(1) **a** y **b** son **paralelos** si $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

(2) **a** y **b** son **ortogonales** si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Los vectores **a** y **b** en la figura 1 son paralelos si y sólo si se encuentran en la misma recta que pasa por el origen. En este caso, $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$ para algún número real m. Los vectores son ortogonales si y sólo si se encuentran en líneas mutuamente perpendiculares que pasen por el origen. Suponemos que el vector cero **0** es paralelo y ortogonal a *todo* vector **a**.

El siguiente teorema muestra la estrecha relación entre el ángulo entre dos vectores y su producto punto.

Teorema sobre el producto punto

Si θ es el ángulo entre dos vectores **a** y **b** diferentes de cero, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

DEMOSTRACIÓN Si **a** y **b** no son paralelos, tenemos una situación semejante a la ilustrada en la figura 1. Entonces podemos aplicar la ley de los cosenos al triángulo *AOB*. Como las longitudes de los tres lados del triángulo son $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y $d(A, B)$,

$$[d(A, B)]^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

Usando la fórmula de la distancia y la definición de la magnitud de un vector, obtenemos

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta,$$

que se reduce a

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

Dividiendo entre -2 ambos lados de la última ecuación, tendremos

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta,$$

que es equivalente a lo que deseábamos demostrar, porque el lado izquierdo es $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

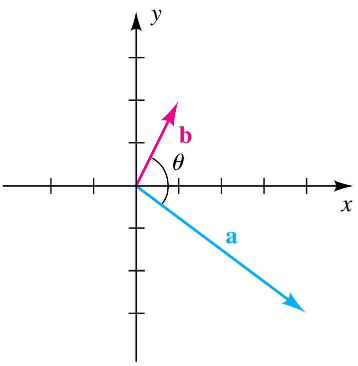
Si **a** y **b** son paralelos, entonces $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, y por lo tanto $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$ para algún número real m con $m > 0$ si $\theta = 0$ y $m < 0$ si $\theta = \pi$. Podemos demostrar, usando propiedades del producto punto, que $\mathbf{a} \cdot (m\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|\,\|m\mathbf{a}\| \cos\theta$ y en consecuencia el teorema es verdadero para todos los vectores **a** y **b** diferentes de cero. ■

Teorema del coseno del ángulo entre vectores

Si θ es el ángulo entre dos vectores **a** y **b** diferentes de cero, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}.$$

FIGURA 2



EJEMPLO 2 **Hallar el ángulo entre dos vectores**

Encuentre el ángulo entre $\mathbf{a} = \langle 4, -3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 1, 2\rangle$.

SOLUCIÓN Los vectores están trazados en la figura 2. Aplicamos el teorema precedente:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} = \frac{(4)(1) + (-3)(2)}{\sqrt{16 + 9}\sqrt{1 + 4}} = \frac{-2}{5\sqrt{5}} \quad \text{o} \quad \frac{-2\sqrt{5}}{25}$$

En consecuencia,

$$\theta = \arccos\left(\frac{-2\sqrt{5}}{25}\right) \approx 100.3°.$$ ■

EJEMPLO 3 **Mostrar que dos vectores son paralelos**

Sea $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

(a) Demuestre que **a** y **b** son paralelos.

(b) Encuentre el escalar m tal que $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$.

SOLUCIÓN

(a) Por definición, los vectores **a** y **b** son paralelos si y sólo si el ángulo θ entre ellos es 0 o π. Como

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(-2) + (-3)(12)}{\sqrt{\frac{1}{4}+9}\,\sqrt{4+144}} = \frac{-37}{37} = -1,$$

concluimos que

$$\theta = \arccos(-1) = \pi.$$

(b) Como **a** y **b** son paralelos, *hay* un escalar m tal que $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$; esto es,

$$-2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} = m\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\right) = \tfrac{1}{2}m\mathbf{i} - 3m\mathbf{j}.$$

Si igualamos los coeficientes de **i** y de **j** tendremos

$$-2 = \tfrac{1}{2}m \qquad \text{y} \qquad 12 = -3m.$$

Por tanto, $m = -4$; es decir, $\mathbf{b} = -4\mathbf{a}$. Note que **a** y **b** tienen direcciones opuestas, porque $m < 0$. ■

Usando la fórmula $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta$, junto con el hecho que dos vectores son ortogonales si y sólo si el ángulo entre ellos es $\pi/2$ (o uno de los dos vectores es **0**), nos da el resultado siguiente.

Teorema sobre vectores ortogonales

Los vectores **a** y **b** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

EJEMPLO 4 **Demostrar que dos vectores son ortogonales**

Demuestre que el par de vectores es ortogonal:

(a) **i**, **j** **(b)** $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

SOLUCIÓN Podemos usar el teorema sobre vectores ortogonales para demostrar ortogonalidad al demostrar que el producto punto de cada par es cero:

(a) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \langle 1, 0\rangle \cdot \langle 0, 1\rangle = (1)(0) + (0)(1) = 0 + 0 = 0$

(b) $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\cdot(6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = (2)(6) + (3)(-4) = 12 - 12 = 0$ ■

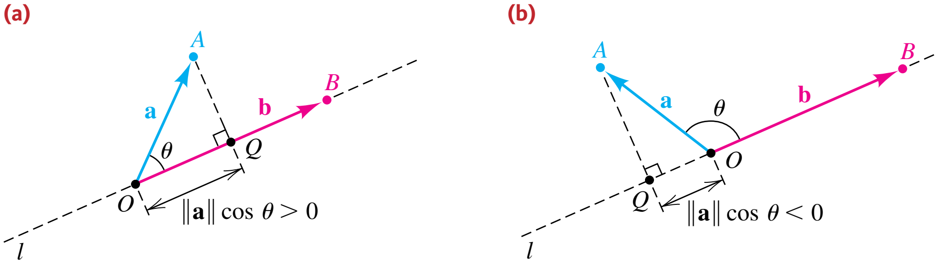
Definición de $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$

Sea θ el ángulo entre dos vectores **a** y **b** diferentes de cero. El **componente de a a lo largo de b,** denotado por $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$, está dado por

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|\cos\theta.$$

El significado geométrico de la definición precedente con θ agudo u obtuso se ilustra en la figura 3, donde los ejes x y y no se muestran.

FIGURA 3 $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \cos\theta$



Si el ángulo θ es agudo, entonces, como en la figura 3(a), podemos formar un triángulo rectángulo al construir un segmento de recta AQ perpendicular a la recta l que pase por O y B. Nótese que $\overrightarrow{OQ}$ tiene la misma dirección que $\overrightarrow{OB}$. Al observar la parte (a) de la figura, vemos que

$$\cos\theta = \frac{d(O, Q)}{\|\mathbf{a}\|} \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad \|\mathbf{a}\| \cos\theta = d(O, Q).$$

Si θ es obtuso, entonces, como en la figura 3(b), de nuevo construimos AQ perpendicular a l. En este caso, la dirección de $\overrightarrow{OQ}$ es opuesta a la de $\overrightarrow{OB}$ y como $\cos\theta$ es negativo,

$$\cos\theta = \frac{-d(O, Q)}{\|\mathbf{a}\|} \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad \|\mathbf{a}\| \cos\theta = -d(O, Q).$$

casos especiales para el componente de **a** a lo largo de **b**

(1) Si $\theta = \pi/2$, entonces **a** es ortogonal a **b** y $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = 0$.
(2) Si $\theta = 0$, entonces **a** tiene la misma dirección que **b** y $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|$.
(3) Si $\theta = \pi$, entonces **a** y **b** tienen direcciones opuestas y $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\|$.

La exposición precedente demuestra que el componente de **a** a lo largo de **b** puede hallarse al *proyectar* el punto extremo de **a** en la recta l que contenga a **b**. Por esta razón, $\|\mathbf{a}\| \cos\theta$ a veces se conoce como **proyección de a sobre b** y está denotado por $\text{proy}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$. La fórmula siguiente muestra cómo calcular esta proyección *sin* conocer el ángulo θ.

Fórmula para $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$

Si **a** y **b** son vectores diferentes de cero, entonces

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}.$$

DEMOSTRACIÓN Si θ es el ángulo entre **a** y **b**, entonces, del teorema sobre el producto punto,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

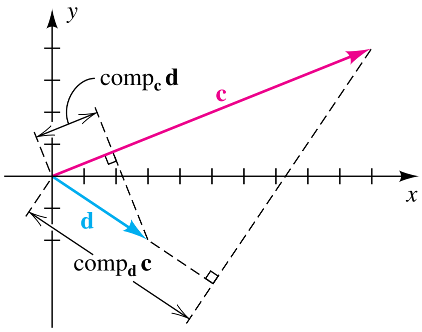
Dividiendo ambos lados de esta ecuación entre $\|\mathbf{b}\|$ tendremos

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \|\mathbf{a}\| \cos\theta = \text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 **Hallar los componentes de un vector a lo largo de otro**

Si $\mathbf{c} = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{d} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, encuentre $\text{comp}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{c}$ y $\text{comp}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{d}$, e ilustre gráficamente estos números.

FIGURA 4



SOLUCIÓN Los vectores **c** y **d** y los componentes deseados están ilustrados en la figura 4. Usamos la fórmula para $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$, como sigue:

$$\text{comp}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} = \frac{(10)(3) + (4)(-2)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{22}{\sqrt{13}} \approx 6.10$$

$$\text{comp}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{d} = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{(3)(10) + (-2)(4)}{\sqrt{10^2 + 4^2}} = \frac{22}{\sqrt{116}} \approx 2.04$$

■

Concluiremos esta sección con una aplicación física del producto punto. Primero examinemos brevemente el concepto científico de *trabajo*.

Una **fuerza** puede ser considerada como la entidad física que se usa para describir un empuje o tracción sobre un objeto. Por ejemplo, es necesaria una fuerza para empujar o jalar un objeto a lo largo de un plano horizontal, para levantar un objeto del suelo o para mover una partícula cargada en un campo electromagnético. Con frecuencia, las fuerzas se miden en libras, Si un objeto pesa 10 libras, entonces, por definición, la fuerza necesaria para levantarlo (o sostenerlo levantado) es de 10 libras. Una fuerza de este tipo es una **fuerza constante,** porque su magnitud no cambia mientras está aplicada al objeto dado.

Si una fuerza constante F se aplica a un objeto, moviéndolo una distancia d en la dirección de la fuerza, entonces, por definición, el **trabajo** W es

$$W = Fd.$$

Si F se mide en libras y d en pies, entonces las unidades para W son pies-libras (pies-lb). En el sistema cgs (centímetro-gramo-segundo) se emplea una **dina** como la unidad de fuerza. Si F se expresa en dinas y d en centímetros, entonces la unidad para W es la dina-centímetro o **erg.** En el sistema mks (metro-kilogramo-segundo) se emplea el **newton** como unidad de fuerza. Si F está en newtons y d en metros, entonces la unidad para W es el newton-metro o **joule.**

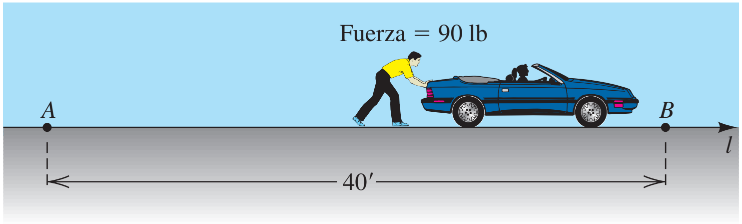
EJEMPLO 6 **Hallar el trabajo realizado por una fuerza constante**

Encuentre el trabajo realizado al empujar un automóvil por un camino a nivel desde un punto A a otro punto B, a 40 pies de A, cuando se ejerce una fuerza constante de 90 libras.

SOLUCIÓN El problema está ilustrado en la figura 5, donde hemos dibujado el camino como parte de una recta l. Como la fuerza constante es $F = 90$ libras y la distancia que se mueve el automóvil es $d = 40$ pies, el trabajo realizado es

$$W = (90)(40) = 3600 \text{ pies-lb.}$$

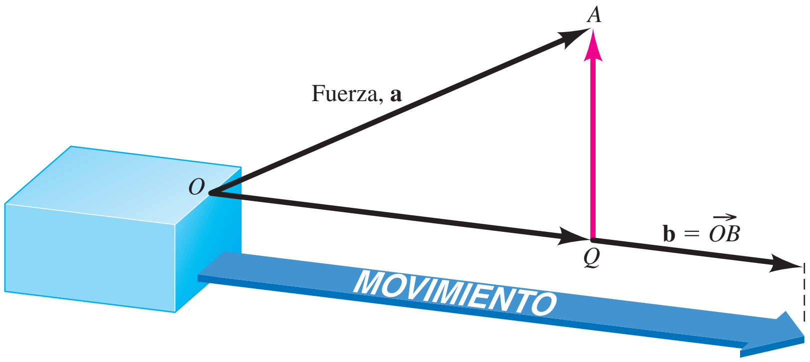
FIGURA 5



■

La fórmula $W = Fd$ es muy restrictiva, porque se puede usar sólo si la fuerza se aplica a lo largo de la línea de movimiento. En forma más general, suponga que un vector **a** representa una fuerza y que su punto de aplicación se mueve a lo largo de un vector **b**. Esto está ilustrado en la figura 6, donde la fuerza **a** se emplea para tirar de un objeto a lo largo de una trayectoria a nivel de O a B, y $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

FIGURA 6



El vector **a** es la suma de los vectores OQ y QA, donde $\overrightarrow{QA}$ es ortogonal a **b**. Como $\overrightarrow{QA}$ no contribuye al movimiento horizontal, podemos suponer que el movimiento de O a B es causado sólo por $\overrightarrow{OQ}$. Aplicando $W = Fd$, sabemos que el trabajo es el producto de $\|\overrightarrow{OQ}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$. Como la magnitud $\|\overrightarrow{OQ}\| = \text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$, obtenemos

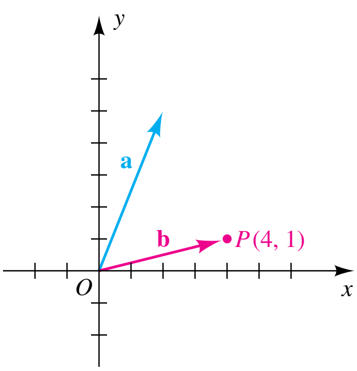
$$W = (\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a})\|\mathbf{b}\| = (\|\mathbf{a}\|\cos\theta)\|\mathbf{b}\| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

donde θ representa $\angle AOQ$. Esto lleva a la siguiente definición.

Definición de trabajo

El **trabajo** W realizado por una fuerza constante **a** cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo de un vector **b** es $W = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

FIGURA 7



EJEMPLO 7 **Hallar el trabajo realizado por una fuerza constante**

La magnitud y dirección de una fuerza constante están dadas por $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo realizado si el punto de aplicación de la fuerza se mueve del origen al punto $P(4, 1)$.

SOLUCIÓN La fuerza **a** y el vector $\mathbf{b} = \overrightarrow{OP}$ están trazados en la figura 7. Como $\mathbf{b} = \langle 4, 1\rangle = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, tenemos, de la definición precedente,

$$\begin{aligned} W = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (2\mathbf{i} + 5\mathbf{j})\cdot(4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= (2)(4) + (5)(1) = 13. \end{aligned}$$

Si, por ejemplo, la unidad de longitud es pies y la magnitud de la fuerza se mide en libras, entonces el trabajo realizado es 14 pies-lb. ■

EJEMPLO 8 **Hallar el trabajo realizado contra la atracción gravitacional**

Un pequeño carro que pesa 100 libras es empujado hacia arriba por un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se ve en la figura 8. Encuentre el trabajo realizado contra la atracción gravitacional al empujar el carro una distancia de 80 pies.

FIGURA 8

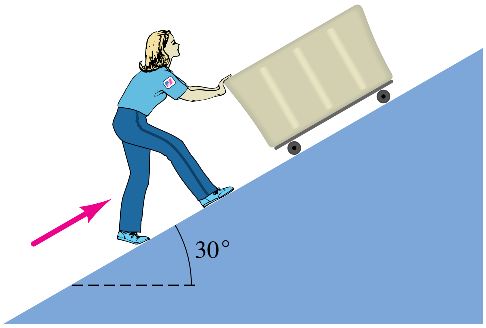
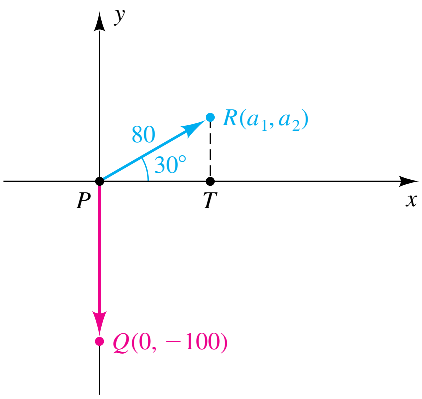


FIGURA 9



SOLUCIÓN Introduzcamos un sistema de coordenadas *xy*, como se ve en la figura 9. El vector *PQ* representa la fuerza de la gravedad que actúa verticalmente hacia abajo con una magnitud de 100 libras. El vector **F** correspondiente es 0**i** − 100**j**. El punto de aplicación de esta fuerza se mueve a lo largo del vector *PR* de magnitud 80. Si $\overrightarrow{PR}$ corresponde a $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, entonces, al observar el triángulo *PTR*, vemos que

$$a_1 = 80 \cos 30° = 40\sqrt{3}$$
$$a_2 = 80 \operatorname{sen} 30° = 40,$$

y por lo tanto

$$\mathbf{a} = 40\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 40\mathbf{j}.$$

Aplicando la definición, encontramos que el trabajo realizado *por* la gravedad es

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = (0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) \cdot \left(40\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 40\mathbf{j}\right) = 0 - 4000 = -4000 \text{ pies-lb.}$$

El trabajo realizado *contra* la gravedad es

$$-\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = 4000 \text{ pies-lb.}$$ ■

8.4 Ejercicios

Ejer. 1-8: Encuentre (a) el producto punto de los dos vectores y (b) el ángulo entre los dos vectores.

1 $\langle -2, 5\rangle, \quad \langle 3, 6\rangle$

2 $\langle 4, -7\rangle, \quad \langle -6, 1\rangle$

3 $4\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

4 $8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \quad 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

5 $9\mathbf{i}, \quad 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

6 $6\mathbf{j}, \quad -4\mathbf{i}$

7 $\langle -9, -3\rangle \quad \langle 3, 1\rangle$

8 $\langle -3, 6\rangle, \quad \langle -1, 2\rangle$

Ejer. 9-12: Demuestre que los vectores son ortogonales.

9 $\langle 4, -1\rangle, \quad \langle 2, 8\rangle$

10 $\langle -2, 5\rangle, \quad \langle 10, 4\rangle$

11 $-4\mathbf{j}, \quad -7\mathbf{i}$

12 $7\mathbf{i} - 14\mathbf{j}, \quad 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

Ejer. 13-16: Demuestre que los vectores son paralelos y determine si tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

13 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = -\frac{12}{7}\mathbf{i} + \frac{20}{7}\mathbf{j}$

14 $\mathbf{a} = -\frac{5}{2}\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = -10\mathbf{i} + 24\mathbf{j}$

15 $\mathbf{a} = \langle \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 8, 9 \rangle$

16 $\mathbf{a} = \langle 6, 18 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, -12 \rangle$

Ejer. 17–20: Ejer. 17-20: Determine *m* tal que los dos vectores sean ortogonales.

17 $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $4\mathbf{i} + 5m\mathbf{j}$

18 $4m\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $9m\mathbf{i} - 25\mathbf{j}$

19 $9\mathbf{i} - 16m\mathbf{j}$, $\mathbf{i} + 4m\mathbf{j}$

20 $5m\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

Ejer. 21-28: Dado que $\mathbf{a} = \langle 2, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 4 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle -1, 5 \rangle$, encuentre el número.

21 (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

22 (a) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

23 $(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$

24 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

25 $\text{comp}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{b}$

26 $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{c}$

27 $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, (\mathbf{a} + \mathbf{c})$

28 $\text{comp}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{c}$

Ejer. 29-32: Si c representa una fuerza constante, encuentre el trabajo realizado si el punto de aplicación de c se mueve a lo largo del segmento de recta de *P* a *Q*.

29 $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(5, -2)$

30 $\mathbf{c} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(3, 9)$

31 $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $P(2, -1)$, $Q(4, 3)$
(*Sugerencia:* encuentre un vector $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ tal que $\mathbf{b} = \overrightarrow{PQ}$.)

32 $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$; $P(-2, 5)$, $Q(6, 1)$

33 Una fuerza constante de magnitud 4 tiene la misma dirección que **j**. Encuentre el trabajo realizado si su punto de aplicación se mueve de $P(0, 0)$ a $Q(8, 3)$.

34 Una fuerza constante de magnitud 10 tiene la misma dirección que $-\mathbf{i}$. Encuentre el trabajo realizado si su punto de aplicación se mueve de $P(0, 1)$ a $Q(1, 0)$.

Ejer. 35-40: Demuestre la propiedad si a y b son vectores y *m* es un número real.

35 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

36 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

37 $(m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

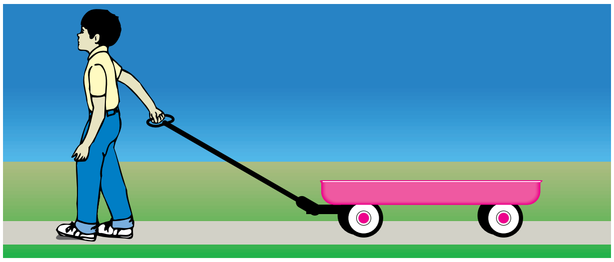
38 $m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (m\mathbf{b})$

39 $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

40 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$

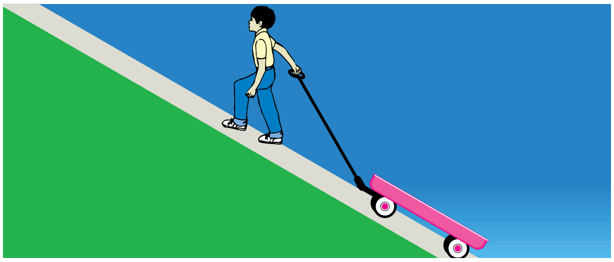
41 **Tirar de una carretilla** Un niño jala una carretilla por un terreno a nivel al ejercer una fuerza de 20 libras en una manija que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se muestra en la figura. Encuentre el trabajo realizado al jalar la carretilla 100 pies.

EJERCICIO 41



42 **Tirar de una carretilla** Consulte el ejercicio 41. Encuentre el trabajo realizado si se jala la carretilla, con la misma fuerza, 100 pies por un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se ve en la figura.

EJERCICIO 42

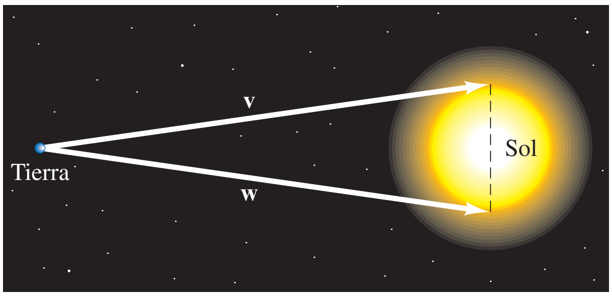


43 **Los rayos del Sol** El Sol tiene un radio de 432,000 millas y su centro está a 93,000,000 de millas del centro de la Tierra. Sean **v** y **w** los vectores ilustrados en la figura.

(a) Exprese **v** y **w** en la forma **i, j.**

(b) Calcule el ángulo entre **v** y **w**.

EJERCICIO 43



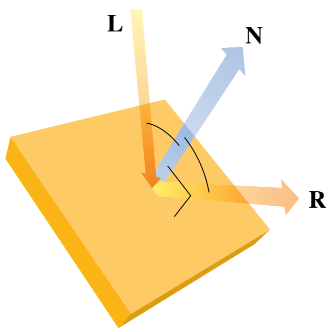
44 **Luz diurna en julio** La intensidad I de luz diurna (en watts/m^2) se puede calcular usando la fórmula $I = ke^{-c/\text{sen}\,\phi}$, donde k y c son constantes positivas y ϕ es el ángulo entre los rayos del sol y el horizonte. La cantidad de luz diurna que incide en una pared vertical que da el frente al sol es igual al componente de los rayos del sol a lo largo de la horizontal. Si, durante el mes de julio, $\phi = 30°$, $k = 978$ y $c = 0.136$, calcule la cantidad total de luz diurna que incide en una pared vertical que tiene un área de 160 m^2.

Ejer. 45-46: Los vectores se usan extensamente en gráficas de computadora para hacer sombreado. Cuando incide luz en una superficie plana, se refleja y el área no debe estar sombreada. Suponga que un rayo entrante de luz está representado por un vector L y que N es un vector ortogonal a la superficie plana, como se ve en la figura. El rayo de luz reflejado puede ser representado por el vector R y se calcula usando la fórmula R = 2(N · L)N − L. Calcule R para los vectores L y N.

45 Luz reflejada $\mathbf{L} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$, $\mathbf{N} = \langle 0, 1 \rangle$

46 Luz reflejada $\mathbf{L} = \left\langle \frac{12}{13}, -\frac{5}{13} \right\rangle$, $\mathbf{N} = \left\langle \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \right\rangle$

EJERCICIOS 45–46

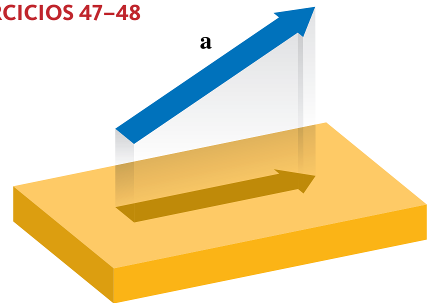


Ejer. 47–48: Los vectores se usan en gráficas computarizadas para calcular las longitudes de sombras sobre superficies planas. La longitud de un objeto puede a veces representarse con un vector a. Si una fuente de luz única brilla sobre un objeto, entonces la longitud de su sombra en el suelo será igual al valor absoluto del componente del vector a lo largo de la dirección del suelo, como se ve en la figura. Calcule la longitud de la sombra para el vector especificado a si el suelo está nivelado.

47 Sombra al nivel del suelo $\mathbf{a} = \langle 2.6, 4.5 \rangle$

48 Sombra al nivel del suelo $\mathbf{a} = \langle -3.1, 7.9 \rangle$

EJERCICIOS 47–48

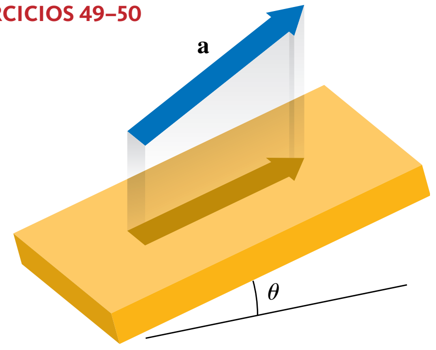


Ejer. 49–50: Consulte los ejercicios 47 y 48. Un objeto representado por un vector a se sostiene sobre una superficie plana inclinada a un ángulo θ, como se muestra en la figura. Si una luz está brillando directamente hacia abajo, calcule la longitud de la sombra a dos lugares decimales para los valores especificados del vector a y θ.

49 Sombra en un plano inclinado $\mathbf{a} = \langle 25.7, -3.9 \rangle$, $\theta = 12°$

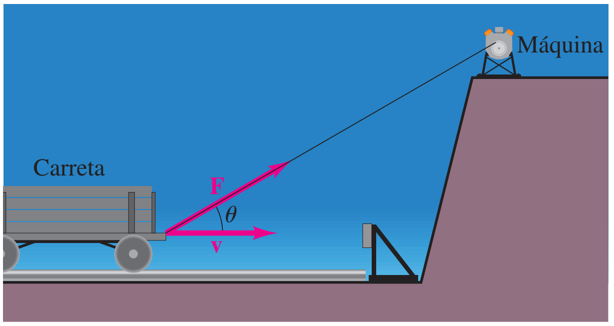
50 Sombra en un plano inclinado $\mathbf{a} = \langle -13.8, 19.4 \rangle$, $\theta = -17°$

EJERCICIOS 49–50



51 Determinación del caballo de potencia La cantidad de caballos de potencia P producidos por una máquina puede determinarse con la fórmula $P = \frac{1}{550}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$, donde $\mathbf{F}$ es la fuerza (en libras) ejercida por la máquina y $\mathbf{v}$ es la velocidad (en ft/s) de un objeto movido por la máquina. Una máquina tira con una fuerza de 2200 libras de un cable que forma un ángulo θ con la horizontal, moviendo una carreta horizontalmente, como se ve en la figura. Encuentre la potencia de la máquina si la rapidez de la carreta es 8 pies/s cuando $\theta = 30°$.

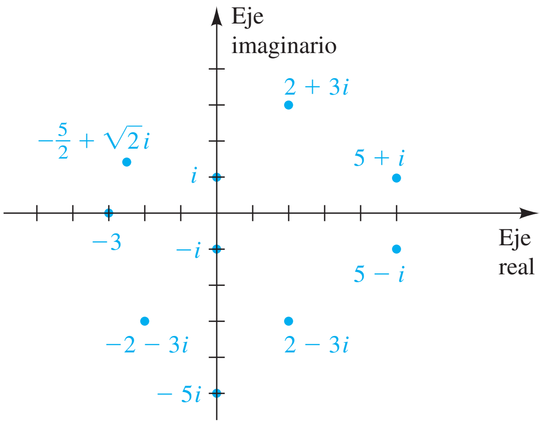
EJERCICIO 51



8.5 Forma trigonométrica para números complejos

En la sección 1.1 representamos números reales geométricamente mediante puntos en una recta de coordenadas. Podemos obtener representaciones geométricas para números complejos usando puntos en un plano de coordenadas. Específicamente, cada número complejo $a + bi$ determina un par ordenado único (a, b). El punto correspondiente $P(a, b)$ en un plano de coordenadas es la **representación geométrica** de $a + bi$. Para destacar que estamos asignando números complejos a puntos en un plano, podemos marcar el punto $P(a, b)$ como $a + bi$. Un plano de coordenadas con un número complejo asignado a cada punto se conoce como **plano complejo** (o Argand) en lugar de un plano xy. El eje x es el **eje real** y el eje y es el **eje imaginario.** En la figura 1 hemos representado en forma geométrica varios números complejos. Note que para obtener el punto correspondiente al conjugado $a - bi$ de cualquier número complejo $a + bi$, simplemente lo reflejamos a través del eje real.

FIGURA 1



El valor absoluto de un número real a (denotado $|a|$) es la distancia entre el origen y el punto sobre el eje x que corresponde a a. Así, es natural interpretar el valor absoluto de un número complejo como la distancia entre el origen de un plano complejo y el punto (a, b) que corresponde a $a + bi$.

Definición del valor absoluto de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su **valor absoluto**, denotado por $|a + bi|$, es

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

EJEMPLO 1 **Hallar el valor absoluto de un número complejo**

Encuentre

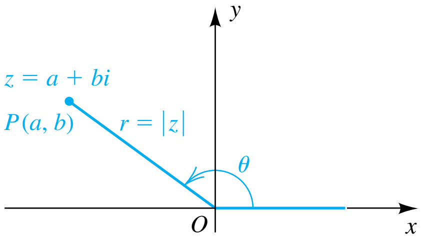
(a) $|2 - 6i|$ **(b)** $|3i|$

SOLUCIÓN Usamos la definición previa:

(a) $|2 - 6i| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6.3$

(b) $|3i| = |0 + 3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$ ■

FIGURA 2
$z = a + bi = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$



Los puntos correspondientes a todos los números complejos que tienen un valor absoluto fijo k están en una circunferencia de radio k con centro en el origen del plano complejo. Por ejemplo, los puntos correspondientes a los números complejos z con $|z| = 1$ están sobre una circunferencia unitaria.

Consideremos un número complejo $z = a + bi$ diferente de cero y su representación geométrica $P(a, b)$, como se ilustra en la figura 2. Sea θ un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal se encuentra sobre el segmento OP y sea $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como $\cos\theta = a/r$ y $\text{sen } \theta = b/r$, vemos que $a = r\cos\theta$ y $b = r \text{ sen } \theta$. Sustituyendo por a y b en $z = a + bi$, obtenemos

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r \text{ sen } \theta)i = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta).$$

Esta expresión se denomina **forma trigonométrica** (o **polar**) **para el número complejo *a* + *bi*.** Una abreviatura común es

$$r(\underline{c}\text{os } \theta + \underline{i} \text{ } \underline{s}\text{en } \theta) = r \text{ cis } \theta.$$

La forma trigonométrica para $z = a + bi$ no es única, porque hay un número ilimitado de opciones diferentes para el ángulo θ. Cuando se usa la forma trigonométrica, el valor absoluto r de z se conoce a veces como el **módulo** de z y un ángulo θ asociado con z como un **argumento** (o **amplitud**) de z.

Podemos resumir nuestra exposición como sigue.

Forma trigonométrica (o polar) para un número complejo	Sea $z = a + bi$. Si $r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ y si θ es un argumento de z entonces $$z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta) = r \text{ cis } \theta.$$

La fórmula de Euler,

$$\cos\theta + i \text{ sen } \theta = e^{i\theta},$$

nos da otra forma para el número complejo $z = a + bi$, comúnmente llamada **forma exponencial;** esto es,

$$z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta) = re^{i\theta}.$$

Vea algunos problemas relacionados en el ejercicio 6 de los ejercicios de análisis al final del capítulo.

EJEMPLO 2 **Expresar un número complejo en forma trigonométrica**

Exprese el número complejo en forma trigonométrica con $0 \le \theta < 2\pi$.

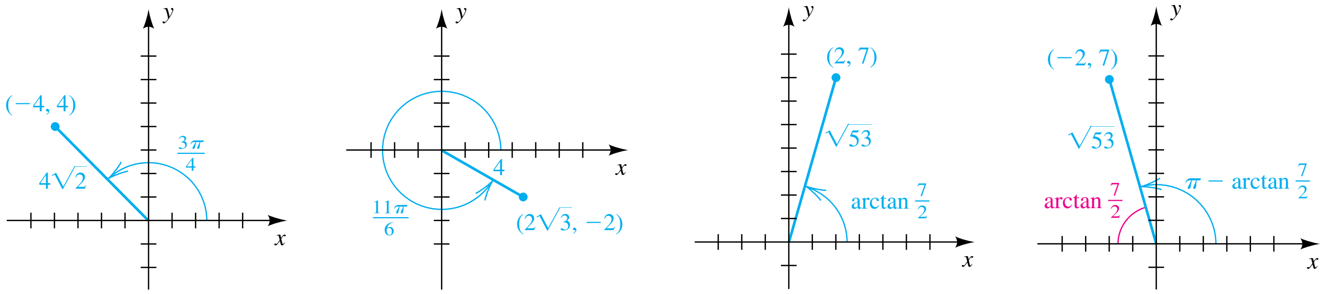
(a) $-4 + 4i$ **(b)** $2\sqrt{3} - 2i$ **(c)** $2 + 7i$ **(d)** $-2 + 7i$

SOLUCIÓN Empezamos por representar geométricamente cada número complejo y marcar su módulo r y argumento θ, como en la figura 3.

(continúa)

FIGURA 3

(a) (b) (c) (d)



A continuación sustituimos por r y θ en la forma trigonométrica:

(a) $-4 + 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2} \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$

(b) $2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = 4 \operatorname{cis}\frac{11\pi}{6}$

(c) $2 + 7i = \sqrt{53}\left[\cos\left(\arctan\frac{7}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\arctan\frac{7}{2}\right)\right] = \sqrt{53} \operatorname{cis}\left(\arctan\frac{7}{2}\right)$

(d) $-2 + 7i = \sqrt{53}\left[\cos\left(\pi - \arctan\frac{7}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\pi - \arctan\frac{7}{2}\right)\right]$

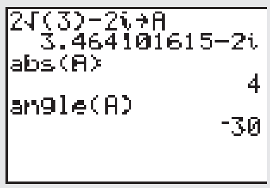
$= \sqrt{53} \operatorname{cis}\left(\pi - \arctan\frac{7}{2}\right)$ ■

Operaciones con números complejos

Veamos cómo hallar, en una calculadora de gráficas, el valor absoluto y el argumento del número complejo del ejemplo 2(b).

Asigne $2\sqrt{3} - 2i$ a A.

2 [2nd] [√‾] 3 [)] [−] 2 [2nd] [i]
[STO▷] [ALPHA] [A] [ENTER]



Encuentre el valor absoluto r.

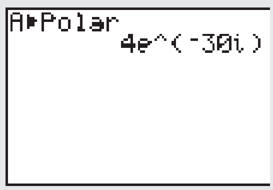
[MATH] [▷] [▷] [5]
[ALPHA] [A] [)] [ENTER]

Encuentre el argumento θ (en modo de grados).

[MATH] [▷] [▷] [4]
[ALPHA] [A] [)] [ENTER]

Ahora cambiaremos la forma de $2\sqrt{3} - 2i$ usando la función polar. La TI-83/4 Plus nos da la forma exponencial $re^{\theta i}$. Observe que $-30°$ es equivalente a $11\pi/6$ (el ángulo del ejemplo 2(b) para $0 \leq \theta < 2\pi$).

[ALPHA] [A] [MATH] [▷] [▷] [7] [ENTER]



Si permitimos valores arbitrarios para θ, hay muchas otras formas trigonométricas para los números complejos del ejemplo 2. Entonces, para $-4 + 4i$ en la parte (a) podríamos usar

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{para cualquier entero } n.$$

Si, por ejemplo, hacemos $n = 1$ y $n = -1$, obtenemos

$$4\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{11\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad 4\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right),$$

respectivamente. En general, los argumentos para el mismo número complejo siempre difieren por un múltiplo de 2π.

Si los números complejos se expresan en forma trigonométrica, entonces la multiplicación y división se pueden efectuar como se indica en el siguiente teorema.

Teorema sobre productos y cocientes de números complejos

Si las formas trigonométricas para dos números complejos z_1 y z_2 son

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2),$$

entonces

(1) $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)],\ z_2 \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Podemos demostrar (1) como sigue:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)\\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)\\ &\qquad + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \end{aligned}$$

La aplicación de las fórmulas de la suma para $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ y $\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$ nos da (1). Dejamos la demostración de (2) como ejercicio. ■

La parte (1) del teorema precedente expresa que *el módulo de un producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y un argumento es la suma de sus argumentos.* Un enunciado análogo se puede hacer para (2).

EJEMPLO 3 **Usar formas trigonométricas para hallar productos y cocientes**

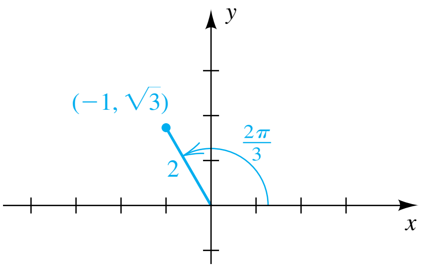
Si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ y $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, use formas trigonométricas para hallar **(a)** z_1z_2 y **(b)** z_1/z_2. Compruebe usando métodos algebraicos.

SOLUCIÓN El número complejo $2\sqrt{3} - 2i$ está representado geométricamente en la figura 3(b). Si usamos $\theta = -\pi/6$ en la forma trigonométrica, entonces

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

(continúa)

FIGURA 4



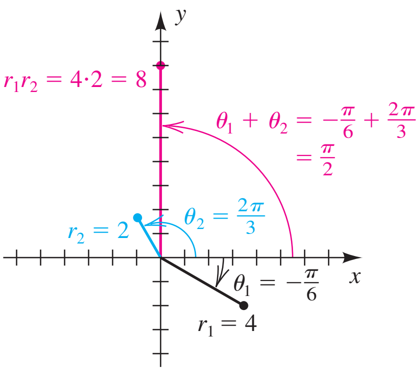
El número complejo $z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$ está representado geométricamente en la figura 4. Una forma trigonométrica es

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$$

(a) Aplicamos la parte (1) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4 \cdot 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 8(0 + i) = 8i \end{aligned}$$

FIGURA 5



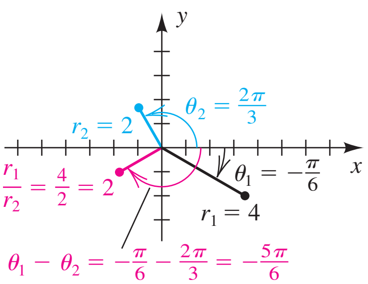
La figura 5 da una interpretación geométrica del producto $z_1 z_2$. Usando métodos algebraicos para comprobar nuestro resultado, tenemos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left(2\sqrt{3} - 2i\right)\left(-1 + \sqrt{3}\,i\right) \\ &= \left(-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) + (2 + 6)i = 0 + 8i = 8i. \end{aligned}$$

(b) Aplicamos la parte (2) del teorema:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

FIGURA 6



La figura 6 da una interpretación geométrica del cociente z_1/z_2.

Usando métodos algebraicos para comprobar nuestro resultado, multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\sqrt{3} - 2i}{-1 + \sqrt{3}\,i} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{-1 - \sqrt{3}\,i} \\ &= \frac{\left(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) + (2 - 6)i}{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \frac{-4\sqrt{3} - 4i}{4} = -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

■

8.5 Ejercicios

Ejer. 1–10: Encuentre el valor absoluto.

1 $|3 - 4i|$

2 $|5 + 8i|$

3 $|-6 - 7i|$

4 $|1 - i|$

5 $|0|$

6 $|-8|$

7 $|8i|$

8 $|-8i|$

9 $|i^{500}|$

10 $|i^7|$

Ejer. 11–20: Represente geométricamente el número complejo.

11 $4 + 2i$

12 $-5 + 3i$

13 $3 - 5i$

14 $-2 - 6i$

15 $-(3 - 6i)$

16 $(1 + 2i)^2$

17 $-2i(3 - 2i)$

18 $(-3i)(2 - i)$

19 $(1 + i)^2$

20 $4(-1 + 2i)$

Ejer. 21–46: Exprese el número complejo en forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$.

21 $1 - i$

22 $\sqrt{3} + i$

23 $-4\sqrt{3} + 4i$

24 $-2 - 2i$

25 $2\sqrt{3} + 2i$

26 $3 - 3\sqrt{3}\,i$

27 $-4 - 4i$

28 $-8 + 8i$

29 $-20i$

30 $-6i$

31 12

32 15

33 -7

34 -5

35 $6i$

36 $4i$

37 $-5 - 5\sqrt{3}\,i$

38 $\sqrt{3} - i$

39 $5 + 2i$

40 $3 + 2i$

41 $-3 + i$

42 $-4 + 2i$

43 $-5 - 3i$

44 $-2 - 7i$

45 $4 - 3i$

46 $12 - 5i$

Ejer. 47–60: Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

47 $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

48 $8\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

49 $6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

50 $12\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

51 $5(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

52 $3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

53 $\sqrt{34} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1}\frac{3}{5}\right)$

54 $\sqrt{53} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1}\left(-\frac{2}{7}\right)\right]$

55 $\sqrt{5} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

56 $\sqrt{10} \operatorname{cis} (\tan^{-1} 3)$

57 $\sqrt{65} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1}\left(-\frac{7}{4}\right) + \pi\right]$

58 $\sqrt{61} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1}\left(-\frac{6}{5}\right) + \pi\right]$

59 $\sqrt{58} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1}\frac{3}{7} + \pi\right)$

60 $\sqrt{85} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1}\frac{9}{2} + \pi\right)$

Ejer. 61–70: Use formas trigonométricas para hallar z_1z_2 y z_1/z_2.

61 $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 1 + i$

62 $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$

63 $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 5i$

64 $z_1 = -5 + 5i$, $z_2 = -3i$

65 $z_1 = -10$, $z_2 = -4$

66 $z_1 = 2i$, $z_2 = -3i$

67 $z_1 = 4$, $z_2 = 2 - i$

68 $z_1 = 7$, $z_2 = 3 + 5i$

69 $z_1 = -5$, $z_2 = 3 - 2i$

70 $z_1 = -3$, $z_2 = 5 + 2i$

71 Demuestre (2) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos.

72 **(a)** Extienda (1) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos a tres números complejos.

(b) Generalice (1) del teorema a n números complejos.

Ejer. 73–76: La forma trigonométrica de números complejos es utilizada con frecuencia por ingenieros electricistas para describir la corriente I, el voltaje V y la impedancia Z en circuitos eléctricos con corriente alterna. La impedancia es la oposición al flujo de corriente en un circuito. Los aparatos eléctricos más comunes operan con 115 volts de corriente alterna. La relación entre estas tres cantidades es $I = V/Z$. Calcule la cantidad desconocida y exprese la respuesta en forma rectangular a dos lugares decimales.

73 **Hallar voltaje** $I = 10 \operatorname{cis} 35°$, $Z = 3 \operatorname{cis} 20°$

74 **Hallar voltaje** $I = 12 \operatorname{cis} 5°$, $Z = 100 \operatorname{cis} 90°$

75 **Hallar impedancia** $I = 8 \operatorname{cis} 5°$, $V = 115 \operatorname{cis} 45°$

76 **Hallar corriente** $Z = 78 \operatorname{cis} 61°$, $V = 163 \operatorname{cis} 17°$

77 **Módulo de impedancia** El módulo de la impedancia Z representa la oposición total al flujo de corriente eléctrica en un circuito y se mide en ohms. Si $Z = 14 - 13i$, calcule $|Z|$.

78 **Resistencia y reactancia** El valor absoluto de la parte real de Z representa la resistencia en un circuito eléctrico; el valor absoluto de la parte compleja representa la reactancia. Ambas cantidades se miden en ohms. Si $V = 220 \text{ cis } 34°$ e $I = 5 \text{ cis } 90°$, calcule la resistencia y la reactancia.

79 **Voltaje real** La parte real de V representa el voltaje real entregado a un aparato eléctrico en volts. Calcule este voltaje cuando $I = 4 \text{ cis } 90°$ y $Z = 18 \text{ cis } (-78°)$.

80 **Corriente real** La parte real de I representa la corriente real entregada a un aparato eléctrico en amps. Calcule esta corriente cuando $V = 163 \text{ cis } 43°$ y $Z = 100 \text{ cis } 17°$.

8.6 Teorema de De Moivre y las raíces *n*-ésimas de números complejos

Si z es un número complejo y n es un entero positivo, entonces un número complejo w es la **raíz *n*-ésima** de z si $w^n = z$. Demostraremos que todo número complejo diferente de cero tiene n raíces n-ésimas diferentes. Como $\mathbb{R}$ está contenida en $\mathbb{C}$, también se deduce que todo número real diferente de cero tiene n diferentes raíces n-ésimas (complejas). Si a es un número real positivo y $n = 2$, entonces ya sabemos que las raíces son $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Si en el teorema sobre productos y cocientes de números complejos hacemos z_1 y z_2 iguales al número complejo $z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, obtenemos

$$\begin{aligned} z^2 &= r \cdot r[\cos(\theta + \theta) + i \text{ sen } (\theta + \theta)] \\ &= r^2(\cos 2\theta + i \text{ sen } 2\theta). \end{aligned}$$

Aplicando el mismo teorema a z^2 y z tendremos

$$z^2 \cdot z = (r^2 \cdot r)[\cos(2\theta + \theta) + i \text{ sen } (2\theta + \theta)],$$

o

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta).$$

Aplicando el teorema a z^3 y z, obtenemos

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \text{ sen } 4\theta).$$

En general, tenemos el siguiente resultado, llamado así en honor del matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754).

Teorema de De Moivre

Para todo entero n,

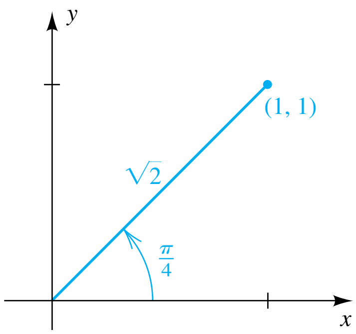
$$[r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta).$$

Usaremos sólo enteros positivos para n en ejemplos y ejercicios que comprendan el teorema de De Moivre. No obstante, el teorema se cumple para $n = 0$ y n negativo si usamos las respectivas definiciones de exponente de número real es decir, $z^0 = 1$ y $z^{-n} = 1/z^n$, donde z es un número complejo diferente de cero y n es un entero positivo.

EJEMPLO 1 **Usar el teorema de De Moivre**

Use el teorema de De Moivre para cambiar $(1 + i)^{20}$ a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

FIGURA 1



SOLUCIÓN Sería tedioso cambiar $(1 + i)^{20}$ usando métodos algebraicos. Por tanto, introduzcamos una forma trigonométrica para $1 + i$. Consultando la figura 1, vemos que

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

Ahora aplicamos el teorema de De Moivre:

$$\begin{aligned}(1 + i)^{20} &= (2^{1/2})^{20}\left[\cos\left(20 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(20 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right]\\ &= 2^{10}(\cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi) = 2^{10}(-1 + 0i) = -1024\end{aligned}$$

El número -1024 es de la forma $a + bi$ con $a = -1024$ y $b = 0$. ■

Si un número complejo z diferente de cero tiene una raíz n-ésima w, entonces $w^n = z$. Si las formas trigonométricas para w y z son

$$w = s(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \qquad \text{y} \qquad z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \tag{*}$$

entonces, aplicando el teorema de De Moivre a $w^n = z$ tendremos

$$s^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Si dos números complejos son iguales, entonces también son iguales sus valores absolutos. En consecuencia, $s^n = r$, y como s y r son no negativos, $s = \sqrt[n]{r}$. Sustituyendo s^n por r en la última ecuación mostrada y dividiendo ambos lados entre s^n, obtenemos

$$\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

Como los argumentos de números complejos iguales difieren por un múltiplo de 2π, hay un entero k tal que $n\alpha = \theta + 2\pi k$. Dividiendo ambos lados de la última ecuación entre n, vemos que

$$\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad \text{para algún entero } k.$$

Sustituyendo en la forma trigonométrica por w (vea (*)) nos dará la fórmula

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right].$$

Si sustituimos $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ sucesivamente, obtenemos n diferentes raíces n-ésimas de z. Ningún otro valor de k producirá una nueva raíz n-ésima. Por ejemplo, si $k = n$, obtenemos el ángulo $(\theta + 2\pi n)/n$ o $(\theta/n) + 2\pi$, que nos da la misma raíz n-ésima que $k = 0$. Del mismo modo, $k = n + 1$ da la misma raíz n-ésima que $k = 1$, y así sucesivamente. Lo mismo es cierto para valores negativos de k. Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema sobre raíces *n*-ésimas

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es cualquier número complejo diferente de cero y si n es cualquier entero positivo, entonces z tiene exactamente n raíces n-ésimas diferentes $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$. Estas raíces, para θ en radianes, son

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

o bien, lo que es equivalente, para θ en grados,

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right)\right],$$

donde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Las raíces n-ésimas de z en este teorema tienen todas ellas valor absoluto $\sqrt[n]{r}$, y por lo tanto sus representaciones geométricas se encuentran en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en O. Además, están igualmente espaciadas en esta circunferencia dado que la diferencia en los argumentos de sucesivas raíces n-ésimas es $2\pi/n$ (o $360°/n$).

FIGURA 2

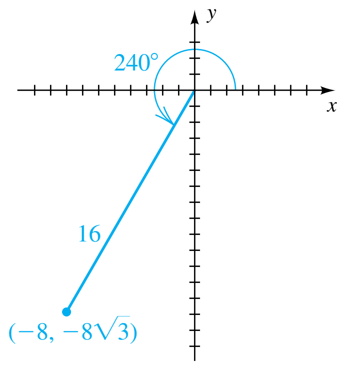
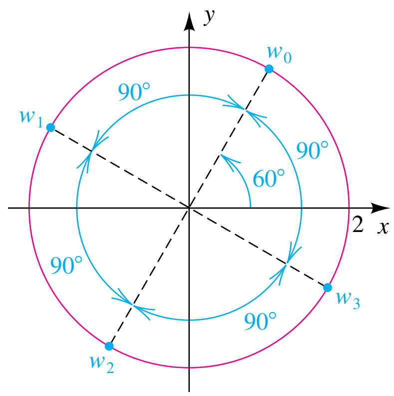


FIGURA 3



EJEMPLO 2 **Hallar las raíces cuartas de un número complejo**

(a) Encuentre las cuatro raíces cuartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$.

(b) Represente las raíces geométricamente.

SOLUCIÓN

(a) La representación geométrica de $-8 - 8\sqrt{3}i$ se muestra en la figura 2. Introduciendo la forma trigonométrica, tenemos

$$-8 - 8\sqrt{3}i = 16(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°).$$

Usando el teorema sobre raíces n-ésimas con $n = 4$ y observando que $\sqrt[4]{16} = 2$, encontramos que las raíces cuartas son

$$w_k = 2\left[\cos\left(\frac{240° + 360°k}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{240° + 360°k}{4}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3$. Esta fórmula se puede escribir como

$$w_k = 2[\cos(60° + 90°k) + i \operatorname{sen}(60° + 90°k)].$$

Sustituyendo 0, 1, 2 y 3 por k en $(60° + 90°k)$ nos da las cuatro raíces cuartas:

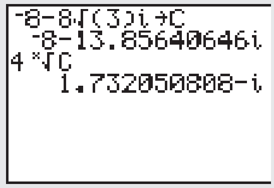
$$w_0 = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 1 + \sqrt{3}i$$
$$w_1 = 2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = -\sqrt{3} + i$$
$$w_2 = 2(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = -1 - \sqrt{3}i$$
$$w_3 = 2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = \sqrt{3} - i$$

(b) Por los comentarios que preceden a este ejemplo, todas las raíces se encuentran en una circunferencia de radio $\sqrt[4]{16} = 2$ con centro en O. La primera raíz, w_0, tiene un argumento de 60° y las raíces sucesivas están separadas $360°/4 = 90°$, como se ve en la figura 3. ■

La TI-83/4 Plus tiene la capacidad de tomar una raíz de un número complejo. A continuación encontramos una raíz cuarta de $-8 - 8\sqrt{3}\,i$, como en el ejemplo 2(a).

Hallar una raíz de un número complejo

−8 [−] 8 [2nd] [√] 3 [)] [2nd] [i]
[STO▷] [ALPHA] [C] [ENTER]
4 [MATH] [5] [ALPHA] [C] [ENTER]



El caso especial en el que $z = 1$ es de particular interés. Las n raíces n-ésimas distintas de 1 se llaman las **raíces n-ésimas de la unidad.** En particular, si $n = 3$, llamamos a estas raíces las **raíces cúbicas de la unidad.**

EJEMPLO 3 Hallar las raíces cúbicas de la unidad

Encuentre las tres raíces cúbicas de la unidad.

SOLUCIÓN Escribiendo $1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ y usando el teorema sobre raíces n-ésimas con $n = 3$, obtenemos

$$w_k = 1\left[\cos\frac{2\pi k}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi k}{3}\right]$$

para $k = 0, 1, 2$. Sustituyendo por k tendremos las tres raíces:

$$w_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

■

EJEMPLO 4 Hallar las raíces sextas de un número real

(a) Encuentre las seis raíces sextas de -1.

(b) Represente las raíces geométricamente.

SOLUCIÓN

(a) Escribiendo $-1 = 1(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$ y usando el teorema sobre raíces n-ésimas con $n = 6$, encontramos que las raíces sextas de -1 están dadas por

$$w_k = 1\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Sustituyendo 0, 1, 2, 3, 4, 5 por k obtenemos las seis raíces sextas de -1:

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = i$$

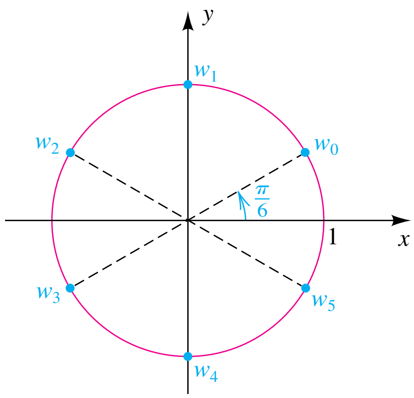
$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -i$$

$$w_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

FIGURA 4



(b) Como $\sqrt[6]{1} = 1$, los puntos que representan las raíces de -1 están todos en la circunferencia unitaria que se muestra en la figura 4. Además, están igualmente espaciados en esta circunferencia por $\pi/3$ radianes, o sea 60°. ■

Note que hallar las raíces n-ésimas de un número complejo c, como hicimos en los ejemplos 2–4, es equivalente a hallar todas las soluciones de la ecuación

$$x^n = c \qquad \text{o bien} \qquad x^n - c = 0.$$

Usaremos este concepto en el siguiente ejemplo así como en los ejercicios 23-30.

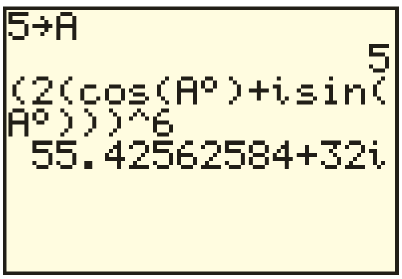
EJEMPLO 5 Resolver una ecuación polinomial sencilla

Resuelva la ecuación $x^6 = 32\sqrt{3} + 32i$.

SOLUCIÓN

Si $c = 32\sqrt{3} + 32i$, entonces resolver esta ecuación es equivalente a encontrar las seis raíces sextas de c. Escribiendo c como $64(\cos 30° + i\,\mathrm{sen}\,30°)$ y usando el teorema sobre raíces n-ésimas con $n = 6$, nos encontramos con que las seis raíces sextas de c están dadas por

FIGURA 5



$$w_k = \sqrt[6]{64}\left[\cos\left(\frac{30° + 360°k}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{30° + 360°k}{6}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Simplificando tenemos

$$w_k = 2[\cos(5° + 60°k) + i\,\mathrm{sen}\,(5° + 60°k)].$$

Sustituyendo por k y usando la notación cis nos permite escribir la solución como

$$2\ \mathrm{cis}\ \theta \text{ con } \theta = 5°, 65°, 125°, 185°, 245°, 305°.$$

Como se muestra en la figura 5, podemos comprobar cualquier valor de c, elevando a la sexta potencia. Tenga en cuenta que $c = 32\sqrt{3} + 32i \approx 55.43 + 32i$. ■

8.6 Ejercicios

Ejer. 1–12: Use el teorema de De Moivre para cambiar el número complejo dado a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1 $(3 + 3i)^5$

2 $(1 + i)^{11}$

3 $(1 - i)^{10}$

4 $(-1 + i)^8$

5 $(1 - \sqrt{3}\,i)^3$

6 $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$

7 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{15}$

8 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{25}$

9 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{20}$

10 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{50}$

11 $(\sqrt{3} + i)^7$

12 $(-2 - 2i)^{10}$

13 Encuentre las dos raíces cuadradas de $1 + \sqrt{3}\,i$.

14 Encuentre las dos raíces cuadradas de $-9i$.

15 Encuentre las cuatro raíces cuartas de $-1 - \sqrt{3}\,i$.

16 Encuentre las cuatro raíces cuartas de $-8 + 8\sqrt{3}\,i$.

17 Encuentre las tres raíces cúbicas de $-27i$.

18 Encuentre las tres raíces cúbicas de $64i$.

Ejer. 19–22: Encuentre las raíces indicadas y represéntelas geométricamente.

19 Las seis raíces sextas de la unidad.

20 Las ocho raíces octavas de la unidad.

21 Las cinco raíces quintas de $1 + i$

22 Las cinco raíces quintas de $-\sqrt{3} - i$

Ejer. 23–32: Encuentre las soluciones de la ecuación.

23 $x^4 - 16 = 0$

24 $x^6 - 64 = 0$

25 $x^6 + 64 = 0$

26 $x^5 + 1 = 0$

27 $x^3 + 8i = 0$

28 $x^3 - 216i = 0$

29 $x^5 - 243 = 0$

30 $x^4 + 81 = 0$

31 $x^4 = 8 + 8\sqrt{3}i$

32 $x^6 = -1 + \sqrt{3}i$

33 Use la fórmula de Euler para demostrar el teorema de De Moivre.

CAPÍTULO 8 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–4: Encuentre los valores exactos de las partes restantes del triángulo ABC.

1 $\alpha = 60°,\quad b = 6,\quad c = 7$

2 $\gamma = 30°,\quad a = 2\sqrt{3},\quad c = 2$

3 $\alpha = 60°,\quad \beta = 45°,\quad b = 100$

4 $a = 2,\quad b = 3,\quad c = 4$

Ejer. 5–8: Calcule las partes restantes del triángulo ABC.

5 $\beta = 67°,\quad \gamma = 75°,\quad b = 12$

6 $\alpha = 23°30',\quad c = 125,\quad a = 152$

7 $\beta = 115°,\quad a = 4.6,\quad c = 7.3$

8 $a = 37,\quad b = 55,\quad c = 43$

Ejer. 9–10: Calcule el área del triángulo *ABC* al 0.1 de unidad cuadrada más cercana.

9 $\alpha = 75°, \quad b = 20, \quad c = 30$

10 $a = 5, \quad b = 8, \quad c = 12$

11 Si $\mathbf{a} = \langle -4, 5\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -8\rangle$, trace los vectores correspondientes a

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (c) $2\mathbf{a}$ (d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$

12 Si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, encuentre el vector o número correspondiente a

(a) $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

(c) $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ (d) $\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|$

13 **Rumbo de un barco** Un barco navega con rapidez de 14 mi/h en la dirección S50°E. Exprese su velocidad $\mathbf{v}$ como un vector.

14 Las magnitudes y direcciones de dos fuerzas son 72 lb, S60°E y 46 lb, N74°E, respectivamente. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

15 Encuentre un vector que tenga la dirección opuesta de $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y dos veces su magnitud

16 Encuentre un vector de magnitud 4 que tenga la misma dirección que $\mathbf{a} = \langle -3, 7\rangle$.

17 Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$ y $c > 0$, describa el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| = c$.

18 Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores con el mismo punto inicial y ángulo θ entre ellos, demuestre que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

19 **Rapidez y dirección del viento** Un avión está volando en la dirección 80° con una velocidad en el aire de 400 mi/h. Su velocidad en tierra y rumbo verdadero son 390 mi/h y 90°, respectivamente. Calcule la dirección y rapidez del viento.

20 Si $\mathbf{a} = \langle 2, -3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, -4\rangle$, encuentre cada uno de los siguientes:

(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (b) el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

(c) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$

21 Si $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, encuentre cada uno de los siguientes:

(a) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$

(b) el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

(c) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

22 Una fuerza constante tiene la magnitud y dirección del vector $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de $\mathbf{a}$ se mueve a lo largo del eje x desde $P(-5, 0)$ a $Q(3, 0)$.

Ejer. 23–30: Exprese el número complejo en forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$.

23 $-10 + 10i$ 24 $2 - 2\sqrt{3}\,i$

25 -17 26 $-12i$

27 $-5\sqrt{3} - 5i$ 28 $4 + 5i$

29 $-2 + 5i$ 30 $8 - 15i$

Ejer. 31–32: Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

31 $20\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \,\text{sen}\, \frac{11\pi}{6}\right)$ 32 $13 \,\text{cis}\, \left(\tan^{-1} \frac{5}{12}\right)$

Ejer. 33–34: Use formas trigonométricas para hallar z_1z_2 y z_1/z_2.

33 $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i, \quad z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$

34 $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i, \quad z_2 = -1 - i$

Ejer. 35–38: Use el teorema de De Moivre para cambiar el número complejo dado a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

35 $(-\sqrt{3} + i)^9$ 36 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{30}$

37 $(3 - 3i)^5$ 38 $\left(2 + 2\sqrt{3}\,i\right)^{10}$

39 Encuentre las tres raíces cúbicas de -27.

40 Sea $z = 1 - \sqrt{3}\,i$.

(a) Halle z^{24}. (b) Halle las tres raíces cúbicas de z.

41 Encuentre las soluciones de la ecuación $x^5 - 32 = 0$

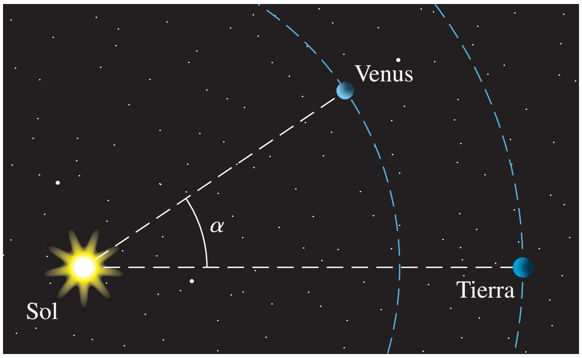
42 **Pista para patinetas** Una pista para una carrera de patinetas consta de un tramo de 200 metros cuesta abajo y 150 metros de una parte a nivel. El ángulo de elevación del punto de partida de la carrera desde la línea de meta es 27.4°. ¿Qué ángulo forma la colina con la horizontal?

43 **Topografía** Un topógrafo observa una torre en la dirección N40°E, camina hacia el norte 100 yardas y observa la misma torre en N59°E. Calcule la distancia desde el segundo avistamiento a la torre.

44 **Distancia de vuelo** Un avión vuela 120 millas desde el punto A en la dirección 330° y luego viaja 140 millas en la dirección 280°. Aproximadamente, ¿qué tan lejos está el avión del punto A?

45 **Distancias a planetas** Las distancias entre la Tierra y planetas cercanos se pueden calcular usando el ángulo de fase α, como se ve en la figura. Suponga que la distancia entre la Tierra y el Sol es de 93,000,000 de millas y la distancia entre Venus y el Sol es de 67,000,000 de millas. Calcule la distancia entre la Tierra y Venus al millón de millas más cercano cuando $\alpha = 34°$.

EJERCICIO 45

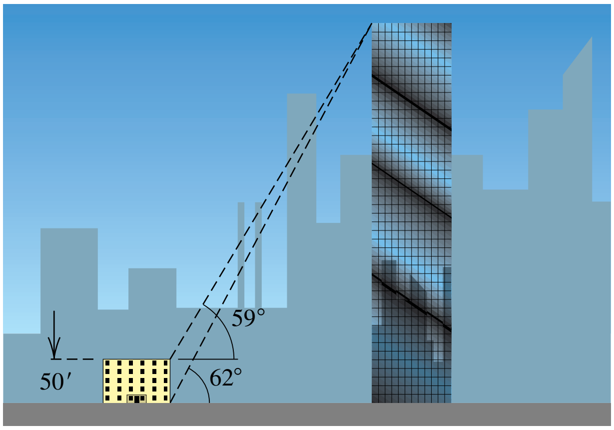


46 **Altura de un rascacielos** Si un rascacielos se ve desde lo alto de un edificio de 50 pies, el ángulo de elevación es 59°. Si se ve desde el nivel de la calle, el ángulo de elevación es 62° (vea la figura).

(a) Use la ley de los senos para aproximar la distancia más corta entre las cimas de los dos edificios.

(b) Calcule la altura del rascacielos.

EJERCICIO 46

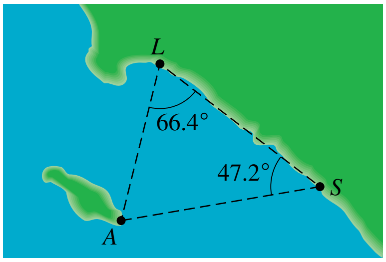


47 **Distancias entre ciudades** Las comunidades de playa de San Clemente y Long Beach están a 41 millas entre sí, a lo largo de un tramo relativamente recto de costa. En la figura se muestra el triángulo formado por las dos ciudades y la población de Avalon en la esquina sudeste de la isla de Santa Catalina. Se encuentra que los ángulos ALS y ASL miden 66.4° y 47.2°, respectivamente.

(a) Calcule la distancia de Avalon a cada una de las dos ciudades.

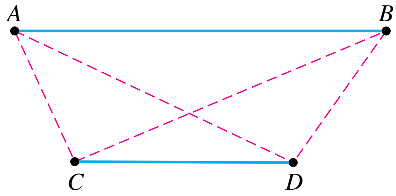
(b) Calcule la distancia más corta de Avalon a la costa.

EJERCICIO 47



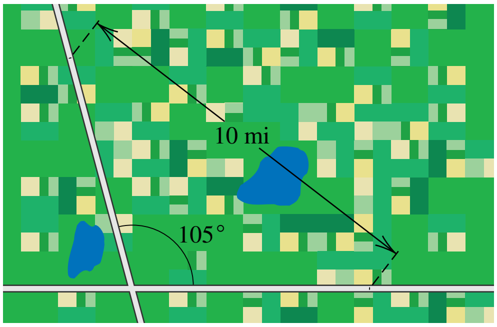
48 **Topografía** Un topógrafo desea hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B. Como se muestra en la figura, se seleccionan dos puntos C y D desde los cuales es posible ver A y B. La distancia CD y los ángulos ACD, ACB, BDC y BDA se miden a continuación. Si $CD = 120$ ft, $\angle ACD = 115°$, $\angle ACB = 92°$, $\angle BDC = 125°$, y $\angle BDA = 100°$, calcule la distancia AB.

EJERCICIO 48



49 **Contacto por radio** Dos muchachas con radios de comunicación están en el cruce de dos caminos que se encuentran a un ángulo de 105° (vea la figura). Una de ellas empieza a caminar en dirección al norte por un camino a una velocidad de 5 millas/h; al mismo tiempo, la otra camina al este por el otro camino al mismo paso. Si cada radio tiene un alcance de 10 millas, ¿cuánto tiempo mantendrán comunicación las muchachas?

EJERCICIO 49



50 **Diseño robótico** En la figura se muestra un diseño para un brazo robótico con dos piezas movibles. Las dimensiones se seleccionan para emular un brazo humano. El brazo superior AC y el brazo inferior CP giran a los ángulos θ_1 y θ_2, respectivamente, para sujetar un objeto en el punto $P(x, y)$.

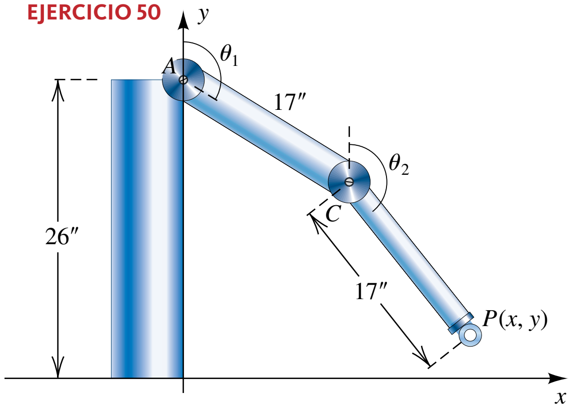
(a) Demuestre que $\angle ACP = 180° - (\theta_2 - \theta_1)$.

(b) Encuentre $d(A, P)$, y luego use el inciso (a) y la ley de los cosenos para demostrar que

$$1 + \cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x^2 + (y - 26)^2}{578}.$$

(c) Si $x = 25$, $y = 4$ y $\theta_1 = 135°$, aproxime θ_2.

EJERCICIO 50

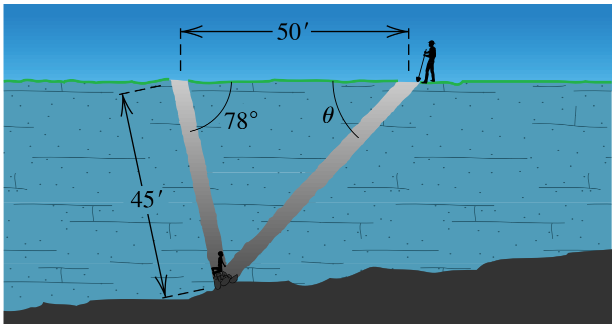


51 **Esfuerzos de rescate** Un niño está atrapado 45 pies bajo la superficie en el tiro de una mina abandonada que se inclina a un ángulo de 78° respecto a la horizontal. Un túnel de rescate se ha de cavar a 50 pies desde la abertura del tiro (vea la figura).

(a) ¿A qué ángulo θ debe cavarse el túnel?

(b) Si el túnel se puede cavar a razón de 3 pies/h, ¿cuántas horas tardarán en llegar al niño?

EJERCICIO 51



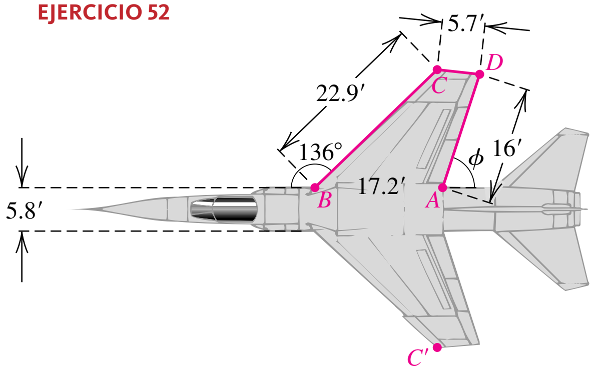
52 **Diseño de un avión caza a reacción** En la figura se muestra el plano de la parte superior del ala de un avión caza.

(a) Calcule el ángulo ϕ.

(b) ACalcule el área del cuadrilátero $ABCD$.

(c) Si el fuselaje es de 5.8 pies de ancho, calcule la envergadura CC'.

EJERCICIO 52



CAPÍTULO 8 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 **Fórmula de Mollweide** La siguiente ecuación, llamada *fórmula de Mollweide*, se usa a veces para comprobar soluciones de triángulos porque contiene todos los ángulos y lados:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma}$$

(a) Use la ley de los senos para demostrar que

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

(b) Use una fórmula de suma a producto y fórmula de ángulo doble para verificar la fórmula de Mollweide.

2 Use la forma trigonométrica de un número complejo para demostrar que $z^{-n} = 1/z^n$, donde n es un entero positivo.

3 Discuta las similitudes algebraicas y geométricas de las raíces cúbicas de cualquier número real positivo a.

4 Suponga que dos vectores **v** y **w** tienen el mismo punto inicial, que el ángulo entre ellos es θ y que $\mathbf{v} \neq m\mathbf{w}$ (m es un número real).

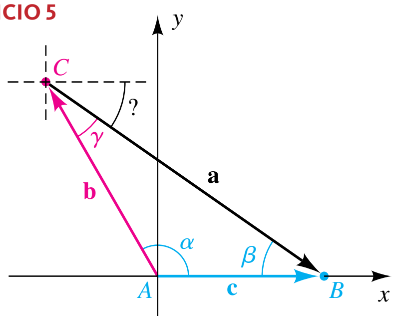
(a) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\mathbf{v} - \mathbf{w}$?

(b) ¿Cómo se puede hallar $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$?

5 **Una aproximación vectorial a las leyes de los senos y los cosenos**

(a) De la figura vemos que $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Use componentes horizontales y verticales para escribir **c** en términos de **i** y **j.**

EJERCICIO 5



(b) Ahora encuentre la magnitud de **c**, usando la respuesta al inciso (a), y simplifique al punto donde haya demostrado la ley de los cosenos.

(c) Si **c** se encuentra sobre el eje x, entonces su componente **j** es cero. Use este dato para demostrar la ley de los senos.

6 **Fórmula de Euler y otros resultados** Los siguientes son algunos resultados interesantes e inesperados que contienen números complejos y temas que ya hemos estudiado.

(a) Leonhard Euler (1707-1783) nos dio la siguiente fórmula:

$$e^{i\theta} = \cos\,\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

Si hacemos $\theta = \pi$, obtenemos $e^{i\pi} = -1$, o bien, lo que es equivalente,

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

una ecuación que relaciona cinco de los números más importantes en matemática. Encuentre $e^{2\pi i}$.

(b) Definimos el logaritmo de un número complejo $z \neq 0$ como sigue:

$$\text{LN}\, z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n),$$

donde ln es la función de logaritmo natural, θ es un argumento de z, y n es un entero. El **valor principal** de LN z es el valor que corresponde a $n = 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$. Encuentre los valores principales de LN (-1) y LN i.

(c) Definimos la potencia compleja w de un número complejo $z \neq 0$ como sigue:

$$z^w = e^{w\,\text{LN}\,z}$$

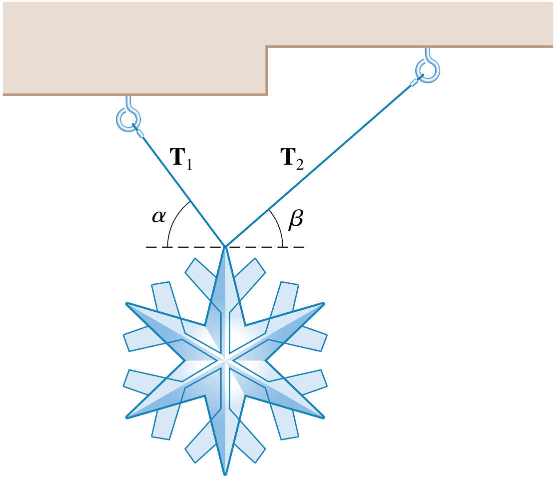
Usamos valores principales de LN z para hallar valores principales de z^w. Encuentre valores principales de $\sqrt{i}$ e i^i.

7 **¿Una identidad interesante?** Suponga que α, β y γ son ángulos en un triángulo oblicuángulo. Demuestre o desapruebe el siguiente enunciado: la suma de las tangentes de α, β y γ es igual al producto de las tangentes de α, β y γ.

8 **Fuerzas de alambres colgantes** Un adorno de 5 lb cuelga de dos alambres como se muestra en la figura. Demuestre que las magnitudes de las tensiones (fuerzas) de los alambres están dadas por

$$\|\mathbf{T}_1\| = \frac{5\cos\beta}{\text{sen}\,(\alpha + \beta)} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{T}_2\| = \frac{5\cos\alpha}{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}.$$

EJERCICIO 8



CAPÍTULO 8 EXAMEN DE CAPÍTULO

1 En $\triangle ABC$, $a = 5$ y $c = 3$. ¿Cuántos posibles triángulos hay si
(a) $\gamma = 35°$? **(b)** $\gamma = 39°$? **(c)** $\gamma = 158°$?

2 Los ángulos de elevación de un objeto desde dos puntos A y B a nivel del suelo son 25° y 57°, respectivamente. Los puntos están separados 6 millas y el objeto se encuentra entre ellos, en el mismo plano vertical. Calcule, a dos cifras decimales, la altura del objeto sobre el suelo.

3 Un guardia forestal en un punto de observación A divisa un incendio en un punto F en la dirección N15°50′E. Otro guardia en un punto de observación a 7.3 millas al este de A, observa el mismo incendio en dirección N48°20′W. Calcule a dos cifras decimales, la distancia de A a F.

4 Dados los tres lados de un triángulo, ¿qué ángulo encontraría enseguida y qué utilizaría para encontrarlo?

5 El ángulo en una esquina de un lote de terreno triangular es 75° y los lados que coinciden en esta esquina tienen una longitud de 300 y 250 pies, respectivamente. Calcule la longitud del tercer lado.

6 Un lote de terreno de forma triangular tiene lados de 80, 70 y 60 pies de longitud. Calcule, al décimo de grado más cercano, el ángulo más grande entre los lados.

7 Utilice la fórmula de Herón para calcular el área de $\triangle ABC$ dados $a = 26.0$ pies $b = 30.0$ pies y $c = 40.0$ pies.

8 Si $\mathbf{a} = \langle 3, -2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 4, 1\rangle$, encuentre el valor exacto de $\langle 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}\rangle$.

9 Los vectores **a** y **b** representan dos fuerzas que actúan sobre el mismo punto, con $\|\mathbf{a}\| = 10.2$ lb y $\|\mathbf{b}\| = 15.7$ lb, y $\theta = 33°$ es el ángulo positivo más pequeño entre **a** y **b**. Calcule la magnitud de la fuerza resultante.

10 Encuentre un vector de magnitud 7 que tenga dirección opuesta a $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$.

11 El piloto de un avión desea mantener un curso real en la dirección 245° con una velocidad en tierra de 450 mi/hr cuando el viento sopla directamente del norte a 30 mi/hr. Calcule la velocidad en el aire requerida y el rumbo de la brújula.

12 Calcule, a dos cifras decimales, el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

13 Determine todos los valores de m tales que $\mathbf{a} = 4m\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 9m\mathbf{i} - 25\mathbf{j}$ sean ortogonales.

14 Dados $\mathbf{a} = \langle 6, -5\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 7, 1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle -2, 4\rangle$, encuentre $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{c})$.

15 Dados $\mathbf{a} = \langle -8, 3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -4, 5\rangle$, encuentre $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$.

16 Un niño jala una carretilla hacia arriba sobre una rampa que forma un ángulo de 25° con la horizontal ejerciendo una fuerza de 20 lb sobre una manija que forma un ángulo de 27° con la rampa. Calcule el trabajo realizado al jalar la carretilla 200 pies.

17 Encuentre $|(2 - 3i)^2|$.

18 Exprese el número complejo $-3 + 2i$ en forma trigonométrica con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

19 Exprese $\sqrt{106}\ \text{cis}\left(\tan^{-1} \frac{2}{7}\right)$ en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

20 Use las formas trigonométricas para hallar $z_1 z_2$ y z_1/z_2 si $z_1 = -4 - 4\sqrt{3}i$ y $z_2 = 7i$.

21 Utilice el teorema de De Moivre para cambiar $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{32}$ a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

22 Encuentre las tres raíces cúbicas de $-64i$.

23 Encuentre las soluciones de la ecuación $x^5 - 7i = 0$.

9

Sistemas de ecuaciones y desigualdades

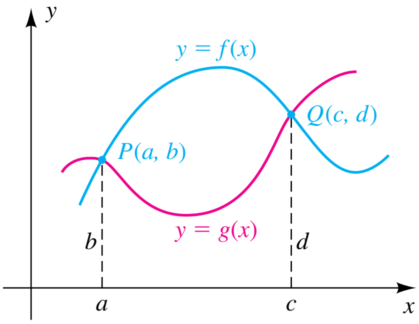
Las aplicaciones de las matemáticas a veces requieren trabajar simultáneamente con más de una ecuación con varias variables, es decir, con un sistema de ecuaciones. En este capítulo desarrollamos métodos para hallar soluciones que son comunes a todas las ecuaciones de un sistema. De particular importancia son las técnicas que comprenden matrices, porque están bien adaptadas a programas de cómputo y se pueden aplicar fácilmente a sistemas que contengan cualquier número de ecuaciones lineales con cualquier número de variables. También vamos a considerar sistemas de desigualdades y programación lineal, temas que son de la mayor importancia en aplicaciones financieras y estadísticas. La última parte del capítulo presenta una introducción al álgebra de matrices y determinantes.

9.1 Sistemas de ecuaciones

Considere las gráficas de las dos funciones f y g, ilustradas en la figura 1. En aplicaciones, con frecuencia es necesario hallar puntos tales como $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ donde se intersectan las gráficas. Como $P(a, b)$ está en cada gráfica, el par (a, b) es una **solución** de *ambas* ecuaciones, $y = f(x)$ y $y = g(x)$; es decir

$$b = f(a) \qquad \text{y} \qquad b = g(a).$$

FIGURA 1



Decimos que (a, b) es una solución del **sistema de ecuaciones** (o simplemente **sistema**)

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

donde la llave se usa para indicar que las ecuaciones deben tratarse simultáneamente. Del mismo modo, el par (c, d) es una solución del sistema. **Resolver** un sistema de ecuaciones significa hallar todas las soluciones.

Como caso especial, considere el sistema

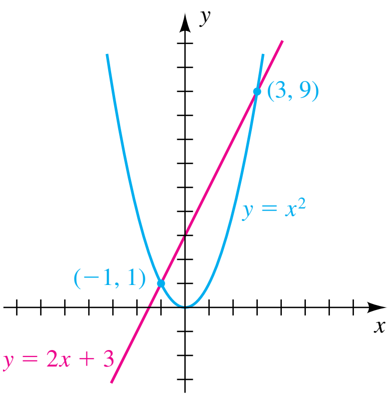
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

*En capítulos previos **estimamos** soluciones de sistemas al usar el comando intersect de una calculadora de gráficas. Ahora nos concentramos en hallar soluciones **exactas.***

Las gráficas de las ecuaciones son la parábola y la recta trazadas en la figura 2. La tabla siguiente muestra que los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 9)$ están en ambas gráficas.

(x, y)	$y = x^2$	$y = 2x + 3$
$(-1, 1)$	$1 = (-1)^2$ o $1 = 1$	$1 = 2(-1) + 3$ o $1 = 1$
$(3, 9)$	$9 = 3^2$ o $9 = 9$	$9 = 2(3) + 3$ o $9 = 9$

FIGURA 2



En consecuencia, $(-1, 1)$ y $(3, 9)$ son soluciones del sistema.

La exposición precedente no nos da una estrategia para hallar realmente las soluciones. Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo hallar las soluciones del sistema usando sólo métodos algebraicos.

EJEMPLO 1 Resolver un sistema de dos ecuaciones

Resolver el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si (x, y) es una solución del sistema, entonces la variable y de la ecuación $y = 2x + 3$ debe satisfacer la condición $y = x^2$. Por tanto, *sustituimos* x^2 por y en $y = 2x + 3$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x + 3 && \text{sustituya } y = x^2 \text{ en } y = 2x + 3 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 && \text{reste } 2x + 3 \\ (x + 1)(x - 3) &= 0 && \text{factorice} \\ x + 1 = 0, \quad x - 3 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ x = -1, \quad x &= 3 && \text{despeje } x \end{aligned}$$

Esto nos da los valores x para las soluciones (x, y) del sistema. Para hallar los correspondientes valores y, podemos usar ya sea $y = x^2$ o $y = 2x + 3$. Usando $y = x^2$, encontramos que

$$\text{si} \quad x = -1, \quad \text{entonces} \quad y = (-1)^2 = 1$$
$$\text{y} \qquad \text{si} \quad x = 3, \quad \text{entonces} \quad y = 3^2 = 9.$$

En consecuencia, las soluciones del sistema son $(-1, 1)$ y $(3, 9)$.

También podríamos haber hallado las soluciones al sustituir $y = 2x + 3$ en la *primera* ecuación, $y = x^2$, obteniendo

$$2x + 3 = x^2.$$

El resto de la solución es la misma. ■

Dado el sistema del ejemplo 1, *podríamos* haber despejado x de una de las ecuaciones en términos de y y luego sustituirla en la otra ecuación, obteniendo una ecuación sólo con y. Al resolver la última ecuación nos daría los valores y para las soluciones del sistema. Los valores x podrían hallarse entonces usando una de las ecuaciones dadas. En general, podemos usar las directrices siguientes, donde u y v denotan cualesquiera dos variables (*posiblemente* x y y). Esta técnica se conoce como el **método de sustitución.**

Directrices para el método de sustitución para dos ecuaciones con dos variables

1. De una de las ecuaciones despeje una variable u en términos de la otra variable v.
2. Sustituya la expresión para u hallada en la directriz 1 en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con v únicamente.
3. Encuentre las soluciones de la ecuación con v obtenida en la directriz 2.
4. Sustituya los valores v hallados en la directriz 3 en la ecuación de la directriz 1 y encuentre los correspondientes valores de u.
5. Compruebe cada par (u, v) hallado en la directriz 4 del sistema dado.

EJEMPLO 2 **Usar el método de sustitución**

Resuelva el siguiente sistema y luego trace la gráfica de cada ecuación, mostrando los puntos de intersección:

$$\begin{cases} x + y^2 = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Primero debemos decidir cuál ecuación resolver y cuál variable despejar. Examinemos las posibilidades.

De la primera ecuación despeje y:	$y = \pm\sqrt{6 - x}$
De la primera ecuación despeje x:	$x = 6 - y^2$
De la segunda ecuación despeje y:	$y = (3 - x)/2$
De la segunda ecuación despeje x:	$x = 3 - 2y$

Directriz 1 Si vemos hacia delante de la directriz 2, observamos que al despejar x de cualquiera de las ecuaciones resultará en una sustitución sencilla. Así, usaremos $x = 3 - 2y$ y seguiremos la directriz con $u = x$ y $v = y$.

(continúa)

Directriz 2 Sustituya la expresión por x hallada en la directriz 1 en la primera ecuación del sistema:

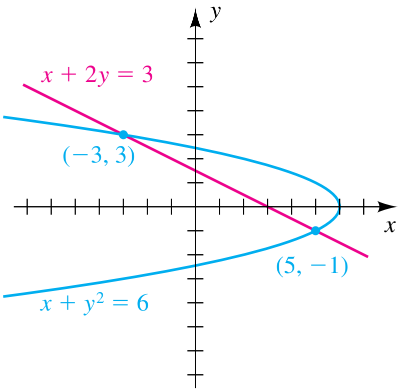
$$(3 - 2y) + y^2 = 6 \quad \text{sustituya } x = 3 - 2y \text{ en } x + y^2 = 6$$
$$y^2 - 2y - 3 = 0 \quad \text{simplifique}$$

Directriz 3 Despeje y de la ecuación de la directriz 2:

$$(y - 3)(y + 1) = 0 \quad \text{factorice } y^2 - 2y - 3$$
$$y - 3 = 0, \quad y + 1 = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$
$$y = 3, \quad y = -1 \quad \text{despeje } y$$

Éstos son los únicos valores y posibles para las soluciones del sistema.

FIGURA 3



Directriz 4 Use la ecuación $x = 3 - 2y$ de la directriz 1 para hallar los correspondientes valores de x:

$$\text{si} \quad y = 3, \quad \text{entonces} \quad x = 3 - 2(3) = 3 - 6 = -3$$
$$\text{si} \quad y = -1, \quad \text{entonces} \quad x = 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5$$

Entonces, las posibles soluciones son $(-3, 3)$ y $(5, -1)$.

Directriz 5 Sustituyendo $x = -3$ y $y = 3$ en $x + y^2 = 6$, la primera ecuación del sistema, tendremos $-3 + 9 = 6$, un enunciado verdadero. Sustituyendo $x = -3$ y $y = 3$ en $x + 2y = 3$, la segunda ecuación del sistema, da $-3 + 6 = 3$, también un enunciado verdadero. Por tanto, $(-3, 3)$ es una solución del sistema. De modo semejante, podemos comprobar que $(5, -1)$ es también una solución.

Las gráficas de las dos ecuaciones (una parábola y una recta, respectivamente) están trazadas en la figura 3, mostrando los dos puntos de intersección. ■

En ejemplos futuros no haremos una lista de las directrices específicas que se usan para hallar soluciones de sistemas.

Al resolver ciertos sistemas usando el método de sustitución, es conveniente que u o v de las directrices denoten una *expresión* que contiene otra variable. Esta técnica se ilustra en el siguiente ejemplo con $u = x^2$.

EJEMPLO 3 Usar el método de sustitución

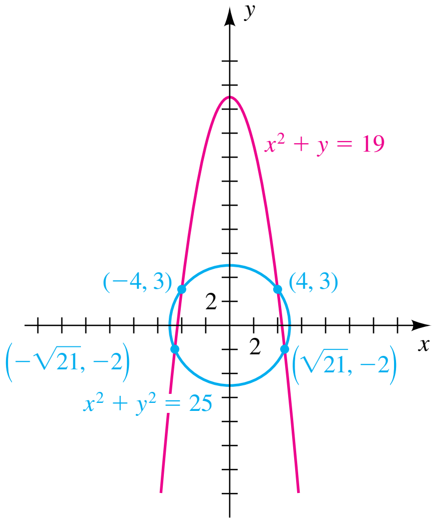
Resuelva el siguiente sistema y luego trace la gráfica de cada ecuación, mostrando los puntos de intersección:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y = 19 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Procedemos como sigue:

$$x^2 = 19 - y \quad \text{despeje } x^2 \text{ de } x^2 + y = 19$$
$$(19 - y) + y^2 = 25 \quad \text{sustituya } x^2 = 19 - y \text{ en } x^2 + y^2 = 25$$
$$y^2 - y - 6 = 0 \quad \text{simplifique}$$
$$(y - 3)(y + 2) = 0 \quad \text{factorice}$$
$$y - 3 = 0, \quad y + 2 = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$
$$y = 3, \quad y = -2 \quad \text{despeje } y$$

FIGURA 4



Éstos son los únicos valores y posibles para las soluciones del sistema. Para hallar los valores x correspondientes, usamos $x^2 = 19 - y$:

$$\text{Si} \quad y = 3, \quad \text{entonces} \quad x^2 = 19 - 3 = 16 \quad \text{y} \quad x = \pm 4$$
$$\text{Si} \quad y = -2, \quad \text{entonces} \quad x^2 = 19 - (-2) = 21 \quad \text{y} \quad x = \pm\sqrt{21}$$

Por tanto, las únicas soluciones posibles del sistema son

$$(4, 3), \quad (-4, 3), \quad \left(\sqrt{21}, -2\right) \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{21}, -2\right).$$

Podemos comprobar, por sustitución en las ecuaciones dadas, que los cuatro pares son soluciones.

La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia de radio 5 con centro en el origen, y la gráfica de $y = 19 - x^2$ es una parábola con un eje vertical. Las gráficas están trazadas en la figura 4. Los puntos de intersección corresponden a las soluciones del sistema.

Hay, por supuesto, otras formas de hallar soluciones. Podríamos despejar x^2, $x^2 = 25 - y^2$ de la primera ecuación y luego sustituir en la segunda, obteniendo $25 - y^2 + y = 19$. Otro método es despejar y de la segunda ecuación, $y = 19 - x^2$, y sustituir en la primera. ■

También consideramos ecuaciones con tres variables x, y y z, como por ejemplo

$$x^2y + xz + 3^y = 4z^3.$$

Esta ecuación tiene una **solución** (a, b, c) si la sustitución de a, b y c por x, y y z, respectivamente, da un enunciado verdadero. Nos referimos a (a, b, c) como una **terna ordenada** de números reales. Los sistemas de ecuaciones son **sistemas equivalentes** siempre que tienen las mismas soluciones. Un sistema de ecuaciones con tres variables y las soluciones del sistema se definen como en el caso de dos variables. Del mismo modo, podemos considerar sistemas de *cualquier* número de ecuaciones con *cualquier* número de variables.

El método de sustitución se puede ampliar a estos sistemas más complicados. Por ejemplo, dadas tres ecuaciones con tres variables, suponga que es posible despejar una de las variables de las ecuaciones en términos de las dos variables restantes. Al sustituir esa expresión en cada una de las otras ecuaciones, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Las soluciones del sistema de dos variables se pueden usar entonces para hallar las soluciones del sistema original.

EJEMPLO 4 **Resolver un sistema de tres ecuaciones**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ xyz = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Procedemos como sigue:

$$z = 1 - 2y \qquad \text{despeje } z \text{ de } 2y + z = 1$$

$$\begin{cases} x - y + (1 - 2y) = 2 \\ xy(1 - 2y) = 0 \end{cases} \qquad \text{sustituya } z = 1 - 2y \text{ en las primeras dos ecuaciones}$$

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ xy(1 - 2y) = 0 \end{cases} \qquad \text{sistema equivalente}$$

(continúa)

Ahora hallamos las soluciones del último sistema:

$x = 3y + 1$	despeje x de $x - 3y - 1 = 0$
$(3y + 1)y(1 - 2y) = 0$	sustituya $x = 3y + 1$ en $xy(1 - 2y) = 0$
$3y + 1 = 0, \quad y = 0, \quad 1 - 2y = 0$	teorema del factor cero
$y = -\frac{1}{3}, \quad y = 0, \quad y = \frac{1}{2}$	despeje y

Éstos son los únicos valores y posibles para las soluciones del sistema.

Para obtener los valores x correspondientes, sustituimos por y en la ecuación $x = 3y + 1$, obteniendo

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad \text{y} \qquad x = \tfrac{5}{2}.$$

El uso de $z = 1 - 2y$ nos da los valores z correspondientes

$$z = \tfrac{5}{3}, \quad z = 1, \qquad \text{y} \qquad z = 0.$$

Por tanto, las soluciones (x, y, z) del sistema original deben estar entre las ternas ordenadas

$$\left(0, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{3}\right), \qquad (1, 0, 1), \qquad \text{y} \qquad \left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right).$$

La comprobación de cada una demuestra que las tres ternas ordenadas son soluciones del sistema. ■

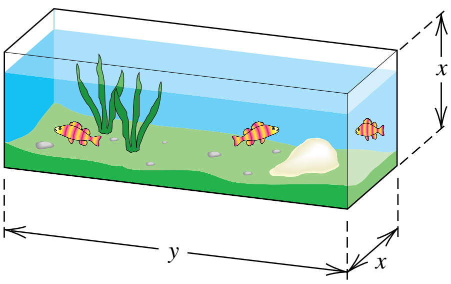
EJEMPLO 5 Una aplicación de un sistema de ecuaciones

¿Es posible construir un acuario con tapa de vidrio y dos extremos cuadrados que contengan 16 ft^3 de agua y requiera 40 ft^2 de vidrio? (Desprecie el grosor del vidrio.)

SOLUCIÓN Empezamos por trazar un acuario típico y marcarlo como en la figura 5, con x y y en pies. Consultando la figura y usando fórmulas para volumen y área, vemos que

volumen del acuario	$= x^2y$	longitud × ancho × altura
pies cuadrados de vidrio necesarios	$= 2x^2 + 4xy$	2 extremos, 2 lados, tapa y fondo

FIGURA 5



Como el volumen debe ser 16 ft^3 y el área del vidrio necesario es 40 ft^2, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2y = 16 \\ 2x^2 + 4xy = 40 \end{cases}$$

Graficar $y = x^2 - 20x + 32$ muestra dos ceros positivos. Uno parece ser 2 y el otro ligeramente mayor a 3.

Encontramos las soluciones como sigue:

$$y = \frac{16}{x^2} \qquad \text{despeje } y \text{ de } x^2y = 16$$

$$2x^2 + 4x\left(\frac{16}{x^2}\right) = 40 \qquad \text{sustituya } y = \frac{16}{x^2} \text{ en } 2x^2 + 4xy = 40$$

$$x^2 + \frac{32}{x} = 20 \qquad \text{cancele } x, \text{ y divida entre 2}$$

$$x^3 + 32 = 20x \qquad \text{multiplique por } x\ (x \neq 0)$$

$$x^3 - 20x + 32 = 0 \qquad \text{reste } 20x$$

A continuación buscamos soluciones racionales de la última ecuación. La división del polinomio $x^3 - 20x + 32$ sintéticamente entre $x - 2$ nos da

2	1	0	−20	32
		2	4	−32
	1	2	−16	0

Entonces, una solución de $x^3 - 20x + 32 = 0$ es 2, y las dos soluciones restantes son ceros de la ecuación $x^2 + 2x - 16$, es decir, raíces de la ecuación degradada

$$x^2 + 2x - 16 = 0.$$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{17}}{2} = -1 \pm \sqrt{17}.$$

Como x es positiva, podemos descartar $x = -1 - \sqrt{17}$. En consecuencia, los únicos valores de x posibles son

$$x = 2 \qquad \text{y} \qquad x = -1 + \sqrt{17} \approx 3.12.$$

Los valores y correspondientes se pueden hallar al sustituir por x en la ecuación $y = 16/x^2$. Si hacemos $x = 2$ tendremos $y = \frac{16}{4} = 4$. Usando estos valores, obtenemos las dimensiones de 2 pies por 2 pies por 4 pies para el acuario.

Si hacemos $x = -1 + \sqrt{17}$, obtenemos $y = 16/\left(-1 + \sqrt{17}\right)^2$, que se simplifica a $y = \frac{1}{8}\left(9 + \sqrt{17}\right) \approx 1.64$. Entonces, las dimensiones aproximadas para otro acuario son 3.12 pies por 3.12 pies por 1.64 pies. ■

9.1 Ejercicios

Ejer. 1–36: Use el método de sustitución para resolver el sistema.

1 $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y^2 = 1 - x \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} y^2 = x \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = 4x^3 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x - y^3 = 1 \\ 2x = 9y^2 + 2 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 3x - 4y + 20 = 0 \\ 3x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -6x + 9y = 4 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 8x - 10y = -5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 85 \end{cases}$

13 $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$

15 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y - x = 4 \end{cases}$

16 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = -25 \end{cases}$

17 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y + 2x = -1 \end{cases}$

19 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x + y = 9 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + 2x = -3 \end{cases}$

21 $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10 \\ x + y = 1 \end{cases}$

22 $\begin{cases} xy = 2 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$

23 $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x + 2} \\ y = x + 5 \end{cases}$

24 $\begin{cases} y = \dfrac{10}{x + 3} \\ y = -x + 8 \end{cases}$

25 $\begin{cases} y = 20/x^2 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$

26 $\begin{cases} x = y^2 - 4y + 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

27 $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 4 \\ 9y^2 + 16x^2 = 140 \end{cases}$

28 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 6x^2 + 7y^2 = 28 \end{cases}$

29 $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 8x^2 + 16y^2 = 128 \end{cases}$

30 $\begin{cases} 25y^2 - 16x^2 = 400 \\ 9y^2 - 4x^2 = 36 \end{cases}$

31 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

32 $\begin{cases} 6x^3 - y^3 = 1 \\ 3x^3 + 4y^3 = 5 \end{cases}$

33 $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + z = 9 \\ x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$

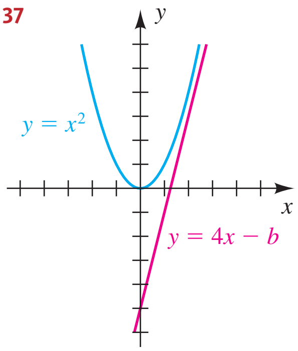
34 $\begin{cases} 2x - 3y - z^2 = 0 \\ x - y - z^2 = -1 \\ x^2 - xy = 0 \end{cases}$

35 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 5 \\ 2x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

36 $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2y - z = 4 \\ xyz = 0 \end{cases}$

37 Encuentre los valores de b tales que el sistema representado en la gráfica de la siguiente página tenga
(a) una solución **(b)** dos soluciones
(c) ninguna solución

EJERCICIO 37



Interprete (a)−(c) gráficamente.

38 Encuentre los valores de b tales que el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + b \end{cases}$$

tenga

(a) una solución **(b)** dos soluciones

(c) ninguna solución

Interprete (a)−(c) gráficamente.

39 ¿Hay un número real x tal que $x = 2^{-x}$? Determine esto al exhibir gráficamente el sistema

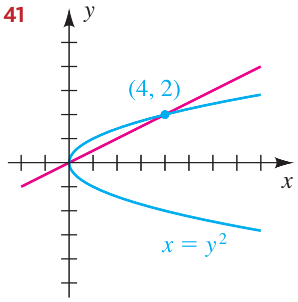
$$\begin{cases} y = x \\ y = 2^{-x} \end{cases}$$

40 ¿Hay un número real x tal que $x = \log x$? Determine esto al exhibir gráficamente el sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = \log x \end{cases}$$

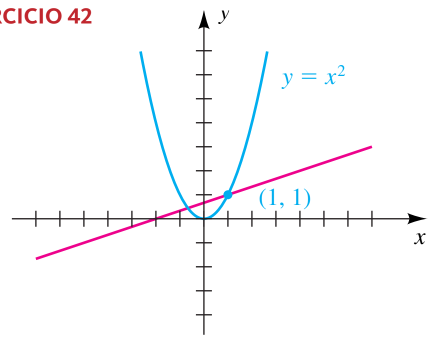
41 En la figura se muestra la gráfica de $x = y^2$ y una recta de pendiente m que pasa por el punto (4, 2). Encuentre el valor de m tal que la recta intersecte la gráfica sólo en (4, 2) e interprete gráficamente.

EJERCICIO 41



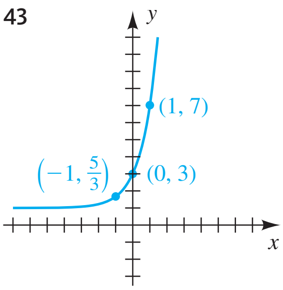
42 En la figura se muestra la gráfica de $y = x^2$ y una recta de pendiente m que pasa por el punto (1, 1). Encuentre el valor de m tal que la recta intersecte la gráfica sólo en (1, 1) e interprete gráficamente.

EJERCICIO 42

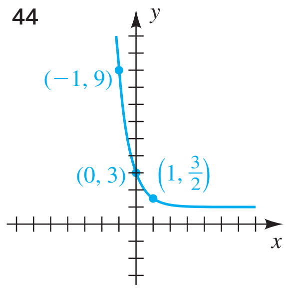


Ejer. 43–44: Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^x + c$ para la gráfica.

43



44



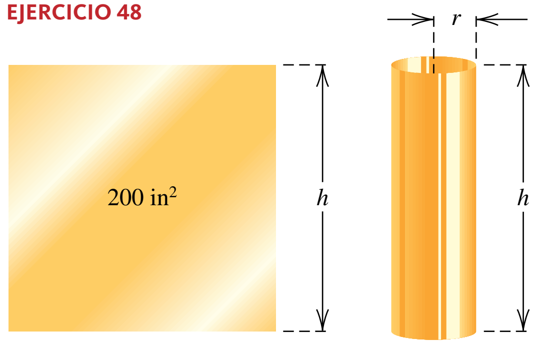
45 Encuentre dos números que tengan una diferencia de 8 y un cociente de 3.

46 Encuentre dos números que tengan una suma de 10 y un producto de 22.

47 El perímetro de un rectángulo es 40 pulgadas y su área es 96 in^2. Encuentre su longitud y ancho.

48 **Construcción de tuberías** Se han de construir secciones de tubería cilíndrica a partir de delgadas láminas rectangulares que tienen un área de 200 in^2 (vea la figura). ¿Es posible construir un tubo que tenga un volumen de 200 in^3? Si es así, encuentre r y h.

EJERCICIO 48



49 **Población de peces** En ciencias de la industria pesquera, se usan funciones de restablecimiento de productores de huevos para predecir el número de peces adultos R, en la población de reproductores, a partir de un cálculo S del número de peces que actualmente son productores de huevos.

(a) Para ciertas especies de peces, $R = aS/(S + b)$. Calcule a y b con los datos de la tabla siguiente.

Año	2009	2010	2011
Número de ponedoras	40 000	60 000	72 000

(b) Pronostique la población de reproductores para el año 2012.

50 **Población de peces** Consulte el ejercicio 49. La función de restablecimiento de productores de huevos de Ricker está dada por

$$R = aSe^{-bS}$$

para constantes positivas a y b. Esta relación predice bajo restablecimiento de existencias muy altas y se ha hallado que es muy apropiada para numerosas especies, por ejemplo el bacalao del ártico. Vuelva a trabajar el ejercicio 49 usando la función de Ricker de restablecimiento de ponedoras.

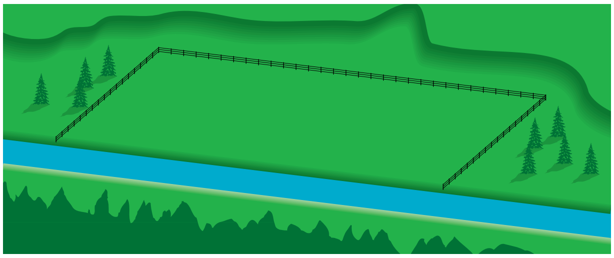
51 **Competencia por alimentos** Un *modelo de competencia* es un conjunto de ecuaciones que especifica la forma en que dos o más especies interactúan en competencia por los recursos alimenticios de un ecosistema. Denotemos con x y y los números (en cientos) de dos especies competidoras, y suponga que los porcentajes respectivos de crecimiento R_1 y R_2 están dados por

$$R_1 = 0.01x(50 - x - y),$$
$$R_2 = 0.02y(100 - y - 0.5x).$$

Determine los niveles de población (x, y) en los que ambos porcentajes de crecimiento son cero. (Estos niveles de población se conocen como *puntos estacionarios*.)

52 **Instalar una cerca en un terreno** Un agricultor tiene 2420 pies de cerca para encerrar un terreno que se encuentra a lo largo de un río recto. Si no se usa cerca de lo largo del río (vea la figura), ¿es posible encerrar 10 acres de terreno? Recuerde que 1 acre = 43 560 ft^2.

EJERCICIO 52



53 **Construcción de un acuario** Consulte el ejemplo 5. ¿Es posible construir un pequeño acuario *abierto,* con dos extremos cuadrados, que contenga 2 ft^3 de agua y requiera de 8 ft^2 de vidrio? Si es así, calcule las dimensiones. (Desprecie el grosor del vidrio.)

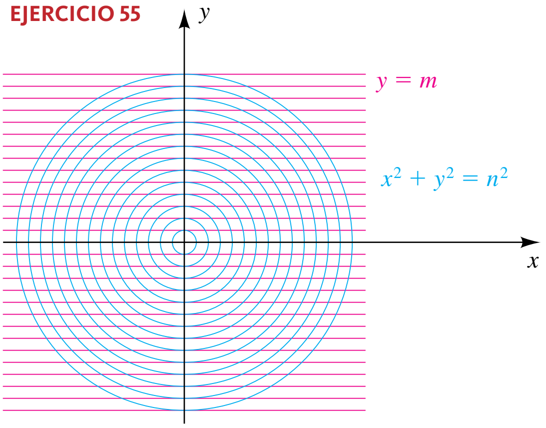
54 **Problema isoperimétrico** El problema isoperimétrico es para demostrar que de todas las figuras geométricas planas con el mismo perímetro (figuras isoperimétricas), el círculo tiene la mayor área. Demuestre que ningún rectángulo tiene la misma área y el mismo perímetro que cualquier círculo.

55 **Patrón de moiré** Un patrón de moiré se forma cuando se superponen dos figuras geométricamente regulares. En el diagrama se muestra una figura obtenida de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = n^2$ y la familiar de rectas horizontales $y = m$ para enteros m y n.

(a) Demuestre que los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = n^2$ y la recta $y = n - 1$ se encuentran en una parábola.

(b) Trabaje el inciso (a) usando la recta $y = n - 2$.

EJERCICIO 55



56 **Dimensiones de una píldora** Una píldora esférica tiene diámetro de 1 centímetro. Una segunda píldora, en forma de cilindro circular recto, se ha de elaborar con el mismo volumen y el doble del área superficial que la píldora esférica.

(a) Si r es el radio y h es la altura de la píldora cilíndrica, demuestre que $6r^2h = 1$ y $r^2 + rh = 1$. Concluya que $6r^3 - 6r = 0$.

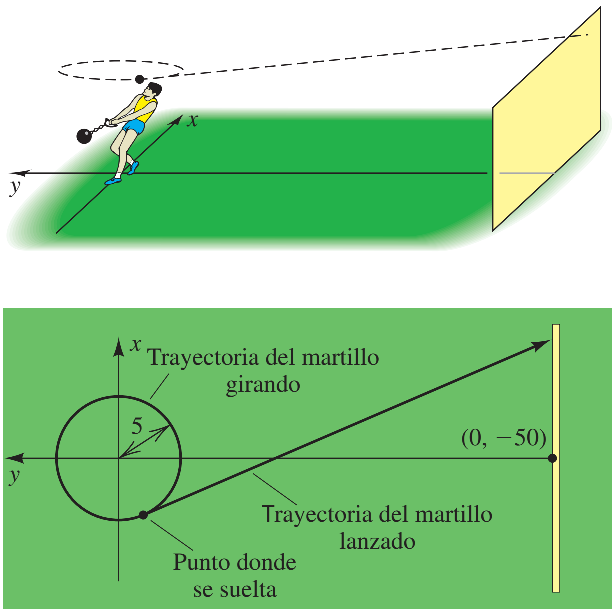
(b) Las soluciones positivas de $6r^3 - 6r + 1 = 0$ son aproximadamente 0.172 y 0.903. Encuentre las alturas correspondientes e interprete estos resultados.

57 **Lanzamiento de martillo** Un deportista de lanzamiento de martillo está trabajando en su entrenamiento en una pequeña superficie de prácticas. El martillo gira, generando un círculo con radio de 5 pies y, cuando se lanza, golpea una pantalla alta que está a 50 pies del centro del lugar del lanzamiento. Introduzca ejes coordenados como se muestra en la figura (no a escala).

(a) Si el martillo se suelta en $(-4, -3)$ y se desplaza en la dirección tangente, ¿dónde golpeará a la pantalla?

(b) Si el martillo debe golpear en $(0, -50)$, ¿dónde debe soltarse en el círculo?

EJERCICIO 57

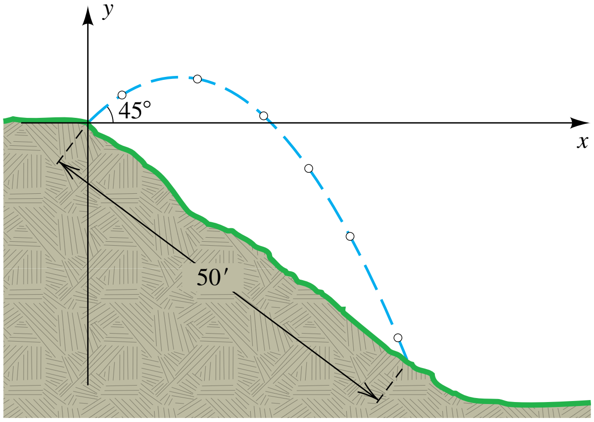


58 **Trayectoria de un balón lanzado** Una persona lanza un balón desde el borde de una colina, a un ángulo de 45° con la horizontal, como se ilustra en la figura. El balón cae al suelo a 50 pies abajo por la colina, que tiene una pendiente de $-\frac{3}{4}$. Por medio de cálculo, se puede demostrar que la trayectoria del balón está dada por $y = ax^2 + x + c$ para algunas constantes a y c.

(a) Sin considerar la estatura de la persona, encuentre una ecuación para la trayectoria.

(b) ¿Cuál es la máxima altura del balón *separado del suelo*?

EJERCICIO 58



Ejer. 59–60: Resuelva gráfica y algebraicamente el sistema de ecuaciones. Compare sus respuestas.

59 $x^2 + y^2 = 4;\quad x + y = 1$

60 $x^2y^2 = 9;\quad 2x + y = 0$

Ejer. 61–64: Grafique las dos ecuaciones en el mismo plano de coordenadas y estime las coordenadas de los puntos de intersección.

61 $y = 5x^3 - 5x;\quad x^2 + y^2 = 4$

62 $9x^2 + y^2 = 9;\quad y = e^x$

63 $|x + \ln|x|| - y^2 = 0;\quad \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2.25} = 1$

64 $y^3 - e^{x/2} = x;\quad y + 0.85x^2 = 2.1$

Ejer. 65–68: Los datos de la tabla son generados por la función *f*. Gráficamente calcule las constantes desconocidas *a* y *b* a cuatro lugares decimales.

65 $f(x) = ae^{-bx}$

x	$f(x)$
1	0.80487
2	0.53930
3	0.36136
4	0.24213

66 $f(x) = a \ln bx$

x	$f(x)$
1	−8.2080
2	−11.7400
3	−13.8061
4	−15.2720

67 $f(x) = ax^2 + e^{bx}$

x	$f(x)$
2	17.2597
3	40.1058
4	81.4579

68 $f(x) = \sqrt{ax + b}$

x	$f(x)$
2	3.8859
4	5.1284
6	6.1238

9.2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Una ecuación $ax + by = c$ (o, bien, lo que es equivalente, $ax + by - c = 0$), con a y b diferentes de cero, es una ecuación lineal con dos variables x y y. Del mismo modo, la ecuación $ax + by + cz = d$ es una ecuación lineal con tres variables x, y y z. También podemos considerar ecuaciones lineales con cuatro, cinco o *cualquier* número de variables. Los sistemas más comunes de ecuaciones son aquellos en los que toda ecuación es lineal. En esta sección vamos a considerar sólo sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Los sistemas que contengan más de dos variables se estudian en una sección más adelante.

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Para hallar las soluciones de un sistema, podemos manipular las ecuaciones hasta que obtengamos un sistema equivalente de ecuaciones sencillo para el cual las soluciones se pueden hallar fácilmente. Algunas manipulaciones (o *transformaciones*) que llevan a sistemas equivalentes se expresan en el siguiente teorema.

Teorema sobre sistemas equivalentes

Dado un sistema de ecuaciones, se obtiene un sistema equivalente si

(1) se intercambian dos ecuaciones.

(2) una ecuación se multiplica o divide por una constante diferente de cero.

(3) un múltiplo constante de una ecuación se suma a otra ecuación.

Un *múltiplo constante* de una ecuación se obtiene si se multiplica *cada uno* de los términos de la ecuación por la misma constante k diferente de cero. Cuando se aplica la parte (3) del teorema, a veces usamos la frase *sumar a una ecuación k veces cualquier otra ecuación. Sumar* dos ecuaciones significa sumar los lados correspondientes de las ecuaciones.

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que el teorema sobre sistemas equivalentes se puede usar para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1 Usar el teorema sobre sistemas equivalentes

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Con frecuencia multiplicamos una de las ecuaciones por una constante que nos dará el inverso aditivo del coeficiente de una de las variables de la otra ecuación. Hacer esto hace posible que sumemos las dos ecuaciones y obtengamos una ecuación con sólo una variable, como sigue:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases} \quad \text{multiplique por 3 la segunda ecuación}$$

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 7x = 14 \end{cases} \quad \text{sume la primera ecuación a la segunda}$$

Del último sistema vemos que $7x = 14$ y que por tanto $x = \frac{14}{7} = 2$. Para hallar el valor y correspondiente, sustituimos 2 por x en $x + 3y = -1$, obteniendo $y = -1$. En consecuencia, $(2, -1)$ es la única solución del sistema.

Hay muchas otras formas de usar el teorema sobre sistemas equivalentes para hallar la solución. Otro método es proceder como sigue:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \quad \text{enunciado}$$

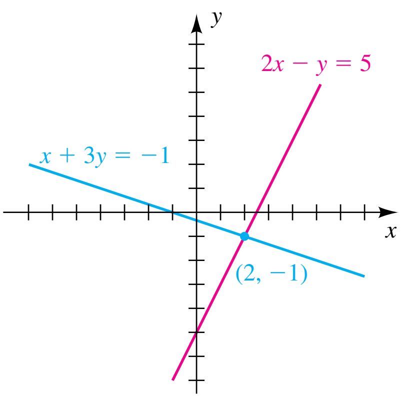
$$\begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \quad \text{multiplique por } -2 \text{ la primera ecuación}$$

$$\begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ - 7y = 7 \end{cases} \quad \text{sume la primera ecuación a la segunda}$$

Del último sistema vemos que $-7y = 7$, o $y = -1$. Para hallar el valor x correspondiente, podríamos sustituir -1 por y en $x + 3y = -1$, obteniendo $x = 2$. Por lo tanto, $(2, -1)$ es la solución.

Las gráficas de las ecuaciones son rectas que se intersectan en el punto (2, -1), como se ve en la figura 1. ■

FIGURA 1



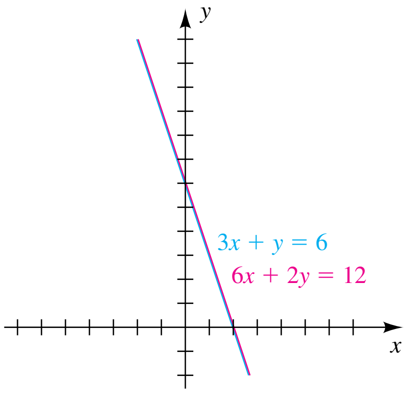
La técnica empleada en el ejemplo 1 se denomina **método de eliminación**, porque comprende la eliminación de una variable de una de las ecuaciones. El método de eliminación por lo general lleva a soluciones en menos pasos que el método de sustitución explicado en la sección precedente.

EJEMPLO 2 **Un sistema de ecuaciones lineales con un número infinito de soluciones**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 12 \end{cases}$$

FIGURA 2



SOLUCIÓN La multiplicación de la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$ nos da

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

Entonces, (a, b) es una solución si y sólo si $3a + b = 6$, es decir, $b = 6 - 3a$. Se deduce que las soluciones están formadas por pares ordenados de la forma $(a, 6 - 3a)$, donde a es cualquier número real. Si deseamos hallar soluciones particulares, podríamos sustituir varios valores por a. Algunas soluciones son $(0, 6)$, $(1, 3)$, $(3, -3)$, $(-2, 12)$ y $\left(\sqrt{2}, 6 - 3\sqrt{2}\right)$.

Es incorrecto decir que la solución es "todos los reales." Es correcto decir que la solución es el conjunto de todos los pares ordenados tales que $3x + y = 6$, que se puede escribir

$$\{(x, y) \mid 3x + y = 6\}.$$

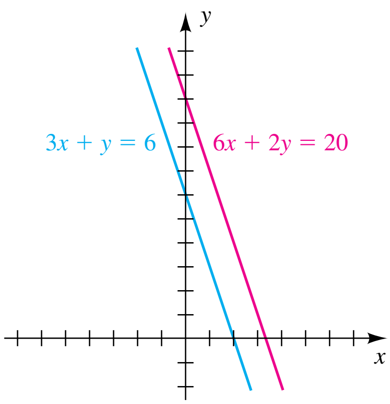
La gráfica de cada ecuación es la misma recta, como se ve en la figura 2. ■

EJEMPLO 3 **Un sistema de ecuaciones lineales sin soluciones**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 20 \end{cases}$$

FIGURA 3



SOLUCIÓN Si sumamos a la segunda ecuación -2 veces la primera ecuación, $-6x - 2y = -12$, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 0 = 8 \end{cases}$$

La última ecuación se puede escribir $0x + 0y = 8$, que es falso para todo par ordenado (x, y). Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Las gráficas de las dos ecuaciones del sistema dado son rectas que tienen la misma pendiente y por tanto son paralelas (vea la Figura 3). La conclusión de que el sistema no tiene soluciones corresponde al hecho de que estas rectas no se intersectan. ■

Los tres ejemplos precedentes ilustran resultados comunes de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables: o hay exactamente una solución, hay un número infinito de soluciones, o no hay solución. Un sistema es **consistente** si tiene al menos una solución. Un sistema con un número infinito de soluciones es **dependiente y consistente.** Un sistema es **inconsistente** si no tiene solución.

Como la gráfica de cualquier ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta, *exactamente uno* de los tres casos citados en la tabla siguiente se cumple para cualquier sistema de dos de tales ecuaciones.

Características de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Gráficas	Número de soluciones	Clasificación
Rectas no paralelas	Una solución	Sistema consistente
Rectas idénticas	Número infinito de soluciones	Sistema dependiente y consistente
Rectas paralelas	Sin solución	Sistema inconsistente

En la práctica, debe haber poca dificultad para determinar cuál de estos casos ocurre. El caso de la solución única se hará evidente cuando al sistema se apliquen transformaciones apropiadas, como se ilustra en el ejemplo 1. El caso de un número infinito de soluciones es semejante al del ejemplo 2, donde una de las ecuaciones se puede transformar en el otro. El caso donde no hay solución está indicado por una contradicción, tal como el enunciado de $0 = 8$, que apareció en el ejemplo 3.

En el proceso de resolver un sistema, suponga que obtenemos por x un número racional tal como $-\frac{41}{29}$. Sustituir $-\frac{41}{29}$ por x para hallar el valor de y es engorroso. Es más fácil seleccionar un multiplicador diferente para cada una de las ecuaciones originales que harán posible que eliminemos x y despejemos y. Esta técnica se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 **Resolver un sistema**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 4x + 7y = 11 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Seleccionamos multiplicadores para eliminar y. (El mínimo común múltiplo de 7 y 2 es 14.)

$$\begin{cases} 8x + 14y = 22 & \text{multiplique por 2 la primera ecuación} \\ 21x - 14y = -63 & \text{multiplique por 7 la segunda ecuación} \end{cases}$$

La suma de la primera ecuación a la segunda nos da

$$29x = -41, \quad \text{o bien,} \quad x = -\tfrac{41}{29}.$$

A continuación, regresamos al sistema original y seleccionamos multiplicadores para eliminar x. (El mínimo común múltiplo de 4 y 3 es 12.)

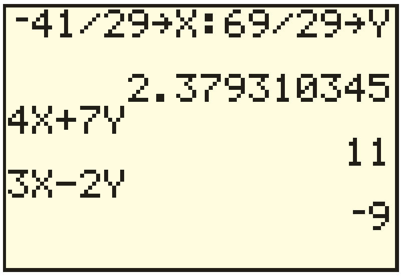
$$\begin{cases} 4x + 7y = 11 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases} \quad \text{sistema original}$$

$$\begin{cases} 12x + 21y = 33 & \text{multiplique por 3 la primera ecuación} \\ -12x + 8y = 36 & \text{multiplique por } -4 \text{ la segunda ecuación} \end{cases}$$

Al sumar las ecuaciones tendremos

$$29y = 69, \quad \text{es decir,} \quad y = \tfrac{69}{29}.$$

FIGURA 4



✓ **Prueba** $(x, y) = \left(-\frac{41}{29}, \frac{69}{29}\right)$

Sustituimos los valores de x y y en las ecuaciones originales.

$$4x + 7y = 4\left(-\tfrac{41}{29}\right) + 7\left(\tfrac{69}{29}\right) = -\tfrac{164}{29} + \tfrac{483}{29} = \tfrac{319}{29} = 11$$ la primera ecuación se verifica

$$3x - 2y = 3\left(-\tfrac{41}{29}\right) - 2\left(\tfrac{69}{29}\right) = -\tfrac{123}{29} - \tfrac{138}{29} = -\tfrac{261}{29} = -9$$ también la segunda

La figura 4 muestra la prueba de la solución en calculadora $\left(-\frac{41}{29}, \frac{69}{29}\right)$. ■

En ocasiones, podemos sustituir por expresiones que cambien un sistema dado en uno de ecuaciones lineales. Por ejemplo, un sistema

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 8 \\ u^2 - v^2 = 5 \end{cases} \quad \text{puede cambiarse a} \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

con las sustituciones $x = u^2$ y $y = v^2$. Podemos utilizar este concepto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Cambiar un sistema usando sustitución

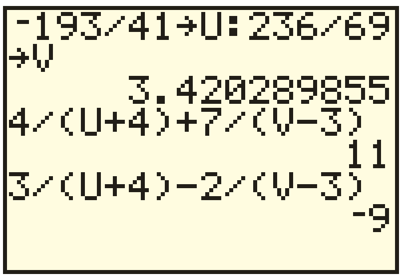
Resuelva el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4}{u+4} + \dfrac{7}{v-3} = 11 \\[2ex] \dfrac{3}{u+4} - \dfrac{2}{v-3} = -9 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Sustituimos x por $\dfrac{1}{u+4}$ y y por $\dfrac{1}{v-3}$ para obtener el sistema

$$\begin{cases} 4x + 7y = 11 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases}$$

FIGURA 5



Este es el mismo sistema que se resolvió en el ejemplo 4, por tanto, sabemos que la solución es $x = -\frac{41}{29}$ y $y = \frac{69}{29}$. Entonces, para solucionar el sistema, resustituimos y resolvemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{u+4} &= -\frac{41}{29} & \text{y} \qquad \frac{1}{v-3} &= \frac{69}{29}. \\ 29 &= -41(u+4) & 29 &= 69(v-3) \\ 29 &= -41u - 164 & 29 &= 69v - 207 \\ 193 &= -41u & 236 &= 69v \\ -\frac{193}{41} &= u & \text{y} \qquad \frac{236}{69} &= v \end{aligned}$$

La figura 5 muestra una verificación con calculadora de la solución $(u, v) = \left(-\frac{193}{41}, \frac{236}{69}\right)$. ■

Ciertos problemas de aplicación pueden resolverse incorporando sistemas de dos ecuaciones lineales, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 6 Una aplicación de un sistema de ecuaciones lineales

Una compañía de agroindustria tiene una granja de 100 acres en la cual produce lechuga y col. Cada acre de col requiere 600 horas de mano de obra y cada acre de lechuga necesita de 400 horas de mano de obra. Si se dispone de

45 000 horas y si han de usarse todos los recursos de tierra y mano de obra, encuentre el número de acres de cada cosecha que debe plantarse.

SOLUCIÓN Introduzcamos variables para denotar las cantidades desconocidas como sigue:

$$x = \text{número de acres de col}$$
$$y = \text{número de acres de lechuga}$$

Entonces, el número de horas de mano de obra necesario para cada cosecha se puede expresar como sigue:

$$600x = \text{número de horas necesarias para col}$$
$$400y = \text{número de horas necesarias para lechuga}$$

Usando los datos de que el número total de acres es 100 y que el número total de horas disponibles es 45 000 nos lleva al sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 600x + 400y = 45\,000 \end{cases}$$

A continuación usamos el método de eliminación:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases} \quad \text{divida la segunda ecuación entre 100}$$

$$\begin{cases} -6x - 6y = -600 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases} \quad \text{multiplique por } -6 \text{ la primera ecuación}$$

$$\begin{cases} -6x - 6y = -600 \\ -2y = -150 \end{cases} \quad \text{sume la primera ecuación a la segunda}$$

Vemos de la última ecuación que $-2y = -150$, o $y = 75$. Sustituyendo 75 por y en $x + y = 100$ nos da $x = 25$. Por tanto, la compañía debe plantar 25 acres de col y 75 acres de lechuga.

✓ **Prueba** Plantar 25 acres de col y 75 acres de lechuga requiere de $(25)(600) + (75)(400) = 45\,000$ horas de mano de obra. Así, se usan los 100 acres de tierras y 45 000 horas de manos de obra. ■

EJEMPLO 7 Hallar la rapidez de la corriente de un río

Un bote de motor, operando a toda velocidad, hizo un viaje de 4 millas corriente arriba (contra una corriente constante) en 15 minutos. El viaje de regreso (con la misma corriente y también a toda velocidad), tomó 12 minutos. Encuentre la rapidez de la corriente y la rapidez equivalente del bote en aguas en calma.

SOLUCIÓN Empezamos por introducir variables para denotar las cantidades desconocidas. Así, sea

$$x = \text{rapidez del bote (en mi/h)}$$
$$y = \text{rapidez de la corriente (en mi/h).}$$

Planeamos usar la fórmula $d = rt$, donde d denota la distancia recorrida, r la rapidez y t el tiempo. Como la corriente reduce la rapidez del bote cuando éste navega contra la corriente pero se agrega a su rapidez cuando navega en favor de la corriente, obtenemos

$$\text{rapidez contra la corriente} = x - y \quad (\text{en mi/hr})$$
$$\text{rapidez a favor de la corriente} = x + y \quad (\text{en mi/hr}).$$

El tiempo (en horas) recorrido en cada dirección es

$$\text{tiempo contra la corriente} = \tfrac{15}{60} = \tfrac{1}{4}\ \text{hr}$$
$$\text{tiempo a favor de la corriente} = \tfrac{12}{60} = \tfrac{1}{5}\ \text{hr}.$$

La distancia es 4 millas para cada viaje. Sustituyendo en $d = rt$ tendremos el sistema

$$\begin{cases} 4 = (x - y)\left(\frac{1}{4}\right) \\ 4 = (x + y)\left(\frac{1}{5}\right) \end{cases}$$

Si aplicamos el teorema sobre sistemas equivalentes, obtenemos

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ x + y = 20 \end{cases}$$ multiplique la primer ecuación por 4 y la segunda por 5

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ 2x \qquad = 36 \end{cases}$$ sume la primera ecuación a la segunda

Vemos de la última ecuación que $2x = 36$, o $x = 18$. Sustituyendo 18 por x en $x + y = 20$ nos da $y = 2$. Por lo tanto, la rapidez del bote en aguas en calma es 18 mi/h, y la rapidez de la corriente es 2 mi/hr.

✓ **Prueba** La rapidez contra la corriente es $18 - 2 = 16$ mi/hr; a favor de la corriente es $18 + 2 = 20$ mi/hr. Un viaje de 4 millas contra la corriente toma $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ hr $= 15$ min y el viaje de 4 millas a favor de la corriente toma $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ hr $= 12$ min. ■

9.2 Ejercicios

Ejer. 1–26: Resuelva el sistema.

1 $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 3x + 2y = -45 \\ -4x - 3y = 30 \end{cases}$

4 $\begin{cases} -2x + y = -28 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3r + 4s = 3 \\ r - 2s = -4 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 9u + 2v = 0 \\ 3u - 5v = 17 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x + 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

9 $\begin{cases} \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}d = 5 \\ c - \frac{2}{3}d = -1 \end{cases}$

10 $\begin{cases} \frac{1}{2}t - \frac{1}{5}v = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}t + \frac{1}{4}v = \frac{5}{12} \end{cases}$

11 $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$

12 $\begin{cases} \sqrt{5}x + \sqrt{3}y = 14\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - 2\sqrt{5}y = -2\sqrt{5} \end{cases}$

13 $\begin{cases} -0.03x + 0.07y = 0.23 \\ 0.04x - 0.05y = 0.15 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 0.11x - 0.03y = 0.25 \\ 0.12x + 0.05y = 0.70 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 3p - q = 7 \\ -12p + 4q = 3 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 3m - 4n = 2 \\ -6m + 8n = -4 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 3x - 15y = 6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2y - 5x = 0 \\ 3y + 4x = 0 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ y = 5 \end{cases}$

21 $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = -2 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} = 1 \end{cases}$

22 $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{10}{y} = -1 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} = -3 \end{cases}$

23 $\begin{cases} \dfrac{8}{x+2} - \dfrac{6}{y-5} = 3 \\ \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{12}{y-5} = -1 \end{cases}$

24 $\begin{cases} \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{y+2} = 2 \\ \dfrac{6}{x-1} - \dfrac{7}{y+2} = -3 \end{cases}$

25 $\begin{cases} 2^{x+1} + 3^{y} = 11 \\ 2^{x} - 3^{y+1} = -26 \end{cases}$

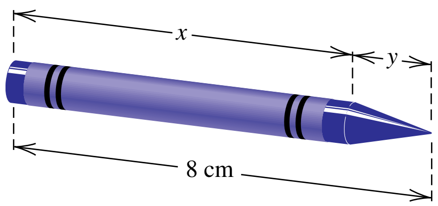
26 $\begin{cases} 4 \cdot 2^{x} + 3^{y-1} = 5 \\ 8 \cdot 2^{x-2} - 3^{y} = -8 \end{cases}$

27 **Ventas de boletos** El precio de admisión a un juego entre equipos de secundaria fue de \$3.00 para estudiantes y \$4.50 para no estudiantes. Si se vendieron 450 boletos para un total de \$1555.50, ¿cuántos de cada clase se compraron?

28 **Viaje en avión** Una línea aérea que hace vuelos de Los Ángeles a Albuquerque con una escala en Phoenix cobra una tarifa de \$90 a Phoenix y de \$120 de Los Ángeles a Albuquerque. Un total de 185 pasajeros abordaron el avión en Los Ángeles y los pasajes totalizaron \$21 000. ¿Cuántos pasajeros bajaron del avión en Phoenix?

29 **Dimensiones de un crayón** Un crayón de 8 centímetros de largo y 1 centímetro de diámetro ha de hacerse de 5 cm^3 de cera en color. El crayón va a tener forma de un cilindro rematado por una pequeña punta cónica (vea la figura). Encuentre la longitud x del cilindro y la altura y del cono.

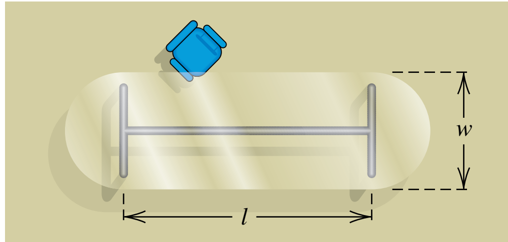
EJERCICIO 29



30 **Remar en bote** Un hombre rema en un bote 500 pies corriente arriba contra una corriente constante en 10 minutos, a continuación de lo cual rema 300 pies corriente abajo (con la misma corriente) en 5 minutos. Encuentre la rapidez de la corriente y la rapidez equivalente a la que él puede remar en aguas en calma.

31 **Dimensiones de la repisa de una mesa** Una mesa grande para un salón de conferencias se va a construir en forma de rectángulo con dos semicírculos en los extremos (vea la figura). La mesa debe tener un perímetro de 40 pies, y el área de la parte rectangular ha de ser el doble de la suma de las áreas de los dos extremos. Encuentre la longitud l y el ancho w de la parte rectangular.

EJERCICIO 31

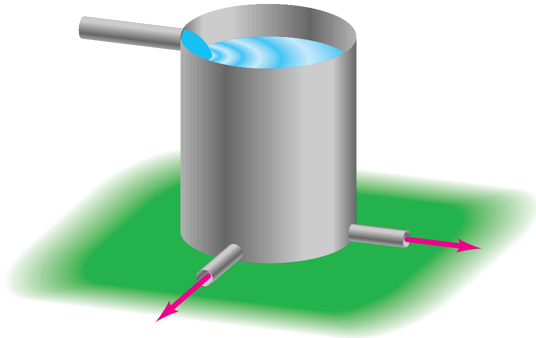


32 **Ingreso por inversiones** Una mujer tiene \$19 000 para invertir en dos fondos que pagan interés simple a tasas de 4% y 6% por año. El interés en el fondo que paga 4% está exento de impuesto, pero debe pagar impuesto por el ingreso recibido del fondo que paga el 6%. Estando en un grupo de impuesto elevado, la mujer no desea invertir toda la suma en la cuenta que paga 6%. ¿Hay alguna forma de invertir el dinero para que ella reciba \$1000 en intereses al término de un año?

33 **Población de linces** Una población de linces se clasifica por edades en gatitos (menos de 1 año de edad) y adultos (al menos 1 año de edad). Todas las hembras adultas, incluyendo las nacidas el año anterior, tienen una camada cada mes de junio, con un tamaño promedio de camada de 3 gatitos. La población de linces en primavera en cierta región se estima en 6000, y la proporción machos-hembras es uno. Calcule el número de adultos y de gatitos de la población.

34 **Caudales** Un tanque de 300 galones para almacenamiento de agua es llenado por un solo tubo de entrada, y se pueden usar dos tubos idénticos de salida para proporcionar agua a los campos circundantes (vea la figura). Se necesitan 5 horas para llenar un tanque vacío cuando ambos tubos de salida están abiertos. Cuando se cierra una salida, se necesitan 3 horas para llenar el tanque. Encuentre los caudales (en galones por hora) que entran y salen de los tubos.

EJERCICIO 34



35 **Mezclar una aleación de plata** Un orfebre tiene dos aleaciones, una que contiene 35% de plata y la otra contiene 60% de plata. ¿Cuánto de cada una debe fundir y combinar para obtener 100 gramos de una aleación que contenga 50% de plata?

36 **Mezclar nueces** Un comerciante desea mezclar maníes que cuestan \$3 por libra con nueces de la India que cuestan \$8 por libra, para obtener 60 libras de una mezcla que cuesta \$5 por libra. ¿Cuántas libras de cada variedad deben mezclarse?

37 **Viaje en avión** Un aeroplano, que vuela con viento de cola, viaja 1200 millas en 2 horas. El viaje de regreso, contra el viento, toma $2\frac{1}{2}$ horas. Encuentre la rapidez de crucero del avión y la rapidez del viento (suponga que ambas son constantes).

38 **Despachar pedidos** Una papelería vende dos tipos de bloc de notas a librerías de universidad, el primero tiene un precio de mayoreo de 50¢ y el segundo de 70¢. La compañía recibe un pedido por 500 blocs de notas, junto con un cheque por \$286. Si el pedido no especifica el número de cada tipo, ¿cómo debe despachar el pedido?

39 **Aceleración** Cuando una pelota rueda hacia abajo por un plano inclinado, su velocidad $v(t)$ (en cm/s) en el tiempo t (en segundos) está dada por $v(t) = v_0 + at$ para una velocidad inicial v_0 y aceleración a (en cm/s^2). Si $v(2) = 16$ y $v(5) = 25$, encuentre v_0 y a.

40 **Lanzamiento vertical** Si un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altitud de s_0 pies con una velocidad inicial de v_0 ft/s, entonces su distancia $s(t)$ sobre el suelo después de t segundos es

$$s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0.$$

If $s(1) = 84$ y $s(2) = 116$, ¿cuáles son v_0 y s_0?

41 **Planeación de producción** Una pequeña empresa de muebles manufactura sofás y divanes. Cada sofá requiere 8 horas de mano de obra y \$180 en materiales, mientras que un diván se puede construir por \$105 en 6 horas. La compañía tiene 340 horas de mano de obra disponibles por semana y puede permitirse comprar \$6750 de materiales. ¿Cuántos divanes y sofás se pueden producir si todas las horas de mano de obra y todos los materiales deben emplearse?

42 **Dieta de ganado** Un ganadero está preparando una mezcla de avena y harina de maíz para ganado. Cada onza de avena proporciona 4 gramos de proteína y 18 gramos de carbohidratos y una onza de harina de maíz proporciona 3 gramos de proteína y 24 gramos de carbohidratos. ¿Cuántas onzas de cada uno se pueden usar para satisfacer las metas nutricionales de 200 gramos de proteína y 1320 gramos de carbohidratos por ración?

43 **Cambio de servicios** Un plomero y un electricista, cada uno por su parte, está haciendo reparaciones en sus oficinas y acuerdan cambiar servicios. El número de horas empleadas en cada uno de los proyectos se muestra en la tabla siguiente.

	Oficina del plomero	Oficina del electricista
Horas del plomero	6	4
Horas del electricista	5	6

Preferirían decir que el asunto está parejo, pero debido a leyes impositivas, deben cobrar por todo trabajo que realicen. Acuerdan seleccionar tarifas de sueldo por hora, para que la cuenta en cada proyecto sea comparable al ingreso que cada uno recibiría ordinariamente por un trabajo comparable.

(a) Si x y y denotan los sueldos por hora del plomero y el electricista, respectivamente, demuestre que

$$6x + 5y = 10x \quad \text{y} \quad 4x + 6y = 11y.$$

describen las soluciones a este sistema.

(b) Si el plomero normalmente gana \$35 por hora, ¿cuánto debe cobrar el electricista?

44 Encuentre ecuaciones para las altitudes de los triángulos con vértices $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$ y $C(3, -8)$, y encuentre el punto en el que las altitudes se intersectan.

45 **Tendencia al calentamiento en París** Como resultado de la urbanización, las temperaturas en París han aumentado. En 1891 el promedio de temperaturas mínimas y máximas diarias era de 5.8°C y 15.1°C, respectivamente. Entre 1891 y 1968, estas temperaturas se elevaron 0.019°C/año y 0.011°C/año, respectivamente. Suponiendo que los aumentos fueron lineales, encuentre el año cuando la diferencia entre la temperatura mínima y la máxima era de 9°C, y determine la correspondiente temperatura máxima en promedio.

46 **Tarifas telefónicas de larga distancia** Una compañía telefónica cobra a sus abonados una cierta cantidad por el primer minuto de una llamada de larga distancia y otra cantidad por cada minuto adicional. Un abonado hace dos llamadas a la misma ciudad, una llamada de 36 minutos por \$2.93 y una llamada de 13 minutos por \$1.09.

(a) Determine el costo por el primer minuto y el costo por cada minuto adicional.

(b) Si hay una tasa de impuesto federal de 3.2% y una tasa de impuesto estatal de 7.2% en todas las llamadas de larga distancia, encuentre, al minuto más cercano, la llamada más larga a la misma ciudad cuyo costo no exceda de \$5.00.

47 **Grabación en videocasete** Una ávida aficionada a ver el tenis desea grabar 6 horas de un importante torneo en una sola cinta. Su cinta puede contener 5 horas y 20 minutos a una velocidad LP de larga duración y 8 horas a la velocidad SLP que es más lenta. La velocidad LP produce una mejor calidad de imagen, de modo que ella desea maximizar el tiempo grabado a la velocidad LP. Encuentre el tiempo a ser grabado a cada velocidad.

48 **Precio y demanda** Suponga que unos consumidores comprarán 1 000 000 de "playeras" si el precio de venta es \$15, pero por cada \$1 de aumento en el precio comprarán 100 000 playeras menos. Además, suponga que los vendedores solicitarán 2 000 000 playeras si el precio de venta es \$20, y que por cada \$1 de aumento en el precio solicitarán otras 150 000.

(a) Exprese el número Q de playeras que los consumidores comprarán si el precio de venta es de p dólares.

(b) Exprese el número K de playeras que los vendedores solicitarán si el precio de venta es p dólares.

(c) Determine el precio de mercado, es decir, el precio cuando $Q = K$.

Ejer. 49–52: Despeje *a* y *b* del sistema. (*Sugerencia:* trate los términos como e^{3x}, cos *x* y sen *x* como "coeficientes de constantes".

49 $$\begin{cases} ae^{3x} + be^{-3x} = 0 \\ a(3e^{3x}) + b(-3e^{-3x}) = e^{3x} \end{cases}$$

50 $$\begin{cases} ae^{-x} + be^{4x} = 0 \\ -ae^{-x} + b(4e^{4x}) = 2 \end{cases}$$

51 $$\begin{cases} a \cos x + b \operatorname{sen} x = 0 \\ -a \operatorname{sen} x + b \cos x = \tan x \end{cases}$$

52 $$\begin{cases} a \cos x + b \operatorname{sen} x = 0 \\ -a \operatorname{sen} x + b \cos x = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

9.3 Sistemas de desigualdades

En el capítulo 2 restringimos nuestra exposición acerca de desigualdades a desigualdades con una variable. Ahora consideramos desigualdades con dos variables x y y, como las que se muestran en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN **Desigualdades en x y y**

- $y^2 < x + 4$
- $3x - 4y > 12$
- $x^2 + y^2 \leq 16$

Una **solución** de una desigualdad en x y y es un par ordenado (a, b) que produce un enunciado verdadero si a y b se sustituyen por x y y, respectivamente. **Resolver** una desigualdad en x y y significa hallar todas las soluciones. La **gráfica** de tal desigualdad es el conjunto de todos los puntos (a, b) de un plano xy que corresponda a las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Dada una desigualdad en x y y, si cambiamos el símbolo de desigualdad con un signo de igual, obtenemos una ecuación cuya gráfica por lo general separa el plano xy en dos regiones. Consideraremos sólo ecuaciones que tengan la propiedad de que si R es una de esas regiones y si un **punto de prueba** (p, q) en R da una solución de la desigualdad, entonces *todo* punto en R da una solución. Las siguientes directrices se pueden usar entonces para trazar la gráfica de la desigualdad.

Directrices para trazar la gráfica de una desigualdad en x y y

1. Cambiar el símbolo de desigualdad por un signo de igual y graficar la ecuación resultante. Use líneas interrumpidas si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$ para indicar que ningún punto en la gráfica da una solución. Use una línea o curva llena para $\leq$ o $\geq$ para indicar que las soluciones de la ecuación también son soluciones de la desigualdad.
2. Si R es una región del plano xy determinada por la gráfica de la directriz 1 y si un punto de prueba (p, q) en R da una solución de la desigualdad, entonces todo punto en R da una solución. Haga un sombreado en R para indicar este hecho. Si (p, q) no es una solución, entonces *ningún* punto en R da una solución y R se deja sin sombrear.

El uso de estas directrices se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 **Trazar la gráfica de una desigualdad**

Encuentre las soluciones y trace la gráfica de la desigualdad $y^2 < x + 4$.

FIGURA 1

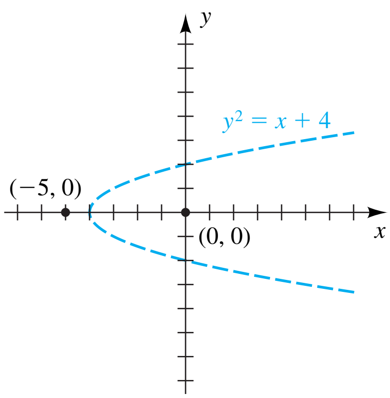


FIGURA 2

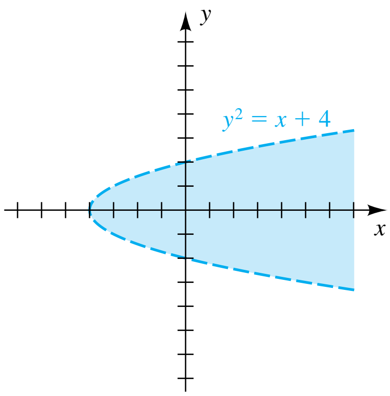
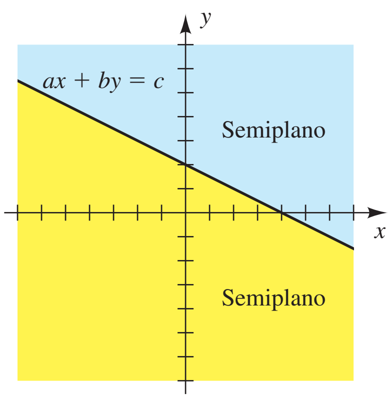


FIGURA 3



SOLUCIÓN

Directriz 1 Cambiamos $<$ con $=$, obteniendo $y^2 = x + 4$. La gráfica de esta ecuación es una parábola, simétrica con respecto al eje x y que tiene punto de intersección -4 con el eje x y puntos de intersección ± 2 con el eje y. Como el símbolo de desigualdad es $<$, trazamos la parábola usando línea interrumpida, como en la figura 1.

Directriz 2 La gráfica de la directriz 1 separa el plano xy en dos regiones, una a la *izquierda* de la parábola y la otra a la *derecha*. Escojamos puntos de prueba $(-5, 0)$ y $(0, 0)$ en las regiones (vea la figura 1) y sustituya por x y y en $y^2 < x + 4$ como sigue:

Punto de prueba $(-5, 0)$ LI: $0^2 = 0$
LD: $-5 + 4 = -1$

Como $0 < -1$ es un enunciado *falso*, $(-5, 0)$ *no es* una solución de la desigualdad. Por tanto, *ningún* punto a la izquierda de la parábola es solución, y dejamos sin sombrear la región.

Punto de prueba $(0, 0)$ LI: $0^2 = 0$
LD: $0 + 4 = 4$

Como $0 < 4$ es un enunciado *verdadero*, $(0, 0)$ *es* una solución de la desigualdad. Por tanto, *todos* los puntos a la derecha de la parábola son soluciones, de modo que sombreamos esta región como se ve en la figura 2. ■

Una **desigualdad lineal** es aquella que se puede escribir en una de las formas siguientes, donde a, b y c son números reales:

$$ax + by < c, \quad ax + by > c, \quad ax + by \leq c, \quad ax + by \geq c$$

La recta $ax + by = c$ separa el plano xy en dos **semiplanos,** como se ilustra en la figura 3. Las soluciones de la desigualdad están formadas por todos los puntos en *uno* de estos semiplanos, donde la recta está incluida para $\leq$ o $\geq$ y no está incluida para $<$ o $>$. *Para una desigualdad lineal, sólo un punto de prueba* (p, q) *se requiere,* porque si (p, q) es una solución, entonces el semiplano con (p, q) en él contiene todas las soluciones, mientras que si (p, q) *no es* una solución, entonces *el otro* semiplano contiene las soluciones.

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de una desigualdad lineal

Trace la gráfica de la desigualdad $3x - 4y > 12$.

SOLUCIÓN El cambio de $>$ con $=$ nos da la recta $3x - 4y = 12$, trazada con una recta interrumpida en la figura 4. Esta recta separa el plano xy en dos semiplanos, uno *arriba* de la recta y el otro *debajo* de la recta. Es conveniente escoger el punto de prueba $(0, 0)$ arriba de la recta y sustituir en $3x - 4y > 12$, como sigue:

Punto de prueba $(0, 0)$ LI: $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$
LD: 12

Como $0 > 12$ es un enunciado falso, $(0, 0)$ no es una solución. Entonces, ningún punto arriba de la recta es solución, y las soluciones de $3x - 4y > 12$ están dadas por los puntos del semiplano *debajo* de la recta. La gráfica está trazada en la figura 5 en la página siguiente.

FIGURA 4

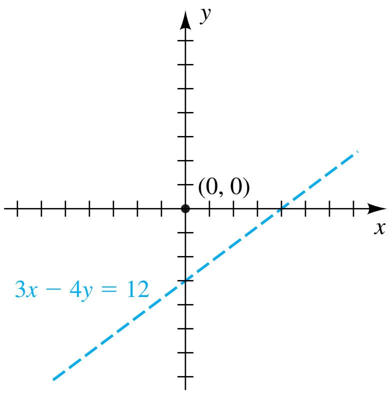
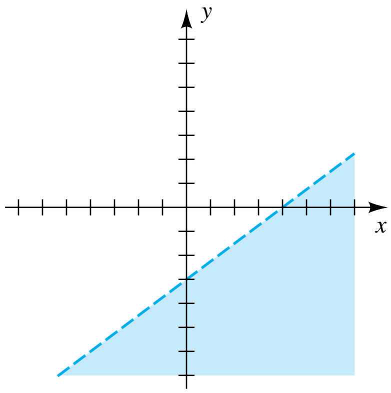


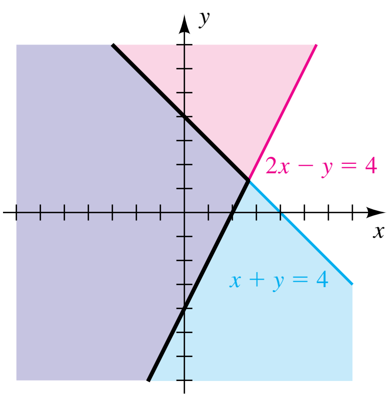
FIGURA 5



■

Como lo hicimos con ecuaciones, a veces trabajamos simultáneamente con varias desigualdades con dos variables, es decir, con un **sistema de desigualdades.** Las **soluciones** de un sistema de desigualdades son las soluciones comunes a todas las desigualdades del sistema. La **gráfica** de un sistema de desigualdades está formada por los puntos correspondientes a las soluciones. Los siguientes ejemplos ilustran un método para resolver sistemas de desigualdades.

FIGURA 6



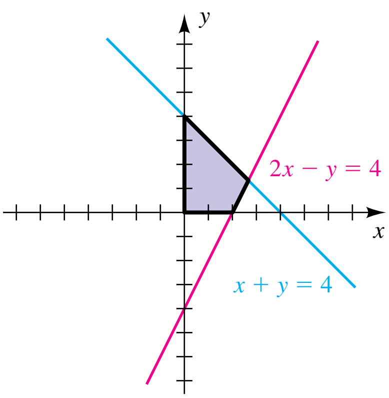
EJEMPLO 3 Resolver un sistema de desigualdades lineales

Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ 2x - y \le 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Cambiamos $\le$ con $=$ y luego trazamos las rectas resultantes, como se ve en la figura 6. Usando el punto de prueba (0, 0), vemos que las soluciones del sistema corresponden a los puntos *abajo* (y sobre) la recta $x + y = 4$ y *arriba* (y sobre) la recta $2x - y = 4$. Si sombreamos estos semiplanos con colores diferentes, como en la figura 6, tenemos como la gráfica del sistema los puntos que están en *ambas* regiones, indicadas por la parte violeta de la figura. ■

FIGURA 7



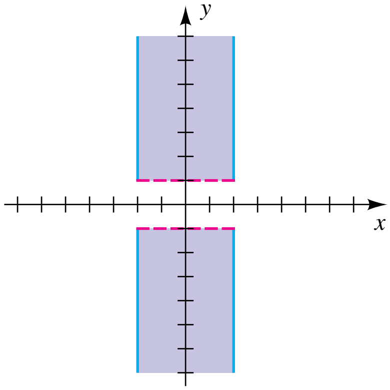
EJEMPLO 4 Resolver un sistema de desigualdades lineales

Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ 2x - y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las primeras dos desigualdades son las mismas que consideramos en el ejemplo 3 y, por tanto, los puntos en la gráfica del sistema deben estar dentro de la región violeta mostrada en la figura 6. Además, la tercera y cuarta desigualdades del sistema nos dicen que los puntos deben estar en el primer cuadrante o sobre sus fronteras. Esto nos da la región que se ve en la figura 7. ■

FIGURA 8



EJEMPLO 5 Resolver un sistema de desigualdades que contengan valores absolutos

Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y| > 1 \end{cases}$$

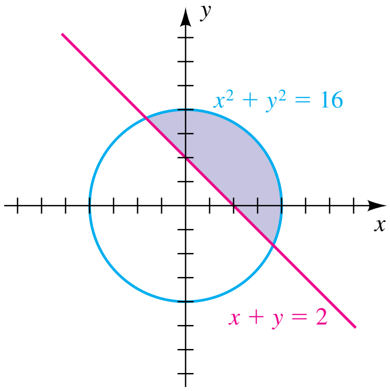
SOLUCIÓN Usando propiedades de valores absolutos (citados en la página 118), vemos que (x, y) es una solución del sistema si y sólo si *las dos* condiciones siguientes son verdaderas:

$$\textbf{(1)}\quad -2 \le x \le 2$$

$$\textbf{(2)}\quad y < -1 \qquad \text{o} \qquad y > 1$$

Así, un punto (x, y) sobre la gráfica del sistema debe estar entre (o sobre) las rectas verticales $x = \pm 2$ y también ya sea debajo de la recta horizontal $y = -1$ o arriba de la recta $y = 1$. La gráfica está trazada en la figura 8. ■

FIGURA 9



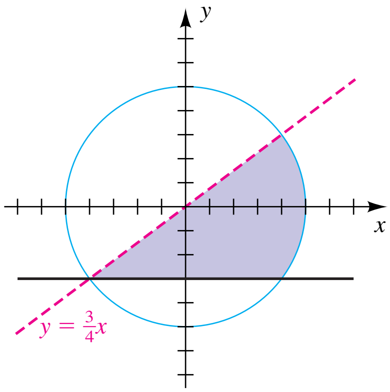
EJEMPLO 6 Resolver un sistema de desigualdades

Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16 \\ x + y \ge 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las gráficas de $x^2 + y^2 = 16$ y $x + y = 2$ son la circunferencia y la recta, respectivamente, mostrados en la figura 9. Usando el punto de prueba (0, 0), vemos que los puntos que dan soluciones del sistema deben estar dentro (o sobre) la circunferencia y también arriba (o sobre) la recta. Esto nos da la región trazada en la figura 9. ■

FIGURA 10



EJEMPLO 7 Hallar un sistema de desigualdades a partir de una gráfica

Encuentre un sistema de desigualdades para la región sombreada que se ve en la figura 10.

SOLUCIÓN Una ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 5^2$. Como el *interior* de la circunferencia llena está sombreada, la región sombreada (incluyendo la circunferencia) pueden ser descritos por $x^2 + y^2 \le 25$. El *exterior* del círculo podría ser descrito por $x^2 + y^2 > 25$.

Como la región sombreada está *debajo* de la recta interrumpida con ecuación $y = \frac{3}{4}x$, está descrita por la desigualdad $y < \frac{3}{4}x$. Por último, como la región sombreada está *arriba* de la recta horizontal llena $y = -3$, usamos $y \ge -3$. Por tanto, un sistema es

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25 \\ y < \frac{3}{4}x \\ y \ge -3 \end{cases}$$

■

EJEMPLO 8 Una aplicación de un sistema de desigualdades

El manager de un equipo de béisbol desea comprar bats y pelotas que cuestan \$20 y \$5 cada una, respectivamente. Se necesitan al menos cinco bats y diez pelotas y el costo total no debe exceder de \$300. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Empezamos por denotar con x el número de bats y y el número de pelotas. Como el costo de un bat es \$20 y el costo de una pelota es \$5, vemos que

$$20x = \text{costo de } x \text{ bats}$$
$$5y = \text{costo de } y \text{ pelotas.}$$

Como el costo total no debe exceder de \$300, debemos tener

$$20x + 5y \leq 300$$

o bien, lo que es equivalente,

$$y \leq -4x + 60.$$

Como se necesitan al menos cinco bats y diez pelotas, también tenemos

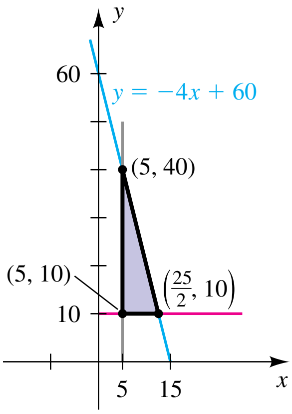
$$x \geq 5 \qquad \text{y} \qquad y \geq 10.$$

La gráfica de $y \leq -4x + 60$ es el semiplano que se encuentra *abajo* (o sobre) la recta $y = 4x + 60$ mostrada en la figura 11.

La gráfica de $x \geq 5$ es la región a la derecha (o sobre de la recta vertical $x = 5$, y la gráfica de $y \geq 10$ es la región arriba (o sobre) la recta horizontal $y = 10$.

La gráfica del sistema, es decir, los puntos comunes a los tres semiplanos, es la región triangular trazada en la figura 11. ■

FIGURA 11



EJEMPLO 9 **Graficar una desigualdad**

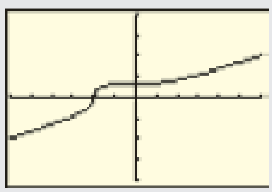
Grafique la desigualdad $27y^3 \leq 8 + x^3$.

SOLUCIÓN Primero debemos despejar y de la *igualdad* asociada:

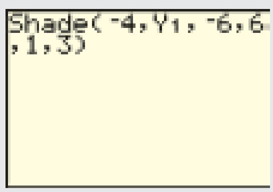
$$27y^3 = 8 + x^3 \qquad \text{igualdad}$$
$$y^3 = \tfrac{1}{27}(8 + x^3) \qquad \text{divida entre 27}$$
$$y = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{8 + x^3} \qquad \text{tome la raíz cúbica de ambos lados}$$

Asignamos $\frac{1}{3}\sqrt[3]{8 + x^3}$ a Y_1 y graficamos Y_1 en la pantalla $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, como se ve en la figura 12. El punto de prueba $(0, 0)$ es la región de solución (porque $0 \leq 8$ es verdadero), de modo que deseamos sombrear la región debajo de la gráfica de Y_1. Se muestran los comandos para la TI-83/4 Plus.

FIGURA 12



2nd DRAW 7 −4 , VARS
▷ 1 1 , −6 , 6 ,
1 , 3)

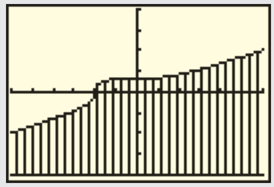


(continúa)

Los parámetros para el comando Shade (sombrear) son como sigue:

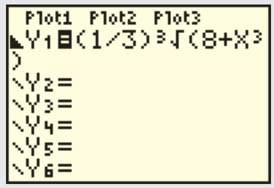
-4 es la función inferior para la región sombreada; en este caso, simplemente usamos el valor de Ymin.
Y_1 es la función superior para la región sombreada.
-6 y 6 son Xmín y Xmáx.
1 (o 4) es el patrón de sombra; hay cuatro de ellos.
3 (o 4) sombrea cada tercer (o cuarto) píxel; se puede especificar un entero de 1 a 8.

Presionar ENTER da la gráfica siguiente.



Método alternativo: hay un método alternativo para sombrear en cada calculadora. Se puede ejecutar al seleccionar un estilo de graficación de la pantalla Y=.

Usando las teclas del cursor, mueva el cursor a la izquierda de "Y_1". Sucesivamente presione ENTER para pasar por los siete estilos de graficación. Seleccione el estilo "sombrear abajo" como se ve en la figura. Presionar GRAPH produce una figura sombreada como antes.



9.3 Ejercicios

Ejer. 1–10: Trace la gráfica de la desigualdad.

1 $3x - 2y < 6$

2 $4x + 3y < 12$

3 $2x + 3y \geq 2y + 1$

4 $2x + 2y > 3y + 3$

5 $y + 2 < x^2$

6 $y^2 - x \leq 0$

7 $x^2 + 1 \leq y$

8 $y - x^3 < 1$

9 $yx^2 \geq 1$

10 $x^2 + 4 \geq y$

Ejer. 11–26: Trace la gráfica del sistema de desigualdades.

11 $\begin{cases} x - y > -2 \\ x + y > -2 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x - y > -1 \\ x + y < 3 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x - y \geq -19 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2y - x \leq 4 \\ 3y + 2x < 6 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ y - 2x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ y \geq x \\ y \leq 6 \\ x \leq 4 \end{cases}$

17 $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$

19 $\begin{cases} |x| \geq 2 \\ |y| < 3 \end{cases}$

20 $\begin{cases} |x| \geq 4 \\ |y| \geq 3 \end{cases}$

21 $\begin{cases} |x + 1| < 3 \\ |y - 2| \leq 4 \end{cases}$

22 $\begin{cases} |x - 2| \leq 5 \\ |y - 4| > 2 \end{cases}$

23 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 45 \\ x + y \leq -3 \end{cases}$

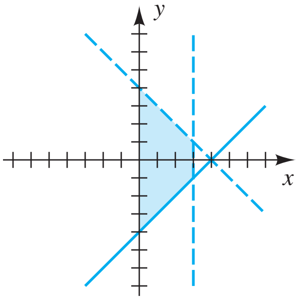
24 $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$

25 $\begin{cases} x^2 \leq 1 - y \\ x \geq 1 + y \end{cases}$

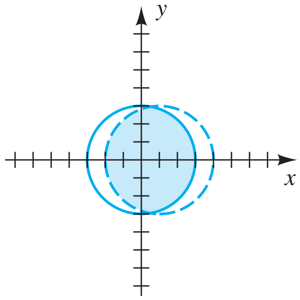
26 $\begin{cases} x - y^2 < 0 \\ x + y^2 > 0 \end{cases}$

Ejer. 27–34: Encuentre un sistema de desigualdades cuya gráfica se muestra.

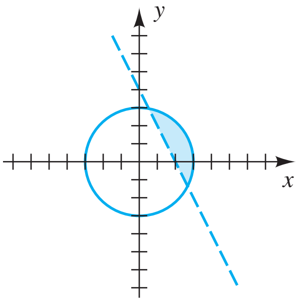
27



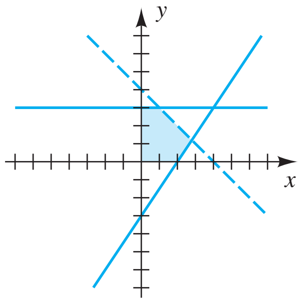
28



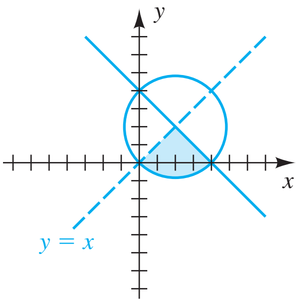
29



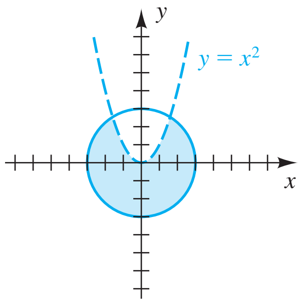
30



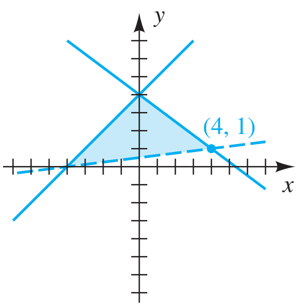
31



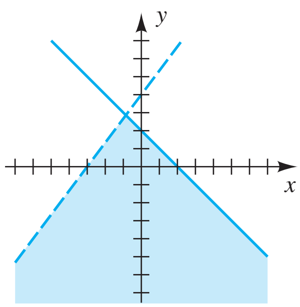
32



33



34



35 **Niveles de inventario** Una tienda vende dos marcas de televisores. La demanda de compradores indica que es necesario tener en existencia al menos el doble de aparatos de la marca A que de la marca B. También es necesario tener a la mano al menos 10 aparatos de la marca B. Hay especio para no más de 100 aparatos en la tienda. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para almacenar las dos marcas.

36 **Precios de boletos** Un auditorio contiene 600 asientos. Para un próximo evento, los boletos tendrán un precio de \$8 para algunos asientos y \$5 para otros. Al menos 225 boletos van a tener el precio de \$5 y se desean ventas totales de \$3000. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para fijar el precio de los dos tipos de boletos.

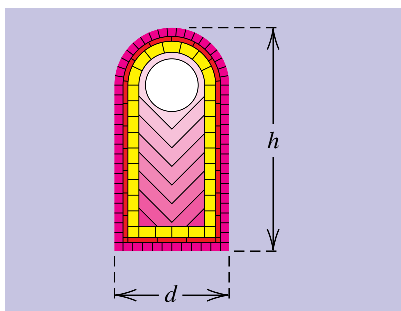
37 **Estrategia de inversión** Una mujer con \$15 000 para invertir decide poner al menos \$2000 en una inversión de alto rendimiento pero de alto riesgo, y al menos el triple de esa cantidad en una inversión de bajo rendimiento pero de bajo riesgo. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para poner el dinero en las dos inversiones.

38 **Niveles de inventario** El gerente de una librería universitaria tiene en existencia dos tipos de cuadernos, el primero de los cuales se vende al mayoreo en 55¢ y el segundo en 85¢. La cantidad máxima a gastar es \$600, y se desea un inventario de al menos 300 de la variedad de 85¢ y 400 de la variedad de 55¢. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para almacenar los dos tipos de cuadernos.

39 **Dimensiones de una lata** Una lata de aerosol se va a construir en forma de cilindro circular con un pequeño cono en la parte superior. La altura total de la lata incluida la parte cónica no debe ser más de 9 pulgadas, y el cilindro debe contener al menos 75% del volumen total. Además, la altura de la parte cónica debe medir al menos 1 pulgada. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para la relación entre la altura y del cilindro y la altura x del cono.

40 **Dimensiones de una ventana** Una ventana de vidrios de color se va a construir en forma de rectángulo rematado por un semicírculo (vea la figura). La altura total h de la ventana no puede ser de más de 6 pies y el área de la parte rectangular

EJERCICIO 40

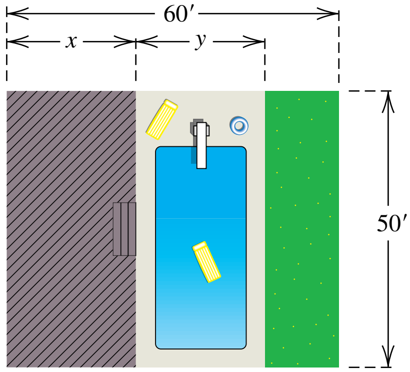


debe ser al menos el doble del área del semicírculo. Además, el diámetro d del semicírculo debe ser al menos de 2 pies. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para la base y altura de la parte rectangular.

41 **Ubicación de una planta de energía eléctrica** Una planta nucleoeléctrica se construirá para satisfacer las necesidades de energía a las ciudades A y B. La ciudad B está a 100 millas al este de la A. El estado ha prometido que la planta estará al menos a 60 millas de cada una de las ciudades, pero debido al terreno áspero no es posible ubicar la planta al sur de cualquiera de esas ciudades y la planta debe estar a no más de 100 millas de A y B. Suponiendo que A está en el origen, encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibles ubicaciones para la planta.

42 **Asignar espacio** Un hombre tiene un patio trasero rectangular de 50 pies de ancho y 60 pies de profundidad. Planea construir una piscina, como se ve en la figura, donde $y \geq 10$. Puede gastar a lo sumo $67 500 en el proyecto. El área del patio debe ser al menos tan grande como la piscina. El área de la piscina costará $50 por pie cuadrado, y el patio costará $4 por pie cuadrado. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para el ancho de las áreas del patio y la piscina.

EJERCICIO 42



Ejer. 43–44: Grafique la desigualdad.

43 $64y^3 - x^3 \leq e^{1-2x}$

44 $e^{5y} - e^{-x} \geq x^4$

Ejer. 45–48: Grafique el sistema de desigualdades.

45 $\begin{cases} 5^{1-y} \geq x^4 + x^2 + 1 \\ x + 3y \geq x^{5/3} \end{cases}$

46 $\begin{cases} x^4 + y^5 < 2^x \\ \ln(x^2 + 1) < y^3 \end{cases}$

47 $\begin{cases} x^4 - 2x < 3y \\ x + 2y < x^3 - 5 \end{cases}$

48 $\begin{cases} e^x + x^2 \leq 2^{x+2y} \\ 2^{x+2y} \leq x^3 2^y \\ x > 0 \end{cases}$

49 **Crecimiento de bosques** La temperatura y las lluvias tienen un efecto importante en la vida de las plantas. Si el promedio anual de temperatura o la cantidad de precipitación es demasiado baja, no pueden crecer árboles ni bosques y en cambio habrá sólo pastizales y desiertos. La relación entre el promedio anual de temperatura T (en °F) y el promedio anual de precipitación P (en pulgadas) es una desigualdad lineal. Para que en una región haya bosques, T y P deben satisfacer la desigualdad $29T - 39P < 450$, donde $33 \leq T \leq 80$ y $13 \leq P \leq 45$.

(a) Determine si puede haber bosques en Winnipeg, donde $T = 37$°F y $P = 21.2$ pulgadas.

(b) Grafique la desigualdad, con T en el eje horizontal y P en el eje vertical, en la pantalla [33, 80, 5] por [0, 50, 5].

(c) Identifique la región en la gráfica que represente dónde pueden crecer bosques.

50 **Crecimiento de pastizales** Consulte el ejercicio 49. Si el promedio anual de precipitación P (en pulgadas) es demasiado bajo o el promedio anual de temperatura T (en °F) es demasiado alto, bosques y pastizales pueden convertirse en desiertos. Las condiciones necesarias para que crezcan pastizales están dadas por una desigualdad lineal. T y P deben satisfacer $22P - 3T > 33$, donde $33 \leq T \leq 80$ y $13 \leq P \leq 45$.

(a) Determine si pueden crecer pastizales en Phoenix, donde $T = 70$°F y $P = 7.8$ pulgadas.

(b) Grafique la desigualdad para bosques y la desigualdad para pastizales en los mismos ejes de coordenadas.

(c) Determine la región en la gráfica que represente dónde pueden existir pastizales pero no bosques.

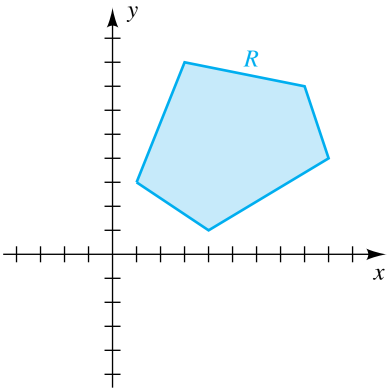
9.4 Programación lineal

Si un sistema de desigualdades contiene sólo desigualdades lineales de la forma

$$ax + by \leq c \qquad \text{o} \qquad ax + by \geq c,$$

donde a, b y c son números reales, entonces la gráfica del sistema puede ser una región R en el plano xy limitado por un polígono, posiblemente del tipo ilustrado en la figura 1 (para una ilustración específica, vea el ejemplo 4 y la figura 7 de la sección 9.3). Para problemas de **programación lineal,** consideramos tales sistemas junto con una expresión de la forma

FIGURA 1



$$C = Ax + By + K,$$

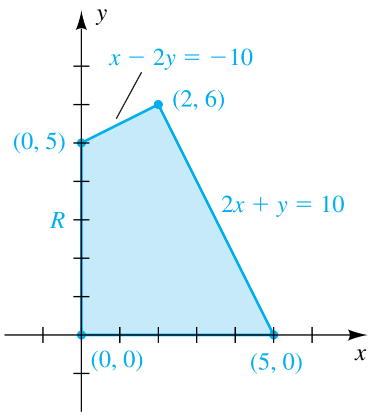
donde A, B y K son números reales y (x, y) es un punto en R (esto es, una solución del sistema). Como para cada (x, y) obtenemos un valor específico para C, llamamos a C como *función de dos variables* x y y. En programación lineal, C se llama **función objetivo** y las desigualdades del sistema se conocen como **restricciones** en C. Las soluciones del sistema, es decir, los pares (x, y) correspondientes a los puntos en R, son las **soluciones factibles** para el problema.

En aplicaciones financieras típicas, el valor de C puede representar costo, utilidad, pérdida o un recurso físico, y la meta es hallar un punto específico (x, y) en R en el que C tome su valor máximo o mínimo. Los métodos de programación lineal simplifican grandemente el trabajo de hallar este punto. De manera específica, puede demostrar que *los valores máximo y mínimo de C ocurren en un vértice de R*. Este hecho se usa en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 **Hallar los valores máximo y mínimo de una función objetivo**

Encuentre los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada por $C = 7x + 3y$ sujetos a las siguientes restricciones:

FIGURA 2



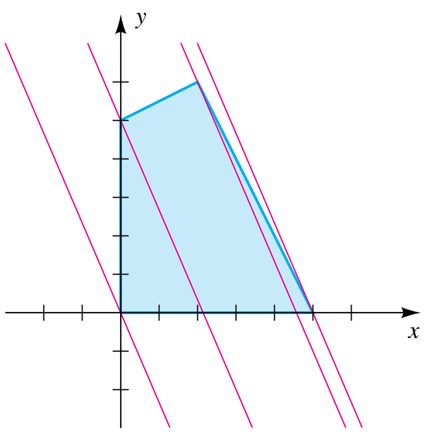
$$\begin{cases} x - 2y \geq -10 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN La gráfica del sistema de desigualdades determinada por las restricciones es la región R limitada por el cuadrilátero trazado en la figura 2. De la exposición precedente, los valores máximo y mínimo de C deben ocurrir en un vértice de R. Los valores de los vértices están dados en la tabla siguiente.

Vértice	Valor de $C = 7x + 3y$
(0, 0)	$7(0) + 3(0) = 0$
(0, 5)	$7(0) + 3(5) = 15$
(5, 0)	$7(5) + 3(0) = 35$
(2, 6)	$7(2) + 3(6) = 32$

Por lo tanto, el valor mínimo $C = 0$ ocurre si $x = 0$ y $y = 0$. El valor máximo $C = 35$ ocurre si $x = 5$ y $y = 0$. ■

FIGURA 3



En el ejemplo precedente, decimos que el valor máximo de C *en* R ocurre en el vértice (5, 0). Para verificar este dato, de $C = 7x + 3y$ despejamos y para obtener

$$y = -\frac{7}{3}x + \frac{C}{3}.$$

Para cada C, la gráfica de esta ecuación es una recta de pendiente $-\frac{7}{3}$ y punto de intersección $C/3$ con el eje y, como se ilustra en la figura 3. Para hallar el valor máximo de C, simplemente determinamos cuál de estas rectas que intersectan la región tiene el máximo punto de intersección $C/3$ con el eje y. Por consulta de la figura 3, vemos que la recta pedida pasa por (5, 0). Del mismo

modo, para el valor mínimo de C, determinamos la recta que tenga la ecuación $y = (-7/3)x + (C/3)$ que cruza la región y tiene el *mínimo* punto de intersección con el eje y. Ésta es la recta que pasa por (0, 0).

A un problema que se pueda expresar en la forma del ejemplo 1, lo llamaremos **problema de programación lineal.** Para resolver estos problemas podemos usar las directrices siguientes.

Directrices para resolver un problema de programación lineal

1 Trace la región R determinada por el sistema de restricciones.
2 Halle los vértices de R.
3 Calcule el valor de la función objetivo C en cada vértice de R.
4 Seleccione el (los) valor(es) máximo o mínimo de C de la directriz 3.

En el siguiente ejemplo encontramos un problema de programación lineal en el que el valor mínimo de la función objetivo se presenta en más de un punto.

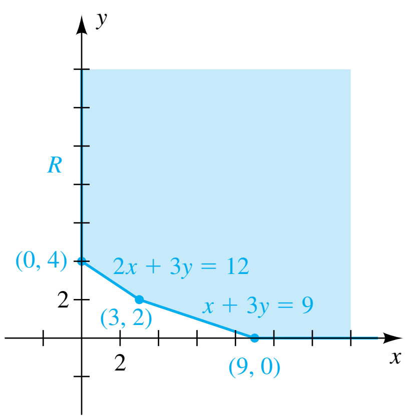
EJEMPLO 2 Resolver un problema de programación lineal

Halle el valor mínimo de la función objetivo $C = 2x + 6y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Seguiremos las directrices.

FIGURA 4



Directriz 1 La gráfica del sistema de desigualdades determinada por las restricciones es la región R no limitada que se traza en la figura 4.

Directriz 2 Los vértices de R son (0, 4), (3, 2) y (9, 0), como se ve en la figura.

Directriz 3 El valor de C en cada vértice de R está dado en la tabla siguiente.

Vértice	Valor de $C = 2x + 6y$
(0, 4)	$2(0) + 6(4) = 24$
(3, 2)	$2(3) + 6(2) = 18$
(9, 0)	$2(9) + 6(0) = 18$

Directriz 4 La tabla de la directriz 3 muestra que el valor mínimo de C, 18, se presenta en *dos* vértices, (3, 2) y (9, 0). Además, si (x, y) es cualquier punto en el segmento de recta que une estos puntos, entonces (x, y) es una solución de la ecuación $x + 3y = 9$ y por tanto

$$C = 2x + 6y = 2(x + 3y) = 2(9) = 18.$$

Así, el valor mínimo $C = 18$ ocurre en *todos* los puntos sobre este segmento de recta. ■

En los siguientes dos ejemplos consideramos aplicaciones de programación lineal. Para este tipo de problemas es necesario usar información y datos dados para formular el sistema de restricciones y la función objetivo. Una vez que esto se haya logrado, podemos aplicar las directrices como hicimos en la solución al ejemplo 2.

EJEMPLO 3 Maximizar utilidades

Una empresa fabrica dos productos, X y Y. Para cada producto, es necesario usar tres máquinas diferentes, A, B y C. Para manufacturar una unidad del producto X, la máquina A debe usarse durante 3 horas, la máquina B durante 1 hora y la máquina C durante 1 hora. Para manufacturar una unidad del producto Y se requieren 2 horas en la máquina A, 2 horas en la B y 1 hora en la C. La utilidad en el producto X es de $500 por unidad, y la utilidad en el producto Y es de $350 por unidad. La máquina A está disponible durante un total de 24 horas por día, pero la B se puede usar sólo 16 horas y la C durante 9 horas. Suponiendo que las máquinas están disponibles cuando es necesario (sujetas a las restricciones de horas totales indicadas), determine el número de unidades de cada producto que debe manufacturarse cada día para maximizar la utilidad.

SOLUCIÓN La tabla siguiente resume los datos dados en el enunciado del problema.

Máquina	Horas necesarias para una unidad de X	Horas necesarias para una unidad de Y	Horas disponibles
A	3	2	24
B	1	2	16
C	1	1	9

Introduzcamos las variables siguientes:

x = número de unidades de X manufacturadas cada día

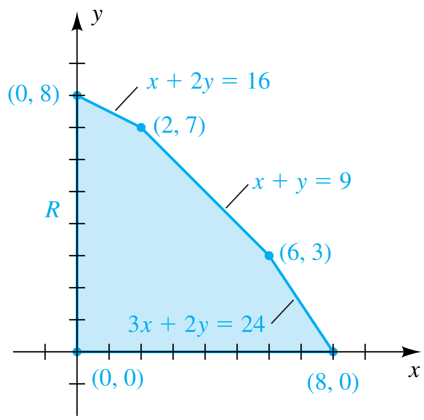
y = número de unidades de Y manufacturadas cada día

Usando el primer renglón de la tabla, observamos que cada unidad de X requiere 3 horas en la máquina A, y por tanto x unidades requieren $3x$ horas. Análogamente, como cada unidad de Y requiere 2 horas en A, y unidades requieren $2y$ horas. En consecuencia, el número total de horas por día que la máquina A debe usarse es $3x + 2y$. Esto, junto con el hecho de que A se puede usar durante 24 horas por día a lo sumo, nos da la primera restricción en el siguiente sistema de desigualdades, esto es, $3x + 2y \leq 24$. La segunda y tercera restricciones se obtienen al usar el mismo tipo de razonamiento para los renglones 2 y 3 de la tabla. Las últimas dos restricciones, $x \geq 0$ y $y \geq 0$, son verdaderas porque x y y no pueden ser negativas.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 24 \\ x + 2y &\leq 16 \\ x + y &\leq 9 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

La gráfica de este sistema es la región R de la figura 5.

FIGURA 5



Como la producción de cada unidad del producto X da una utilidad de \$500 y cada unidad del producto Y da una utilidad de \$350, la utilidad P obtenida al producir x unidades de X junto con y unidades de Y es

$$P = 500x + 350y.$$

Ésta es la función objetivo del problema. El valor máximo de P debe ocurrir en uno de los vértices de R en la figura 5. Los valores de P en estos vértices se dan en la tabla siguiente.

Vértice	Valor de $P = 500x + 350y$
(0, 0)	$500(0) + 350(0) = 0$
(0, 8)	$500(0) + 350(8) = 2800$
(8, 0)	$500(8) + 350(0) = 4000$
(2, 7)	$500(2) + 350(7) = 3450$
(6, 3)	$500(6) + 350(3) = 4050$

Vemos de la tabla que una utilidad máxima de \$4050 ocurre para una producción diaria de 6 unidades del producto X y 3 unidades del producto Y. ■

El ejemplo 3 ilustra la maximización de utilidades. El siguiente ejemplo demuestra la forma en que se puede usar programación lineal para minimizar el costo en cierta situación.

EJEMPLO 4 Minimizar costo

Un distribuidor de reproductores de discos compactos tiene dos almacenes, W_1 y W_2. Hay 80 unidades almacenadas en W_1 y 70 unidades en W_2. Dos clientes, A y B, solicitan 35 unidades y 60 unidades, respectivamente. El costo del envío desde cada almacén a A y B está determinado de acuerdo con la tabla siguiente. ¿Cómo debe despacharse el pedido para minimizar el costo total de envío?

Almacén	Cliente	Costo de envío por unidad
W_1	A	\$ 8
W_1	B	12
W_2	A	10
W_2	B	13

SOLUCIÓN Empecemos por introducir las variables siguientes:

x = número de unidades enviadas a A desde W_1

y = número de unidades enviadas a B desde W_1

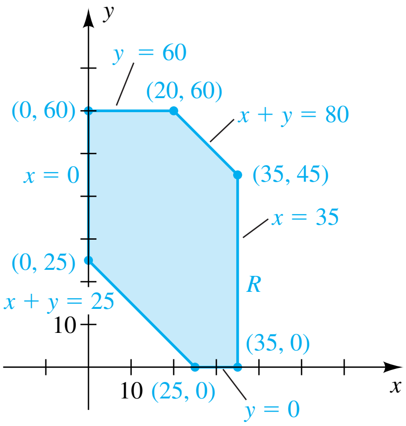
Como A solicitó 35 unidades y B solicitó 60 unidades, debemos tener

$35 - x$ = número de unidades enviadas a A desde W_2

$60 - y$ = número de unidades enviadas a B desde W_2.

Nuestra meta es determinar valores para x y y que hagan mínimo el costo total de envío.

FIGURA 6



El número de unidades enviadas desde W_1 no puede exceder de 80, y el número enviado desde W_2 no puede exceder de 70. La expresión de estos datos en términos de desigualdades nos da

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ (35 - x) + (60 - y) \leq 70 \end{cases}$$

Simplificando, obtenemos las primeras dos restricciones del sistema siguiente. Las últimas dos restricciones son verdaderas porque los valores más grandes de x y y son 35 y 60, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ x + y \geq 25 \\ 0 \leq x \leq 35 \\ 0 \leq y \leq 60 \end{cases}$$

La gráfica de este sistema es la región R que se muestra en la figura 6.

Denotemos con C el costo total (en dólares) de envío de reproductores de discos a los clientes A y B. Vemos de la tabla de costos de envío que los siguientes son verdaderos:

$$\text{costo de enviar 35 unidades a A} = 8x + 10(35 - x)$$
$$\text{costo de enviar 60 unidades a B} = 12y + 13(60 - y)$$

En consecuencia, el costo total es

$$C = 8x + 10(35 - x) + 12y + 13(60 - y).$$

La simplificación nos da la siguiente función objetivo:

$$C = 1130 - 2x - y$$

Para determinar el valor mínimo de C en R, necesitamos comprobar sólo los vértices que se ven en la figura 6 como en la tabla siguiente.

Vértice	**Valor de $C = 1130 - 2x - y$**
(0, 25)	$1130 - 2(0) - 25 = 1105$
(0, 60)	$1130 - 2(0) - 60 = 1070$
(20, 60)	$1130 - 2(20) - 60 = 1030$
(35, 45)	$1130 - 2(35) - 45 = 1015$
(35, 0)	$1130 - 2(35) - 0 = 1060$
(25, 0)	$1130 - 2(25) - 0 = 1080$

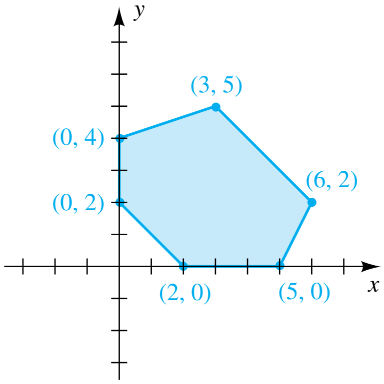
Vemos de la tabla que el costo mínimo de envío, \$1015, ocurre si $x = 35$ y $y = 45$. Esto significa que el distribuidor debe enviar todos los reproductores de discos a A desde W_1 y ninguno desde W_2. Además, el distribuidor debe enviar 45 unidades a B desde W_1 y 15 unidades de B a W_2. (Note que el costo *máximo* de envío ocurrirá si $x = 0$ y $y = 25$, esto es, si las 35 unidades son enviadas a A desde W_2 y si B recibe 25 unidades desde W_1 y 35 unidades desde W_2.) ■

Los ejemplos de esta sección son problemas elementales de programación lineal con dos variables, que se pueden resolver por métodos básicos. Los problemas mucho más complicados con numerosas variables que se presentan en la práctica pueden resolverse si se emplean técnicas de matrices (que veremos más adelante) y que están adaptadas para solución por computadora.

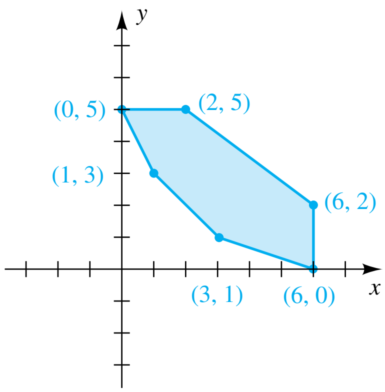
9.4 Ejercicios

Ejer. 1–2: Encuentre los valores máximo y mínimo de la función objetivo *C* en la región de la figura.

1 $C = 3x + 2y + 5$



2 $C = 2x + 7y + 3$



Ejer. 3–4: Trace la región *R* determinada por las restricciones dadas y marque sus vértices. Encuentre el valor máximo de *C* en *R*.

3 $C = 3x + y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$3x - 4y \geq -12,$ $3x + 2y \leq 24,$ $3x - y \leq 15$

4 $C = 4x - 2y$;
$x - 2y \geq -8,$ $7x - 2y \leq 28,$ $x + y \geq 4$

Ejer. 5–6: Trace la región *R* determinada por las restricciones dadas y marque sus vértices. Encuentre el valor mínimo de *C* en *R*.

5 $C = 3x + 6y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$2x + 3y \geq 12,$ $2x + 5y \geq 16$

6 $C = 2x + 6y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$x + y \geq 9,$ $5x + 8y \geq 60$

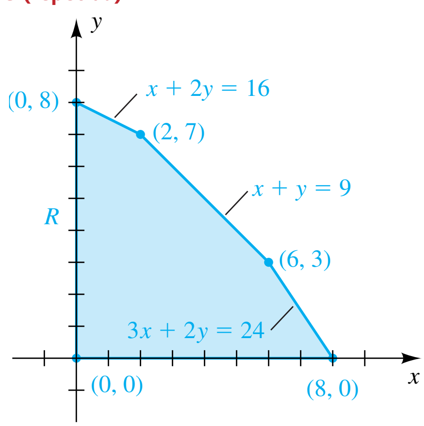
Ejer. 7–8: Trace la región *R* determinada por las restricciones dadas y marque sus vértices. Describa el conjunto de puntos para los que *C* es un máximo en *R*.

7 $C = 2x + 4y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$x - 2y \geq -8,$ $\frac{1}{2}x + y \leq 6,$ $3x + 2y \leq 24$

8 $C = 6x + 3y$; $x \geq 2, y \geq 1,$
$2x + 3y \leq 19,$ $x + 0.5y \leq 6.5$

Ejercicios 9–14: Consulte la figura 5 en el ejemplo 3 y el análisis que siguió al ejemplo 1.

FIGURA 5 (repetida)



Escribiendo la función objetivo en el ejemplo 3, $P = 500x + 350y$ en la forma punto-pendiente tenemos $y = -\frac{10}{7}x + (P/350)$. Compare esta recta pendiente con las pendientes de los segmentos de recta en el perímetro de *R* antes de responder las siguientes preguntas.

Ejer. 9–10: ¿En qué vértice podría ocurrir la máxima ganancia si la función objetivo tiene una pendiente de

9 -2?

10 $-\frac{3}{4}$?

Ejer. 11–12: ¿En dónde podría ocurrir la ganancia máxima si la función objetivo tiene pendiente?

11 -1?

12 $-\frac{3}{2}$?

Ejer. 13–14: Encuentre una función de ganancia razonable de la forma $P = 500x + by$ tal que la ganancia máxima ocurra en el vértice dado.

13 (2, 7)

14 (8, 0)

15 **Planificación de producción** Un fabricante de raquetas de tenis obtiene una utilidad de $15 por cada raqueta de tamaño grande y $8 por cada raqueta estándar. Para satisfacer la demanda de compradores, la producción diaria de raquetas estándar debe ser entre 30 y 80, y la producción de raquetas de tamaño grande debe ser entre 10 y 30. Para mantener alta calidad, el número total de raquetas producidas no debe exceder de 80 al día. ¿Cuántas de cada tipo deben ser manufacturadas diariamente para maximizar la utilidad?

16 **Planificación de producción** Un fabricante de teléfonos celulares obtiene una utilidad de $25 en un modelo de lujo y $30 en un modelo estándar. La compañía desea producir al menos 80 modelos de lujo y al menos 100 modelos estándar por día. Para mantener alta calidad, la producción diaria no debe exceder de 200 teléfonos celulares. ¿Cuántos de cada tipo debe producir diariamente para maximizar la utilidad?

17 **Minimizar costo** Dos sustancias, S y T, contienen cada una dos tipos de ingredientes, I y G. Una libra de S contiene 2 onzas de I y 4 onzas de G. Una libra de T contiene 2 onzas de I y 6 onzas de G. Un fabricante planea combinar cantidades de las dos sustancias para obtener una mezcla que contenga al menos 9 onzas de I y 20 onzas de G. Si el costo de S es $3 por libra y el costo de T es $4 por libra, ¿cuánto de cada sustancia debe usarse para mantener el costo en un mínimo?

18 **Maximizar utilidad bruta** Una compañía papelera fabrica dos tipos de cuadernos: un cuaderno de lujo con divisores de temas, que se vende en $4.00, y un cuaderno regular, que se vende en $3.00. El costo de producción es $3.20 por cada cuaderno de lujo y $2.60 por cada cuaderno regular. La compañía tiene las instalaciones para manufacturar entre 2000 y 3000 de lujo y entre 3000 y 6000 cuadernos regulares, pero no más de 7000 en total. ¿Cuántos cuadernos de cada tipo deben ser manufacturados para maximizar la diferencia entre los precios de venta y costos de producción?

19 **Minimizar costos de envío** Consulte el ejemplo 4 de esta sección. Si los costos de envío son $12 por unidad desde W_1 a A, $10 por unidad desde W_2 a A, $16 por unidad desde W_1 a B, y $12 por unidad desde W_2 a B, determine cómo debe despacharse el pedido para minimizar el costo de envío.

20 **Minimizar costo** Una compañía cafetera compra lotes mezclados de granos de café y luego los clasifica en granos de alta calidad, regular y no utilizable. La compañía necesita al menos 280 toneladas de granos de alta calidad y 200 toneladas de granos de café de calidad regular. La compañía puede comprar café sin clasificar a dos proveedores en cualquier cantidad deseada. Muestras de los dos proveedores contienen los siguientes porcentajes de granos de café de alta calidad, regular y no utilizable:

Proveedor	Alta calidad	Regular	No utilizable
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si el proveedor A cobra $900 por tonelada y B cobra $1200 por tonelada, ¿cuánto debe comprar la compañía a cada proveedor para satisfacer sus necesidades al costo mínimo?

21 **Planificación de superficie a cosechar** Un agricultor, en el negocio de producción de forraje para ganado, tiene 90 acres disponibles para plantar alfalfa y maíz. El costo de semilla por acre es $32 para alfalfa y $48 para maíz. El costo total de mano de obra ascenderá a $60 por acre para alfalfa y $30 por acre para maíz. El ingreso esperado (antes de deducir costos) es $500 por acre por alfalfa y $700 por acre por maíz. Si el agricultor no desea gastar más de $3840 para semillas y $4200 para mano de obra, ¿cuántos acres de cada cosecha debe plantar para obtener máxima utilidad?

22 **Planificación de maquinaria** Una pequeña empresa manufactura estantes para libros y escritorios para microcomputadoras. Para cada producto es necesario usar una sierra de mesa y una sierra eléctrica de contornos. Para manufacturar cada estante para libros, la sierra debe usarse $\frac{1}{2}$ hora y la sierra de contornos debe usarse 1 hora. Un escritorio requiere el uso de cada máquina por 2 horas. Las utilidades son $20 por estante para libros y $50 por escritorio. Si la sierra se puede usar 8 horas al día y la sierra de contornos 12 horas al día, ¿cuántos estantes para libros y escritorios deben manufacturarse al día para maximizar la utilidad?

23 **Minimizar el costo de una mezcla** Tres sustancias, X, Y y Z, contienen cuatro ingredientes cada una de ellas, A, B, C y D. El porcentaje de cada ingrediente y el costo en centavos por onza de cada sustancia están dados en la tabla siguiente.

Sustancia	Ingredientes				Costo por onza
	A	B	C	D	
X	20%	10%	25%	45%	25¢
Y	20%	40%	15%	25%	35¢
Z	10%	20%	25%	45%	50¢

Si el costo debe ser mínimo, ¿cuántas onzas de cada sustancia deben combinarse para obtener una mezcla de 20 onzas que contenga al menos 14% de A, 16% de B y 20% de C? ¿Qué combinación haría máximo el costo?

24 **Maximizar utilidades** Un hombre planea operar un puesto en una feria que dura un día, en el que venderá bolsas de cacahuates y bolsas de dulces. Tiene \$2000 disponibles para comprar su existencia, que costará \$2.00 por bolsa de cacahuates y \$4.00 por bolsa de dulces. Trata de vender los cacahuates en \$3.00 y los dulces en \$5.50 por bolsa. Su puesto tiene espacio hasta para 500 bolsas de cacahuates y 400 de dulces. De su experiencia pasada él sabe que no venderá más de un total de 700 bolsas. Encuentre el número de bolsas de cada una que debe tener en existencia para maximizar su utilidad. ¿Cuál es la máxima utilidad?

25 **Maximizar capacidad de pasajeros** Una pequeña comunidad desea comprar camionetas pequeñas y autobuses pequeños para su sistema de transporte público. La comunidad no puede gastar más de \$100 000 por los vehículos y no más de \$500 al mes para mantenimiento. Las camionetas se venden en \$10 000 cada una y su mantenimiento tiene un costo promedio de \$100 al mes. Los cálculos de costo correspondientes para cada autobús son \$20 000 y \$75 por mes. Si cada camioneta puede llevar 15 pasajeros y cada autobús tiene capacidad para 25 pasajeros, determine el número de camionetas y autobuses que deben comprarse para maximizar la capacidad de pasajeros del sistema.

26 **Minimizar el costo de combustible** Consulte el ejercicio 25. El costo mensual de combustible (basado en 5000 millas de servicio) es \$550 por cada camioneta y \$850 por cada autobús. Encuentre el número de camionetas y autobuses que deben comprarse para minimizar los costos mensuales de combustible si la capacidad en pasajeros del sistema debe ser al menos de 75.

27 **Abastecer una granja piscícola** Un criador de peces comprará no más de 5000 truchas y lobinas jóvenes de un criadero y las alimentará con una dieta especial durante el año próximo. El costo del alimento por pez será de \$0.50 por trucha y \$0.75 por lobina, y el costo total no debe exceder de \$3000. Al final del año, una trucha típica pesará 3 libras, y una lobina pesará 4 libras. ¿Cuántos peces de cada tipo deben abastecerse en el estanque para maximizar el número total de libras de peces al final del año?

28 **Planeación de dietas** Un dietista de un hospital desea preparar un platillo de verduras con maíz y calabacitas que proporciona al menos 3 gramos de proteína y cuesta no más de 36¢ la porción. Una onza de crema de maíz proporciona $\frac{1}{2}$ gramo de proteína y cuesta 4¢. Una onza de calabacitas proporciona $\frac{1}{4}$ de gramo de proteína y cuesta 3¢. Por gusto, debe haber al menos 2 onzas de maíz y al menos igual cantidad de calabacitas que de maíz. Es importante mantener tan bajo como sea posible el número total de onzas en una porción. Encuentre la combinación de maíz y calabacitas que minimizará la cantidad de ingredientes empleados por porción.

29 **Planeación de unidades de almacenamiento** Una contratista tiene un edificio grande que desea convertir en una serie de espacios de renta como almacenes. Construirá unidades básicas de 8 ft × 10 ft y unidades de lujo de 12 ft × 10 ft que contienen estantes extra y closet para ropa. Las consideraciones del mercado dictan que debe haber al menos el doble de unidades básicas que las de lujo y que las unidades básicas se rentan en \$75 al mes y las de lujo en \$120 al mes. Dispone de 7200 ft^2 a lo sumo para espacios de almacenamiento y dispone hasta de \$80 000 para la construcción. Si la construcción de cada unidad básica costará \$800 y las de lujo costarán \$1600, ¿cuántas unidades de cada tipo debe construir para maximizar el ingreso mensual?

30 **Dieta de un alce** Un alce que se alimenta principalmente de hojas de árboles y plantas acuáticas puede digerir no más de 33 kilogramos de estos alimentos por día. Aun cuando las plantas acuáticas tienen menor contenido de energía, el animal debe comer al menos 17 kilogramos de éstas para satisfacer sus necesidades de sodio. Un kilogramo de hojas proporciona cuatro veces más energía que un kilogramo de plantas acuáticas. Encuentre la combinación de alimentos que maximice la ingesta diaria de energía.

9.5 Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables

Para sistemas de ecuaciones lineales que contienen más de dos variables, podemos usar ya sea el método de sustitución explicado en la sección 9.1 o el método de eliminación desarrollado en la sección 9.2. El método de eliminación es la técnica más corta y más sencilla para hallar soluciones. Además, lleva a la técnica de matrices que estudiaremos en esta sección.

EJEMPLO 1 **Usar el método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$ a la segunda ecuación sume la primera multiplicada por -2

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -2y + 8z = 10 \end{cases}$$ a la tercera ecuación sume la primera multiplicada por 3

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ y - 4z = -5 \end{cases}$$ multiplique la segunda ecuación por $\frac{1}{5}$ y la tercera ecuación por $-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ -2z = -4 \end{cases}$$ a la tercera ecuación sume la segunda multiplicada por -1

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$ multiplicar la tercera ecuación por $-\frac{1}{2}$

Las soluciones del último sistema son fáciles de hallar por **sustitución hacia atrás.** De la tercera ecuación, vemos que $z = 2$. Sustituyendo 2 por z en la segunda ecuación, $y - 2z = -1$, obtenemos $y = 3$. Por último, hallamos el valor x al sustituir $y = 3$ y $z = 2$ en la primera ecuación $x - 2y + 3z = 4$, obteniendo $x = 4$. Así, hay una solución (4, 3, 2). ■

Cualquier sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables tiene ya sea una *solución única,* un *número infinito de soluciones*, o *no tiene solución.* En lo que respecta para dos ecuaciones con dos variables, la terminología empleada para describir estos sistemas es *consistente, dependiente y consistente,* o *inconsistente*, respectivamente.

Si analizamos el método de solución del ejemplo 1, vemos que los símbolos empleados para las variables no tienen importancia. Los *coeficientes* de las variables son lo que debemos considerar. Entonces, si se usan diferentes símbolos como *r, s* y *t* para las variables, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} r - 2s + 3t = 4 \\ 2r + s - 4t = 3 \\ -3r + 4s - t = -2 \end{cases}$$

El método de eliminación se puede continuar exactamente como en el ejemplo. Como esto es verdadero, es posible simplificar el proceso. Específicamente, introducimos un esquema para dar seguimiento a los coeficientes en forma tal que no tenemos que escribir las variables. Si consultamos el sistema precedente, primero comprobamos que aparecen variables en el mismo orden en cada ecuación y que los términos que no contengan variables están a la derecha de los signos igual. A continuación hacemos una lista de los números que aparecen en las ecuaciones como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Un arreglo de números de este tipo se denomina **matriz.** Los renglones de la matriz son los números que aparecen *horizontalmente*:

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & -2 & 3 & 4 & \text{primer renglón, } R_1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 & \text{segundo renglón, } R_2 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & \text{tercer renglón, } R_3 \end{array}$$

Las **columnas** de la matriz son los números que aparecen *verticalmente*:

primera columna, C_1	segunda columna, C_2	tercera columna, C_3	cuarta columna, C_4
1	−2	3	4
2	1	−4	3
−3	4	−1	−2

La matriz obtenida de un sistema de ecuaciones lineales en la forma precedente es la **matriz del sistema.** Si borramos la última columna de esta matriz, el conjunto restante de números es la **matriz coeficiente.** Como la matriz del sistema se puede obtener de la matriz coeficiente al adjuntar una columna, la llamamos **matriz coeficiente aumentada** o simplemente **matriz aumentada.** Más adelante, cuando usemos matrices para hallar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, introduciremos un segmento de recta vertical en la matriz aumentada para indicar dónde los signos igual aparecerían en el sistema de ecuaciones correspondiente, como en la siguiente ilustración.

ILUSTRACIÓN **Matriz coeficiente y matriz aumentada**

sistema — matriz coeficiente — matriz aumentada

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Antes de discutir un método matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales, expresemos una definición general de una matriz. Usaremos una **notación de doble subíndice,** que denota el número que aparece en el renglón i y la columna j por a_{ij}. El **subíndice de renglón** de a_{ij} es i, y el **subíndice de columna** es j.

Definición de una matriz

Sean m y n enteros positivos. Una **matriz $m \times n$** es un arreglo de la forma siguiente, donde cada uno de los términos a_{ij} es un número real:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La notación $m \times n$ de la definición se lee "m por n." Con frecuencia decimos que la matriz *es de* $m \times n$ y $m \times n$ es el **tamaño** de la matriz. Es posible considerar matrices en las que los símbolos a_{ij} representan números complejos, polinomios u otros objetos matemáticos. Los renglones y columnas de una

matriz están definidos como antes. Así, la matriz de la definición tiene m renglones y n columnas. Note que a_{23} está en el renglón 2 y la columna 3 y a_{32} está en el renglón 3 y la columna 2. Cada a_{ij} es un **elemento de la matriz.** Si $m = n$, la matriz es una **matriz cuadrada de orden n** y los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ son los **elementos diagonales principales.**

ILUSTRACIÓN **Matrices de $m \times n$**

- 2×3: $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
- 2×2: $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
- 1×3: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
- 3×2: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$
- 3×1: $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Para hallar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, empezamos con la matriz aumentada. Si una variable no aparece en una ecuación, suponemos que el coeficiente es cero. Entonces trabajamos con los renglones de la matriz *igual que si fueran ecuaciones.* Los únicos elementos faltantes son los símbolos para las variables, los signos de suma o resta usados entre términos, y los signos igual. Simplemente recordemos que los números en la primera columna son los coeficientes de la primera variable, los números de la segunda columna son los coeficientes de la segunda variable, y así sucesivamente. Las reglas para transformar una matriz están formuladas de modo que siempre producen una matriz de un sistema de ecuaciones equivalente.

El siguiente teorema es una reformulación, en términos de matrices, del teorema de sistemas equivalentes en la sección 9.2. En la parte (2) del teorema, la terminología *un renglón se multiplica por una constante distinta de cero* significa que cada elemento del renglón se multiplica por la constante. Para sumar dos renglones de una matriz, como en la parte (3), agregamos los elementos correspondientes en cada renglón.

Teorema sobre transformaciones de renglón de matriz

Dada una matriz de un sistema de ecuaciones lineales, una matriz de un sistema resulta equivalente si

(1) se intercambian dos renglones.

(2) se multiplica o divide un renglón por una constante diferente de cero.

(3) un múltiplo constante de un renglón se suma a otro renglón.

Nos referimos a 1−3 como las **transformaciones elementales de renglón** de una matriz. Si una matriz se obtiene de otra matriz por una o más transformaciones elementales de renglón, se dice que las dos matrices son **equivalentes** o, más precisamente, **renglón equivalente.** Usaremos los símbolos de la siguiente tabla para denotar transformaciones elementales de renglón de una matriz, donde la flecha $\rightarrow$ se puede leer “sustituye a”. Entonces, para la transformación $kR_i \rightarrow R_i$, el múltiplo constante kR_i *sustituye a* R_i. Del mismo modo, para $kR_i + R_j \rightarrow R_j$, la suma $kR_i + R_j$ *sustituye a* R_j. Por comodidad, escribiremos $(-1)R_i$ como $-R_i$.

Transformaciones elementales de renglón de una matriz

Símbolo	Significado
$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambia renglones i y j
$kR_i \rightarrow R_i$	Multiplica renglón i por k
$kR_i + R_j \rightarrow R_j$	Suma k veces el renglón i al renglón j

A continuación volveremos a trabajar el ejemplo 1 usando matrices. El lector debe comparar las dos soluciones en vista que se usan pasos análogos en cada caso.

EJEMPLO 2 **Usar matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Empezamos con la matriz del sistema, es decir, con la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

A continuación aplicamos transformaciones elementales de renglón para obtener otra matriz (más sencilla) de un sistema de ecuaciones equivalente. Estas transformaciones corresponden a las manipulaciones empleadas para ecuaciones en el ejemplo 1. Pondremos símbolos apropiados entre matrices equivalentes.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ \mathbf{-2R_1 + R_2 \to R_2} \\ \mathbf{3R_1 + R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{sume } -2R_1 \text{ a } R_2 \\ \text{sume } 3R_1 \text{ a } R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \mathbf{\tfrac{1}{5}R_2 \to R_2} \\ \mathbf{-\tfrac{1}{2}R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{multiplique } R_2 \text{ por } \tfrac{1}{5} \\ \text{multiplique } R_3 \text{ por } -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{-R_2 + R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{sume } -R_2 \text{ a } R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{-\tfrac{1}{2}R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{multiplique } R_3 \text{ por } -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

Usamos la última matriz para regresar al sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ \quad y - 2z = -1 \\ \qquad z = 2 \end{cases}$$

que es equivalente al sistema original. La solución $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$ se pueden hallar ahora por sustitución hacia atrás, como en el ejemplo 1. ■

La matriz final de la solución del ejemplo 2 está en **forma escalonada.** En general, una matriz está en forma escalonada si satisface las condiciones siguientes.

Forma escalonada de una matriz

(1) El primer número diferente de cero en cada renglón, leyendo de izquierda a derecha, es 1.

(2) La columna que contiene el primer número diferente de cero en cualquier renglón está a la izquierda de la columna que contiene el primer número diferente de cero del renglón siguiente.

(3) Los renglones formados enteramente de ceros pueden aparecer en la parte inferior de la matriz.

La siguiente es una ilustración de matrices en forma escalonada. Los símbolos a_{ij} representan números reales.

ILUSTRACIÓN **Forma escalonada**

■ $$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{bmatrix}$$

■ $$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes directrices pueden usarse para hallar formas escalonadas.

Directrices para hallar la forma escalonada de una matriz

1 Localice la *primera* columna que contenga elementos diferentes de cero y aplique transformaciones elementales de renglón para poner el número 1 en el primer renglón de esa columna.

2 Aplique transformaciones elementales de renglón del tipo $kR_1 + R_j \to R_j$ para $j > 1$ para obtener 0 bajo el número 1 obtenido en la directriz 1 en cada una de los renglones restantes.

3 *No considere el primer renglón.* Localice la siguiente columna que contenga elementos diferentes de cero y aplique transformaciones elementales de renglón para poner el número 1 en el *segundo* renglón de esa columna.

4 Aplique transformaciones elementales de renglón del tipo $kR_2 + R_j \to R_j$ para $j > 2$ para poner 0 bajo el número 1 obtenido en la directriz 3 en cada una de los renglones restantes.

5 *No considere los renglones primero y segundo.* Localice la siguiente columna que contenga elementos diferentes de cero y repita el procedimiento.

6 Continúe el proceso hasta llegar a la forma escalonada.

No todas las formas escalonadas contienen renglones formados sólo de ceros (vea el ejemplo 2).

Podemos usar operaciones elementales de renglón para transformar la matriz de cualquier sistema de ecuaciones lineales a forma escalonada. La forma escalonada se puede usar entonces para producir un sistema de ecuaciones que es equivalente al sistema original. Las soluciones del sistema dado se pueden hallar por sustitución hacia atrás. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica para un sistema de cuatro ecuaciones lineales.

EJEMPLO 3 **Usar una forma escalonada para resolver un sistema de ecuaciones lineales**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} -2x + 3y + 4z = -1 \\ x - 2z + 2w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ 3x + y - 2z - w = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Hemos dispuesto las ecuaciones de modo que las mismas variables aparecen en columnas verticales. Empezamos con la matriz aumentada y luego obtenemos una forma escalonada como se describe en las directrices.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{R_1 \leftrightarrow R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \mathbf{2R_1 + R_2 \to R_2} \\ \\ \mathbf{-3R_1 + R_4 \to R_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{-3R_2 + R_3 \to R_3} \\ \mathbf{-R_2 + R_4 \to R_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \mathbf{R_3 + R_4 \to R_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{-\tfrac{1}{3}R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz final está en forma escalonada y corresponde al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2z + 2w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ z - \frac{7}{3}w = -\frac{1}{3} \\ w = 1 \end{cases}$$

(continúa)

Ahora usamos sustitución hacia atrás para hallar la solución. De la última ecuación vemos que $w = 1$. Sustituyendo en la tercera ecuación, $z - \frac{7}{3}w = -\frac{1}{3}$, obtenemos

$$z - \tfrac{7}{3}(1) = -\tfrac{1}{3}, \qquad \text{o bien} \qquad z = \tfrac{6}{3} = 2.$$

Sustituyendo $w = 1$ y $z = 2$ en la segunda ecuación, $y + z - w = 0$, obtenemos

$$y + 2 - 1 = 0, \qquad \text{o bien} \qquad y = -1.$$

Por último, de la primera ecuación, $x - 2z + 2w = 1$, tenemos

$$x - 2(2) + 2(1) = 1, \qquad \text{o} \qquad x = 3.$$

En consecuencia, el sistema tiene una solución, $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$, y $w = 1$. ■

Después de obtener una forma escalonada, con frecuencia es conveniente aplicar operaciones elementales de renglón adicionales del tipo $kR_i + R_j \to R_j$ para que 0 también aparezca *arriba* del primer 1 de cada renglón. Nos referimos a la matriz resultante como **forma escalonada reducida.** La siguiente es una ilustración de matrices en forma escalonada reducida. (Compárelas con las formas escalonadas de la página 626.)

ILUSTRACIÓN **Forma escalonada reducida**

■ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{bmatrix}$$

■ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} & 0 & a_{17} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} & 0 & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4 **Usar una forma escalonada reducida para resolver un sistema de ecuaciones lineales**

Resuelva el sistema del ejemplo 3 usando forma escalonada reducida.

SOLUCIÓN Empezamos con la forma escalonada obtenida en el ejemplo 3 y aplicamos operaciones adicionales de renglón como sigue:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{r} \mathbf{-2R_4 + R_1 \to R_1} \\ \mathbf{R_4 + R_2 \to R_2} \\ \mathbf{\tfrac{7}{3}R_4 + R_3 \to R_3} \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{2R_3 + R_1 \to R_1} \\ \mathbf{-R_3 + R_2 \to R_2} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

El sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada reducida nos da la solución *sin* usar sustitución hacia atrás:

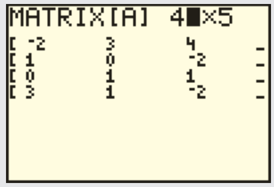
$$x = 3, \quad y = -1, \quad z = 2, \quad w = 1$$ ■

Casi todas las calculadoras de gráficas tienen una función que ejecuta la forma escalonada reducida de una matriz. Introduzcamos la matriz aumentada del sistema del ejemplo 3:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

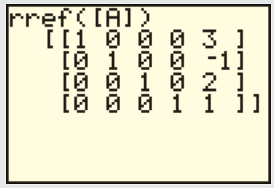
Introduzca el tamaño y elementos en la matriz A.

2nd MATRX ▷ ▷ ENTER
4 ENTER 5 ENTER
−2 ENTER 3 ENTER ⋯3 ENTER



Encuentre la forma escalonada reducida de renglón.

2nd QUIT 2nd MATRX ▷ ALPHA
B 2nd MATRX 1) ENTER



Note que los resultados en pantalla concuerdan con la matriz final del ejemplo 4.

A veces es necesario considerar sistemas en los que el número de ecuaciones no es igual al número de variables. Son aplicables las mismas técnicas de matriz, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Empezaremos con la matriz aumentada y luego hallaremos una forma escalonada reducida. Hay numerosas formas diferentes de poner el número 1 en la primera posición del primer renglón. Por ejemplo, la transformación elemental de renglón $\frac{1}{2}R_1 \to R_1$ o $-\frac{1}{3}R_2 + R_1 \to R_1$ lograría esto en un paso. Otra forma, que no contiene fracciones, se demuestra en los siguientes pasos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{R_1 \leftrightarrow R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{-R_2 + R_1 \to R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{-2R_1 + R_2 \to R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{-R_2 + R_1 \to R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

(continúa)

La forma escalonada reducida es la matriz del sistema

$$\begin{cases} x \quad\;\; - \;\; z = \;\;\, 5 \\ \quad\;\; y + 2z = -3 \end{cases}$$

o bien, lo que es equivalente,

$$\begin{cases} x = \quad\; z + 5 \\ y = -2z - 3 \end{cases}$$

Hay un número infinito de soluciones a este sistema; se pueden hallar al asignar a z cualquier valor c y luego usar las últimas dos ecuaciones para expresar x y y en términos de c. Esto nos da

$$x = c + 5, \qquad y = -2c - 3, \qquad z = c.$$

Entonces, las soluciones del sistema están formadas por todas las ternas ordenadas de la forma

$$(c + 5, -2c - 3, c)$$

para cualquier número real c. Las soluciones se pueden comprobar al sustituir $c + 5$ por x, $-2c - 3$ por y, y c por z en las dos ecuaciones originales.

Podemos obtener cualquier número de soluciones para el sistema si sustituimos números reales específicos por c. Por ejemplo, si $c = 0$, obtenemos (5, −3, 0); si $c = 2$, tenemos (7, −7, 2); y así sucesivamente.

Hay otras formas de especificar la solución general. Por ejemplo, comenzando con $x = z + 5$ y $y = -2z - 3$, podríamos hacer $z = d - 5$ para cualquier número real d. En este caso,

$$x = z + 5 = (d - 5) + 5 = d$$
$$y = -2z - 3 = -2(d - 5) - 3 = -2d + 7,$$

y las soluciones del sistema tienen la forma

$$(d, -2d + 7, d - 5).$$

Estas ternas producen las mismas soluciones que $(c + 5, -2c - 3, c)$. Por ejemplo, si $d = 5$, obtenemos (5, −3, 0); si $d = 7$, obtenemos (7, −7, 2); y así sucesivamente. ■

Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos los términos que no contienen variables, es decir, los *términos constantes* son cero. Un sistema de ecuaciones homogéneas siempre tiene la **solución trivial** obtenida al sustituir cero por cada variable. A veces existen soluciones no triviales. El procedimiento para hallar soluciones es el mismo que el empleado para sistemas no homogéneos.

EJEMPLO 6 **Resolver un sistema homogéneo de ecuaciones lineales**

Resuelva el sistema homogéneo

$$\begin{cases} \;\;\, x - y + 4z = 0 \\ \;\, 2x + y - \;\; z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Empezamos con la matriz aumentada y hallamos una forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \to R_2} \\ \xrightarrow{R_1 + R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 \to R_2} \\ \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \xrightarrow{R_2 + R_1 \to R_1} \\ \\ \xrightarrow{-R_2 + R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La forma escalonada reducida corresponde al sistema

$$\begin{cases} x \phantom{{}- 3y} + z = 0 \\ \phantom{x + {}} y - 3z = 0 \end{cases}$$

o bien, lo que es equivalente,

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 3z \end{cases}$$

Si asignamos cualquier valor c a z, obtenemos $x = -c$ y $y = 3c$. Las soluciones están formadas por todas las ternas de la forma $(-c, 3c, c)$ para cualquier número real c. ■

EJEMPLO 7 Un sistema homogéneo con sólo la solución trivial

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Empezamos con la matriz aumentada y hallamos una forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ \xrightarrow{-R_1 + R_2 \to R_2} \\ \xrightarrow{-R_1 + R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2 \to R_2} \\ \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \xrightarrow{-R_2 + R_1 \to R_1} \\ \\ \xrightarrow{-R_2 + R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \xrightarrow{-R_3 + R_1 \to R_1} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(continúa)

La forma escalonada reducida es la matriz del sistema

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Entonces, la única solución para el sistema dado es la trivial, (0, 0, 0). ■

Los siguientes dos ejemplos ilustran problemas aplicados.

EJEMPLO 8 **Usar un sistema de ecuaciones para determinar máxima utilidad**

Un fabricante de equipo eléctrico tiene la siguiente información acerca de la utilidad semanal por la producción y venta de un motor eléctrico.

Nivel de producción x	25	50	100
Utilidad $P(x)$ (dólares)	5250	7500	4500

(a) Determine a, b y c de modo que la gráfica de $P(x) = ax^2 + bx + c$ se ajuste a esta información.

(b) De acuerdo con la función cuadrática P del inciso (a), ¿cuántos motores deben producirse a la semana para obtener máxima utilidad? ¿Cuál es la máxima utilidad semanal?

SOLUCIÓN

(a) De la tabla vemos que la gráfica de $P(x) = ax^2 + bx + c$ contiene los puntos (25, 5250), (50, 7500) y (100, 4500). Esto nos da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5250 = 625a + 25b + c \\ 7500 = 2500a + 50b + c \\ 4500 = 10\,000a + 100b + c \end{cases}$$

Es fácil despejar c de cualquier de las ecuaciones, de modo que empezaremos por resolver el sistema al despejar c de la primera ecuación,

$$c = 5250 - 625a - 25b,$$

y luego sustituir esa expresión por c en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 7500 = 2500a + 50b + (5250 - 625a - 25b) \\ 4500 = 10\,000a + 100b + (5250 - 625a - 25b) \end{cases}$$

Note que hemos reducido el sistema de tres ecuaciones con tres variables a dos ecuaciones y dos variables. Simplificando el sistema tendremos

$$\begin{cases} 1875a + 25b = 2250 \\ 9375a + 75b = -750 \end{cases}$$

En este punto podríamos dividir las ecuaciones entre 25, pero vemos que 75 es 3 por 25, de modo que usaremos el método de eliminación para eliminar b:

Note que hemos empleado el método de sustitución y el de eliminación para resolver este sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} -5625a - 75b = -6750 \\ 9375a + 75b = -750 \end{cases}$$ multiplique por -3 la primera ecuación

Al sumar las ecuaciones tendremos $3750a = -7500$, de modo que $a = -2$. Podemos verificar que la solución es $a = -2$, $b = 240$, $c = 500$.

(b) Del inciso (a),

$$P(x) = -2x^2 + 240x + 500.$$

Como $a = -2 < 0$, la gráfica de la función cuadrática P es una parábola que abre hacia arriba. Por la fórmula de la página 199, la coordenada x del vértice (el punto más alto de la parábola) es

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-240}{2(-2)} = \frac{-240}{-4} = 60.$$

En consecuencia, para máxima utilidad, el fabricante debe producir y vender 60 motores por semana. La máxima utilidad semanal es

$$P(60) = -2(60)^2 + 240(60) + 500 = \$7700.$$ ■

EJEMPLO 9 **Resolver un problema de mezclas**

Un comerciante desea mezclar dos clases de cacahuates que cuestan \$3 y \$4 por libra, respectivamente, con nueces de la India que cuestan \$8 por libra, para obtener 140 libras de una mezcla que cuesta \$6 por libra. Si el comerciante desea que la cantidad de clase más baja de cacahuates sea el doble de la de cacahuates de clase más alta, ¿cuántas libras de cada variedad debe mezclar?

SOLUCIÓN Introduzcamos las tres variables, como sigue:

x = número de libras de cacahuates de \$3 por libra

y = número de libras de cacahuates de \$4 por libra

z = número de libras de cacahuates de \$8 por libra

Consultamos el enunciado del problema y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 140 & \text{ecuación del peso} \\ 3x + 4y + 8z = 6(140) & \text{ecuación del valor} \\ x = 2y & \text{restricción} \end{cases}$$

El lector puede verificar que la solución de este sistema es $x = 40$, $y = 20$, $z = 80$. Entonces, el comerciante debe usar 40 libras de los cacahuates de \$3/libra, 20 libras de los cacahuates de \$4/libra, y 80 libras de nueces de la India. ■

A veces podemos combinar transformaciones de renglón para simplificar nuestro trabajo. Por ejemplo, considere la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 11 & 3 & 8 & 9 \\ 7 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 87 & 80 & 94 \end{bmatrix}.$$

Para obtener un 1 en la primera columna, parece que tenemos que multiplicar el renglón 1 por $\frac{1}{11}$ o por el renglón 2 por $\frac{1}{7}$. No obstante, podemos multiplicar el renglón 1 por 2 y el renglón 2 por -3 y entonces sumar esos dos renglones para obtener

$$2(11) + (-3)(7) = 22 + (-21) = 1$$

en la columna uno, como se muestra en la siguiente matriz:

$$\mathbf{2R_1 - 3R_2 \to R_1}\begin{bmatrix} 1 & 12 & 10 & 15 \\ 7 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 87 & 80 & 94 \end{bmatrix}$$

Podemos entonces continuar para hallar la forma escalonada reducida sin el engorro de usar fracciones. Este proceso se denomina **combinación lineal de renglones.**

9.5 Ejercicios

Ejer. 1–22: Use matrices para resolver el sistema.

1 $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = -7 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x + 3y - 3z = -5 \\ 2x - y + z = -3 \\ -6x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -5 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$

9 $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y - 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ -x - 3y + 2z = -6 \\ 2x + y - 4z = 2 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x + 13y + 5z = 7 \\ x + 4y - z = -2 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x - y + 4z = 8 \\ -3x + y - 2z = 5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 4x - 2y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 5x + 2y - z = 10 \\ y + z = -3 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 5x + 2z = 1 \\ y - 3z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3y + z = -2 \\ 5x - 3z = 3 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + y = -7 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + y = 1 \\ x - 2y = 13 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 3y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$

25 **Mezclar soluciones ácidas** Tres soluciones contienen cierto ácido. La primera contiene 10% de ácido, la segunda 30% y la tercera 50%. Un químico desea usar las tres soluciones para obtener una mezcla de 50 litros que contenga 32% de ácido. Si el químico desea usar el doble de la solución al 50% que la solución al 30%, ¿cuántos litros de cada solución debe usar?

26 **Llenar una piscina** Una piscina puede ser llenada por tres tubos, A, B y C. El tubo A por sí solo puede llenar la piscina en 8 horas. Si los tubos A y C se usan juntos, la piscina se puede llenar en 6 horas; si el B y el C se usan juntos, tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse la piscina si se usan los tres tubos?

27 **Capacidad de producción** Una compañía tiene tres máquinas, A, B y C que pueden producir cierto artículo. No obstante, por la falta de operadores capacitados, sólo dos de las máquinas pueden usarse simultáneamente. La tabla siguiente indica la producción de un período de tres días, usando varias combinaciones de las máquinas. ¿Cuánto tomaría cada máquina, si se usa sola, para producir 1000 artículos?

Máquinas usadas	Horas empleadas	Artículos producidos
A y B	6	4500
A y C	8	3600
B y C	7	4900

28 Resistencia eléctrica En circuitos eléctricos, la fórmula $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$ se usa para hallar la resistencia total R si dos resistores R_1 y R_2 están conectados en paralelo. Dados tres resistores, A, B y C, suponga que la resistencia total es 48 ohms si A y B están conectados en paralelo, 80 ohms si B y C están conectados en paralelo, y 60 ohms si A y C están conectados en paralelo. Encuentre las resistencias de A, B y C.

29 Mezclar fertilizantes Un proveedor de productos para jardines tiene tres tipos de fertilizante para césped, G_1, G_2 y G_3 que tienen contenido de nitrógeno de 30%, 20% y 15%, respectivamente. El proveedor piensa mezclarlos para obtener 600 libras de fertilizante con 25% de contenido de nitrógeno. La mezcla debe contener 100 libras más del tipo G_3 que del G_2. ¿Cuánto de cada tipo debe usar?

30 Aceleración de partículas Si una partícula se mueve a lo largo de una recta de coordenadas con aceleración a constante (en cm/s^2), entonces en el tiempo t (en segundos) su distancia $s(t)$ (en centímetros) desde el origen es

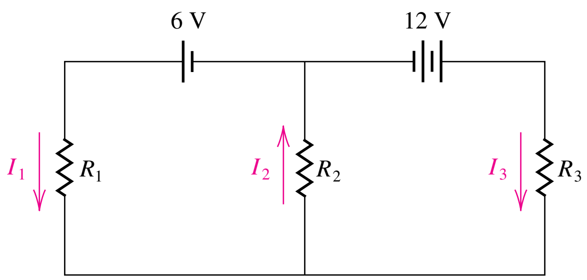
$$s(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

para velocidad v_0 y distancia s_0 desde el origen en $t = 0$. Si las distancias de la partícula desde el origen en $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, y $t = \frac{3}{2}$ son 7, 11 y 17, respectivamente, encuentre a, v_0 y s_0.

31 Corrientes eléctricas En la figura se muestra el diagrama de un circuito eléctrico que contiene tres resistores, una batería de 6 volts y una batería de 12 volts. Se puede demostrar, usando las leyes de Kirchhoff, que las tres corrientes, I_1, I_2 e I_3 son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ R_1I_1 + R_2I_2 = 6 \\ R_2I_2 + R_3I_3 = 12 \end{cases}$$

EJERCICIO 31



Encuentre las tres corrientes si

(a) $R_1 = R_2 = R_3 = 3$ ohms

(b) $R_1 = 4$ ohms, $R_2 = 1$ ohm, y $R_3 = 4$ ohms

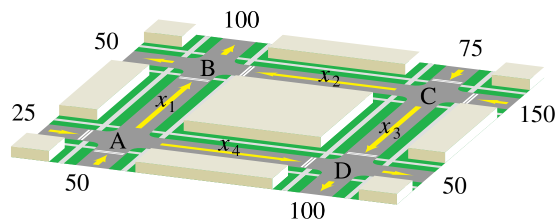
32 Población de aves Una población estable de 35 000 aves vive en tres islas. Cada año, 10% de la población de la isla A migra a la isla B, 20% de la población de la isla B migra a la isla C, y 5% de la población de la isla C migra a la isla A. Encuentre el número de aves en cada isla si la cuenta de la población de cada isla no varía de año en año.

33 Mezclar granos de café Una tienda se especializa en preparar mezclas de café para gourmet. De granos de café de Colombia, Costa Rica y Kenia, el propietario desea preparar bolsas de 1 libra que venderá en \$12.50. El costo por libra de estos cafés es \$14, \$10 y \$12, respectivamente. La cantidad de café de Colombia debe ser el triple del de Costa Rica. Encuentre la cantidad de cada tipo de café en la mezcla.

34 Pesos de cadenas Hay tres cadenas que pesan 450, 610 y 950 onzas, cada una de ellas formada por eslabones de tres tamaños diferentes. Cada cadena tiene 10 eslabones pequeños y también tienen 20, 30 y 40 eslabones de tamaño mediano, así como 30, 40 y 70 eslabones grandes, respectivamente. Encuentre los pesos de los eslabones pequeños, medianos y grandes.

35 Flujo de tránsito En la figura se muestra un sistema de cuatro calles con circulación en un solo sentido y que llevan al centro de una ciudad. Los números que se ven en la figura denotan el número promedio de vehículos por hora que se desplazan en las direcciones mostradas. Un total de 300 vehículos entran a la zona y 300 salen de ella en una hora. Los semáforos en los cruceros A, B, C y D se han de sincronizar para evitar atascos, y esta sincronización determinará las cantidades de flujo de tránsito x_1, x_2, x_3 y x_4.

EJERCICIO 35



(a) Si el número de vehículos que entran en un crucero por hora debe ser igual al número de los que salen de ese crucero en el mismo tiempo, describa, con un sistema de ecuaciones, las cantidades de flujo de tránsito en cada crucero.

(b) Si el semáforo en el crucero C está sincronizado para que x_3 sea igual a 100, encuentre x_1, x_2 y x_4.

(c) Haga uso del sistema del inciso (a) para explicar por qué $75 \leq x_3 \leq 150$.

36 Si $f(x) = ax^3 + bx + c$, determine a, b y c tales que la gráfica de f pase por los puntos $P(-3, -12)$, $Q(-1, 22)$ y $R(2, 13)$.

37 **Contaminación del aire** Entre 1850 y 1985, aproximadamente 155 000 millones de toneladas métricas de carbón se descargaron en la atmósfera terrestre y el clima se hizo 0.5°C más caliente, indicación ésta del *efecto invernadero*. Se estima que duplicar la cantidad de dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera resultaría en un aumento promedio de temperatura mundial de 4 a 5°C. La cantidad futura A de CO_2 en la atmósfera en partes por millón a veces se calcula usando la fórmula $A = a + ct + ke^{rt}$, donde a, c y k son constantes, r es el porcentaje de aumento en la emisión de CO_2 y t es el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 1990. Suponga que se calcula que en el año 2070, A será 800 si $r = 2.5\%$ y A será de 560 si $r = 1.5\%$. Si, en 1990, $A = 340$ y $r = 1\%$, encuentre el año en el que la cantidad de CO_2 en la atmósfera se habrá duplicado.

38 **Contaminación del aire** Consulte el ejercicio 37. Suponga que se calcula que en el año 2030 A será 455 si $r = 2.0\%$ y A será 430 si $r = 1.5\%$. Si, en 1990, $A = 340$ y $r = 2.5\%$, encuentre el año en el que la cantidad de CO_2 en la atmósfera se habrá duplicado.

Ejer. 39–40: Encuentre la ecuación de la parábola que tiene un eje vertical y pasa por los puntos dados.

39 $P(-1, 9)$, $Q(1, 7)$, $R(2, 15)$

40 $P(-1, -12)$, $Q(1, -6)$, $R(2, -9)$

Ejer. 41–42: Encuentre la ecuación de la circunferencia de la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ que pase por los puntos dados.

41 $P(2, 1)$, $Q(-1, -4)$, $R(3, 0)$

42 $P(-5, 5)$, $Q(-2, -4)$, $R(2, 4)$

Ejer. 43–44: Encuentre una ecuación del polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que pase por los puntos dados.

43 $P(0, -6)$, $Q(1, -11)$, $R(-1, -5)$, $S(2, -14)$

44 $P(0, 4)$, $Q(1, 2)$, $R(-1, 10)$, $S(2, -2)$

45 Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, encuentre a, b, c, and d si la gráfica de f pasa por $(-1, 2)$, $(0.5, 2)$, $(1, 3)$, y $(2, 4.5)$.

46 Si $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, encuentre a, b, c, d, y e, si la gráfica de f pasa por $(-2, 1.5)$, $(-1, -2)$, $(1, -3)$, $(2, -3.5)$, y $(3, -4.8)$.

9.6 Álgebra de matrices

Las matrices se introdujeron en la sección 9.5 como ayuda para hallar soluciones de sistemas de ecuaciones. En esta sección explicamos algunas de las propiedades de matrices, que son importantes en campos avanzados de matemáticas y en aplicaciones.

En la siguiente definición, el símbolo (a_{ij}) denota una matriz A de $m \times n$ del tipo que se ve en la definición de la página 623. Usamos notaciones semejantes para las matrices B y C.

Definición de igualdad y suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, y $C = (c_{ij})$ matrices de $m \times n$

(1) $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y j.

(2) $C = A + B$ si y sólo si $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para toda i y j.

Note que dos matrices son iguales si y sólo si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

ILUSTRACIÓN **Igualdad de matrices**

■ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ \sqrt[3]{8} & 3^2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 & \sqrt{25} \\ 2 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

Usando la notación de paréntesis para matrices, podemos escribir la definición de suma de dos matrices de $m \times n$ como

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Entonces, para sumar dos matrices, sumamos los elementos en posiciones correspondientes en cada matriz. *Dos matrices se pueden sumar sólo si tienen el mismo tamaño.*

ILUSTRACIÓN **Adición de matrices**

- $$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & -5+2 \\ 0+7 & 4+(-4) \\ -6+(-2) & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 7 & 0 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

La **matriz cero de $m \times n$,** denotada por O, es la matriz con m renglones y n columnas en la que todo elemento es 0.

ILUSTRACIÓN **Matrices cero**

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ■ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ■ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La **inversa aditiva** $-A$ de la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $(-a_{ij})$ obtenida al cambiar el signo de cada elemento de A diferente de cero.

ILUSTRACIÓN **Inverso aditivo**

- $$-\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

La demostración del siguiente teorema es consecuencia de la definición de adición de matrices.

Teorema sobre propiedades de matrices

Si A, B y C son matrices de $m \times n$ y si O es la matriz cero de $m \times n$, entonces

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $A + O = A$

(4) $A + (-A) = O$

La **sustracción** de dos matrices de $m \times n$ está definida por

$$A - B = A + (-B).$$

Usando la notación de paréntesis, tenemos

$$\begin{aligned}(a_{ij}) - (b_{ij}) &= (a_{ij}) + (-b_{ij}) \\ &= (a_{ij} - b_{ij}).\end{aligned}$$

Entonces, para restar dos matrices, restamos los elementos en posiciones correspondientes.

ILUSTRACIÓN **Sustracción de matrices**

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -5-2 \\ 0-7 & 4-(-4) \\ -6-(-2) & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición del producto de un número real y una matriz

El **producto** de un número real c y una matriz A de $m \times n = (a_{ij})$ es

$$cA = (ca_{ij}).$$

Note que para hallar cA multiplicamos cada elemento de A por c.

ILUSTRACIÓN **Producto de un número real y una matriz**

$$3\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Podemos demostrar lo siguiente.

Teorema sobre propiedades de matrices

Si A y B son matrices de $m \times n$ y si c y d son números reales, entonces

(1) $c(A + B) = cA + cB$
(2) $(c + d)A = cA + dA$
(3) $(cd)A = c(dA)$

La siguiente definición, del producto AB de dos matrices, puede parecer poco común pero tiene numerosos usos en matemáticas y aplicaciones. Para la multiplicación, a diferencia de la adición, A y B pueden tener tamaños diferentes pero *el número de columnas de A debe ser igual que el número de renglones de B*. Entonces, si A es de $m \times n$, entonces B debe ser de $n \times p$ para alguna p. Como veremos, el tamaño de AB es entonces de $m \times p$. Si $C = AB$, entonces un método de hallar el elemento c_{ij} en el renglón i y columna j de C está dado en las siguientes directrices.

Directrices para hallar c_{ij} en el producto $C = AB$ si A es de $m \times n$ y B es $n \times p$

1 Destaque el i-ésimo renglón, R_i, de A y la j-ésima columna, C_j, de B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

2 *Simultáneamente* muévase a la derecha a lo largo de R_i y abajo hasta C_j, multiplicando pares de elementos, para obtener

$$a_{i1}b_{1j},\ a_{i2}b_{2j},\ a_{i3}b_{3j},\ \ldots,\ a_{in}b_{nj}.$$

3 Sume los productos de los pares de la directriz 2 para obtener c_{ij}:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Usando las directrices, vemos que el elemento c_{11} del primer renglón y la primera columna de $C = AB$ es

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}.$$

El elemento c_{mp} del último renglón y la última columna de $C = AB$ es

$$c_{mp} = a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + a_{m3}b_{3p} + \cdots + a_{mn}b_{np}.$$

La exposición precedente está resumida en la siguiente definición.

Definición de productos de dos matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y sea $B = (b_{ij})$ una matriz de $n \times p$. El **producto** AB es la matriz $C = (c_{ij})$ de $m \times p$ tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

para $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ y $j = 1, 2, 3, \ldots, p$.

El siguiente diagrama puede ayudarle a recordar la relación entre tamaños de matrices al trabajar con un producto AB.

tamaño de A tamaño de B

$m \times n$ $n \times p$

igual

el tamaño de AB es $m \times p$

La siguiente ilustración contiene algunos casos especiales.

ILUSTRACIÓN **Tamaños de matrices en productos**

	Tamaño A	Tamaño B	Tamaño AB
■	2×3	3×5	2×5
■	4×2	2×3	4×3
■	3×1	1×3	3×3
■	1×3	3×1	1×1
■	5×3	3×5	5×5
■	5×3	5×3	AB no está definida

En el siguiente ejemplo encontramos el producto de dos matrices específicas.

EJEMPLO 1 Hallar el producto de dos matrices

Encuentre el producto AB Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN La matriz A es de 2×3 y la matriz B es de 3×4. Por tanto, el producto $C = AB$ está definido y es de 2×4. A continuación usamos las directrices para hallar los elementos $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{24}$ del producto. Por ejemplo, para hallar el elemento c_{23} destacamos el segundo renglón, R_2, de A y la tercera columna, C_3, de B, como se ilustra a continuación y luego usamos las directrices 2 y 3 para obtener

$$c_{23} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = -2.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & -2 & \; \end{bmatrix}$$

Del mismo modo, para hallar el elemento c_{12} en el renglón 1 y la columna 2 del producto, procedemos como sigue

$$c_{12} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 0 = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; & 8 & \; & \; \\ \; & \; & -2 & \; \end{bmatrix}$$

Los elementos restantes del producto se calculan como sigue, donde hemos indicado el renglón de A y la columna de B que se usan cuando se aplica la directriz 1.

Renglón de A	Columna de B	Elemento de C
R_1	C_1	$c_{11} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 7 = -18$
R_1	C_3	$c_{13} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 5 = -7$
R_1	C_4	$c_{14} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 8 = -22$
R_2	C_1	$c_{21} = 4 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 7 = 6$
R_2	C_2	$c_{22} = 4 \cdot (-4) + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 = -16$
R_2	C_4	$c_{24} = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 8 = -16$

Por lo tanto,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -18 & 8 & -7 & -22 \\ 6 & -16 & -2 & -16 \end{bmatrix}.$$

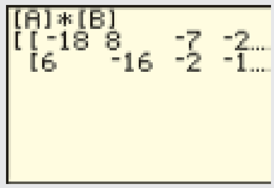
■

Multiplicar matrices en calculadora de gráficas es muy sencillo. Comprobemos los resultados del ejemplo 1. Introduzca las matrices A (2×3) y B (3×4):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Ahora introduzca la operación en la pantalla inicial

2nd MATRX 1 ×
2nd MATRX 2 ENTER



Para ver los elementos de la cuarta columna, presione la tecla ▷.

Una matriz es una **matriz renglón** si tiene sólo un renglón. Una **matriz columna** tiene sólo una columna. La siguiente ilustración contiene algunos productos que implican matrices renglón y columna. El estudiante debe comprobar cada entrada en los productos.

ILUSTRACIÓN **Productos que contienen matrices de renglón y columna**

- $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 19 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$

La operación de producto para matrices no es conmutativa. Por ejemplo, si A es de 2×3 y B es de 3×4, entonces AB se puede hallar porque el número de columnas de A es igual que el número de renglones de B. No obstante, BA no está definida porque el número de columnas de B es diferente del número de renglones de A. Incluso si AB y BA están definidas, es frecuente que estos productos sean diferentes. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo, junto con el hecho de que el producto de dos matrices diferentes de cero puede ser igual a una matriz cero.

EJEMPLO 2 **La multiplicación de matrices no es conmutativa**

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, demuestre que $AB \neq BA$.

SOLUCIÓN Usando la definición del producto de dos matrices, obtenemos lo siguiente:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $AB \neq BA$. Nótese que la última igualdad muestra que *el producto de dos matrices diferentes de cero puede ser igual a una matriz cero.* ■

Aun cuando la multiplicación de matrices no es conmutativa, es asociativa. Por tanto, si A es de $m \times n$, B es de $n \times p$ y C es de $p \times q$, entonces

$$A(BC) = (AB)C.$$

Las propiedades distributivas también se cumplen si las matrices de que se trata tienen el número apropiado de renglones y columnas. Si A_1 y A_2 son matrices de $m \times n$ y si B_1 y B_2 son matrices de $n \times p$, entonces

$$A_1(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2$$
$$(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1.$$

Como caso especial, si todas las matrices son cuadradas, de orden n, entonces se cumplen la propiedad asociativa y la distributiva.

Concluimos esta sección con una aplicación del producto de dos matrices.

EJEMPLO 3 **Una aplicación de un producto de matrices**

(a) Tres inversionistas, I_1, I_2 e I_3, poseen cada uno de ellos cierto número de porciones de cuatro acciones, S_1, S_2, S_3, y S_4, de acuerdo con la matriz A. La matriz B contiene el valor presente V de cada porción de cada acción. Encuentre AB e interprete el significado de sus elementos.

número de porciones de acción

$$\text{inversionistas}\begin{cases} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{cases}\overset{\begin{matrix} S_1 & \quad S_2 & \quad S_3 & \quad S_4 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix}} = A, \quad \text{acciones}\begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{cases}\overset{V}{\begin{bmatrix} 20.37 \\ 16.21 \\ 90.80 \\ 42.75 \end{bmatrix}} = B$$

valor de porción

(b) La matriz C contiene el cambio en el valor de cada acción durante la última semana. Encuentre AC e interprete el significado de sus elementos.

$$\text{acciones}\begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{cases}\begin{bmatrix} +1.03 \\ -0.22 \\ -1.35 \\ +0.15 \end{bmatrix} = C$$

SOLUCIÓN

(a) Como A es una matriz de 3×4 y B es una matriz de 4×1, el producto AB es una matriz de 3×1:

$$AB = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.37 \\ 16.21 \\ 90.80 \\ 42.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6432.25 \\ 6659.00 \\ 10\,754.50 \end{bmatrix}$$

El primer elemento del producto AB, 6432.25, se obtuvo del cálculo

$$50(20.37) + 100(16.21) + 30(90.80) + 25(42.75)$$

y representa el valor total que el inversionista I_1 tiene en las cuatro acciones. Del mismo modo, los elementos segundo y tercero representan el valor total para los inversionistas I_2 e I_3, respectivamente.

(b)

$$AC = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1.03 \\ -0.22 \\ -1.35 \\ +0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.25 \\ 61.00 \\ 53.00 \end{bmatrix}$$

El primer elemento del producto AC, -7.25, indica que el valor total que el inversionista I_1 tiene en las cuatro acciones bajó \$7.25 en la última semana. Los elementos segundo y tercero indican que el valor total que los inversionistas I_2 y I_3 tienen en las cuatro acciones subió \$61.00 y \$53.00, respectivamente. ■

9.6 Ejercicios

Ejer. 1-8: Encuentre, si posible, $A + B$, $A - B$, $2A$, y $-3B$.

1 $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3 $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

4 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5 $A = [4 \quad -3 \quad 2]$, $B = [7 \quad 0 \quad -5]$

6 $A = \begin{bmatrix} 7 \\ -16 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix}$

7 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

8 $A = [2 \quad 1]$, $B = [3 \quad -1 \quad 5]$

Ejer. 9–12: Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

encuentre C para la ecuación matricial.

9 $2C = A$

10 $-3C = B$

11 $A + C = B$

12 $A - C = B$

Ejer. 13–14: Encuentre el elemento dado del producto matricial $C = AB$ en el ejercicio citado.

13 c_{21}; ejercicio 19 14 c_{23}; ejercicio 22

Ejer. 15–28: Encuentre, si es posible, AB y BA.

15 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

16 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

17 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

18 $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

19 $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

20 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

21 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

22 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

23 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

25 $A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

26 $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

27 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

28 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Ejer. 29–32: Encuentre AB.

29 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

30 $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$

31 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

32 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Ejer. 33–36: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique el enunciado.

33 $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$, donde $A^2 = AA$ y $B^2 = BB$.

34 $(A + B)(A + B) \neq A^2 + 2AB + B^2$

35 $A(B + C) = AB + AC$

36 $A(BC) = (AB)C$

Ejer. 37–40: Verifique la identidad para

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix},$$

y los números reales m y n.

37 $m(A + B) = mA + mB$

38 $(m + n)A = mA + nA$

39 $A(B + C) = AB + AC$

40 $A(BC) = (AB)C$

Ejer. 41–44: Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -9 & 5 & -8 \\ 3 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Evalúe la expresión matricial.

41 $A^2 + B^2$

42 $3A - BA$

43 $A^2 - 5B$

44 $A + A^2 + B + B^2$

45 **Valor de inventario** Una tienda lleva en existencia estas medidas de toallas, disponibles en cinco colores: pequeña, a un precio de \$8.99 cada una; mediana, a un precio de \$10.99 cada una; y grande, a un precio de \$12.99 cada una. El inventario actual de la tienda es como sigue:

Tamaño de toalla	Colores				
	Blanca	Canela	Beige	Rosa	Amarillo
Pequeña	400	400	300	250	100
Mediana	550	450	500	200	100
Grande	500	500	600	300	200

(a) Organice estos datos en una matriz A de inventario y una matriz B de precios para que el producto $C = AB$ quede definido.

(b) Encuentre C.

(c) Interprete el significado del elemento c_{51} en C.

46 **Costos de construcción** Un contratista de viviendas tiene pedidos para 4 unidades de 4 dormitorios, 10 unidades de dos dormitorios y 6 unidades de tres dormitorios. Los costos de mano de obra y materiales (en miles de dólares) están dados en la tabla siguiente.

	1 dormitorio	2 dormitorios	3 dormitorios
Mano de obra	70	95	117
Materiales	90	105	223

(a) Organice estos datos en una matriz A de pedidos y una matriz B de costos para que el producto $C = AB$ quede definido.

(b) Encuentre C.

(c) Interprete el significado de cada elemento en C.

9.7 La inversa de una matriz

En toda esta sección y en las dos siguientes restringiremos nuestra exposición a matrices *cuadradas*. El símbolo I_n denotará la matriz cuadrada de orden n que tiene 1 en cada posición de la diagonal principal y 0 en todo lo demás. Llamamos a I_n la **matriz identidad de orden n.**

ILUSTRACIÓN **Matrices identidad**

- $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ■ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Podemos demostrar que si A es cualquier matriz cuadrada de orden n, entonces

$$AI_n = A = I_nA.$$

ILUSTRACIÓN $AI_2 = A = I_2A$

- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Recuerde que cuando estamos trabajando con un número real b diferente de cero, el número único b^{-1} (el inverso multiplicativo de b) se puede multiplicar b veces para obtener la identidad multiplicativa (el número 1), es decir,

$$b \cdot b^{-1} = 1.$$

Tenemos una situación semejante con las matrices.

Definición de la inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si existe una matriz B tal que

$$AB = I_n = BA,$$

entonces B se denomina **inversa** de A y se denota A^{-1} (léase "A inversa").

Si una matriz cuadrada A tiene una inversa, entonces decimos que A es **invertible**. Si una matriz no es cuadrada, entonces no puede tener una inversa. Para matrices (a diferencia de los números reales), el símbolo $1/A$ no representa la inversa A^{-1}.

Si A es invertible, podemos calcular A^{-1} usando operaciones elementales de renglón. Si $A = (a_{ij})$ es de $n \times n$, empezamos con la matriz de $n \times 2n$ formada al *unir* I_n a A:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

A continuación aplicamos una sucesión de transformaciones elementales de renglón, como hicimos en la sección 9.5 para hallar formas escalonadas reducidas, hasta llegar a una matriz de la forma

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

en donde la matriz identidad I_n aparece a la izquierda de la regla vertical. Se puede demostrar que la matriz $n \times n$ (b_{ij}) es la inversa de A, es decir, $B = A^{-1}$.

EJEMPLO 1 **Hallar la inversa de una matriz 2 × 2**

Encuentre A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Empezamos con la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

A continuación realizamos transformaciones elementales de renglón hasta que la matriz identidad I_2 aparezca en el lado izquierdo de la regla vertical, como sigue.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathbf{R_1} \leftrightarrow \mathbf{R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$-3\mathbf{R_1} + \mathbf{R_2} \to \mathbf{R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{7}\mathbf{R_2} \to \mathbf{R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right]$$

$$-4\mathbf{R_2} + \mathbf{R_1} \to \mathbf{R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right]$$

Por la explicación previa,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifiquemos que $AA^{-1} = I_2 = A^{-1}A$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$ ■

EJEMPLO 2 **Hallar la inversa de una matriz de 3 × 3**

Encuentre A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -2\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ -3\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 3\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ -10\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 13 & -10 & 11 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{9}\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -2\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ -\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{array}\right]$$

En consecuencia,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -13 & 10 & -11 \end{bmatrix}.$$

El lector puede verificar que $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$. ■

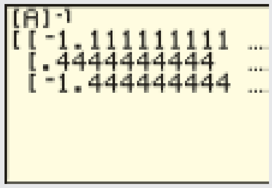
No todas las matrices cuadradas son invertibles. De hecho, si el procedimiento empleado en los ejemplos 1 y 2 no lleva a una matriz identidad a la izquierda de la regla vertical, entonces la matriz A no tiene inversa, es decir, A no es invertible.

Hallar la inversa de una matriz cuadrada en una calculadora de gráficas es relativamente fácil. Introduzca la matriz A del ejemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

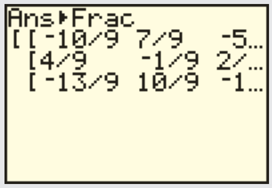
Ahora introduzca la inversa de A en la pantalla inicial.

2nd MATRX 1 x^{-1} ENTER CLEAR



Convierta las entradas a fracciones como sigue:

MATH 1 ENTER



Observe que debe usar x^{-1} y no la notación A ^ (−1). Si la matriz no es invertible, cualquiera de las dos calculadoras exhibe el mensaje de error SINGULAR MAT.

Podemos aplicar inversas de matrices a soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Considere el caso de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

Este sistema se puede expresar en términos de matrices como

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Si hacemos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},$$

entonces una *forma matricial* para el sistema es

$$AX = B.$$

Si existe A^{-1} entonces multiplicar por A^{-1} ambos lados de la última ecuación nos da $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Como $A^{-1}A = I_2$ e $I_2X = X$, esto nos lleva a

$$X = A^{-1}B,$$

de la cual se puede hallar la solución (x, y). Esta técnica (que se conoce como *método de la inversa*) se puede ampliar a sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

EJEMPLO 3 **Resolver un sistema de ecuaciones lineales usando el método de la inversa**

Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y = 3 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si tenemos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

entonces $AX = B$. Esto implica que $X = A^{-1}B$. La matriz A^{-1} se encontró en el ejemplo 2. En consecuencia,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -13 & 10 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 21 \\ -3 \\ 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix}.$$

Como se esperaba, la solución de calculadora para el ejemplo 3 es muy sencilla, simplemente introduzca $A^{-1} \times B$ para obtener la solución.

Así, $x = \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{13}{3}$, y la terna ordenada $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ es la solución del sistema dado. ■

Si estamos resolviendo un sistema de ecuaciones lineales sin ayuda de equipo de cómputo, entonces el método de la inversa de solución del ejemplo 3 es bueno sólo si se conoce A^{-1} (o puede calcularse con facilidad) o si muchos sistemas con la misma matriz coeficiente se van a considerar.

Si estamos usando un equipo de cómputo y si la matriz coeficiente no es invertible, entonces el método de la inversa no se puede usar y el método preferido de solución es el método de matrices discutido en la sección 9.5. Hay otros usos importantes para la inversa de una matriz que aparecen en campos más avanzados de matemáticas y en aplicaciones de esos campos.

9.7 Ejercicios

Ejer. 1–2: Demuestre que *B* es la inversa de *A*.

1 $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

2 $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

Ejer. 3–16: Encuentre la inversa de la matriz si existe.

3 $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

8 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

10 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17 Exprese las condiciones en a y b que garanticen que la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ tiene una inversa, y encuentre una fórmula para la inversa si existe.

18 Si $abc \neq 0$, encuentre la inversa de $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

19 Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, demuestre que $AI_3 = A = I_3A$.

20 Demuestre que $AI_4 = A = I_4A$ para toda matriz cuadrada A de orden 4.

Ejer. 21–24: Resuelva el sistema usando el método de la inversa. Consulte los ejercicios 3–4 y 9–10.

21 $\begin{cases} 2x - 4y = c \\ x + 3y = d \end{cases}$

(a) $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

22 $\begin{cases} 3x + 2y = c \\ 4x + 5y = d \end{cases}$

(a) $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

23 $\begin{cases} -2x + 2y + 3z = c \\ x - y = d \\ y + 4z = e \end{cases}$

(a) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

24 $\begin{cases} x + 2y + 3z = c \\ -2x + y = d \\ 3x - y + z = e \end{cases}$

(a) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejer. 25–28: Para cada matriz A, calcule su inversa A^{-1} a cinco lugares decimales.

25 $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

26 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1.2 & 4.1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 5.9 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

27 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 7 & 1.2 & -8 & 0 \\ 2.5 & 0 & 1.9 & 7.9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

28 $A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 5.5 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -11 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Ejer. 29–32: (a) Exprese el sistema en la forma de matriz $AX = B$. (b) Calcule A^{-1}, usando precisión a cuatro lugares decimales para sus elementos. (c) Use $X = A^{-1}B$ para calcular la solución del sistema a una precisión de cuatro lugares decimales.

29 $\begin{cases} 4.0x + 7.1y = 6.2 \\ 2.2x - 4.9y = 2.9 \end{cases}$

30 $\begin{cases} 1.9x - 3.2y = 5.7 \\ 2.6x + 0.4y = 3.8 \end{cases}$

31 $\begin{cases} 3.1x + 6.7y - 8.7z = 1.5 \\ 4.1x - 5.1y + 0.2z = 2.1 \\ 0.6x + 1.1y - 7.4z = 3.9 \end{cases}$

32 $\begin{cases} 5.1x + 8.7y + 2.5z = 1.1 \\ 9.9x + 15y + 12z = 3.8 \\ -4.3x - 2.2y - z = -7.1 \end{cases}$

33 **Promedio de temperaturas bajas** El promedio de tres temperaturas bajas mensuales para Detroit se dan en la tabla siguiente.

Mes	Temperatura
Feb.	19°F
Ago.	59°F
Nov.	26°F

(a) Haga que $x = 1$ corresponda a enero, $x = 2$ a febrero,…, y $x = 12$ a diciembre. Determine una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que interpole los datos, es decir, determine las constantes a, b y c tales que $f(2) = 19$, $f(8) = 59$ y $f(11) = 26$.

(b) Grafique f en la pantalla $[1, 12]$ por $[-15, 70, 5]$.

(c) Use f para calcular el promedio mensual de temperaturas bajas mensuales en junio y octubre. Compare sus predicciones con las temperaturas reales de 58°F y 41°F, respectivamente.

34 **Promedio de temperaturas bajas** Trabaje el Ejercicio 33 para Huron, Dakota del Sur. El promedio de temperaturas reales para junio y octubre son 58°F y 38°F, respectivamente.

Mes	Temperatura
Feb.	9°F
Jul.	60°F
Nov.	21°F

9.8 Determinantes

Asociado con cada matriz A existe un número llamado **determinante de A,** denotado por $|A|$. Esta notación no debe confundirse con el símbolo para el valor absoluto de un número real. Para evitar cualquier mal entendido, la expresión "det A" se usa a veces en lugar de $|A|$. Definiremos $|A|$ empezando con el caso en el que A tiene orden 1 y luego aumentando el orden uno por uno. Como veremos en la sección 9.9, estas definiciones aparecen de forma natural cuando se resuelvan ecuaciones lineales.

Si A es una matriz cuadrada de orden 1, entonces A tiene sólo un elemento. De este modo, $A = [a_{11}]$ y definimos $|A| = a_{11}$. Si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

y el determinante A está definido por

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Otra notación para $|A|$ se obtiene al sustituir los corchetes empleados para A con barras verticales, como sigue.

Definición del determinante de una matriz A de 2 × 2

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

EJEMPLO 1 **Hallar el determinante de una matriz de 2 × 2**

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Por definición,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (4)(-1) = -6 + 4 = -2.$$

Para ayudar a hallar determinantes para matrices cuadradas de orden $n > 1$, introducimos la siguiente terminología.

Definición de menores y cofactores

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden $n > 1$.

(1) El **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden $n - 1$ obtenida por la eliminación del renglón i y la columna j.

(2) El **cofactor** A_{ij} del elemento a_{ij} es $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Para determinar el menor de un elemento, borramos el renglón y la columna en la que aparece el elemento y luego hallamos el determinante de la matriz cuadrada resultante. Este proceso está demostrado en la siguiente ilustración, donde la eliminación de renglones y columnas en una matriz 3×3 está indicado con segmentos de recta horizontales y verticales, respectivamente.

Para obtener el cofactor de a_{ij} de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, encontramos el menor y lo multiplicamos por 1 o -1, dependiendo de si la suma de i y j es par o impar, respectivamente, como se demuestra en la ilustración.

ILUSTRACIÓN **Menores y cofactores**

Matriz	Menor	Cofactor
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$	$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$	$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$	$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}$

Para la matriz de la ilustración precedente, hay otros seis menores, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{31}, y M_{33}, que se pueden obtener de un modo semejante.

Otra forma de recordar el signo $(-1)^{i+j}$ asociado con el cofactor A_{ij} es considerar el siguiente estilo de tablero de signos más y menos:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2 **Hallar menores y cofactores**

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & 5 \end{bmatrix}$, encuentre M_{11}, M_{21}, M_{22}, A_{11}, A_{21}, y A_{22}.

SOLUCIÓN Borrando renglones y columnas apropiadas de A, obtenemos

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (-7)(0) = 10$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (-3)(5) - (-7)(3) = 6$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (-2)(3) = 11.$$

Para obtener los cofactores, ponemos prefijo a los menores correspondientes con los signos apropiados. Así, usando la definición de cofactor, tenemos

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (1)(10) = 10$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)(6) = -6$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (1)(11) = 11.$$

También podemos usar el estilo de tablero de signos más y menos para determinar los signos apropiados. ■

El determinante $|A|$ de una matriz cuadrada de orden 3 está definido como sigue.

Definición del determinante de una matriz A de 3×3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Como los cofactores $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$, y $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$, la definición precedente también se puede escribir como

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Si expresamos M_{11}, M_{12}, y M_{13} usando elementos de A y reacomodamos términos, obtenemos la siguiente fórmula para $|A|$:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

La definición de $|A|$ para una matriz cuadrada A de orden 3 muestra un patrón de multiplicar cada elemento del renglón 1 por su cofactor y luego sumar para hallar $|A|$. Este proceso se conoce como *expandir* $|A|$ *por el primer renglón*. Al ejecutar los cálculos, podemos demostrar que $|A|$ *se puede expandir de un modo semejante al usar cualquier renglón o columna*. Como ilustración, la expansión por la segunda columna es

$$\begin{aligned} |A| &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\left(+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right). \end{aligned}$$

Al aplicar la definición a determinantes en paréntesis, multiplicar como se indica y reacomodar los términos de la suma, podríamos llegar a la fórmula para $|A|$ en términos de los elementos de A. Del mismo modo, la expansión por el tercer renglón es

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Una vez más, podemos demostrar que este resultado concuerda con expansiones previas.

EJEMPLO 3 **Hallar el determinante de una matriz de 3 × 3**

Hállese $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Como el segundo renglón contiene un cero, expandiremos $|A|$ por ese renglón, porque entonces necesitamos evaluar sólo dos cofactores. Así,

$$|A| = (2)A_{21} + (5)A_{22} + (0)A_{23}.$$

Si usamos la definición de cofactores, tenemos

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -[(3)(-2) - (1)(1)] = 7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = [(-1)(-2) - (3)(1)] = -1.$$

En consecuencia

$$|A| = (2)(7) + (5)(-1) + (0)A_{23} = 14 - 5 + 0 = 9.$$ ■

Hallar el determinante de una matriz cuadrada con entradas de números reales es un trabajo sencillo con calculadora de gráficas. Primero introduzca la matriz A del ejemplo 3:

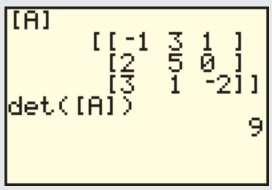
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora exhiba A y encuentre el determinante de

2nd MATRX 1 ENTER

2nd MATRX ▷ 1

2nd MATRX 1) ENTER



La siguiente definición del determinante de una matriz de orden arbitrario n se copia del orden para el determinante de una matriz de orden 3.

Definición del determinante de una matriz A de $n \times n$

El **determinante $|A|$ de una matriz A de orden n** es la expansión de cofactor por el primer renglón:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

En términos de menores,

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}.$$

El número $|A|$ se puede hallar si se usa *cualquier* renglón o columna, como se indica en el teorema siguiente.

Teorema de expansión de determinantes

Si A es una matriz cuadrada de orden $n > 1$, entonces el determinante $|A|$ se puede hallar si se multiplican los elementos de cualquier renglón (o columna) por sus respectivos cofactores y se suman los productos resultantes.

Este teorema es útil si aparecen muchos ceros en un renglón o columna, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 **Hallar el determinante de una matriz de 4 × 4**

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Note que, con excepción de uno, todos los elementos del tercer renglón son cero. En consecuencia, si expandimos $|A|$ por el tercer renglón, habrá a lo sumo un término diferente de cero. Específicamente,

$$|A| = (0)A_{31} + (0)A_{32} + (-3)A_{33} + (0)A_{34} = -3A_{33}$$

con $$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Expandimos M_{33} por la columna 1:

$$M_{33} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(3) - (-2)(5) + (0)(-5) = 3 + 10 + 0 = 13$$

Entonces, $$|A| = -3A_{33} = (-3)(13) = -39.$$ ■

En general, si todos los elementos de algún renglón (o columna) de A son cero, con excepción de uno, y si el determinante $|A|$ se expande por ese renglón (o columna), entonces todos los términos se omiten excepto el producto de ese elemento con su cofactor. Si *todos* los elementos de un renglón (o columna) son cero, tenemos lo siguiente.

Teorema sobre un renglón de ceros

Si todo elemento de un renglón (o columna) de una matriz cuadrada A es cero, entonces $|A| = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si todo elemento de un renglón (o columna) de una matriz cuadrada A es cero, entonces la expansión por ese renglón (o columna) es una suma de términos que son cero (porque cada término es cero veces su respectivo cofactor). En consecuencia, esta suma es igual a cero y concluimos que $|A| = 0$. ■

En la sección previa encontramos que si no pudiéramos obtener la matriz identidad en el lado izquierdo de la matriz, entonces la matriz original no era invertible. Si obtenemos un renglón de ceros en este proceso, ciertamente no podemos obtener la matriz identidad. La combinación de este hecho con el teorema anterior lleva al siguiente teorema.

Teorema sobre invertibilidad de una matriz

Si A es una matriz cuadrada, entonces A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

9.8 Ejercicios

Ejer. 1–4: Encuentre todos los menores y cofactores de los elementos de la matriz.

1 $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

Ejer. 5–8: Encuentre el determinante de la matriz del ejercicio dado.

5 Ejercicio 1

6 Ejercicio 2

7 Ejercicio 3

8 Ejercicio 4

Ejer. 9–24: Encuentre el determinante de la matriz.

9 $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

10 $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} a & -a \\ b & -b \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

18 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

20 $\begin{bmatrix} a & u & v & w \\ 0 & b & x & y \\ 0 & 0 & c & z \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

21 $\begin{bmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{bmatrix}$

24 $\begin{bmatrix} \tan x & \sec x \\ \sec^2 x & \sec x \tan x \end{bmatrix}$

Ejer. 25–32: Verifique la identidad al expandir cada determinante.

25 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$

26 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

27 $\begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

28 $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

29 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ka + c & kb + d \end{vmatrix}$

30 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ka + b \\ c & kc + d \end{vmatrix}$

31 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b + e \\ c & d + f \end{vmatrix}$

32 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + e & d + f \end{vmatrix}$

33 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n tal que $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Demuestre que $|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

34 Si $A = (a_{ij})$ es cualquier matriz de 2×2 tal que $|A| \neq 0$, demuestre que A tiene una inversa y encuentre una fórmula general para A^{-1}.

Ejer. 35–38: Sea $I = I_2$ la matriz identidad de orden 2 y sea $f(x) = |A - xI|$. Encuentre (a) el polinomio $f(x)$ y (b) los ceros de $f(x)$. (En el estudio de matrices, $f(x)$ es el *polinomio característico de A*, y los ceros de $f(x)$ son los *valores característicos (eigenvalores) de A*.)

35 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

36 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

37 $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

38 $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Ejer. 39–42: Sea $I = I_3$ y sea $f(x) = |A - xI|$. Encuentre (a) el polinomio $f(x)$ y (b) los ceros de $f(x)$.

39 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

40 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

41 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

42 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ejer. 43–46: Exprese el determinante de la forma $ai + bj + ck$ para números reales a, b y c.

43 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

44 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

45 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -6 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

46 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Ejer. 47–50: Encuentre el determinante de la matriz.

47 $\begin{bmatrix} 1 & -2.1 & 5 \\ -4 & 3.2 & 2 \\ 8 & 5.9 & -7 \end{bmatrix}$

48 $\begin{bmatrix} -2 & 5.5 & 8 \\ -0.3 & 8.5 & 7 \\ 4.9 & 6.7 & 11 \end{bmatrix}$

49 $\begin{bmatrix} 29 & -17 & 90 \\ -34 & 91 & -34 \\ 48 & 7 & 10 \end{bmatrix}$

50 $\begin{bmatrix} 15 & -21 & 32 \\ -40 & 17 & 9 \\ 30 & 25 & -11 \end{bmatrix}$

Ejer. 51–52: Sea $I = I_3$ y sea $f(x) = |A - xI|$. (a) Encuentre el polinomio $f(x)$. (b) Grafique f y calcule los valores característicos de A.

51 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

52 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

9.9 Propiedades de determinantes

La evaluación de un determinante mediante el uso del teorema de expansión expresado en la sección 9.8 es ineficiente para matrices de orden superior. Por ejemplo, si un determinante de una matriz de orden 10 es expandido por cualquier renglón, se obtiene una suma de 10 términos y cada término contiene el determinante de una matriz de orden 9, que es un cofactor de la matriz original. Si cualquiera de los determinantes últimos es expandido por un renglón (o columna) se obtiene una suma de 9 términos, cada uno de los cuales contiene el determinante de una matriz de orden 8. En consecuencia, en esta etapa hay 90 determinantes de matrices de orden 8 para evaluar. El proceso podría continuarse hasta que sólo queden determinantes de matrices de orden 2. Usted

puede verificar que hay 1 814 400 de estas matrices de orden 2. A menos que sean cero muchos elementos de la matriz original, es un trabajo enorme realizar todos los cálculos.

En esta sección estudiamos reglas que simplifican el proceso de evaluar determinantes. El principal uso para estas reglas es introducir ceros en el determinante. También se pueden usar para cambiar el determinante a **forma escalonada**, es decir, a una forma en la que los elementos que estén debajo de los elementos de la diagonal principal sean cero todos ellos (vea la sección 9.5). Las transformaciones en renglones expresadas en el siguiente teorema son iguales que las transformaciones elementales de renglón de una matriz introducidas en la sección 9.5, pero para determinantes podemos también usar transformaciones similares en columnas.

Teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

(1) Si una matriz B se obtiene de A al intercambiar dos renglones (o columnas), entonces $|B| = -|A|$.

(2) Si B se obtiene de A al multiplicar todo elemento de un renglón (o columna) de A por un número real k, entonces $|B| = k|A|$.

(3) Si B se obtiene de A al sumar k veces cualquier renglón (o columna) de A a otro renglón (o columna) para un número real k, entonces $|B| = |A|$ es decir, los determinantes de B y A son iguales.

Cuando usamos el teorema, nos referimos a los renglones (o columnas) del *determinante* en la forma obvia. Por ejemplo, la propiedad 3 se puede expresar como sigue: *La suma de k veces cualquier renglón (o columna) a cualquier renglón (o columna) de un determinante no afecta el valor del determinante.*

Las transformaciones de renglón de determinantes estarán especificadas por medio de los símbolos $R_i \leftrightarrow R_j$, $kR_i \to R_i$ y $kR_i + R_j \to R_j$, que se introdujeron en la sección 9.5. Se usan símbolos análogos para transformaciones de columna. Por ejemplo, $kC_i + C_j \to C_j$ significa "sumar k veces la i-ésima columna a la j-ésima columna."

La propiedad 2 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna es útil para hallar factores de determinantes. Para ilustrar, para un determinante de una matriz de orden 3 tenemos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Fórmulas similares se cumplen si k es un factor común de los elementos de cualquier otro renglón o columna. Al referirnos a esta manipulación, a veces usamos la frase *k es un factor común del renglón (o columna).*

Las siguientes son ilustraciones del teorema precedente, con la razón para cada igualdad expresada a la derecha.

ILUSTRACIÓN **Transformación de determinantes**

■ $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad R_1 \leftrightarrow R_2 \text{ (propiedad 1)}$$

(continúa)

■ $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 2 es un factor común de la columna 1 (propiedad 2)

■ $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ $2C_2 + C_1 \to C_1$ (propiedad 3)

■ $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 10 & -6 \end{vmatrix}$ $-2R_1 + R_2 \to R_2$, $-3R_1 + R_3 \to R_3$ (propiedad 3 aplicada dos veces)

Teorema sobre renglones idénticos

Si dos renglones (o columnas) de una matriz cuadrada A son idénticos, entonces $|A| = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si B es la matriz obtenida de A al intercambiar los dos renglones (o columnas) idénticos, entonces B y A son iguales y, en consecuencia, $|B| = |A|$. No obstante, por la propiedad 1 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante, $|B| = -|A|$ y por lo tanto $-|A| = |A|$. Así, $2|A| = 0$ y entonces $|A| = 0$. ■

EJEMPLO 1 **Usar transformaciones de renglón y columna**

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Planeamos usar la propiedad 3 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante para introducir tres ceros en algún renglón o columna. Es conveniente trabajar con un elemento de la matriz que sea igual a 1, porque esto hace posible que evitemos el uso de fracciones. Si 1 no es un elemento de la matriz original, es siempre posible introducir el número 1 al usar la propiedad 2 o 3 del teorema. En este ejemplo, 1 aparece en el renglón 3 y procedemos como sigue, con la razón para cada igualdad expresada a la derecha.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} -2R_3 + R_1 \to R_1 \\ 3R_3 + R_4 \to R_4 \end{matrix}$$

$$= (1)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{expandir por la primera columna}$$

$$= \begin{vmatrix} 23 & 4 & 22 \\ 0 & -1 & 0 \\ -28 & -6 & -32 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} 5C_2 + C_1 \to C_1 \\ 6C_2 + C_3 \to C_3 \end{matrix}$$

(continúa)

$$= (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 23 & 22 \\ -28 & -32 \end{vmatrix} \quad \text{expanda por el segundo renglón}$$

$$= (-1)[(23)(-32) - (-28)(22)] \quad \text{definición de determinante}$$

$$= 120$$

■

Los siguientes dos ejemplos ilustran el uso de la propiedad 2 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante.

EJEMPLO 2 **Remover factores comunes de renglones**

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 14 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{2 es un factor común del renglón 1}$$

$$= (2)(-3) \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad -3 \text{ es un factor del renglón 3}$$

$$= 0 \quad \text{Dos renglones son idénticos}$$

■

EJEMPLO 3 **Remover un factor común de una columna**

Sin expandir, demuestre que $a - b$ es un factor de $|A|$ si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad -C_2 + C_1 \to C_1$$

$$= (a-b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ a+b & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad a - b \text{ es un factor común de la columna 1}$$

Por lo tanto, $|A|$ es igual a $a - b$ por el último determinante, y entonces $a - b$ es un factor de $|A|$. ■

Aparecen determinantes en el estudio de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Para ilustrar, consideremos dos ecuaciones lineales con dos variables x y y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

donde aparece al menos un coeficiente diferente de cero en cada ecuación. Podemos suponer que $a_{11} \neq 0$, porque de otro modo $a_{12} \neq 0$ y podríamos entonces ver a y como la primera variable en lugar de x. Usaremos transformaciones elementales de renglón para obtener la matriz de un sistema equivalente con $a_{21} = 0$, como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{a_{21}}{a_{11}}R_1 + R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & a_{22} - \left(\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right) & k_2 - \left(\frac{a_{21}k_1}{a_{11}}\right) \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{a_{11}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) & (a_{11}k_2 - a_{21}k_1) \end{array}\right]$$

Así, el sistema dado es equivalente a

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}k_2 - a_{21}k_1 \end{cases}$$

que también se puede escribir

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, podemos despejar y de la segunda ecuación y obtener

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

El valor correspondiente para x se puede hallar al sustituir por y en la primera ecuación, que lleva a

La demostración de este enunciado se deja como ejercicio de análisis 7 al final del capítulo.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (*)$$

Esto demuestra que *si el determinante de la matriz coeficiente de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables no es cero, entonces el sistema tiene una solución única.* Las últimas dos fórmulas para x y y como cocientes de determinantes constituyen la **regla de Cramer** para dos variables.

Hay una forma sencilla de recordar la regla de Cramer. Sea

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

la matriz coeficiente del sistema, y denotemos con D_x la matriz obtenida de D al sustituir los coeficientes a_{11}, a_{21} de x por los números k_1, k_2, respectivamente. Del mismo modo, denotemos con D_y la matriz obtenida de D al sustituir los coeficientes a_{12}, a_{22} de y por los números k_1, k_2, respectivamente. Entonces,

$$D_x = \begin{bmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{bmatrix}.$$

Si $|D| \neq 0$, la solución (x, y) está dada por las fórmulas siguientes.

Regla de Cramer para dos variables

$$x = \frac{|D_x|}{|D|}, \quad y = \frac{|D_y|}{|D|}$$

EJEMPLO 4 Usar la regla de Cramer para resolver un sistema con dos ecuaciones lineales

Use la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN El determinante de la matriz coeficiente es

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 29.$$

Usando la notación introducida previamente, tenemos

$$|D_x| = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -25, \qquad |D_y| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 22.$$

Por lo tanto, $$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-25}{29}, \qquad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{22}{29}.$$

Entonces, el sistema tiene la solución única $\left(-\frac{25}{29}, \frac{22}{29}\right)$. ■

La regla de Cramer se puede extender a sistemas de n ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde la i-ésima ecuación tiene la forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = k_i.$$

Para resolver tal sistema, denotemos con D la matriz coeficiente y denotemos con D_{xj} la matriz obtenida al cambiar los coeficientes de x_j en D por los números $k_1, \ldots, k_n$ que aparecen en la columna de la derecha de los signos igual del sistema. Si $|D| \neq 0$, entonces el sistema tiene la siguiente solución única.

Regla de Cramer (forma general)

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|}, \quad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}$$

EJEMPLO 5 Usar la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales

Use la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} x \phantom{{}-y} - 2z = 3 \\ - y + 3z = 1 \\ 2x \phantom{{}-y} + 5z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Haremos una lista de varios determinantes. El lector puede comprobar los resultados.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -9, \quad |D_x| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 27, \quad |D_z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Por la regla de Cramer, la solución es

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{27}{-9} = -3, \quad z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}.$$

■

La regla de Cramer es un método ineficiente de aplicar si el sistema tiene un número grande de ecuaciones, porque deben evaluarse muchos determinantes de matrices de orden superior. Note también que la regla de Cramer no se puede usar en forma directa si $|D| = 0$ o si el número de ecuaciones no es igual al número de variables. Para cálculos numéricos, el método inverso y el método de matriz son superiores a la regla de Cramer, pero la formulación de la regla de Cramer es teóricamente útil.

9.9 Ejercicios

Ejer. 1–16: Sin expandir, explique por qué el enunciado es verdadero.

1 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

3 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

4 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

8 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

9 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

10 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

11 $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

12 $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

13 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

14 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

15 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

16 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

Ejer. 17–28: Encuentre el determinante de la matriz después de introducir ceros, como en el ejemplo 1.

17 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ \pi & a & 5 \end{bmatrix}$

18 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ e & 7 & x \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

20 $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

21 $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

24 $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

26 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

27 $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

28 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

29 Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a).$$

(*Sugerencia:* vea el ejemplo 3.)

30 Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).$$

31 Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix},$$

demuestre que $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

32 Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{bmatrix},$$

demuestre que

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

33 Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices cuadradas arbitrarias de orden 2, demuestre que $|AB| = |A||B|$.

34 Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n y k es cualquier número real, demuestre que $|kA| = k^n|A|$. (*Sugerencia:* use la propiedad 2 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante.)

35 Use propiedades de determinantes para demostrar que lo siguiente es una ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

36 Use propiedades de determinantes para demostrar que lo siguiente es una ecuación de una recta que pasa por tres puntos no colineales (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3):

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejer. 37–46: Use la regla de Cramer, siempre que sea aplicable, para resolver el sistema.

37 $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

38 $\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$

39 $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 7y = 24 \end{cases}$

40 $\begin{cases} 7x - 8y = 9 \\ 4x + 3y = -10 \end{cases}$

41 $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$

42 $\begin{cases} 3p - q = 7 \\ -12p + 4q = 3 \end{cases}$

43 $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$

44 $\begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

45 $\begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$

46 $\begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$

47 Use la regla de Cramer para despejar x del sistema.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fz = g \\ hx + iy = j \end{cases}$$

9.10 Fracciones parciales

En esta sección demostramos la forma en que se pueden usar sistemas de ecuaciones para ayudar a descomponer expresiones racionales en sumas de expresiones más sencillas. Esta técnica es útil en cursos de matemáticas avanzadas.

Podemos verificar que

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1}$$

al sumar las fracciones $1/(x - 1)$ y $-1/(x + 1)$ para obtener $2/(x^2 - 1)$. La expresión del lado derecho de esta ecuación se denomina *descomposición de fracción parcial* de $2/(x^2 - 1)$.

Es teóricamente posible escribir *cualquier* expresión racional como suma de expresiones racionales cuyos denominadores contienen potencias de polinomios de grado no mayor a dos. Específicamente, si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios *y el grado de* $f(x)$ *es menor que el grado de* $g(x)$, se puede demostrar que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F_1 + F_2 + \cdots + F_r$$

tal que F_k tiene una de las formas

$$\frac{A}{(px + q)^m} \quad \text{o} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

donde A y B son números reales, m y n son enteros no negativos y el polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$ (esto es, no tiene cero real). La suma $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ es la **descomposición de fracción parcial** de $f(x)/g(x)$, y cada F_k es una **fracción parcial.**

Para hallar la descomposición de fracción parcial de $f(x)/g(x)$, *es esencial que* $f(x)$ *tenga menor grado que* $g(x)$. Si éste no es el caso, podemos usar división larga para obtener tal expresión. Por ejemplo, dada

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1},$$

obtenemos

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} = x - 6 + \frac{6x - 9}{x^2 - 1}.$$

Entonces hallamos la descomposición de fracción parcial de $(6x - 9)/(x^2 - 1)$.

Las siguientes directrices se pueden usar para obtener descomposiciones.

Directrices para hallar descomposiciones de fracción parcial de $f(x)/g(x)$

1. Si el grado del numerador $f(x)$ no es menor al grado del denominador $g(x)$, use división larga para obtener la forma apropiada.
2. Factorice el denominador $g(x)$ en un producto de factores lineales $px + q$ o factores cuadráticos irreducibles $ax^2 + bx + c$, y recolecte factores repetidos para que $g(x)$ sea un producto de factores *diferentes* de la forma $(px + q)^m$ o $(ax^2 + bx + c)^n$ para un entero no negativo m o n.
3. Aplique las reglas siguientes a factores hallados en la directriz 2.

   Regla A: para cada factor de la forma $(px + q)^m$ con $m \geq 1$, la descomposición de fracción parcial contiene una suma de m fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{px + q} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px + q)^m},$$

   donde cada numerador A_k es un número real.

   Regla B: para cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$ con $n \geq 1$ y $ax^2 + bx + c$ irreducible, la descomposición de fracción parcial contiene una suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

   donde cada A_k y cada B_k es un número real.
4. Encontrar los números A_k y B_k en la directriz 3.

Aplicaremos las directrices precedentes en los ejemplos siguientes. Por conveniencia, usaremos las variables *A, B, C* y así sucesivamente, en lugar de variables con subíndice A_k y B_k dadas en las directrices.

EJEMPLO 1 **Una descomposición de fracción parcial en la que cada denominador es lineal**

Encuentre la descomposición de fracción parcial de

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}.$$

SOLUCIÓN

Directriz 1 El grado del numerador, 2, es menor que el grado del denominador, 3, de modo que no se requiere división larga.

Directriz 2 Factorizamos el denominador:

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x + 3)(x - 1)$$

Directriz 3 Cada factor del denominador tiene la forma expresada en la Regla A con $m = 1$. Así, para el factor x corresponde una fracción parcial de la forma A/x. Del mismo modo, para los factores $x + 3$ y $x - 1$ corresponden fraccio-

nes parciales de la forma $B/(x + 3)$ y $C/x - 1)$, respectivamente. La descomposición de fracción parcial tiene la forma

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1}.$$

Directriz 4 Encontramos los valores de A, B y C en la directriz 3. La multiplicación de ambos lados de la descomposición de fracción parcial por el mínimo común denominador, $x(x + 3)(x - 1)$, nos da

$$\begin{aligned} 4x^2 + 13x - 9 &= A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3) \\ &= A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 3x) \\ &= (A + B + C)x^2 + (2A - B + 3C)x - 3A. \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias semejantes de x en cada lado de la última ecuación, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ 2A - B + 3C = 13 \\ -3A = -9 \end{cases}$$

Usando los métodos de la sección 9.5 tendremos la solución $A = 3$, $B = -1$ y $C = 2$. En consecuencia, la descomposición de fracción parcial es

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x + 3)(x - 1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x + 3} + \frac{2}{x - 1}.$$

Hay una forma alternativa para hallar A, B y C si todos los factores del denominador son lineales y no repetidos, como en este ejemplo. En lugar de igualar coeficientes y usar un sistema de ecuaciones, empezamos con la ecuación

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3).$$

A continuación sustituimos valores por x que hagan que los factores x, $x - 1$ y $x + 3$ sean iguales a cero. Si hacemos $x = 0$ y simplificamos, obtenemos

$$-9 = -3A, \qquad \text{o bien} \qquad A = 3.$$

Hacer $x = 1$ en la ecuación nos lleva a $8 = 4C$, o $C = 2$. Por último, si $x = -3$, entonces tenemos $-12 = 12B$ o sea $B = -1$. ■

EJEMPLO 2 **Una descomposición de fracción parcial que contiene un factor lineal repetido**

Encuentre la descomposición de fracción parcial de

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2}.$$

SOLUCIÓN

Directriz 1 El grado del numerador, 2, es menor que el grado del denominador, 3, de modo que no se requiere división larga.

Directriz 2 El denominador, $x(x - 3)^2$, ya está en forma factorizada.

Directriz 3 Por la Regla A con $m = 1$, hay una fracción parcial de la forma A/x correspondiente al factor x. A continuación, aplicando la Regla A con $m = 2$, encontramos que el factor $(x - 3)^2$ determina una suma de dos fracciones parciales de la forma $B/(x - 3)$ y $C/(x - 3)^2$. Así, la descomposición de fracción parcial tiene la forma

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2}.$$

Directriz 4 Para hallar A, B y C, empezamos por multiplicar ambos lados de la descomposición de fracción parcial de la directriz 3 por el mínimo común denominador, $x(x - 3)^2$:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 36 &= A(x - 3)^2 + Bx(x - 3) + Cx \\ &= A(x^2 - 6x + 9) + B(x^2 - 3x) + Cx \\ &= (A + B)x^2 + (-6A - 3B + C)x + 9A \end{aligned}$$

A continuación igualamos los coeficientes de potencias semejantes de x, obteniendo el sistema

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -6A - 3B + C = 10 \\ 9A = -36 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la solución $A = -4$, $B = 5$ y $C = 1$. La descomposición de fracción parcial es por lo tanto

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2} = \frac{-4}{x} + \frac{5}{x - 3} + \frac{1}{(x - 3)^2}.$$

Como en el ejemplo 1, podríamos también obtener A y C si empezamos con la ecuación

$$x^2 + 10x - 36 = A(x - 3)^2 + Bx(x - 3) + Cx$$

y luego sustituyendo valores por x que hagan que los factores $x - 3$ y x sean iguales a cero. Entonces, haciendo $x = 3$, obtenemos $3 = 3C$ o sea $C = 1$. Si hacemos $x = 0$, tendremos $-36 = 9A$ o sea $A = -4$. El valor de B se puede hallar entonces usando una de las ecuaciones del sistema. ■

EJEMPLO 3 **Una descomposición de fracción parcial que contiene un factor cuadrático irreducible**

Encuentre la descomposición de fracción parcial de

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

SOLUCIÓN

Directriz 1 El grado del numerador, 3, es *igual* al grado del denominador. Así, se requiere división larga y obtenemos

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

Directriz 2 El denominador puede factorizarse por agrupación, como sigue:

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 = x^2(2x - 1) + 4(2x - 1) = (x^2 + 4)(2x - 1)$$

Directriz 3 Aplicando la regla B al factor cuadrático irreducible $x^2 + 4$ de la directriz 2, vemos que una fracción parcial tiene la forma $(Ax + B)/(x^2 + 4)$. Por la regla A, también hay una fracción parcial $C/(2x - 1)$ correspondiente a $2x - 1$. En consecuencia,

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}.$$

Directriz 4 Al multiplicar ambos lados de la descomposición de fracción parcial en la directriz 3 por el mínimo común denominador, $(x^2 + 4)(2x - 1)$, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 - x - 21 &= (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4) \\ &= 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + Cx^2 + 4C \\ &= (2A + C)x^2 + (-A + 2B)x - B + 4C. \end{aligned}$$

Esto nos lleva al sistema

$$\begin{cases} 2A + C = 1 \\ -A + 2B = -1 \\ - B + 4C = -21 \end{cases}$$

Este sistema tiene la solución $A = 3$, $B = 1$ y $C = -5$. Entonces, la descomposición de fracción parcial de la directriz 3 es

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1},$$

y por lo tanto la descomposición de la expresión dada (vea directriz 1) es

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}.$$

■

EJEMPLO 4 **Una descomposición de fracción parcial que contiene un factor cuadrático repetido**

Encuentre la descomposición de fracción parcial de

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2}.$$

SOLUCIÓN

Directriz 1 El grado del numerador, 3, es menor que el grado del denominador, 4, de modo que no se requiere división larga.

Directriz 2 El denominador, $(x^2 + 1)^2$, ya está en forma factorizada.

Directriz 3 Aplicamos la regla B con $n = 2$ a $(x^2 + 1)^2$, para obtener la descomposición de fracción parcial

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}.$$

Directriz 4 La multiplicación de ambos lados de la descomposición de la directriz 3 por $(x^2 + 1)^2$ nos da

$$\begin{aligned} 5x^3 - 3x^2 + 7x - 3 &= (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D). \end{aligned}$$

Si comparamos los coeficientes de x^3 y x^2, obtenemos $A = 5$ y $B = -3$. De los coeficientes de x, vemos que $A + C = 7$. Así, $C = 7 - A = 7 - 5 = 2$. Por último, comparando los términos constantes tendremos la ecuación $B + D = -3$, y entonces $D = -3 - B = -3 - (-3) = 0$. Por lo tanto, la descomposición de fracción parcial es

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x - 3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$ ■

9.10 Ejercicios

Ejer. 1–30: Encuentre la descomposición de fracción parcial.

1 $\frac{8x - 1}{(x - 2)(x + 3)}$

2 $\frac{x - 29}{(x - 4)(x + 1)}$

3 $\frac{x + 34}{x^2 - 4x - 12}$

4 $\frac{5x - 12}{x^2 - 4x}$

5 $\frac{4x^2 - 15x - 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}$

6 $\frac{x^2 + 19x + 20}{x(x + 2)(x - 5)}$

7 $\frac{4x^2 - 5x - 15}{x^3 - 4x^2 - 5x}$

8 $\frac{37 - 11x}{(x + 1)(x^2 - 5x + 6)}$

9 $\frac{2x + 3}{(x - 1)^2}$

10 $\frac{5x^2 - 4}{x^2(x + 2)}$

11 $\frac{19x^2 + 50x - 25}{3x^3 - 5x^2}$

12 $\frac{10 - x}{x^2 + 10x + 25}$

13 $\frac{x^2 - 6}{(x + 2)^2(2x - 1)}$

14 $\frac{2x^2 + x}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$

15 $\frac{3x^3 + 11x^2 + 16x + 5}{x(x + 1)^3}$

16 $\frac{4x^3 + 3x^2 + 5x - 2}{x^3(x + 2)}$

17 $\frac{x^2 + x - 6}{(x^2 + 1)(x - 1)}$

18 $\frac{x^2 - x - 21}{(x^2 + 4)(2x - 1)}$

19 $\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 + 2x}$

20 $\frac{5x^2 - x + 12}{x^3 + 4x}$

21 $\frac{3x^3 - 4x^2 + 3x - 3}{x^4 + 3x^2}$

22 $\frac{2x^3 + 2x^2 + 4x - 3}{x^4 + x^2}$

23 $\frac{4x^3 - x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 1)^2}$

24 $\frac{3x^3 + 13x - 1}{(x^2 + 4)^2}$

25 $\frac{2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

26 $\frac{x^3}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}$

27 $\frac{3x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

28 $\frac{2x^2 + 7x}{x^2 + 6x + 9}$

29 $\frac{4x^3 + 4x^2 - 4x + 2}{2x^2 - x - 1}$

30 $\frac{x^5 - 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 4x + 12}{x^3 - 3x^2}$

CAPÍTULO 9 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–16: Resuelva el sistema.

1 $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y + 4 = x^2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 = 140 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x = y^2 + 3z \\ x = y^2 + z - 1 \\ x^2 = xz \end{cases}$

7 $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 7 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{y} = 1 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2^x + 3^{y+1} = 10 \\ 2^{x+1} - 3^y = 5 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 4x + 5y - z = -2 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y - 5z = 3 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 4x - 3y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = 17 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

15 $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 4 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x - y + 3z - w = -3 \\ 3x + 2y - z + w = 13 \\ x - 3y + z - 2w = -4 \\ -x + y + 4z + 3w = 0 \end{cases}$

Ejer. 17–20: Trace la gráfica del sistema.

17 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ y - x^2 > 0 \end{cases}$

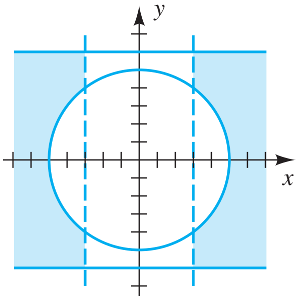
18 $\begin{cases} y - x \leq 0 \\ y + x \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$

19 $\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ y - 3x \leq 4 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$

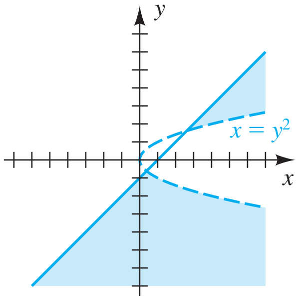
20 $\begin{cases} x^2 - y < 0 \\ y - 2x < 5 \\ xy < 0 \end{cases}$

Ejer. 21–22: Encuentre un sistema de desigualdades cuya gráfica se muestra.

21



22



Ejer. 23–32: Exprese como una sola matriz.

23 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

24 $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

26 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

27 $2\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

28 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

29 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

30 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

31 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right)$

32 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Ejer. 33–36: Encuentre la inversa de la matriz.

33 $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

34 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

35 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

36 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

37 Use el resultado del Ejercicio 33 para resolver el sistema

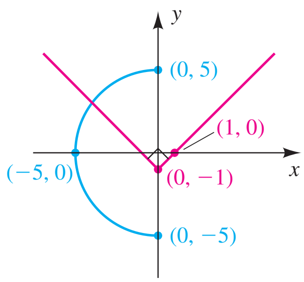
$$\begin{cases} 5x - 4y = 30 \\ -3x + 2y = -16 \end{cases}$$

38 Use el resultado del Ejercicio 34 para resolver el sistema

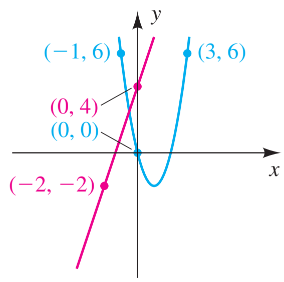
$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ x + 4y + 2z = 15 \\ 3x - 2y + z = -7 \end{cases}$$

Ejer. 39–40: Encuentre todos los puntos de intersección de las curvas.

39



40



Ejer. 41–48: Encuentre el determinante de la matriz.

41 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$

42 $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

43 $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

44 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

45 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

46 $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

47 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

48 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Ejer. 49–50: Resuelva la ecuación $|A - xI| = 0$.

49 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad I = I_2$

50 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad I = I_3$

Ejer. 51–52: Sin expandir, explique por qué el enunciado es verdadero.

51 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

52 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ a & b & c \end{vmatrix}$

53 Encuentre el determinante de la matriz $n \times n$ (a_{ij}) en la que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

54 Sin expandir, demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

Ejer. 55–56: Use la regla de Cramer para resolver el sistema.

55 $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$

56 $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$

Ejer. 57–60: Encuentre la descomposición de fracción parcial.

57 $\dfrac{4x^2 + 54x + 134}{(x+3)(x^2+4x-5)}$

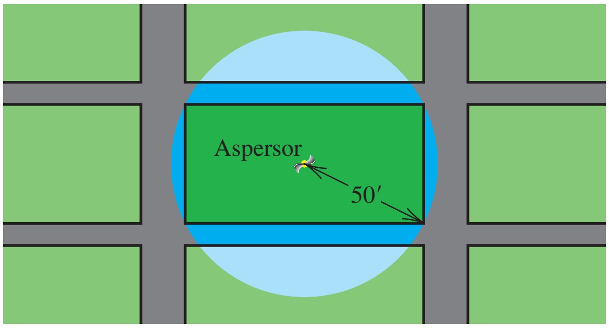
58 $\dfrac{2x^2 + 7x + 9}{x^2 + 2x + 1}$

59 $\dfrac{x^2 + 14x - 13}{x^3 + 5x^2 + 4x + 20}$

60 $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 16}{x^4 + 7x^2 + 10}$

61 **Regar un campo** La cabeza giratoria de un aspersor con alcance de 50 pies se ha de colocar en el centro de un campo rectangular (vea la figura). Si el área del campo es de 4000 ft^2 y el agua debe llegar justo a las esquinas, encuentre las dimensiones del campo.

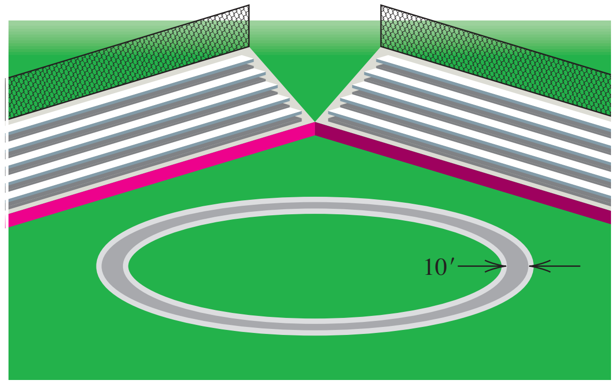
EJERCICIO 61



62 Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y pasan por el punto (0, 3). (*Sugerencia:* sea $y = mx + 3$, y determine las condiciones en m que aseguren que el sistema tenga sólo una solución.)

63 **Dimensiones de una vía** Una vía circular ha de tener una pista de carreras de 10 pies de ancho alrededor del exterior (vea la figura). La distancia interior alrededor de la pista debe ser 90% de la distancia exterior. Encuentre las dimensiones de la pista.

EJERCICIO 63



64 **Contabilidad de nómina** Un contador debe pagar impuestas y bonos de nómina a empleados, tomando parte de las utilidades de \$2 000 000 de la empresa. El impuesto total es 40% de la cantidad restante después de pagar bonos, y el total pagado en bonos es 10% de la cantidad restante después de impuestos. Encuentre el total de impuestos y la cantidad total en bonos.

65 **Remar en un bote** Una mujer rema en un bote 1.75 millas aguas arriba en contra de una corriente constante en 35 minutos. A continuación, lo lleva la misma distancia aguas abajo (con la misma corriente) en 15 minutos. Determine la velocidad de la corriente y la rapidez equivalente a la que se puede remar en aguas tranquilas.

66 **Hacer una mezcla de frutas secas** Un comerciante desea mezclar cacahuates con costo de \$1.85 por libra con pasas a un costo de \$1.30 por libra para obtener 55 libras de una mezcla con un costo de \$1.55 por libra. ¿Cuántas libras de cada ingrediente debe mezclar?

67 **Viaje en el Concorde** Supongamos que un Concorde, volando con un viento de cola, podría hacer el viaje de 3470 millas desde Nueva York a Londres en 2.5 horas. El viaje de regreso, contra el viento, es de 2.75 horas. Calcule, con una aproximación a la milla por hora más cercana, la velocidad de crucero del avión y la velocidad del viento (suponemos que las velocidades son constantes).

68 **Caudales** Tres tubos de entrada, A, B y C, se pueden usar para llenar un tanque de almacenamiento de agua de 1000 ft^3. Cuando los tres tubos están en operación, el tanque se puede llenar en 10 horas; cuando sólo se usan los tubos A y B, el tiempo aumenta a 20 horas. Con los tubos A y C, el tanque se puede llenar en 12.5 horas. Encuentre los caudales individuales (en ft^3/hr) de cada uno de los tres tubos.

69 **Cargos por envío desde un almacén** Para despachar un pedido de 150 escritorios para oficina, un distribuidor de muebles debe enviar los escritorios desde dos almacenes. El costo de envío por escritorio es \$48 del almacén poniente y \$70 del almacén oriente. Si el costo total de envío es \$8410, ¿cuántos escritorios se envían desde cada ubicación?

70 **Tarifas de correo express** Una empresa de correo exprés hace un cargo de \$25 por entregar una carta de un día al siguiente, siempre que las dimensiones del sobre estándar satisfagan las siguientes tres condiciones: (a) la longitud, la mayor de las dos dimensiones, debe ser 12 pulgadas a lo sumo; (b) el ancho debe ser 8 pulgadas a lo sumo; (c) el ancho debe ser al menos la mitad de la longitud. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para las dimensiones de un sobre estándar.

71 **Actividades de un venado** Un venado pasa el día en tres actividades básicas: descansar, buscar alimento y pastar. Al menos 6 horas de cada día debe pasar descansando, y el número de horas que utilice en buscar alimento será al menos el doble de las horas empleadas en pastar. Usando x como el número de horas empleadas en busca de alimento y y como el número de horas empleadas en pastar, encuentre y grafique el sistema de desigualdades que describa las posibles divisiones del día.

72 **Programación de producción** Una empresa manufactura una podadora y una cortadora eléctrica. Estos dos productos son de una calidad tan alta que la compañía puede vender todos los productos que haga, pero la capacidad de producción es limitada en áreas como maquinado, soldadura y ensamble. Cada semana, la compañía dispone de 600 horas para maquinado, 300 para soldadura y 550 horas para ensamble. El número de horas necesarias para la producción de un solo artículo se muestra en la tabla siguiente. Las utilidades por la venta de una podadora y una cortadora son \$100 y \$80, respectivamente. ¿Cuántas podadoras y cortadoras deben hacerse cada semana para maximizar la utilidad?

Producto	Maquinado	Soldadura	Ensamble
Podadora	6	2	5
Cortadora	4	3	5

73 **Maximizar ingreso por inversiones** Un matrimonio de jubilados desea invertir \$750 000, diversificando la inversión en tres áreas: una acción de alto riesgo que tiene una tasa anual esperada de rendimiento (o interés) de 12%, una acción de bajo riesgo que tiene un rendimiento anual esperado de 8%, y bonos emitidos por el gobierno que pagan un interés anual de 4% y no tienen riesgo. Para proteger el valor de la inversión, la pareja desea poner al menos dos veces la cantidad de la acción de bajo riesgo que en la acción de alto riesgo y usar el resto para comprar bonos. ¿Cómo deben invertir el dinero para maximizar el rendimiento anual esperado?

CAPÍTULO 9 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 **(a)** Es fácil ver que el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

no tiene solución. Sea $x + by = 5$ la segunda ecuación y del sistema despeje $b = 1.99$ y $b = 1.999$. Note que un pequeño cambio en b produce un gran cambio en x y y. Tal sistema se conoce como *sistema mal acondicionado* (una definición precisa se da en casi todos los textos de análisis numérico).

(b) De este sistema despeje x y y en términos de b, y explique por qué un pequeño cambio en b (para b cercano a 2) produce un gran cambio en x y y.

(c) Si b se hace muy grande, ¿qué le ocurre a la solución del sistema?

2 **Tendencias de migración de aves** Consulte el ejercicio 32 de la sección 9.5. Suponga que las poblaciones iniciales de aves en las islas A, B y C son 12 000, 9000 y 14 000, respectivamente.

(a) Represente las poblaciones iniciales con una matriz D de 1×3. Represente las proporciones de las poblaciones que migran a cada isla con una matriz E de 3×3. (*Sugerencia:* el primer renglón de E es 0.90, 0.10 y 0.00, lo cual indica que 90% de las aves en A se quedan en A, 10% de las aves en A migran a B y ninguna de las aves en A migran a C.)

(b) Encuentre el producto $F = DE$ e interprete el significado de los elementos de F.

(c) Usando calculadora, multiplique F por E y continúe para multiplicar el resultado por E hasta que aparezca un patrón. ¿Cuál es su conclusión?

(d) Suponga que la matriz D inicial de población es igual a $[34\,000 \quad 500 \quad 500]$. Multiplique D por E y continúe para multiplicar el resultado por E hasta que aparezca un patrón. ¿Cuál es su conclusión?

3 Explique por qué una matriz no cuadrada A no puede tener una inversa.

4 **Distribución de dinero** El director de una universidad ha recibido presupuestos del director de deportes (AD), del decano de estudiantes (DS) y del director del senado estudiantil (SP), en el que proponen asignar fondos departamentales a las tres áreas básicas de becas, actividades y servicios para estudiantes como se muestra en la tabla.

	Becas	Actividades	Servicios
AD	50%	40%	10%
DS	30%	20%	50%
SP	20%	40%	40%

El Consejo de Administración ha solicitado que toda la distribución de fondos para estas tres áreas quede en las proporciones siguientes: becas, 34%; actividades, 33% y servicios, 33%. Determine qué porcentaje del total de fondos debe asignar el director a cada departamento, para que los porcentajes gastados en estas tres áreas se ajusten a las necesidades del Consejo de Administración.

5 Si $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces $x = -1$, 2 y 3, encuentre a, b, c y la raíz cuarta de la ecuación.

6 **Explorar un cubo** Use el método de la inversa para hallar una ecuación del cubo que pasa por los puntos $(-6, -6)$, $(-4, 3)$, $(2, 2)$ y $(6, 6)$. Ahora sustituya el punto $(-4, 3)$ con $(-4, y)$, donde y toma varios valores positivos y negativos, y encuentre la ecuación que pasa por esos puntos. ¿Qué observación general puede hacer el lector acerca del aspecto de la gráfica y los coeficientes de su ecuación cuando el valor de y se hace grande positivo o grande negativo? *Sugerencia:* para facilitar este proceso, asigne

$$[C](1, 1)x^3 + [C](2, 1)x^2 + [C](3, 1)x + [C](4, 1)$$

a Y_1, donde $[C] = [A]^{-1} * [B]$.

7 Demuestre (*) de la página 661.

8 Encuentre, si posible, una ecuación de

(a) una recta

(b) una circunferencia

(c) una parábola con eje vertical

(d) una cúbica

(e) una exponencial

que pase por los tres puntos $P(-1, 3)$, $Q(0, 4)$ y $R(3, 2)$.

EXAMEN DE CAPÍTULO

1 Resuelva el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y - x = 1 \end{cases}$ usando el método de sustitución.

2 Resuelva el sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ 2x^2 + y^2 = 107 \end{cases}$ utilizando cualquier método.

3 Encuentre dos números que tengan una diferencia de 8 y un cociente de 3.

4 Una recta intersecta al eje y en 5 y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 10$. Encuentre los puntos de tangencia posibles.

5 Resuelva el sistema $\begin{cases} 4x - 7y = 9 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$ usando el método de eliminación.

6 Resuelva el sistema $\begin{cases} -0.3x + 0.4y = -0.9 \\ 9x - 12y = 28 \end{cases}$ usando cualquier método.

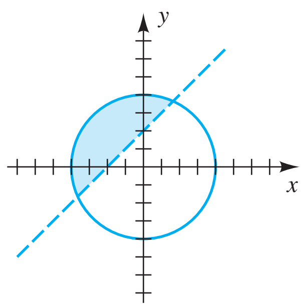
7 Resuelva el sistema $\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y = -1 \\ -12x + 4y = 20 \end{cases}$ usando cualquier método.

8 Una pequeña fábrica de muebles produce sofás y sillones reclinables. Cada sofá requiere 6 horas de trabajo y \$150 en materiales, mientras que una silla se puede construir por \$135 en 7 horas. La compañía tiene 495 horas de mano de obra disponibles cada semana y puede pagar \$10 575 para comprar materiales. ¿Cuántos sillones y sofás se pueden producir si todas las horas de trabajo y todos los materiales se deben utilizar?

9 Trace una gráfica del sistema $\begin{cases} |y| < 2 \\ x^2 + y^2 \geq 25 \end{cases}$

10 Encuentre un sistema de desigualdades para la gráfica.

EJERCICIO 10



11 Una mujer con \$25 000 para invertir decide colocar por lo menos \$3000 en una inversión de alto riesgo y de alto rendimiento y al menos cuatro veces esa cantidad en un fondo de bajo riesgo y de bajo rendimiento. Busque una gráfica del sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para colocar el dinero en las dos inversiones.

12 Dibuje la región R determinada por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$ y $x + 2y \leq 8$ y marque sus vértices. Encuentre el valor máximo de $C = 2x + y$ en R.

13 Una comunidad desea comprar autobuses usados y camionetas para su sistema de transporte público. La comunidad puede pagar no más de $360 000 para los vehículos y no más de $1400 por mes para mantenimiento. Las camionetas se venden a $20 000 cada una y los costos de mantenimiento son de $200 por mes en promedio. Las correspondientes estimaciones para cada autobús del costo es de $60 000 y $160 por mes. Si cada camioneta puede llevar a 20 pasajeros y cada autobús puede acomodar a 50 pasajeros, determine el número de camionetas y autobuses que se deben comprar para maximizar la capacidad de pasajeros del sistema.

14 Utilice matrices para resolver el sistema $\begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x - 4y + 2z = 30 \\ 5y + z = -8 \end{cases}$

15 Use matrices para resolver el sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$

16 Hay tres líneas de anclaje, con un peso de 51, 49, y 28 libras, cada una compuesta de una cuerda, una cadena y un ancla. Las líneas tienen 100, 60 y 40 pies de cuerda y 4, 8 y 0 pies de cadena, respectivamente. Encuentre el peso de la cuerda y el de la cadena por pie lineal, así como también el peso del ancla.

17 Encuentre una ecuación del polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que pasa por los puntos $P(0, -7)$, $Q(1, -8)$, $R(2, -1)$ y $S(3, 32)$.

18 Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, encuentre $A - 2B$.

19 Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, encuentre AB.

20 Si $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -2 \\ -1 & -7 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ -4 & 6 & 3 & -2 \\ 5 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, y $C = AB$, encuentre c_{23}.

21 En una venta de liquidación de golf, los juegos de hierros para hombre se venden a $100, los juegos de madera por $80 y sólo los híbridos por $30. Los juegos de hierros para mujer se venden a $90, los juegos de madera por $75, y sólo los híbridos por $20. El inventario actual es el siguiente:

	De hombre	**De mujer**
Juegos de hierro	23	7
Juegos de madera	35	12
Híbridos	40	19

Organice estos datos en una matriz A de inventario y una matriz B de precios para que el producto $C = AB$ esté definido. Encuentre C y describa lo que sus elementos representan.

22 Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$ usando transformaciones elementales de renglón.

23 Resuelva el sistema $\begin{cases} 5x + 3y = -8 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ usando el método de la inversa. Escriba la ecuación matricial empleada para resolver el sistema.

24 Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 7 & 2 \\ -4 & 9 & 3 & -2 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, ¿existe A^{-1}? Explique.

25 Encuentre el menor M_{23} de $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

26 Encuentre el cofactor A_{23} de $\begin{bmatrix} -9 & -4 & 5 \\ 7 & 1 & -3 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

27 Encuentre el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 4 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

28 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y $f(x) = |A - xI|$. Encuentre los ceros de $f(x)$.

29 Sin desarrollar, explique por qué $\begin{vmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

30 Encuentre el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ después de introducir ceros y use el teorema en las transformaciones de renglón y columna de un determinante.

31 Use la regla de Cramer para resolver el sistema $\begin{cases} 6x - 5y = 38 \\ -2x + 3y = -18 \end{cases}$

32 Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{-x + 11}{(x - 2)(x + 1)}$.

33 Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{-x^2 + 11x + 15}{x^2(x + 3)}$.

34 Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 2x - 2}{(x^2 + 1)^2}$.

10

Sucesiones, series y probabilidad

Las sucesiones y la notación de suma, que se estudian en la primera sección, son muy importantes en matemáticas avanzadas y en las aplicaciones. De especial interés son las sucesiones aritméticas y geométricas, consideradas en las secciones 10.2 y 10.3. A continuación examinamos el método de inducción matemática, proceso que con frecuencia se emplea para demostrar que cada enunciado de una sucesión infinita de enunciados es verdadero. Como aplicación, lo usamos para demostrar el teorema del binomio de la sección 10.5. La última parte trata de procesos continuos que se presentan con frecuencia en matemáticas y en la vida diaria. Éstos incluyen los conceptos de permutaciones, combinaciones y probabilidad.

10.1 Sucesiones infinitas y notación de suma

Una *sucesión infinita* puede denotarse como sigue:

Notación de sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Por comodidad, con frecuencia nos referimos a sucesiones infinitas como *sucesiones.* Podemos considerar una sucesión infinita como un conjunto de números reales que está en correspondencia biunívoca con los enteros positivos. Cada número a_k es un **término** de la sucesión. La sucesión es *ordenada* en el sentido de que hay un **primer término** a_1, un *segundo término* a_2, un *cuadragésimo quinto término* a_{45} y si n denota un entero positivo arbitrario, un ***n*-ésimo término** a_n. Las sucesiones infinitas se definen a veces al expresar una fórmula para el n-ésimo término.

Con frecuencia, en matemáticas, se presentan sucesiones infinitas. Por ejemplo, la sucesión

$$0.6, \quad 0.66, \quad 0.666, \quad 0.6666, \quad 0.66666, \quad \ldots$$

se puede usar para representar el número racional $\frac{2}{3}$. En este caso el n-ésimo término se acerca cada vez más a $\frac{2}{3}$ a medida que n aumenta.

Podemos considerar una sucesión infinita como una función. Recordemos de la sección 3.4 que una función f es una correspondencia que asigna a cada número x en el dominio D exactamente un número $f(x)$ en el rango R. Si restringimos el dominio a los enteros positivos 1, 2, 3, . . . , obtenemos una sucesión infinita, como en la siguiente definición.

Definición de sucesión infinita

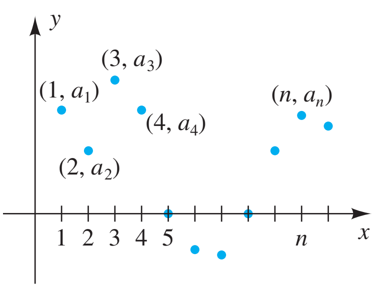
Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

En nuestro trabajo, el rango de una sucesión infinita será un conjunto de números reales.

Si una función f es una sucesión infinita, entonces a cada entero positivo n le corresponde un número real $f(n)$. Estos números en el rango de f pueden estar representados al escribir

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots.$$

FIGURA 1 Gráfica de una sucesión



Para obtener la forma de subíndice de una sucesión, como se ve al principio de esta sección, hacemos $a_n = f(n)$ para todo entero positivo n.

Si consideramos una sucesión como una función f, entonces podemos considerar su gráfica en un plano xy. Como el dominio de f es el conjunto de enteros positivos, los únicos puntos sobre la gráfica son

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (n, a_n), \ldots,$$

donde a_n es el n-ésimo término de la sucesión como se muestra en la figura 1. A veces usamos la gráfica de una sucesión para ilustrar el comportamiento del n-ésimo término a_n cuando n aumenta sin límite.

De la definición de igualdad de funciones vemos que una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

es **igual** a una sucesión

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

si y sólo si $a_k = b_k$ para todo entero positivo k.

Otra notación para una sucesión con n-ésimo término a_n es $\{a_n\}$. Por ejemplo, la sucesión $\{2^n\}$ tiene n-ésimo término $a_n = 2^n$. Usando notación de sucesión, escribimos esta sucesión como sigue:

$$2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$$

Por definición, la sucesión $\{2^n\}$ es la función f con $f(n) = 2^n$ para todo entero positivo n.

EJEMPLO 1 **Hallar términos de una sucesión**

Haga una lista de cuatro términos y el décimo término de cada sucesión:

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ **(b)** $\{2 + (0.1)^n\}$ **(c)** $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$ **(d)** $\{4\}$

SOLUCIÓN Para hallar los primeros cuatro términos, sustituimos, sucesivamente, $n = 1, 2, 3$ y 4 en la fórmula para a_n. El décimo término se encuentra si se sustituye 10 por n; si hacemos esto y simplificamos tendremos lo siguiente:

	Sucesión	n-ésimo término a_n	Primeros cuatro términos	Décimo término
(a)	$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{10}{11}$
(b)	$\{2 + (0.1)^n\}$	$2 + (0.1)^n$	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001	2.000 000 000 1
(c)	$\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$	$(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$	$\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}$	$-\dfrac{100}{29}$
(d)	$\{4\}$	4	4, 4, 4, 4	4

■

La TI-83/4 Plus tiene un modo especial de sucesión. El uso de este modo se explica al final de esta sección. Por ahora, consideraremos métodos genéricos que se aplican en cualquier calculadora.

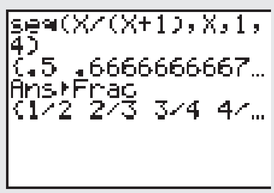
Para generar una sucesión, usamos el comando

seq(expression, variable, begin, end, increment).

(Si se omite increment, el valor predeterminado es 1.) Generemos los primeros cuatro términos de la sucesión del ejemplo 1(a).

Generar la sucesión.

[2nd] [LIST] [▷] [5]
[X,T,θ,n] [÷] [(] [X,T,θ,n] [+] 1 [)] [,]
[X,T,θ,n] [,] 1 [,] 4 [)] [ENTER]



Convertir a fraccciones.

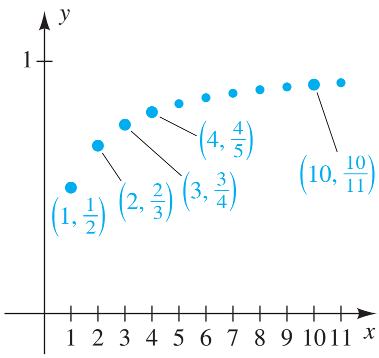
[MATH] [1] [ENTER]

EJEMPLO 2 **Graficar una sucesión**

Grafique la sucesión del ejemplo 1(a); es decir,

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

FIGURA 2



SOLUCIÓN Los valores de dominio son

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots.$$

Los valores de rango son

$$\frac{1}{1+1}, \quad \frac{2}{2+1}, \quad \frac{3}{3+1}, \quad \ldots, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \ldots$$

o bien, lo que es equivalente,

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \ldots.$$

En la figura 2 se ilustra una gráfica de los pares ordenados $(n, n/(n+1))$. ■

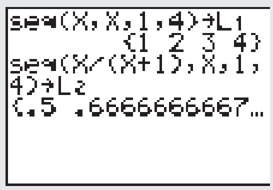
Haremos uso de *listas* para graficar la sucesión del ejemplo 2. (Una demostración de graficar en modo de sucesión en la TI-83/4 Plus aparece al final de la sección.)

Guarde los primeros n enteros positivos en una lista (los valores de dominio).

[2nd] [LIST] [▷] [5]
[X,T,θ,n] [,] [X,T,θ,n] [,] 1 [,] 4 [)]
[STO▷] [2nd] [L1] [ENTER]

Guarde los primeros n términos de una segunda lista (los valores del rango).

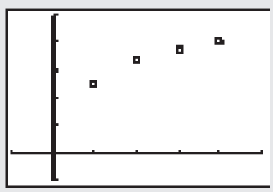
[2nd] [LIST] [▷] [5]
[X,T,θ,n] [÷] [(] [X,T,θ,n] [+] 1 [)] [,]
[X,T,θ,n] [,] 1 [,] 4 [)]
[STO▷] [2nd] [L2] [ENTER]



Conecte Stat Plot 1.

[2nd] [STAT PLOT] [1] [ENTER]

Fije una pantalla de [−1, 5] por [−0.2, 1, 0.2] y grafique.



Observe que nuestro método es fácilmente adaptable para hallar 50 términos de la sucesión (en lugar de 4).

Para algunas sucesiones expresamos el primer término a_1 junto con una regla para obtener cualquier término a_{k+1} a partir del término precedente a_k siempre que $k \geq 1$. Decimos que este enunciado es una **definición recursiva** y se dice que la sucesión está definida **en forma recursiva.**

EJEMPLO 3 Hallar términos de una sucesión definida en forma recursiva

Encuentre los primeros cuatro términos y el n-ésimo término de la sucesión infinita definida en forma recursiva como sigue:

$$a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 2a_k \quad \text{para} \quad k \geq 1$$

SOLUCIÓN Los primeros cuatro términos son

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 && \text{enunciado} \\ a_2 &= 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6 && k = 1 \\ a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12 && k = 2 \\ a_4 &= 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24. && k = 3 \end{aligned}$$

Hemos escrito los términos como productos para obtener algún conocimiento de la naturaleza del n-ésimo término. Continuando, obtenemos $a_5 = 2^4 \cdot 3$, $a_6 = 2^5 \cdot 3$ y en general,

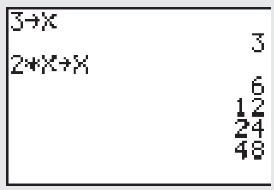
$$a_n = 2^{n-1} \cdot 3$$

para todo entero positivo n. ■

Podemos generar los términos de una sucesión definida en forma recursiva al guardar primero un valor *semilla* (o inicial) en una variable. A continuación, escribimos nuestra definición recursiva en términos de esa variable y luego guardamos el resultado en la misma variable. Podemos usar cualquier variable en la calculadora, pero la más fácil es la ubicación ANS porque el último resultado calculado se guarda ahí automáticamente. Líneas más abajo aparecen dos ejemplos para generar los términos del ejemplo 3, uno para la variable X y uno para la ubicación ANS. (Los comandos de recurrencia de la TI-83/4 Plus se explican al final de esta sección.)

Para generar una sucesión definida en forma recursiva usando la variable X, use

3 [STO ▷] [X,T,θ,n] [ENTER]
2 [×] [X,T,θ,n] [STO ▷] [X,T,θ,n]
[ENTER] [ENTER] . . .



Para generar una sucesión definida en forma recursiva usando ANS, use

3 [ENTER]
2 [×] [2nd] [ANS] [ENTER]
[ENTER] [ENTER] . . .



A veces nos encontramos con un término de una sucesión recursiva definida en términos de dos o más periodos anteriores, como en la famosa sucesión de Fibonacci (vea elejercicio 59) y en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 **Hallar términos de una sucesión definida en forma recursiva**

Encuentre los tres términos siguientes en una sucesión infinita definida en forma recursiva como sigue:

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 7, \quad a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k, \quad \text{para} \quad k \geq 1$$

SOLUCIÓN Los siguientes tres términos se determinan como sigue:

$a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k$	fórmula dada
$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3(7) - 2(4) = 13$	$k = 1$
$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3(13) - 2(7) = 25$	$k = 2$
$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3(25) - 2(13) = 49$	$k = 3$

Los siguientes tres términos son 13, 25 y 49. ■

Si se conocen sólo los primeros términos de una sucesión infinita, entonces es imposible predecir términos adicionales. Por ejemplo, si nos dan 3, 6, 9,… y nos piden hallar el cuarto término, no podríamos continuar sin más información. La sucesión infinita con n-ésimo término

$$a_n = 3n + (1 - n)^3(2 - n)^2(3 - n)$$

tiene como sus primeros cuatro términos a 3, 6, 9 y 120. Es posible describir sucesiones en las que los primeros términos sean 3, 6 y 9 y el cuarto término sea *cualquier* número dado. Esto demuestra que cuando trabajamos con una sucesión infinita es esencial tener información específica acerca del n-ésimo término o un esquema general para obtener cada término a partir del precedente. (Vea un problema relacionado en el ejercicio 1 de los ejercicios de análisis del capítulo 10.)

A veces necesitamos hallar la suma de muchos términos de una sucesión infinita. Para expresar con facilidad tales sumas, usamos **notación de suma.** Dada una sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

el símbolo $\Sigma_{k=1}^{m} a_k$ representa la suma de los primeros m términos, como sigue.

Notación de suma

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

La letra griego mayúscula sigma, Σ, indica una suma, y el símbolo a_k representa al k-ésimo término. La letra k es el **índice de suma,** o la **variable de suma**, y los números 1 y k indican los valores mínimo y máximo de la variable de suma, respectivamente.

EJEMPLO 5 **Evaluar una suma**

Encuentre la suma $\sum_{k=1}^{4} k^2(k-3)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a_k = k^2(k-3)$. Para hallar la suma, simplemente sustituimos, en sucesión, los enteros 1, 2, 3 y 4 por k y sumamos los términos resultantes:

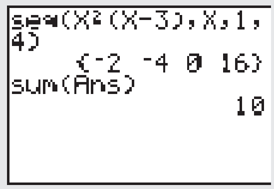
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} k^2(k-3) &= 1^2(1-3) + 2^2(2-3) + 3^2(3-3) + 4^2(4-3)\\ &= (-2) + (-4) + 0 + 16 = 10\end{aligned}$$

■

Para hallar la suma del ejemplo 5 en una calculadora de gráficas, simplemente sumamos una sucesión.

Genere la sucesión.

[2nd] [LIST] [▷] [5]
[X,T,θ,n] [x^2] [(] [X,T,θ,n] [−] 3 [)] [,]
[X,T,θ,n] [,] 1 [,] 4 [)] [ENTER]



Encuentre la suma de la sucesión.

[2nd] [LIST] [◁] [5]
[2nd] [ANS] [)] [ENTER]

La letra que usemos para la variable de suma no tiene importancia. Para ilustrar, si j es la variable de suma, entonces

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m,$$

que es la misma suma que $\Sigma_{k=1}^{m} a_k$. Como un ejemplo específico, la suma del ejemplo 5 se puede escribir

$$\sum_{j=1}^{4} j^2(j-3).$$

Si n es un entero positivo, entonces la suma de los primeros n términos de una sucesión infinita estará denotada por S_n. Por ejemplo, dada la sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$

$$\begin{aligned}S_1 &= a_1\\ S_2 &= a_1 + a_2\\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3\\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4\end{aligned}$$

y, en general,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Note que también podemos escribir

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= S_1 + a_2 \\ S_3 &= S_2 + a_3 \\ S_4 &= S_3 + a_4 \end{aligned}$$

y, para toda $n > 1$,

$$S_n = S_{n-1} + a_n.$$

El número real S_n se llama ***n*-ésima suma parcial** de la sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, y la sucesión

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

se llama **sucesión de sumas parciales.** Las sucesiones de sumas parciales son importantes en el estudio de *series infinitas*, un tema de cálculo. Estudiaremos algunos tipos especiales de series infinitas en la sección 10.3.

EJEMPLO 6 **Hallar los términos de una sucesión de sumas parciales**

Encuentre los primeros cuatro términos y el n-ésimo término de la sucesión de sumas parciales asociada con la sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ de enteros positivos.

SOLUCIÓN Si hacemos $a_n = n$, entonces los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales son

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = 1 \\ S_2 &= S_1 + a_2 = 1 + 2 = 3 \\ S_3 &= S_2 + a_3 = 3 + 3 = 6 \\ S_4 &= S_3 + a_4 = 6 + 4 = 10. \end{aligned}$$

La n-ésima suma parcial S_n (esto es, la suma de $1, 2, 3, \ldots, n$) se puede escribir en cualquiera de las formas siguientes:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ S_n &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

La suma de términos correspondientes en cada lado de estas ecuaciones nos da

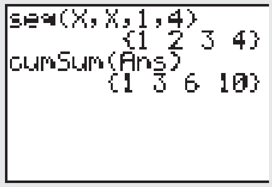
$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ veces}}.$$

Como la expresión $(n + 1)$ aparece n veces en el lado derecho de la última ecuación, vemos que

$$2S_n = n(n+1) \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \blacksquare$$

Para hallar los términos de la sucesión de sumas parciales del ejemplo 6 en una calculadora de gráficas, usamos la función de suma acumulativa.

Genere la sucesión.



[2nd] [LIST] [▷] [5]
[X,T,θ,n] [,] [X,T,θ,n] [,] 1 [,] 4 [)]
[ENTER]

Encuentre los términos de la sucesión de sumas parciales.

[2nd] [LIST] [▷] [6]
[2nd] [ANS] [)] [ENTER]

Para graficar la sucesión de sumas parciales, podríamos guardar los primeros n enteros positivos y la suma acumulativa en dos listas y luego graficarlos, como se demuestra en el inserto de calculadora que sigue al ejemplo 2.

Si a_k es la misma para todo entero positivo k, por ejemplo $a_k = c$ para un número real c, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$= c + c + c + \cdots + c = nc.$$

Hemos demostrado la propiedad 1 del teorema siguiente.

Teorema sobre la suma de una constante

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$ **(2)** $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c$

Para demostrar la propiedad 2, podemos escribir

$$\sum_{k=m}^{n} c = \sum_{k=1}^{n} c - \sum_{k=1}^{m-1} c$$ reste los primeros $(m - 1)$ términos de la suma de n términos

$$= nc - (m - 1)c$$ use la propiedad 1 para cada suma

$$= [n - (m - 1)]c$$ factorice c

$$= (n - m + 1)c.$$ simplifique

ILUSTRACIÓN **Suma de una constante**

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 7 = 4 \cdot 7 = 28$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \pi = 10 \cdot \pi = 10\pi$

(continúa)

- $\sum_{k=3}^{8} 9 = (8 - 3 + 1)(9) = 6(9) = 54$
- $\sum_{k=10}^{20} 5 = (20 - 10 + 1)(5) = 11(5) = 55$

Como se muestra en la propiedad 2 del teorema precedente, el dominio de la variable de suma no tiene que empezar con 1. Por ejemplo,

$$\sum_{k=4}^{8} a_k = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8.$$

Como otra variación, si el primer término de una sucesión infinita es a_0, como en

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

entonces podemos considerar sumas de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

que es la suma de los primeros $n + 1$ términos de la sucesión.

Si la variable de suma no aparece en el término a_k, entonces *todo el término* puede ser considerado constante. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{n} a_k = n \cdot a_k,$$

porque j no aparece en el término a_k.

La notación de suma se puede usar para denotar polinomios. Por tanto, si

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$

El siguiente teorema acerca de sumas tiene numerosos usos.

Teorema sobre sumas

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ son sucesiones infinitas, entonces para todo entero positivo n,

(1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ para todo número real c

DEMOSTRACIONES Para demostrar la fórmula 1, primero escribimos

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Usando las propiedades conmutativa y asociativa de los números reales muchas veces, podemos reacomodar los términos en el lado derecho para obtener

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

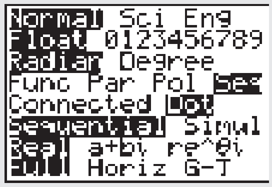
Para una demostración de la fórmula 3, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k) = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$$
$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$
$$= c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

La demostración de la fórmula 2 se deja como ejercicio. ■

USO DEL MODO DE SUCESIÓN DE LA TI-83/4

Presione MODE y use las teclas del cursor para destacar Seq y Dot. Desactive Stat Plot 1.

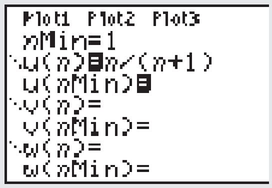


Listas y gráficas de una sucesión

Introduzca la sucesión del ejemplo 1(a), $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

Y= X,T,θ,n ÷ (X,T,θ,n + 1)

Nota: u(nMin) se puede dejar en blanco.

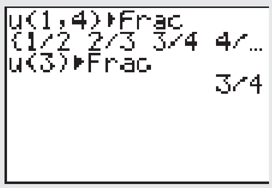


Escriba la sucesión.

2nd QUIT 2nd u (1 , 4) MATH 1 ENTER

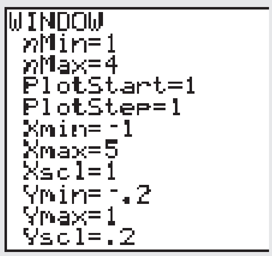
Escriba un término específico.

2nd u (3) MATH 1 ENTER



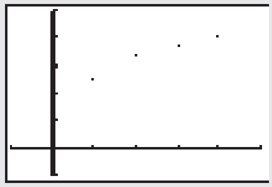
Ajuste las variables de ventana para graficar los primeros cuatro términos de la sucesión.

WINDOW 1 ▽ 4 ▽ 1 ▽ 1 ▽ −1 ▽ 5 ▽ 1 ▽ −.2 ▽ 1 ▽ .2



(continúa)

Grafique la sucesión al pulsar GRAPH. Pulse TRACE y las teclas de izquierda y derecha del cursor para ver los valores de la sucesión.

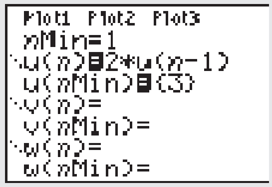


Generar una sucesión definida en forma recursiva

En forma recursiva defina la sucesión del ejemplo 3,

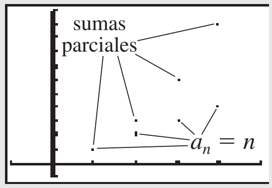
$$a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 2a_k \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

Y= CLEAR 2 × 2nd u (X,T,θ,n − 1) ENTER 3 ENTER



Escriba los primeros cuatro términos de la sucesión.

2nd QUIT 2nd u (1 , 4) ENTER



Graficar una sucesión de sumas parciales

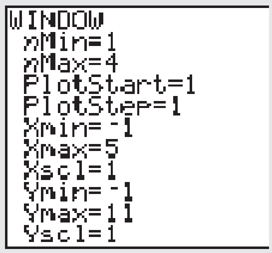
Podemos graficar una sucesión de sumas parciales al definir que u es la sucesión de términos y v es la suma de esa sucesión. Demostraremos con la sucesión del ejemplo 6; es decir, $a_n = n$.

Y= CLEAR X,T,θ,n ▽ 1 ▽
2nd LIST ◁ 5 2nd LIST ▷ 5
2nd u , X,T,θ,n , 1 , X,T,θ,n , 1)
) ▽ 1 ▽

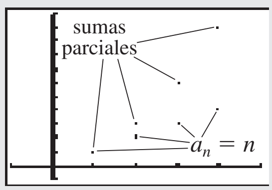


Ajuste las variables de ventana para graficar los primeros cuatro términos de las sucesiones.

WINDOW 1 ▽ 4 ▽ 1 ▽ 1 ▽ −1 ▽
5 ▽ 1 ▽ −1 ▽ 11 ▽ 1



Grafique la sucesión y la sucesión de sumas parciales al pulsar GRAPH. Note que la primera suma parcial es igual al primer término de la sucesión.



10.1 Ejercicios

Ejer. 1–16: Encuentre los primeros cuatro términos y el octavo término de la sucesión.

1 $\{12 - 3n\}$

2 $\left\{\dfrac{3}{5n - 2}\right\}$

3 $\left\{\dfrac{3n - 2}{n^2 + 1}\right\}$

4 $\left\{10 + \dfrac{1}{n}\right\}$

5 $\{9\}$

6 $\{\sqrt{2}\}$

7 $\{2 + (-0.1)^n\}$

8 $\{4 + (0.1)^n\}$

9 $\left\{(-1)^{n-1}\dfrac{n + 7}{2n}\right\}$

10 $\left\{(-1)^n\dfrac{6 - 2n}{\sqrt{n + 1}}\right\}$

11 $\{1 + (-1)^{n+1}\}$

12 $\{(-1)^{n+1} + (0.1)^{n-1}\}$

13 $\left\{\dfrac{2^n}{n^2 + 2}\right\}$

14 $\{(n - 1)(n - 2)(n - 3)\}$

15 a_n es el número de lugares decimales en $(0.1)^n$.

16 a_n es el número de enteros positivos menores que n^3.

Ejer. 17–20: Grafique la sucesión.

17 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$

18 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

19 $\{(-1)^{n+1}n^2\}$

20 $\{(-1)^n(2n + 1)\}$

Ejer. 21–28: Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión infinita definida en forma recursiva.

21 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = 3a_k - 5$

22 $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = 7 - 2a_k$

23 $a_1 = -3, \quad a_{k+1} = a_k^2$

24 $a_1 = 128, \quad a_{k+1} = \frac{1}{4}a_k$

25 $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = ka_k$

26 $a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 1/a_k$

27 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^k$

28 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^{1/k}$

Ejer. 29-32: Encuentre los siguientes tres términos de la sucesión definida en forma recursiva.

29 $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{k+1} = 2a_k + 3a_{k-1}$ para $k \geq 2$

30 $a_1 = 3, \quad a_2 = 1, \quad a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$ para $k \geq 2$

31 $a_1 = 4, \quad a_2 = -2, \quad a_{k+2} = a_{k+1}a_k$ para $k \geq 1$

32 $a_1 = 2, \quad a_2 = -3, \quad a_{k+2} = a_{k+1}a_k^2$ para $k \geq 1$

Ejer. 33–36: Encuentre los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales para la sucesión dada.

33 $\{3 + \frac{1}{2}n\}$

34 $\{1/n^2\}$

35 $\{(-1)^n n^{-1/2}\}$

36 $\{(-1)^n(1/2)^n\}$

Ejer. 37–52: Encuentre la suma.

37 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k - 7)$

38 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(10 - 3k)$

39 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(k^2 - 5)$

40 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}[1 + (-1)^k]$

41 $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}k(k - 2)$

42 $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(k - 1)(k - 3)$

43 $\displaystyle\sum_{k=3}^{6}\frac{k - 5}{k - 1}$

44 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{3}{k + 1}$

45 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(-3)^{k-1}$

46 $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}3(2^k)$

47 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}100$

48 $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000}5$

49 $\displaystyle\sum_{k=253}^{571}\frac{1}{3}$

50 $\displaystyle\sum_{k=137}^{428}2.1$

51 $\displaystyle\sum_{j=1}^{7}\frac{1}{2}k^2$

52 $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}(3j + 2)$

53 Demuestre la fórmula 2 del teorema sobre sumas.

54 Extienda la fórmula 1 del teorema sobre sumas a

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k + c_k).$$

55 Considere la sucesión definida en forma recursiva por $a_1 = 5$, $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$ para $k \geq 1$. Describa lo que le ocurre a los términos de la sucesión cuando k aumenta.

56 Se pueden obtener aproximaciones a π a partir de la sucesión

$$x_1 = 3, \quad x_{k+1} = x_k - \tan x_k.$$

Use la tecla TAN para tan.

(a) Encuentre los primeros cinco términos de esta sucesión.

(b) ¿Qué les ocurre a los términos de la sucesión cuando $x_1 = 6$?

57 Sucesión de Bode La sucesión de Bode, definida por

$$a_1 = 0.4, \quad a_k = 0.1(3 \cdot 2^{k-2} + 4) \quad \text{para} \quad k \geq 2,$$

se puede usar para aproximar distancias de planetas desde el Sol. Estas distancias se miden en unidades astronómicas, con 1 UA = 93 000 000 millas. Por ejemplo, el tercer término corresponde a la Tierra y el quinto término al planeta menor Ceres. Aproxime los primeros cinco términos de la sucesión.

58 Crecimiento de bacterias El número de bacterias en cierto cultivo es inicialmente de 500 y se duplica cada día.

(a) Encuentre el número de bacterias presente después de un día, dos días y tres días.

(b) Encuentre una fórmula para el número de bacterias presente después de n días.

59 La sucesión de Fibonacci La sucesión de Fibonacci está definida en forma recursiva por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \quad \text{para} \quad k \geq 2.$$

(a) Encuentre los primeros diez términos de la sucesión.

(b) Los términos de la sucesión $r_k = a_{k+1}/a_k$ dan cada vez mejores aproximaciones a τ, la proporción áurea. Calcule los primeros diez términos de esta sucesión.

60 La sucesión de Fibonacci La sucesión de Fibonacci puede estar definida por la fórmula

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Encuentre los primeros ocho términos y demuestre que concuerdan con los hallados usando la definición del ejercicio 59.

61 Niveles de cloro A veces se agrega cloro a las piscinas para controlar los microorganismos. Si el nivel de cloro sube arriba de 3 ppm (partes por millón), los nadadores experimentarán ardor de ojos e incomodidad en la piel. Si el nivel cae por debajo de 1 ppm, hay la posibilidad de que el agua se ponga verde debido a la gran cantidad de algas. El cloro debe agregarse al agua de piscinas a intervalos regulares. Si no se agrega cloro a una piscina durante un periodo de 24 horas, alrededor de 20% del cloro se disipará en la atmósfera y 80% continuará en el agua.

(a) Determine una sucesión recursiva a_n que exprese la cantidad de cloro presente después de n días si la piscina tiene a_0 ppm de cloro inicialmente y no se agrega cloro.

(b) Si una piscina tiene 7 ppm de cloro inicialmente, construya una tabla para determinar el primer día en el que el nivel de cloro caerá por debajo de 3 ppm.

62 Niveles de cloro Consulte el ejercicio 61. Suponga que una piscina tiene 2 ppm de cloro inicialmente y 0.5 ppm de cloro se agregan a la piscina al final de cada día.

(a) Encuentre una sucesión recursiva a_n que exprese la cantidad de cloro presente después de n días.

(b) Determine la cantidad de cloro en la piscina después de 15 días y después de un largo tiempo.

(c) Estime la cantidad de cloro que es necesario agregar diariamente para estabilizar el nivel de cloro de la piscina en 1.5 ppm.

63 Costos de palos de golf Una empresa fabricante de palos de golf vende palos llamados *driver* (que lanzan la pelota a mayor distancia) como sigue:

Número de cabezas	1–4	5–9	10+
Costo por palo	\$89.95	\$87.95	\$85.95

Encuentre una función C definida por partes que especifique el costo total por n palos. Trace una gráfica de C.

64 Costo de reproductores de DVD Un mayorista de aparatos electrónicos vende reproductores de DVD en \$20 cada uno por las primeras 4 unidades. Todas las unidades que pasen de 4 se venden en \$17 cada una. Encuentre una función C definida por partes que especifique el costo total de n reproductores. Trace una gráfica de C.

Ejer. 65–66: Algunas calculadoras usan un algoritmo similar al siguiente para calcular $\sqrt{N}$ para un número real positivo N: sea $x_1 = N/2$ y encuentre aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$ usando

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{N}{x_1}\right), \quad x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{N}{x_2}\right), \quad \ldots$$

hasta obtener la precisión deseada. Use este método para aproximar el radical a una precisión de seis lugares decimales.

65 $\sqrt{5}$ **66** $\sqrt{18}$

67 La ecuación $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x} - x + 2 = 0$ tiene una raíz cercana a 2. Para aproximar esta raíz, reescriba la ecuación como $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + 2$. Sea $x_1 = 2$ y encuentre aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$ usando las fórmulas

$$x_2 = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{x_1} + 2, \quad x_3 = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{x_2} + 2, \quad \ldots$$

hasta obtener una precisión de cuatro lugares decimales.

68 La ecuación $2x + \dfrac{1}{x^4 + x + 2} = 0$ tiene una raíz cercana a 0. Use un procedimiento similar al del ejercicio 67 para calcular esta raíz a una precisión de cuatro lugares decimales.

Ejer. 69–70: (a) Demuestre que f toma valores positivos y negativos en el intervalo [1, 2]. (b) Use el método del ejercicio 67, con $x_1 = 1.5$, para calcular un cero de f a una precisión de dos lugares decimales.

69 $f(x) = x - 2 + \log x$

70 $f(x) = \log x - 10^{-x}$ (*Sugerencia:* despeje x en $\log x$.)

Ejer. 71–74: Para el n-ésimo término dado $a_n = f(n)$ de una sucesión, use la gráfica de $y = f(x)$ en el intervalo [1, 100] para verificar que cuando n aumenta sin límite, a_n se aproxima a algún número real c.

71 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2}\right)^n$

72 $a_n = n^{1/n}$

73 $a_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$

74 $a_n = (2.1^n + 1)^{1/n}$

Ejer. 75–78: Grafique la sucesión a_k definida en forma recursiva en el modo de punto para $k = 1, 2, 3, \ldots, 20$ al determinar el valor de k a lo largo del eje x y el valor de a_k a lo largo del eje y. Trace la gráfica para determinar la mínima k tal que $a_k > 100$.

75 $a_1 = 0.25, \quad a_k = 1.7a_{k-1} + 0.5$

76 $a_1 = 6, \quad a_k = 1.05a_{k-1} + 4$

77 $a_1 = 7.25, \quad a_k = 0.1a_{k-1}^2 + 2$

78 $a_1 = 1, \quad a_k = 0.2a_{k-1}^2 + 1.5$

79 **Población de insectos** La sucesión definida por

$$a_{k+1} = ca_k(1 - a_k)$$

se usa en el estudio del crecimiento de poblaciones de insectos. La constante c recibe el nombre de factor de Malthus. Suponga que $1000a_k$ es igual al número de insectos después de k intervalos. Si inicialmente $a_1 = 0.25$, describa el comportamiento de la población de insectos para cada valor de c.

(a) $c = 0.5$ (b) $c = 1.5$ (c) $c = 2.75$

80 **Población de insectos** Consulte el ejercicio 79. El factor c de Malthus afecta la población a_k de insectos en forma importante, y c se puede interpretar como el grado de fertilidad de los insectos.

(a) Haga conjeturas acerca de la forma en que c afecta la población de insectos si $0 < c < 1$.

(b) Prueba su conjetura usando varios valores para c.

10.2 Sucesiones aritméticas

En esta sección y la siguiente consideramos dos tipos especiales de sucesiones: aritméticas y geométricas. El primer tipo se puede definir como sigue.

Definición de sucesión aritmética

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es una **sucesión aritmética** si hay un número real d tal que para todo entero positivo k,

$$a_{k+1} = a_k + d.$$

El número $d = a_{k+1} - a_k$ se denomina **diferencia común** de la sucesión.

Note que la diferencia común d es la diferencia de dos términos sucesivos *cualesquiera* de una sucesión aritmética.

ILUSTRACIÓN **Sucesión aritmética y diferencia común**

- $-3, 2, 7, 12, \ldots, 5n - 8, \ldots$ diferencia común $= 2 - (-3) = 5$
- $17, 10, 3, -4, \ldots, 24 - 7n, \ldots$ diferencia común $= 10 - 17 = -7$

EJEMPLO 1 **Demostrar que una sucesión es aritmética**

Demuestre que la sucesión

$$1, 4, 7, 10, \ldots, 3n - 2, \ldots$$

es aritmética y encuentre la diferencia común.

SOLUCIÓN Si $a_n = 3n - 2$, entonces para todo entero positivo k,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= [3(k+1) - 2] - (3k - 2) \\ &= 3k + 3 - 2 - 3k + 2 = 3. \end{aligned}$$

En consecuencia, la sucesión dada es aritmética con diferencia común 3. ■

Dada una sucesión aritmética, sabemos que

$$a_{k+1} = a_k + d$$

para todo entero positivo k. Esto nos da una fórmula recursiva para obtener términos sucesivos. Empezando con cualquier número real a_1, podemos obtener una sucesión aritmética con diferencia común d simplemente al sumar d a a_1, luego a $a_1 + d$, y así sucesivamente, obteniendo

$$a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d, \quad a_1 + 3d, \quad a_1 + 4d, \quad \ldots.$$

El n-ésimo término a_n de esta sucesión está dado por la siguiente fórmula.

Fórmula para el n-ésimo término de una sucesión aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

o en general

$$a_n = a_k + (n - k)d,$$

donde n y k son enteros positivos y d es la diferencia común.

EJEMPLO 2 **Hallar un término específico de una sucesión aritmética**

Los primeros tres términos de una sucesión aritmética son 20, 16.5 y 13. Encuentre el decimoquinto término.

SOLUCIÓN La diferencia común es

$$a_2 - a_1 = 16.5 - 20 = -3.5.$$

Sustituyendo $n = 15$, $a_1 = 20$ y $d = -3.5$ en la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión aritmética, $a_n = a_1 + (n - 1)d$ nos da

$$a_{15} = 20 + (15 - 1)(-3.5) = 20 - 49 = -29.$$ ■

EJEMPLO 3 **Hallar un término específico de una sucesión aritmética**

Si el cuarto término de una sucesión aritmética es 5 y el noveno término es 20, encuentre el primero y el sexto términos.

SOLUCIÓN 1 Nos dan $a_4 = 5$ y $a_9 = 20$ y deseamos hallar a_6. Los siguientes son sistemas equivalentes de ecuaciones con las variables a_1 y d:

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + (4 - 1)d & \text{sea } n = 4 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_9 = a_1 + (9 - 1)d & \text{sea } n = 9 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a_1 + 3d & a_4 = 5 \\ 20 = a_1 + 8d & a_9 = 20 \end{cases}$$

Si de la segunda ecuación restamos la primera ecuación del sistema tendremos $15 = 5d$, o $d = 3$. Sustituyendo 3 por d en la primera ecuación, $5 = a_1 + 3d$, da $a_1 = 5 - 3d = 5 - 3(3) = -4$. En consecuencia, para hallar el sexto término tenemos

$$\begin{aligned} a_6 &= a_1 + (6-1)d & &\text{sea } n = 6 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d \\ &= (-4) + (5)(3) = 11. & &a_1 = -4 \text{ y } d = 3 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 En esta solución, usamos la fórmula general para el n-ésimo termino de una sucesión aritmética.

Encuentre d:

$$\begin{aligned} a_n &= a_k + (n-k)d & &\text{fórmula del } n\text{-ésimo término} \\ a_9 &= a_4 + (9-4)d & &n = 9, k = 4 \\ 20 &= 5 + 5d & &\text{términos dados} \\ 15 &= 5d & &\text{reste 5} \\ 3 &= d & &\text{divida entre 5} \end{aligned}$$

Encuentre a_1:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_4 + (1-4)d & &n = 1, k = 4 \\ a_1 &= 5 - 3(3) & &a_4 = 5, d = 3 \\ a_1 &= -4 & &\text{simplifique} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que se usó $k = 4$, pero podríamos haber utilizado $k = 9$. Tal vez se pregunte si pudiéramos usar $n = 4$ y $k = 1$. Sí, y ello nos da $a_4 = a_1 + (4 - 1)d$, que se simplifica a $5 = a_1 + 3(3)$ y, por último, $a_1 = -4$.

Encuentre a_6:

$$\begin{aligned} a_6 &= a_4 + (6-4)d & &n = 6, k = 4 \\ a_6 &= 5 + 2(3) & &a_4 = 5, d = 3 \\ a_6 &= 11 & &\text{simplifique} \end{aligned}$$

■

El siguiente teorema contiene una fórmula para la n-ésima suma parcial S_n de una sucesión aritmética.

Teorema: fórmulas para S_n

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es una sucesión aritmética con diferencia común d, entonces la n-ésima suma parcial S_n (esto es, la suma de los primeros n términos) está dada por

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \qquad \text{o} \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

DEMOSTRACIÓN Podemos escribir

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d]. \end{aligned}$$

Empleando varias veces las propiedades conmutativa y asociativa de los números reales obtendremos

$$S_n = (a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1) + [d + 2d + \cdots + (n - 1)d],$$

con a_1 apareciendo n veces dentro del primer par de paréntesis. Así,

$$S_n = na_1 + d[1 + 2 + \cdots + (n - 1)].$$

La expresión dentro de los corchetes es la suma de los primeros $n - 1$ enteros positivos. Usando la fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos, $S_n = n(n + 1)/2$, del ejemplo 6 de la sección 10.1, pero con $n - 1$ en lugar de n y n en lugar de $n + 1$, tenemos

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2}.$$

Sustituyendo en la última ecuación por S_n y factorizando $n/2$ tendremos

$$S_n = na_1 + d\frac{(n - 1)n}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d].$$

Como $a_n = a_1 + (n - 1)d$, la última ecuación es equivalente a

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$ ■

EJEMPLO 4 **Hallar una suma de enteros pares**

Encuentre la suma de todos los enteros pares del 2 al 100.

SOLUCIÓN Este problema es equivalente a hallar la suma de los primeros 50 términos de la sucesión aritmética

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots.$$

Sustituyendo $n = 50$, $a_1 = 2$ y $a_{50} = 100$ en $S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$ resulta

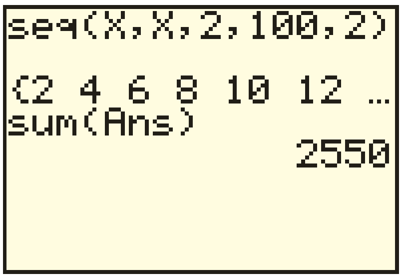
$$S_{50} = \tfrac{50}{2}(2 + 100) = 2550.$$

Alternativamente, podemos usar $S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$ con $d = 2$:

$$S_{50} = \tfrac{50}{2}[2(2) + (50 - 1)2] = 25[4 + 98] = 2550$$

(Vea en la figura 1 el apoyo de calculadora para este resultado.) ■

FIGURA 1



La **media aritmética** de dos números a y b se define como $(a + b)/2$. Éste es el **promedio** de a y b. Note que los tres números

$$a, \quad \frac{a + b}{2} \quad \text{y} \quad b$$

constituyen una sucesión aritmética (finita) con una diferencia común de $d = \frac{1}{2}(b - a)$. Este concepto se puede generalizar como sigue: si $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son números reales tales que

$$a, c_1, c_2, \ldots, c_k, b$$

es una sucesión aritmética (finita), entonces $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son ***k* medias aritméticas** entre los números a y b. El proceso de determinar estos números se conoce como *insertar k medias aritméticas entre a y b.*

EJEMPLO 5 **Insertar medias aritméticas**

Inserte tres medias aritméticas entre 2 y 9.

SOLUCIÓN Deseamos hallar tres números reales c_1, c_2 y c_3 tales que la siguiente es una sucesión aritmética (finita):

$$2, c_1, c_2, c_3, 9$$

Podemos considerar ésta como una sucesión aritmética con primer término $a_1 = 2$ y quinto término $a_5 = 9$. Para hallar la diferencia común d, podemos proceder como sigue:

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)d \qquad \text{sea } n = 5 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$9 = 2 + 4d \qquad a_5 = 9 \text{ y } a_1 = 2$$
$$d = \tfrac{7}{4} \qquad \text{despeje } d$$

Entonces, las medias aritméticas son

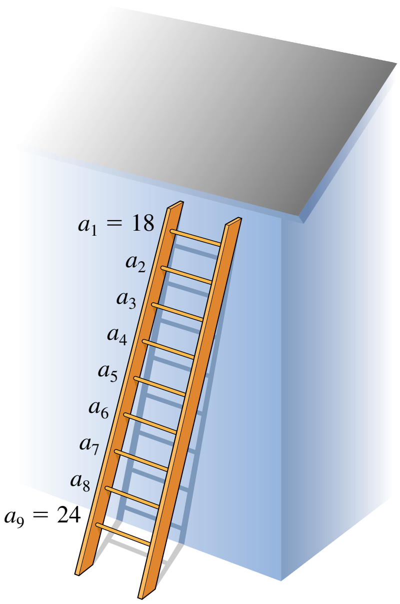
$$c_1 = a_1 + d = 2 + \tfrac{7}{4} = \tfrac{15}{4}$$
$$c_2 = c_1 + d = \tfrac{15}{4} + \tfrac{7}{4} = \tfrac{22}{4} = \tfrac{11}{2}$$
$$c_3 = c_2 + d = \tfrac{22}{4} + \tfrac{7}{4} = \tfrac{29}{4}.$$

■

EJEMPLO 6 **Una aplicación de una sucesión aritmética**

Un carpintero desea construir una escalera con nueve barrotes cuyas longitudes disminuyen de manera uniforme de 24 pulgadas en la base a 18 pulgadas en la parte superior. Determine las longitudes de los siete barrotes intermedios.

FIGURA 2



SOLUCIÓN La escalera se ve en la figura 2. Las longitudes de los barrotes han de formar una sucesión aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_9$ con $a_1 = 18$ y $a_9 = 24$. En consecuencia, necesitamos insertar siete medias aritméticas entre 18 y 24. Usando $a_n = a_1 + (n-1)d$ con $n = 9$, $a_1 = 18$ y $a_9 = 24$ tendremos

$$24 = 18 + 8d \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad 8d = 6.$$

Por tanto, $d = \frac{6}{8} = 0.75$ y los barrotes intermedios tienen longitudes (en pulgadas)

$$18.75,\ 19.5,\ 20.25,\ 21,\ 21.75,\ 22.5 \text{ y } 23.25.$$

■

A veces es deseable expresar una suma en términos de notación de suma, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 **Expresar una suma en notación de suma**

Exprese en términos de notación de suma:

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{3}{14} + \tfrac{4}{19} + \tfrac{5}{24} + \tfrac{6}{29}$$

SOLUCIÓN Los seis términos de la suma no forman una sucesión aritmética, pero los numeradores y denominadores de las fracciones *considerados por separado* son cada uno de ellos una sucesión aritmética. Específicamente, tenemos lo siguiente:

Numeradores: 1, 2, 3, 4, 5, 6 diferencia común 1

Denominadores: 4, 9, 14, 19, 24, 29 diferencia común 5

Usando dos veces la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión aritmética, obtenemos el siguiente n-ésimo término para cada sucesión:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1)1 = n$$
$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 4 + (n - 1)5 = 5n - 1$$

Por tanto, el n-ésimo término de la suma dada es $n/(5n - 1)$ y podemos escribir

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19} + \frac{5}{24} + \frac{6}{29} = \sum_{n=1}^{6} \frac{n}{5n - 1}.$$ ■

10.2 Ejercicios

Ejer. 1–2: Demuestre que la sucesión dada es aritmética y encuentre la diferencia común.

1 $-6, -2, 2, \ldots, 4n - 10, \ldots$

2 $53, 48, 43, \ldots, 58 - 5n, \ldots$

Ejer. 3–14: Encuentre el n-ésimo término, el quinto término y el décimo término de la sucesión aritmética.

3 $2, 6, 10, 14, \ldots$

4 $1, 7, 13, 19, \ldots$

5 $16, 13, 10, 7, \ldots$

6 $32, 27, 22, 17, \ldots$

7 $3, 2.7, 2.4, 2.1, \ldots$

8 $-6, -4.5, -3, -1.5, \ldots$

9 $-7, -3.9, -0.8, 2.3, \ldots$

10 $4.2, 1.5, -1.2, -3.9, \ldots$

11 $-8x + 12, -6x + 9, -4x + 6, -2x + 3, \ldots$

12 $x - 8, x - 3, x + 2, x + 7, \ldots$

13 $\ln 3, \ln 9, \ln 27, \ln 81, \ldots$

14 $\log 1000, \log 100, \log 10, \log 1, \ldots$

Ejer. 15–16: Encuentre la diferencia común para la sucesión aritmética con los términos especificados.

15 $a_2 = 21, a_6 = -11$

16 $a_4 = 14, a_{11} = 35$

Ejer. 17–24: Encuentre el término especificado de la sucesión aritmética que tenga los dos términos dados.

17 a_{12}; $a_1 = 9.1$, $a_2 = 7.5$

18 a_{11}; $a_1 = 2 + \sqrt{2}$, $a_2 = 3$

19 a_1; $a_6 = 2.7$, $a_7 = 5.2$

20 a_1; $a_8 = 47$, $a_9 = 53$

21 a_{15}; $a_3 = 7$, $a_{20} = 43$

22 a_{10}; $a_2 = 1$, $a_{18} = 49$

23 a_{410}; $a_8 = 201$, $a_{317} = 2364$

24 a_{500}; $a_9 = -253$, $a_{412} = 2971$

Ejer. 25–30: Encuentre la suma S_n de la sucesión aritmética que satisfaga las condiciones dadas.

25 $a_1 = 40$, $d = -3$, $n = 30$

26 $a_1 = 5$, $d = 0.1$, $n = 40$

27 $a_1 = -9$, $a_{10} = 15$, $n = 10$

28 $a_1 = 5$, $a_{20} = 9$, $n = 20$

29 $a_7 = \frac{7}{3}$, $d = -\frac{2}{3}$, $n = 15$

30 $a_6 = -2$, $d = -\frac{3}{4}$, $n = 40$

Ejer. 31–36: Encuentre la suma.

31 $\sum_{k=1}^{20} (3k - 5)$

32 $\sum_{k=1}^{12} (7 - 4k)$

33 $\sum_{k=1}^{18} \left(\frac{1}{2}k + 7\right)$

34 $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{4}k + 3\right)$

35 $\sum_{k=126}^{592} (5k + 2j)$

36 $\sum_{k=88}^{371} (3j - 2k)$

Ejer. 37–42: Exprese la suma en términos de notación de suma. (Las respuestas no son únicas.)

37 $4 + 11 + 18 + 25 + 32$

38 $3 + 8 + 13 + 18 + 23$

39 $4 + 11 + 18 + \cdots + 466$

40 $3 + 8 + 13 + \cdots + 463$

41 $\frac{3}{7} + \frac{6}{11} + \frac{9}{15} + \frac{12}{19} + \frac{15}{23} + \frac{18}{27}$

42 $\frac{5}{13} + \frac{10}{11} + \frac{15}{9} + \frac{20}{7}$

Ejer. 43–44: Exprese la suma en términos de notación de suma y encuentre la suma.

43 $8 + 19 + 30 + \cdots + 16{,}805$

44 $2 + 11 + 20 + \cdots + 16{,}058$

Ejer. 45–50: Encuentre el número de términos de la sucesión aritmética con las condiciones dadas:

45 $a_1 = 5$, último término $= 11$, $S = 224$

46 $a_1 = 3$, último término $= 17$, $S = 420$

47 $a_1 = -2$, $d = \frac{1}{4}$, $S = 21$

48 $a_1 = -1$, $d = \frac{1}{5}$, $S = 21$

49 $a_1 = -\frac{29}{6}$, $d = \frac{1}{3}$, $S = -36$

50 $a_6 = -3$, $d = 0.2$, $S = -33$

Ejer. 51–54: Inserte el número dado de medias aritméticas entre los números.

51 cinco, 2 y 10

52 tres, 3 y -5

53 tres, 52 y -56

54 cuatro, 22 y 108

55 **(a)** Encuentre el número de enteros entre 32 y 395 que sean divisibles entre 6.

(b) Encuentre su suma.

56 **(a)** Encuentre el número de enteros negativos mayores que -500 y que sean divisibles entre 33.

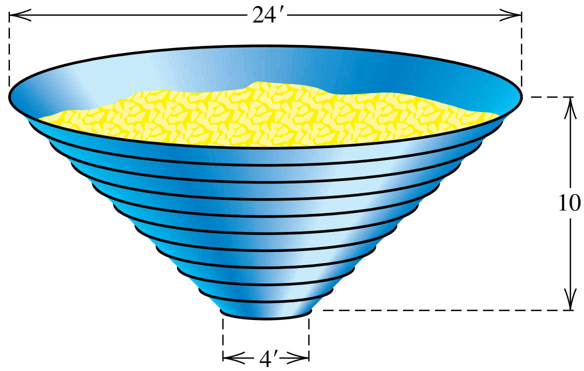
(b) Encuentre su suma.

57 **Pila de troncos** Una pila de troncos tiene 24 troncos en la capa del fondo, 23 en la segunda capa, 22 en la tercera y así sucesivamente. La capa superior contiene 10 troncos. Encuentre el número total de troncos en la pila.

58 **Asientos en un estadio** Las primeras diez filas de asientos en cierta sección de un estadio tienen 30 asientos, 32 asientos, 34 asientos y así sucesivamente. Las filas de la 11 a la 20 tienen cada una de ellas 50 asientos. Encuentre el número total de asientos en la sección.

59 **Construcción de una tolva para granos** Se ha de construir una tolva para granos con forma de cono truncado (vea la figura). La tolva debe medir 10 pies de alto con 11 anillos metálicos colocados uniformemente a su alrededor, desde la abertura de 4 pies en el fondo a la de 24 pies en la parte superior. Encuentre la longitud total del metal necesario para hacer los anillos.

EJERCICIO 59



60 **Bajar por inercia** Un ciclista baja por inercia en una pendiente, recorriendo 4 pies el primer segundo. En los segundos sucesivos, el ciclista viaja a 5 pies más rápido que el segundo precedente. Si llega hasta la base de la pendiente en 11 segundos, encuentre la distancia total recorrida.

61 **Dinero de un premio** Un concurso tendrá cinco premios en dinero que totalizan \$5000 y habrá una diferencia de \$100 entre premios sucesivos. Encuentre el primer premio.

62 **Bonos de ventas** Una empresa va a distribuir \$46 000 en bonos a sus diez mejores vendedores. El décimo vendedor de la lista recibirá \$1000 y la diferencia en dinero de los bonos entre vendedores sucesivamente clasificados debe ser constante. Encuentre el bono para cada vendedor.

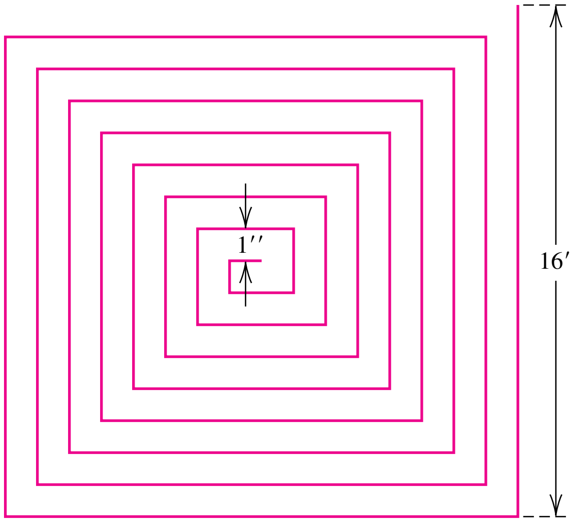
63 **Distancia a la que cae un cuerpo** Suponiendo que la resistencia del aire sea insignificante, un pequeño cuerpo que se suelta desde un globo de aire caliente cae 16 pies durante el primer segundo, 48 pies el siguiente segundo, 80 pies durante el tercer segundo, 112 pies durante el cuarto y así sucesivamente. Encuentre una expresión para la distancia que cae el cuerpo en n segundos.

64 Si f es una función lineal, demuestre que la sucesión con n-ésimo término $a_n = f(n)$ es una sucesión aritmética.

65 **Sucesión genética** La sucesión definida en forma repetitiva por $x_{k+1} = x_k/(1 + x_k)$ ocurre en genética en el estudio de la eliminación de un gen deficiente de una población. Demuestre que la sucesión cuyo n-ésimo término es $1/x_n$ es aritmética.

66 **Dimensiones de un laberinto** Encuentre la longitud total de la curva en rojo de la figura, si el ancho del laberinto formado por la curva mide 16 pulgadas y todos los pasillos del laberinto tienen ancho de 1 pulgada. ¿Cuál es la longitud si el ancho del laberinto mide 32 pulgadas?

EJERCICIO 66



Ejer. 67–68: A veces, financieros y otras personas emplean métodos de depreciación para calcular el valor de una propiedad en el lapso de n años de vida. En el método de dígitos de la suma de años, por cada año $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, el valor de una propiedad disminuye en una fracción $A_k = \dfrac{n - k + 1}{T_n}$ de su costo inicial, donde $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

67 (a) Si $n = 8$, encuentre $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_8$.

(b) Demuestre que la sucesión en (a) es aritmética y encuentre S_8.

(c) Si el valor inicial de una propiedad es \$1000, ¿cuánto se ha depreciado después de 4 años?

68 (a) Si n es cualquier entero positivo, encuentre $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

(b) Demuestre que la sucesión en (a) es aritmética y encuentre S_n.

10.3 Sucesiones geométricas

El segundo tipo especial de sucesión que estudiaremos, la sucesión geométrica, se presenta con frecuencia en aplicaciones.

Definición de sucesión geométrica

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es una **sucesión geométrica** si $a_1 \neq 0$ y si hay un número real $r \neq 0$ tal que para todo entero positivo k,

$$a_{k+1} = a_k r.$$

El número $r = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ se llama **razón común** de la sucesión.

Note que la razón común $r = a_{k+1}/a_k$ es la razón de dos términos sucesivos *cualesquiera* de una sucesión geométrica.

ILUSTRACIÓN **Sucesión geométrica y razón común**

- $6, -12, 24, -48, \ldots, (-2)^{n-1}(6), \ldots$ razón común $= \frac{-12}{6} = -2$
- $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots, (3)^{3-n}, \ldots$ razón común $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

La fórmula $a_{k+1} = a_k r$ da un método repetitivo para obtener términos de una sucesión geométrica. Empezando con cualquier número real a_1 diferente de cero, multiplicamos por el número r repetidas veces, obteniendo

$$a_1, \quad a_1 r, \quad a_1 r^2, \quad a_1 r^3, \quad \ldots .$$

El n-ésimo término a_n de esta sucesión está dado por la siguiente fórmula.

Fórmula para el n-ésimo término de una sucesión geométrica

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

o en general

$$a_n = a_k r^{n-k},$$

donde n y k son enteros positivos y r es una razón común.

EJEMPLO 1 **Hallar términos de una sucesión geométrica**

Una sucesión geométrica tiene 3 como primer término y una razón común de $-\frac{1}{2}$. Encuentre los primeros cinco términos y el décimo término.

SOLUCIÓN Si multiplicamos $a_1 = 3$ sucesivamente por $r = -\frac{1}{2}$, entonces los primeros cinco términos son

$$3, \quad -\tfrac{3}{2}, \quad \tfrac{3}{4}, \quad -\tfrac{3}{8}, \quad \tfrac{3}{16}.$$

Usando la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 10$, encontramos que el décimo término es

$$a_{10} = a_1 r^9 = 3\left(-\tfrac{1}{2}\right)^9 = -\tfrac{3}{512}.$$

■

EJEMPLO 2 **Hallar un término específico de una sucesión geométrica**

El tercer término de una sucesión geométrica es 5 y el sexto término es -40. Encuentre el primero y el octavo términos.

SOLUCIÓN 1 Nos dan $a_3 = 5$ y $a_6 = -40$ y deseamos hallar a_8. Los siguientes son sistemas equivalentes de ecuaciones con las variables a_1 y r:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 r^{3-1} & \text{sea } n = 3 \text{ en } a_n = a_1 r^{n-1} \\ a_6 = a_1 r^{6-1} & \text{sea } n = 6 \text{ en } a_n = a_1 r^{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a_1 r^2 & a_3 = 5 \\ -40 = a_1 r^5 & a_6 = -40 \end{cases}$$

Al despejar a_1 del primer sistema de ecuaciones tendremos $a_1 = 5/r^2$. Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación tendremos

$$-40 = \frac{5}{r^2} \cdot r^5.$$

Simplificando, obtenemos $r^3 = -8$ y por tanto $r = -2$. A continuación usamos $a_1 = 5/r^2$ para obtener

$$a_1 = \frac{5}{(-2)^2} = \frac{5}{4}.$$

Finalmente, usando $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 8$ tendremos

$$a_8 = a_1 r^7 = \left(\tfrac{5}{4}\right)(-2)^7 = -160.$$

SOLUCIÓN 2 En esta solución usamos la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión geométrica.

Encontrar r:

$$\begin{aligned} a_n &= a_k r^{n-k} && \text{fórmula del } n\text{-ésimo término} \\ a_6 &= a_3 r^{6-3} && n = 6,\ k = 3 \\ -40 &= 5r^3 && \text{términos dados} \\ -8 &= r^3 && \text{divida entre 5} \\ -2 &= r && \text{saque la raíz cúbica} \end{aligned}$$

Encontrar a_1:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 r^{3-1} && n = 3,\ k = 1 \\ 5 &= a_1(-2)^2 && a_3 = 5,\ r = -2 \\ \tfrac{5}{4} &= a_1 && \text{divida entre 4} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que se utilizó $k = 1$ para encontrar a_1, pero podríamos haber utilizado $k = 6$. Tal vez se pregunte si podríamos usar $n = 1$ y $k = 3$. Sí, y ello nos da $a_1 = a_3 r^{1-3}$, que se simplifica en $a_1 = 5(-2)^{-2}$ y, por último, $a_1 = \frac{5}{4}$.

Encontrar a_8:

$$\begin{aligned} a_8 &= a_6 r^{8-6} && n = 8,\ k = 6 \\ a_8 &= -40(-2)^2 && a_6 = -40,\ r = -2 \\ a_8 &= -160 && \text{simplifique} \end{aligned}$$

■

El siguiente teorema contiene una fórmula para la n-ésima suma parcial S_n de una sucesión geométrica.

Teorema: fórmula para S_n

La n-ésima suma parcial S_n de una sucesión geométrica con primer término a_1 y razón común $r \neq 1$ es

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

DEMOSTRACIÓN Por definición, la n-ésima suma parcial S_n de una sucesión geométrica es

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}. \tag{1}$$

Si multiplicamos ambos lados de (1) por r, obtenemos

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n. \tag{2}$$

Si restamos la ecuación (2) de la (1), se cancelan todos los términos del lado derecho con excepción de dos y obtenemos lo siguiente:

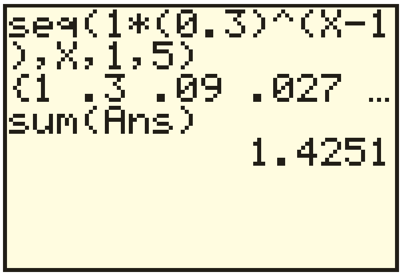
$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a_1 - a_1 r^n && \text{reste (2) de (1)} \\ S_n(1 - r) &= a_1(1 - r^n) && \text{factorice ambos lados} \\ S_n &= a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} && \text{divida entre } (1 - r) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 **Hallar una suma de términos de una sucesión geométrica**

Si la sucesión 1, 0.3, 0.09, 0.027, . . . es una sucesión geométrica, encuentre la suma de los primeros cinco términos

FIGURA 1



SOLUCIÓN Si hacemos $a_1 = 1$, $r = 0.3$ y $n = 5$ en la fórmula para S_n expresada en el teorema precedente, obtenemos

$$S_5 = a_1\frac{1 - r^5}{1 - r} = (1)\frac{1 - (0.3)^5}{1 - 0.3} = 1.4251.$$

(Vea en la figura 1 el apoyo de calculadora para este resultado.) ■

EJEMPLO 4 **El rápido crecimiento de términos de una sucesión geométrica**

Un hombre desea ahorrar dinero al separar 1 centavo el primer día, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día y así sucesivamente.

(a) Si él continúa duplicando la cantidad separada cada día, ¿cuánto debe haber ahorrado el quinceavo día?

(b) Suponiendo que no se le agote el dinero, ¿cuál es la cantidad ahorrada al término de 30 días?

SOLUCIÓN

(a) La cantidad (en centavos) separada en días sucesivos forma una sucesión geométrica

$$1, 2, 4, 8, \ldots,$$

con primer término 1 y razón común 2. Encontramos la cantidad por separar en el quinceavo día usando $a_n = a_1r^{n-1}$ con $a_1 = 1$ y $n = 15$:

$$a_{15} = a_1r^{14} = 1 \cdot 2^{14} = 16{,}384$$

Entonces, debe ahorrar \$163.84 en el quinceavo día.

(b) Para hallar la cantidad total ahorrada después de 30 días, usamos la fórmula para S_n con $n = 30$, obteniendo (en centavos)

$$S_{30} = (1)\frac{1 - 2^{30}}{1 - 2} = 1{,}073{,}741{,}823.$$

Por tanto, la cantidad total ahorrada es \$10,737,418.23. ■

La terminología empleada con sucesiones geométricas es análoga a la empleada con sucesiones aritméticas. Si a y b son números reales positivos, entonces un número positivo c se denomina **media geométrica** de a y b si a, c, b es una sucesión geométrica. Si la razón común es r, entonces

$$r = \frac{c}{a} = \frac{b}{c}, \qquad \text{o} \qquad c^2 = ab.$$

Sacando la raíz cuadrada de ambos lados de la última ecuación, vemos que *la media geométrica de los números positivos a y b es $\sqrt{ab}$*. Como generalización, k números reales positivos $c_1, c_2, \ldots, c_k$, son ***k* medias geométricas** entre a y b si $a, c_1, c_2, \ldots, c_k, b$ es una sucesión geométrica. El proceso de determinar estos números se conoce como *insertar k medias geométricas entre a y b*.

ILUSTRACIÓN **Medias geométricas**

	Números	Medias geométricas
■	20, 45	$\sqrt{20 \cdot 45} = \sqrt{900} = 30$
■	3, 4	$\sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{12} \approx 3.46$

Dada la serie geométrica con primer término a_1 y razón común $r \neq 1$, podemos escribir la fórmula para S_n del teorema precedente en la forma

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1}{1-r}r^n.$$

Si $|r| < 1$, entonces r^n *se aproxima a* 0 *cuando* n *aumenta* sin límite. Por tanto, S_n se aproxima a $a_1/(1-r)$ cuando n aumenta sin límite. Usando la notación desarrollada para funciones racionales de la sección 4.5, tenemos

$$S_n \to \frac{a_1}{1-r} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

El número $a_1/(1-r)$ se denomina *suma S* de la **serie geométrica infinita**

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots.$$

Esto nos da el siguiente resultado.

Teorema sobre la suma de una serie geométrica infinita

Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica infinita

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$$

tiene la suma

$$S = \frac{a_1}{1-r}.$$

El teorema precedente implica que cuando agregamos más términos de la serie geométrica infinita indicada, la suma se acerca a $a_1/(1-r)$. El siguiente ejemplo ilustra la forma en que se puede usar el teorema para demostrar que todo número real representado por un decimal periódico es racional.

EJEMPLO 5 **Expresar un decimal periódico infinito como número racional**

Encuentre un número racional que corresponda a $5.4\overline{27}$.

SOLUCIÓN Podemos escribir la expresión decimal 5.4272727. . . como

$$5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots.$$

Empezando con el segundo término, 0.027, esta suma tiene la forma dada en el teorema sobre la suma de una serie geométrica infinita, con $a_1 = 0.027$ y $r = 0.01$. Por tanto, la suma S de esta serie geométrica infinita es

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.027}{1-0.01} = \frac{0.027}{0.990} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}.$$

Entonces, el número deseado es

$$5.4 + \tfrac{3}{110} = \tfrac{594}{110} + \tfrac{3}{110} = \tfrac{597}{110}.$$

Una prueba por división muestra que $\frac{597}{110}$ corresponde a $5.4\overline{27}$. ■

En general, dada cualquier sucesión infinita, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, la expresión

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

se denomina **serie infinita** o simplemente una **serie.** Denotamos esta serie por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Cada número a_k es un **término** de la serie y a_n es el ***n*-ésimo término.** Como sólo sumas *finitas* se pueden agregar algebraicamente, es necesario definir lo que se entiende por *suma infinita.* Considere la sucesión de sumas parciales

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots.$$

Si hay un número S tal que $S_n \to S$ cuando $n \to \infty$, entonces, como en nuestra exposición de serie geométrica infinita, S es la **suma** de la serie infinita y escribimos

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

En el ejemplo previo encontramos que el decimal periódico infinito 5.4272727… corresponde al número racional $\frac{597}{110}$. Como $\frac{597}{110}$ es la suma de una serie infinita determinada por el decimal, podemos escribir

$$\frac{597}{110} = 5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots.$$

Si los términos de una sucesión infinita son alternadamente positivos y negativos, como en la expresión

$$a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + \cdots + [(-1)^{n+1}a_n] + \cdots$$

para números reales positivos a_k, entonces la expresión es una **serie alternante infinita** y la escribimos en la forma

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots.$$

Los tipos más comunes de serie infinita alterna son series geométricas infinitas en las que la razón común r es negativa.

EJEMPLO 6 **Hallar la suma de una serie geométrica infinita**

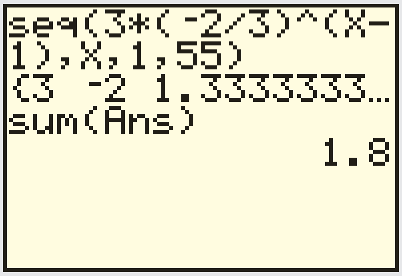
Hallar la suma S de la serie geométrica infinita alterna

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} = 3 - 2 + \tfrac{4}{3} - \tfrac{8}{9} + \cdots + 3\left(-\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots.$$

SOLUCIÓN Usando la fórmula para S en el teorema sobre la suma de una serie geométrica infinita, con $a_1 = 3$ y $r = -\frac{2}{3}$, obtenemos

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{3}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{5}.$$

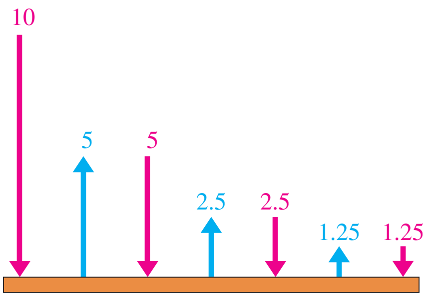
■



Para comprobar nuestro resultado del ejemplo 6, podemos sustituir ∞ con un número razonablemente grande y hallamos la suma de esa serie geométrica. Como se ve en la figura, usar 55 términos nos da 1.8, nuestra respuesta obtenida previamente.

Nota: la calculadora sólo da apoyo a nuestra respuesta; la fórmula debe usarse para hallar sumas de series geométricas infinitas.

FIGURA 2



EJEMPLO 7 **Una aplicación de una serie geométrica infinita**

Una pelota de caucho se deja caer desde una altura de 10 metros. Suponga que rebota la mitad de la distancia después de cada caída, como se ilustra con flechas en la figura 2. Encuentre la distancia total que se mueve la pelota.

SOLUCIÓN La suma de las distancias que baja la pelota y la suma de las distancias que se mueve en los rebotes forma dos series geométricas infinitas:

$$\textit{Serie hacia abajo:} \quad 10 + 5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots$$
$$\textit{Serie hacia arriba:} \quad 5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots$$

Suponemos que la distancia total S que se mueve la pelota se puede hallar al sumar las sumas de estas series infinitas. Esto nos da

$$\begin{aligned} S &= 10 + 2[5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots] \\ &= 10 + 2\left[5 + 5\left(\tfrac{1}{2}\right) + 5\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Usando la fórmula $S = a_1/(1 - r)$ con $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$, obtenemos

$$S = 10 + 2\left(\frac{5}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 10 + 2(10) = 30 \text{ m}.$$

Un **problema relacionado:** ¿alguna vez llega la pelota al reposo? Vea el ejercicio de análisis 7 al final de este capítulo. ■

10.3 Ejercicios

Ejer. 1–2: Demuestre que la sucesión dada es geométrica y encuentre la razón común.

1 $5, -\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \ldots, 5\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \ldots$

2 $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \ldots, \frac{1}{7}(3)^{n-1}, \ldots$

Ejer. 3–14: Encuentre el *n*-ésimo término, el quinto término y el octavo término de la sucesión geométrica.

3 $8, 4, 2, 1, \ldots$

4 $4, 1.2, 0.36, 0.108, \ldots$

5 $300, -30, 3, -0.3, \ldots$

6 $1, -\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, \ldots$

7 $5, 25, 125, 625, \ldots$

8 $2, 6, 18, 54, \ldots$

9 $4, -6, 9, -13.5, \ldots$

10 $162, -54, 18, -6, \ldots$

11 $1, -x^2, x^4, -x^6, \ldots$

12 $1, -\frac{x}{3}, \frac{x^2}{9}, -\frac{x^3}{27}, \ldots$

13 $2, 2^{x+1}, 2^{2x+1}, 2^{3x+1}, \ldots$

14 $10, 10^{2x-1}, 10^{4x-3}, 10^{6x-5}, \ldots$

Ejer. 15–18: Encuentre todos los posibles valores de *r* para una sucesión geométrica con los dos términos dados.

15 $a_3 = 7, a_6 = 56$

16 $a_4 = 1, a_7 = -27$

17 $a_4 = 3, a_6 = 9$

18 $a_3 = 4, a_7 = \frac{1}{4}$

Ejer. 19–26: Encuentre los términos específicos de la sucesión geométrica que tiene los dos términos dados.

19 a_6; $a_1 = 4,\quad a_2 = 6$

20 a_7; $a_2 = 3,\quad a_3 = -\sqrt{3}$

21 a_6; $a_2 = 3,\quad a_3 = -\sqrt{2}$

22 a_5; $a_1 = 4,\quad a_2 = 7$

23 a_{10}; $a_4 = 4,\quad a_7 = 12$

24 a_9; $a_2 = 3,\quad a_5 = -81$

25 a_7; $a_1 = -4,\quad a_3 = -1$

26 a_8; $a_2 = 3,\quad a_4 = 6$

Ejer. 27–30: Encuentre la suma S_n de la sucesión geométrica que satisface las condiciones dadas

27 $a_1 = \dfrac{3}{16},\quad r = 2,\quad n = 9$

28 $a_1 = \dfrac{17}{16},\quad r = 3,\quad n = 8$

29 $a_4 = 27,\quad r = \dfrac{1}{3},\quad n = 7$

30 $a_4 = \dfrac{4}{13},\quad r = \dfrac{1}{4},\quad n = 6$

Ejer. 31–36: Encuentre la suma.

31 $\sum_{k=1}^{10} 3^k$

32 $\sum_{k=1}^{9} (-\sqrt{5})^k$

33 $\sum_{k=0}^{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

34 $\sum_{k=1}^{7} (3^{-k})$

35 $\sum_{k=16}^{26} (2^{k-14} + 5j)$

36 $\sum_{k=8}^{14} (3^{k-7} + 2j^2)$

Ejer. 37–40: Exprese la suma en términos de notación de suma. (Las respuestas no son únicas.)

37 $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

38 $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$

39 $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{36} - \frac{1}{108}$

40 $3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \frac{3}{625}$

Ejer. 41–50: Encuentre la suma de la serie geométrica infinita si existe.

41 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

42 $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$

43 $1.5 + 0.015 + 0.00015 + \cdots$

44 $1 - 0.1 + 0.01 - 0.001 + \cdots$

45 $\sqrt{2} - 2 + \sqrt{8} - 4 + \cdots$

46 $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots$

47 $256 + 192 + 144 + 108 + \cdots$

48 $250 - 100 + 40 - 16 + \cdots$

49 $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{x^3}{27} + \cdots,\ |x| < 3$

50 $2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots,\ |x| < \frac{1}{2}$

Ejer. 51–58: Encuentre el número racional representado por el decimal periódico.

51 $0.\overline{23}$

52 $0.0\overline{71}$

53 $2.4\overline{17}$

54 $10.\overline{5}$

55 $5.\overline{146}$

56 $3.2\overline{394}$

57 $1.\overline{6124}$

58 $123.61\overline{83}$

59 Encuentre la media geométrica de 12 y 48.

60 Encuentre la media geométrica de 20 y 25.

61 Inserte dos medias geométricas entre 4 y 500.

62 Inserte tres medias geométricas entre 2 y 512.

63 **Uso de una bomba de vacío** Una bomba de vacío saca la mitad del aire de un recipiente en cada carrera del pistón. Después de 10 carreras del pistón, ¿qué porcentaje de la cantidad original de aire continúa en el recipiente?

64 **Cálculo de una depreciación** La depreciación anual de cierta máquina es 25% de su valor al principio del año. Si el costo original de la máquina es $20,000 ¿cuál es su valor después de 6 años?

65 **Crecimiento de bacterias** Cierto cultivo contiene inicialmente 10,000 bacterias y aumenta en 20% cada hora.

(a) Encuentre una fórmula para el número $N(t)$ de bacterias presentes después de t horas

(b) ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo al término de 10 horas?

66 **Intereses sobre ahorros** Una cantidad de dinero P se deposita en una cuenta de ahorros que paga interés a una tasa de r por ciento por año capitalizado trimestralmente; el principal y el interés acumulado se dejan en la cuenta. Encuentre una fórmula para la cantidad total en la cuenta después de n años.

67 **Pelota que rebota** Una pelota de caucho se deja caer desde una altura de 60 pies. Si rebota aproximadamente dos tercios de la distancia después de cada caída, use una serie geométrica infinita para calcular la distancia total que recorre la pelota

68 **Movimiento de un péndulo** La pesa de un péndulo oscila en un arco de 24 centímetros de largo en su primera oscilación. Si cada oscilación sucesiva es aproximadamente cinco sextos de la longitud de la precedente, use una serie geométrica infinita para calcular la distancia total que viaja la pesa.

69 **Efecto multiplicador** Una empresa fabricante que acaba de instalarse en una pequeña comunidad pagará dos millones de dólares por año en salarios. Se ha estimado que 60% de estos salarios se gastarán en la localidad y 60% del dinero gastado cambiará de manos otra vez dentro de la comunidad. Este proceso, llamado *efecto multiplicador,* se repite hasta el infinito. Encuentre la cantidad total de gasto local que será generado por los salarios de la compañía.

70 **Erradicación de plagas** En un programa de erradicación de plagas, N moscas macho esterilizadas se sueltan en una población general cada día. Se estima que 90% de estas moscas seguirán con vida en un día determinado.

(a) Demuestre que el número de moscas esterilizadas de la población n días después de iniciado el programa es

$$N + (0.9)N + (0.9)^2N + \cdots + (0.9)^{n-1}N.$$

(b) Si la meta del programa *a largo plazo* es mantener 20,000 moscas esterilizadas en la población, ¿cuántas moscas deben soltarse todos los días?

71 **Dosis de medicamento** Cierto medicamento tiene una vida media de 2 horas en el torrente sanguíneo; está formulado para ser administrado en dosis de D miligramos cada 4 horas pero D está por determinarse.

(a) Demuestre que el número de miligramos de medicamento en el torrente sanguíneo después que la n-ésima dosis se ha administrado es

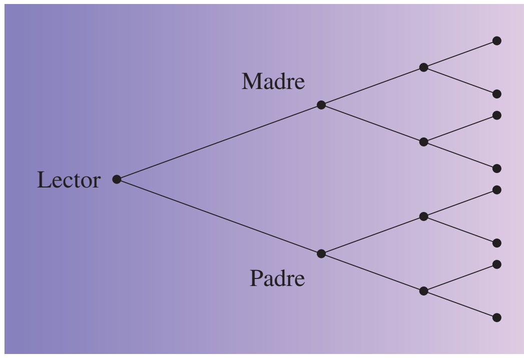
$$D + \tfrac{1}{4}D + \cdots + \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}D$$

y que esta suma es aproximadamente $\frac{4}{3}D$ para valores grandes de n.

(b) Un nivel de más de 500 miligramos del medicamento en el torrente sanguíneo se considera peligroso. Encuentre la dosis máxima que se pueda dar repetidamente en un periodo largo.

72 **Genealogía** En la figura se muestra un árbol genealógico que muestra la generación actual (el lector) y 3 generaciones anteriores, con un total de 12 abuelos. Si usted rastrea la historia de su familia hasta 10 generaciones, ¿cuántos abuelos encontraría?

EJERCICIO 72



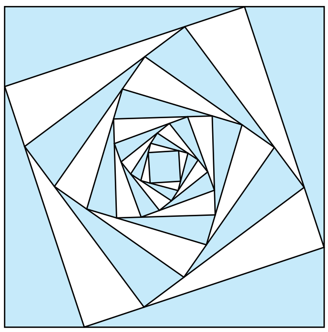
73 La primera figura muestra algunos términos de una sucesión de cuadrados $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$. Denote con a_k, A_k y P_k el lado, área y perímetro, respectivamente, del cuadrado S_k. El cuadrado S_{k+1} está construido a partir de S_k al conectar cuatro puntos en S_k, con cada punto una distancia de $\frac{1}{4}a_k$ desde un vértice, como se ve en la segunda figura.

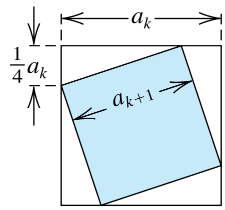
(a) Encuentre la relación entre a_{k+1} y a_k.

(b) Encuentre a_n, A_n, y P_n.

(c) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$.

EJERCICIO 73



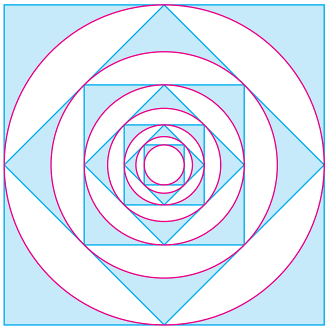


74 La figura muestra varios términos de una sucesión formada por círculos y cuadrados alternados. Cada círculo está inscrito en un cuadrado y cada cuadrado (excluyendo el mayor) está inscrito en un círculo. Denote con S_n el área del n-ésimo cuadrado y con C_n el área del n-ésimo círculo.

(a) Encuentre las relaciones entre S_n y C_n y entre C_n y S_{n+1}

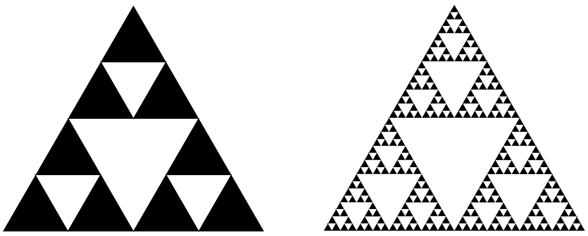
(b) ¿Qué parte del cuadrado más grande está sombreada en la figura?

EJERCICIO 74



75 Tamiz de Sierpinski El tamiz de Sierpinski, diseñado en 1915, es un ejemplo de un fractal (figura geométrica con cada parte igual al todo). Puede construirse comenzando con un triángulo equilátero negro sólido; este triángulo se divide en cuatro triángulos equiláteros congruentes y se elimina el triángulo del medio. En el siguiente paso, cada uno de los tres triángulos equiláteros restantes se divide en cuatro triángulos equiláteros congruentes, y se elimina el triángulo del medio de cada uno de estos triángulos, como se ve en la primera figura. En el tercer paso se eliminan nueve triángulos. Si el proceso se continúa indefinidamente, resulta el tamiz de Sierpinski (vea la segunda figura).

EJERCICIO 75



(a) Encuentre una sucesión geométrica a_k que dé el número de triángulos removidos en el k-ésimo paso

(b) Calcule el número de triángulos removidos en el decimoquinto paso.

(c) Suponga que el triángulo inicial tiene un área de 1 unidad. Encuentre una sucesión geométrica b_k que dé el área removida en el k-ésimo paso.

(d) Determine el área removida en el séptimo paso.

76 Tamiz de Sierpinski Consulte el ejercicio 75

(a) Escriba una serie geométrica que calcule el número total de triángulos removidos después de n pasos.

(b) Determine el número total de triángulos removidos después de 12 pasos.

(c) Escriba una serie geométrica que calcule el área total removida después de n pasos.

(d) Determine el área total removida después de 12 pasos

77 Anualidad Si se hace un depósito de \$100 en el primer día de cada mes en una cuenta que paga 6% de interés por año capitalizado mensualmente, determine la cantidad en la cuenta después de 18 años.

78 Anualidad Consulte el ejercicio 77. Demuestre que si el depósito mensual es P dólares y la tasa es r% por año capitalizada mensualmente, entonces la cantidad A en la cuenta después de n meses está dada por

$$A = P\left(\frac{12}{r} + 1\right)\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^n - 1\right].$$

79 Anualidad Use el ejercicio 78 para hallar A cuando $P =$ \$100, $r = 8\%$ y $n = 60$

80 Anualidad Consulte el ejercicio 78. Si $r = 10\%$, ¿aproximadamente cuántos años se requieren para acumular \$100,000 si el depósito mensual P es

(a) \$100 (b) \$200

Ejer. 81–82: El *método de doble disminución de saldo* es un método de depreciación en el que, después de cada año $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, el valor de una propiedad se reduce en la fracción $A_k = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1}$ de su costo inicial.

81 (a) Si $n = 5$, encuentre $A_1, A_2, \ldots, A_5$.

(b) Demuestre que la sucesión en (a) es geométrica y encuentre S_5.

(c) Si el valor inicial de una propiedad es \$25,000, ¿cuánto de su valor se ha depreciado después de 2 años?

82 (a) Si n es cualquier entero positivo, encuentre $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

(b) Demuestre que la sucesión en (a) es geométrica y encuentre S_n.

10.4 Inducción matemática

Si n es un entero positivo y con P_n denotamos el enunciado matemático $(xy)^n = x^n y^n$, obtenemos la siguiente *sucesión infinita de enunciados:*

$$\begin{array}{ll} \text{Enunciado } P_1\text{:} & (xy)^1 = x^1y^1 \\ \text{Enunciado } P_2\text{:} & (xy)^2 = x^2y^2 \\ \text{Enunciado } P_3\text{:} & (xy)^3 = x^3y^3 \\ \vdots & \vdots \\ \text{Enunciado } P_n\text{:} & (xy)^n = x^ny^n \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Es fácil demostrar que P_1, P_2 y P_3 son enunciados *verdaderos*, pero es imposible comprobar la validez de P_n para *todo* entero positivo n. Demostrar que P_n es verdadero para todo n requiere el siguiente principio.

Principio de inducción matemática

Si con cada entero positivo n está asociado un enunciado P_n, entonces todos los enunciados P_n son verdaderos, siempre que se satisfagan las siguientes dos condiciones.

(1) P_1 es verdadero.

(2) Siempre que k sea un entero positivo tal que P_k sea verdadero, entonces P_{k+1} también es verdadero.

Para ayudarnos a entender este principio, consideramos una sucesión infinita de enunciados marcados como

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$$

que satisfacen las condiciones (1) y (2). Por (1), el enunciado P_1 es verdadero. Como la condición (2) se cumple, siempre que el enunciado P_k sea verdadero el *siguiente* enunciado P_{k+1} también es verdadero. En consecuencia, como P_1 es verdadero, P_2 es también verdadero, por (2). No obstante, si P_2 es verdadero, entonces, por (2), vemos que el siguiente enunciado P_3 es verdadero. Una vez más, si P_3 es verdadero, entonces, por (2), P_4 también es verdadero. Si continuamos de este modo, podemos decir que si n es cualquier entero *particular*, entonces P_n es verdadero, porque podemos usar la condición (2) un paso a la vez, para finalmente llegar a P_n. Aun cuando este tipo de razonamiento no *demuestra* realmente el principio de inducción matemática, lo hace plausible. El principio se demuestra en álgebra avanzada usando postulados para los enteros positivos.

Cuando apliquemos el principio de inducción matemática, siempre seguiremos dos pasos.

Pasos al aplicar el principio de inducción matemática

1 Demostrar que P_1 es verdadero.

2 *Suponer* que P_k es verdadero y luego demostrar que P_{k+1} es verdadero.

Es frecuente que el paso 2 cause confusión. Note que no *demostramos* que P_k es verdadero (excepto para $k = 1$). En cambio, demostramos que *si* P_k es verdadero, entonces el enunciado P_{k+1} también es verdadero. Nos referimos a la suposición de que P_k es verdadero como la **hipótesis de inducción**

EJEMPLO 1 **Usar el principio de inducción matemática**

Use inducción matemática para demostrar que para todo entero positivo n, la suma de los primeros n enteros positivos es

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

SOLUCIÓN Si n es cualquier entero positivo, denotemos con P_n el enunciado

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Los siguientes son algunos casos especiales de P_n.

Si $n = 1$, entonces P_1 es

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}; \quad \text{esto es,} \quad 1 = 1.$$

Si $n = 2$, entonces P_2 es

$$1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}; \quad \text{esto es,} \quad 3 = 3.$$

Si $n = 3$, entonces P_3 es

$$1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2}; \quad \text{esto es,} \quad 6 = 6.$$

Aun cuando es instructivo comprobar la validez de P_n para diversos valores de n como lo hemos hecho, no es necesario hacerlo. Sólo necesitamos aplicar el proceso de dos pasos indicado antes de este ejemplo. Entonces, procedemos como sigue:

Paso 1 Si sustituimos $n = 1$ en P_n, entonces el lado izquierdo contiene sólo el número 1 y el lado derecho es $\frac{1(1+1)}{2}$, que también es igual a 1. Por tanto, P_1 es verdadero.

Paso 2 Suponga que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Nuestra meta es demostrar que P_{k+1} es verdadero, es decir, que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Podemos demostrar que la última fórmula es verdadera al reescribir el lado izquierdo y usar la hipótesis de inducción como sigue:

(continúa)

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) &= (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k + 1) && \text{agrupe los primeros términos } k \\
&= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) && \text{hipótesis de inducción} \\
&= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} && \text{sume términos} \\
&= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} && \text{factorice } k + 1 \\
&= \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2} && \text{cambie forma de } k + 2
\end{aligned}$$

Esto demuestra que P_{k+1} es verdadero y por lo tanto la demostración por inducción matemática está completa. ■

EJEMPLO 2 **Usar el principio de inducción matemática**

Demuestre que para cada entero positivo n,

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}.$$

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, denotemos con P_n el enunciado dado. Note que ésta es una fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos nones. De nuevo seguimos el procedimiento de dos pasos.

Paso 1 Sustituyendo 1 por n en P_n, obtenemos

$$\begin{aligned}
1^2 &= \frac{(1)(2 - 1)(2 + 1)}{3} \\
&= \frac{3}{3} = 1.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que P_1 es verdadero.

Paso 2 Suponga que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k - 1)^2 = \frac{k(2k - 1)(2k + 1)}{3}.$$

Deseamos demostrar que P_{k+1} es verdadero; es decir, que

$$1^2 + 3^2 + \cdots + [2(k + 1) - 1]^2 = \frac{(k + 1)[2(k + 1) - 1][2(k + 1) + 1]}{3}.$$

Esta ecuación se simplifica a

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(2k + 1)(2k + 3)}{3}.$$

Recuerde que el término siguiente al último en el lado izquierdo de la ecuación (el k-ésimo término) es $(2k - 1)^2$. De un modo semejante al empleado en la solución del ejemplo 1, podemos demostrar la fórmula para P_{k+1} al reescribir el lado izquierdo y usar la hipótesis de inducción como sigue:

$$
\begin{aligned}
1^2 + 3^2 + \cdots + (2k+1)^2 &= [1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2] + (2k+1)^2 && \text{agrupe los primeros términos } k \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 && \text{hipótesis de inducción} \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} && \text{sume términos} \\
&= \frac{(2k+1)[k(2k-1) + 3(2k+1)]}{3} && \text{factorice } 2k+1 \\
&= \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3} && \text{simplifique} \\
&= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} && \text{factorice y cambie el orden}
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que P_{k+1} es verdadero y por tanto P_n es verdadero para toda n. ■

EJEMPLO 3 **Usar el principio de inducción matemática**

Demuestre que 2 es un factor de $n^2 + 5n$ para todo entero positivo n.

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, denotemos con P_n el siguiente enunciado:

$$2 \text{ es un factor de } n^2 + 5n$$

Seguiremos el procedimiento de dos pasos.

Paso 1 Si $n = 1$, entonces

$$n^2 + 5n = 1^2 + 5 \cdot 1 = 6 = 2 \cdot 3.$$

Así, 2 es un factor de $n^2 + 5n$ para $n = 1$; esto es, P_1 es verdadero.

Paso 2 Suponga que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$2 \text{ es un factor de } k^2 + 5k$$

o bien, lo que es equivalente, $k^2 + 5k = 2p$

para algún entero p.

Deseamos demostrar que P_{k+1} es verdadero; es decir, que

$$2 \text{ es un factor de } (k+1)^2 + 5(k+1).$$

Podemos hacer esto como sigue

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 + 5(k+1) &= k^2 + 2k + 1 + 5k + 5 && \text{multiplique} \\
&= (k^2 + 5k) + (2k + 6) && \text{reacomode términos} \\
&= 2p + 2(k+3) && \text{hipótesis de inducción, factorice } 2k+6 \\
&= 2(p + k + 3) && \text{factorice 2}
\end{aligned}
$$

Como 2 es un factor de la última expresión, P_{k+1} es verdadero y, por lo tanto P_n es verdadero para toda n. ■

Sea j un entero positivo y suponga que con cada entero $n \geq j$ está asociado un enunciado P_n. Por ejemplo, si $j = 6$, entonces los enunciados están numerados $P_6, P_7, P_8, \ldots$. El principio de inducción matemática se puede extender para abarcar esta situación. Para demostrar que los enunciados P_n son verdaderos para $n \geq j$, usamos los siguientes dos pasos en la misma forma que hicimos para $n \geq 1$.

Pasos al aplicar el principio extendido de inducción matemática para P_k, $k \geq j$

1. Demuestre que P_j es verdadero.
2. Suponga que P_k es verdadero con $k \geq j$ y luego demuestre que P_{k+1} es verdadero.

EJEMPLO 4 **Usar el principio extendido de inducción matemática**

Sea a un número real diferente de cero tal que $a > -1$. Demuestre que

$$(1 + a)^n > 1 + na$$

para todo entero $n \geq 2$.

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, denotemos con P_n la desigualdad $(1 + a)^n > 1 + na$. Note que P_1 es *falso*, porque $(1 + a)^1 = 1 + (1)(a)$. No obstante, podemos demostrar que P_n es verdadero para $n \geq 2$ si usamos el principio extendido con $j = 2$.

Paso 1 Primero observamos que $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$. Como $a \neq 0$, tenemos $a^2 > 0$ y por tanto $1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$ o, lo que es equivalente, $(1 + a)^2 > 1 + 2a$. Por lo tanto, P_2 es verdadero.

Paso 2 Suponga que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$(1 + a)^k > 1 + ka.$$

Deseamos demostrar que P_{k+1} es verdadero; es decir, que

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

Para demostrar la última desigualdad, primero observamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (1 + a)^{k+1} &= (1 + a)^k(1 + a)^1 && \text{ley de exponentes} \\ &> (1 + ka)(1 + a) && \text{hipótesis de inducción y } 1 + a > 0 \end{aligned}$$

A continuación vemos que

$$\begin{aligned} (1 + ka)(1 + a) &= 1 + ka + a + ka^2 && \text{multiplique} \\ &= 1 + (ka + a) + ka^2 && \text{agrupe términos} \\ &= 1 + (k + 1)a + ka^2 && \text{factorice } a \\ &> 1 + (k + 1)a. && \text{porque } ka^2 > 0 \end{aligned}$$

Las últimas dos desigualdades nos dan

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

Entonces, P_{k+1} es verdadero y la demostración por inducción matemática está completa. ■

Hemos visto diversos ejemplos de demostración de enunciados al usar el principio de inducción matemática. El lector se puede preguntar "¿de dónde vienen estos enunciados?". Es frecuente que estos enunciados sean "descubiertos" al observar patrones, combinar resultados de varios campos de las matemáticas o al reconocer ciertos tipos o categorías de relaciones. Dos de estos enunciados se dan en los ejercicios 41 y 42 en esta sección, y dos enunciados más (ligeramente más difíciles) se dan en los ejercicios de análisis 3 y 4 al final del capítulo.

10.4 Ejercicios

Ejer. 1–28: Demuestre que el enunciado es verdadero para todo entero positivo *n*

1 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

2 $4 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n(n + 1)$

3 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

4 $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n - 3) = 3n^2$

5 $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n - 3) = \frac{1}{2}n(5n - 1)$

6 $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$

7 $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

8 $3 + 12 + 48 + \cdots + 3 \cdot 4^{n-1} = 4^n - 1$

9 $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n - 1) \cdot 2^n$

10 $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$

11 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

12 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n + 1)}{2}\right]^2$

13 $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$

14 $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \dfrac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$

15 $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

16 $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

17 $n < 2^n$

18 $1 + 2n \leq 3^n$

19 $1 + 2 + 3 + \cdots + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

20 Si $0 < a < b$, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} < \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

21 3 is a factor of $n^3 - n + 3$.

22 2 es un factor $n^2 + n$.

23 4 es un factor de $5^n - 1$.

24 9 es un factor de $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$.

25 Si a es mayor que 1, entonces $a^n > 1$.

26 Si $r \neq 1$, entonces

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

27 $a - b$ es un factor de $a^n - b^n$.
(*Sugerencia:* $a^{k+1} - b^{k+1} = a^k(a - b) + (a^k - b^k)b$.)

28 $a + b$ es un factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$.

Ejer. 29–34: Encuentre el mínimo entero positivo *j* para el cual el enunciado es verdadero. Use el principio extendido de inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todo entero mayor que *j*.

29 $n + 12 \leq n^2$

30 $n^2 + 18 \leq n^3$

31 $5 + \log_2 n \leq n$

32 $n^2 \leq 2^n$

33 $2n + 2 \leq 2^n$

34 $n \log_2 n + 20 \leq n^2$

Ejer. 35–40: Exprese la suma en términos de *n*. (*Sugerencia:* de la sección 10.1, use el teorema sobre sumas, ejemplo 6, y el teorema de la suma de una constante; también use los ejercicios 11 y 12 anteriores.)

35 $\sum_{k=1}^{n} (k + 2)$

36 $\sum_{k=1}^{n} (k - 3)$

37 $\sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 5)$

38 $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 2k + 1)$

39 $\sum_{k=1}^{n} (4k^3 + 2k - 1)$

40 $\sum_{k=1}^{n} (k^3 + 2k^2 - k + 4)$

Ejer. 41–42: (a) Evalúe la fórmula dada para los valores expresados de *n*, y resuelva el sistema de ecuaciones resultante para *a*, *b*, *c* y *d*. (Este método se puede usar a veces para obtener fórmulas para sumas.) (b) Compare el resultado del inciso (a) con el ejercicio indicado y explique por qué este método no demuestra que la fórmula es verdadera para toda *n*.

41 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn$;
$n = 1, 2, 3$ (ejercicio 11)

42 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$;
$n = 1, 2, 3, 4$ (ejercicio 12)

Ejer. 43–46: Demuestre que el enunciado es verdadero para todo entero positivo *n*.

43 $\operatorname{sen}(\theta + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta$

44 $\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$

45 Demuestre el teorema de De Moivre

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

para todo entero positivo n.

46 Demuestre que para todo entero positivo $n \geq 3$, la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados está dada por la expresión $(n - 2) \cdot 180°$.

10.5 El teorema del binomio

Un **binomio** es una suma $a + b$, donde a y b representan números. Si n es un entero positivo, entonces una fórmula general para *expandir* $(a + b)^n$ (esto es, para expresarlo como suma) está dada por el **teorema del binomio.** En esta sección usaremos inducción matemática para establecer esta fórmula general. Los siguientes casos especiales se pueden obtener por multiplicación:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Estas expresiones de $(a + b)^n$ para $n = 2, 3, 4$ y 5 tienen las siguientes propiedades:

(1) Hay $n + 1$ términos, siendo a^n el primero y b^n el último.

(2) Al proseguir desde cualquier término al siguiente, la potencia de a disminuye en 1 y la potencia de b aumenta en 1. Para cada término, la suma de los exponentes de a y b es n.

(3) Cada término tiene la forma $(c)a^{n-k}b^k$, donde el coeficiente c es un entero y $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(4) La siguiente fórmula es verdadera para cada uno de los primeros n términos de la expansión:

$$\frac{(\text{coeficiente de término}) \cdot (\text{exponente de } a)}{\text{número de término}} = \text{coeficiente del siguiente término}$$

La tabla siguiente ilustra la propiedad 4 para la expansión de $(a + b)^5$.

Término	Número de término	Coeficiente de término	Exponente de *a*	Coeficiente del siguiente término
a^5	1	1	5	$\frac{1 \cdot 5}{1} = 5$
$5a^4b$	2	5	4	$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$
$10a^3b^2$	3	10	3	$\frac{10 \cdot 3}{3} = 10$
$10a^2b^3$	4	10	2	$\frac{10 \cdot 2}{4} = 5$
$5ab^4$	5	5	1	$\frac{5 \cdot 1}{5} = 1$

A continuación consideremos $(a + b)^n$ para un entero positivo arbitrario n. El primer término es a^n, que tiene coeficiente 1. Si suponemos que la propiedad 4 es verdadera, obtenemos los coeficientes sucesivos que aparecen en la tabla siguiente.

Término	Número de término	Coeficiente de término	Exponente de a	Coeficiente del término siguiente
a^n	1	1	n	$\frac{1 \cdot n}{1} = n$
$\frac{n}{1} a^{n-1} b$	2	$\frac{n}{1}$	$n - 1$	$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$
$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} a^{n-2} b^2$	3	$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$	$n - 2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3} b^3$	4	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$	$n - 3$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

El patrón que aparece en la quinta columna lleva a la siguiente fórmula para el coeficiente del término general.

Coeficiente del $(k + 1)$-ésimo término de la expansión de $(a + b)^n$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

El $(k + 1)$-ésimo coeficiente se puede escribir en una forma compacta usando **notación factorial.** Si n es cualquier entero no negativo, entonces el símbolo $n!$ (*n factorial*) se define como sigue.

Definición de $n!$

(1) $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 1 \quad \text{si} \quad n > 0$

(2) $0! = 1$

Por lo tanto, si $n > 0$, entonces $n!$ es el producto de los primeros n enteros positivos. La definición $0! = 1$ se usa para que ciertas fórmulas que contengan factoriales sean verdaderas para todos los enteros *no negativos*

ILUSTRACIÓN ***n* factorial**

- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
- $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40{,}320$

Note el rápido crecimiento de $n!$ a medida que n aumenta.

Las aproximaciones factoriales se muestran a tres lugares decimales. (El número de lugares decimales se puede cambiar con MODE.)

Factoriales 20 MATH ◁ 4 ENTER

```
20!
        2.433e18
30!
        2.653e32
40!
        8.159e47
```

A veces deseamos simplificar cocientes donde numerador y denominador contienen factoriales, como se muestra en la ilustración siguiente.

ILUSTRACIÓN **Simplificar cocientes de factoriales**

- $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$
- $\dfrac{10!}{6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

Al igual que en la ilustración precedente, si n y k son enteros positivos y $k < n$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) \cdot [(n-k)!]}{(n-k)!} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1),\end{aligned}$$

que es el numerador del coeficiente del $(k+1)$-ésimo término de $(a+b)^n$. Dividiendo entre el denominador $k!$ tendremos la siguiente forma alternativa para el $(k+1)$-ésimo coeficiente:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Estos números se denominan **coeficientes binomiales** y con frecuencias se denotan con el símbolo $\dbinom{n}{k}$ o el símbolo $C(n, k)$. Por lo tanto, tenemos lo siguiente.

Coeficiente del $(k+1)$-ésimo término de la expansión de $(a+b)^n$ (forma alternativa)

$$\binom{n}{k} = C(n, k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Los símbolos $\dbinom{n}{k}$ y $C(n, k)$ se leen a veces como “n selecciona k.”

EJEMPLO 1 **Evaluar $\dbinom{n}{k}$**

Encuentre $\dbinom{5}{0}, \dbinom{5}{1}, \dbinom{5}{2}, \dbinom{5}{3}, \dbinom{5}{4}$ y $\dbinom{5}{5}$.

SOLUCIÓN Estos seis números son los coeficientes en la expansión de $(a + b)^5$, que tabulamos ya antes en esta sección. Por definición,

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!\,(5-0)!} = \frac{5!}{0!\,5!} = \frac{5!}{1 \cdot 5!} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} = \frac{5!}{1!\,4!} = \frac{5!}{1 \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,(5-4)!} = \frac{5!}{4!\,1!} = \frac{5!}{4! \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$$

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!\,(5-5)!} = \frac{5!}{5!\,0!} = \frac{5!}{5! \cdot 1} = 1.$$ ■

EJEMPLO 2 **Simplificar un cociente de factoriales**

Reescriba $(3n + 3)!/(3n)!$ Como una expresión que no contenga factoriales.

SOLUCIÓN Por la definición de $n!$, podemos escribir $(3n + 3)!$ Como

$$(3n + 3)(3n + 2)(3n + 1)\underbrace{(3n)(3n - 1)(3n - 2)\cdots(3)(2)(1)}_{(3n)!}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{(3n+3)!}{(3n)!} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)}!}{\cancel{(3n)}!} && \text{definición de } n!\\ &= (3n+3)(3n+2)(3n+1). && \text{cancele } (3n)! \neq 0\end{aligned}$$ ■

El teorema del binomio se puede expresar como sigue.

El teorema del binomio

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

Usando notación de suma, podemos escribir el teorema del binomio como

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Note que hay $n + 1$ términos (no n términos) en la expansión $(a + b)^n$, y por lo tanto

$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ es una fórmula para el $(k + 1)$-ésimo término de la expansión.

Un enunciado alternativo del teorema del binomio es como sigue. (al final de esta sección se da una prueba.)

El teorema del binomio (forma alternativa)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

Los ejemplos siguientes se pueden resolver ya sea usando las fórmulas generales para el teorema del binomio o por el uso repetido de la propiedad 4, expresada al principio de esta sección.

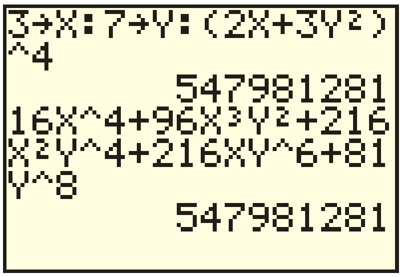
EJEMPLO 3 Hallar una expansión al binomio

Encuentre la expansión binomial de $(2x + 3y^2)^4$.

SOLUCIÓN Usamos el teorema del binomio con $a = 2x$, $b = 3y^2$ y $n = 4$:

$$\begin{aligned}(2x+3y^2)^4 &= (2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(3y^2)^1 + \binom{4}{2}(2x)^2(3y^2)^2 + \binom{4}{3}(2x)^1(3y^2)^3 + (3y^2)^4\\ &= 16x^4 + 4(8x^3)(3y^2) + 6(4x^2)(9y^4) + 4(2x)(27y^6) + 81y^8\\ &= 16x^4 + 96x^3y^2 + 216x^2y^4 + 216xy^6 + 81y^8\end{aligned}$$

FIGURA 1



Al examinar los términos de la expansión de izquierda a derecha, vemos que los exponentes en x disminuyen en 1 y que los exponentes en y aumentan en 2. Es buena idea comprobar los patrones de exponentes después de simplificar una expansión al binomio.

La figura 1 apoya la corrección de la expansión. ■

El siguiente ejemplo ilustra que si a o b es negativa, entonces los términos de la expansión son alternadamente positivos y negativos.

EJEMPLO 4 Hallar una expansión al binomio

Expanda $\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5$.

SOLUCIÓN Los coeficientes binomiales para $(a + b)^5$ se calcularon en el ejemplo 1. Por lo tanto, si hacemos $a = 1/x$, $b = -2\sqrt{x}$ y $n = 5$ en el teorema del binomio, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 = \left(\frac{1}{x}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{x}\right)^4(-2\sqrt{x})^1 + 10\left(\frac{1}{x}\right)^3(-2\sqrt{x})^2\\ + 10\left(\frac{1}{x}\right)^2(-2\sqrt{x})^3 + 5\left(\frac{1}{x}\right)^1(-2\sqrt{x})^4 + (-2\sqrt{x})^5,\end{aligned}$$

que se pueden escribir como

$$\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 = \frac{1}{x^5} - \frac{10}{x^{7/2}} + \frac{40}{x^2} - \frac{80}{x^{1/2}} + 80x - 32x^{5/2}.$$ ■

Para hallar un término específico de $(a + b)^n$, es conveniente primero hallar el exponente k que se ha de asignar a b. Nótese que, por el teorema del binomio, *el exponente de b es siempre uno menos que el número del término.* Una vez hallada k, sabemos que el exponente de a es $n - k$ y el coeficiente es $\binom{n}{k}$.

EJEMPLO 5 **Hallar un término específico de una expansión al binomio**

Hallar el quinto término en la expansión de $(x^3 + \sqrt{y})^{13}$.

SOLUCIÓN Sea $a = x^3$ y $b = \sqrt{y}$. El exponente de b en el quinto término es $k = 5 - 1 = 4$, y por tanto el exponente de a es $n - k = 13 - 4 = 9$. De la exposición del párrafo precedente obtenemos

$(k + 1)$ término $= \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

$$\binom{13}{4}(x^3)^9(\sqrt{y})^4 = \frac{13!}{4!\,(13-4)!}x^{27}y^2 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4!}x^{27}y^2 = 715x^{27}y^2.$$

■

EJEMPLO 6 **Hallar un término específico de una expansión al binomio**

Encuentre el término que contenga q^{10} en la expansión binomial de $\left(\frac{1}{3}p + q^2\right)^{12}$.

SOLUCIÓN Del enunciado del teorema del binomio con $a = \frac{1}{3}p$, $b = q^2$ y $n = 12$, cada término de la expansión tiene la forma

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{12}{k}\left(\frac{1}{3}p\right)^{12-k}(q^2)^k.$$

Como $(q^2)^k = q^{2k}$, debemos hacer $k = 5$ para obtener el término que contenga q^{10}. Al hacer esto tendremos

$$\binom{12}{5}\left(\frac{1}{3}p\right)^{12-5}(q^2)^5 = \frac{12!}{5!\,(12-5)!}\left(\frac{1}{3}\right)^7 p^7q^{10} = \frac{88}{243}p^7q^{10}.$$

■

Hay un interesante conjunto triangular de números, llamado **triángulo de Pascal**, que se puede usar para obtener coeficientes binomiales. Los números están dispuestos como sigue:

```
                  1
               1     1
            1     2     1
         1     3     3     1
      1     4     6     4     1
   1     5    10    10     5     1
1     6    15    20    15     6     1
   .     .     .     .     .     .     .     .
.     .     .     .     .     .     .     .     .
```

Los números de la segunda fila son los coeficientes de la expansión de $(a + b)^1$; los de la tercera fila son los coeficientes determinados por $(a + b)^2$; los de la cuarta fila se obtienen de $(a + b)^3$; y así sucesivamente. Cada número del conjunto que es diferente de 1 se puede hallar al sumar los dos números de la fila previa que aparecen arriba e inmediatamente a la izquierda y derecha del número, como se ilustra en la solución del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Usar el triángulo de Pascal

Encuentre la octava fila del triángulo de Pascal y úsela para expandir $(a + b)^7$.

SOLUCIÓN Reescribamos la séptima fila y luego usemos el proceso descrito líneas antes. En la siguiente serie de números, las flechas indican que dos números de la séptima fila se suman para obtener los números de la octava fila.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\ 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \end{array}$$

La octava fila nos da los coeficientes de la expansión de $(a + b)^7$:

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

■

El triángulo de Pascal es útil para expandir pequeñas potencias de $a + b$; no obstante, para expandir potencias grandes o hallar un término específico, como en los ejemplos 5 y 6, la fórmula general dada por el teorema del binomio es más útil.

Concluiremos esta sección dando una demostración del teorema del binomio mediante el uso de inducción matemática.

Demostración del teorema del binomio Para cada entero positivo n, denotemos con P_n el enunciado dado en la forma alternativa del teorema del binomio.

Paso 1 Si $n = 1$, el enunciado se reduce a $(a + b)^1 = a^1 + b^1$. En consecuencia, P_1 es verdadero.

Paso 2 Suponga que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$(a + b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^{r-1} + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r}b^r + \cdots + kab^{k-1} + b^k.$$

Hemos demostrado el r-ésimo término y el $(r + 1)$-ésimo término en la expansión anterior.

Para demostrar que P_{k+1} es verdadero, primero escribimos

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)^k(a + b).$$

Usando la hipótesis de inducción para sustituir por $(a + b)^k$ y luego multiplicando esa expresión por $a + b$, obtenemos

$$(a + b)^{k+1} = \left[a^{k+1} + ka^kb + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r+1}b^r + \cdots + ab^k\right] + \left[a^kb + ka^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^r + \cdots + kab^k + b^{k+1}\right],$$

donde los términos del primer par de corchetes resultan de multiplicar por a el lado derecho de la hipótesis de inducción y los términos del segundo par de corchetes resultan de multiplicar por b. A continuación reacomodamos y combinamos términos:

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + (k + 1)a^k b + \left(\frac{k(k-1)}{2!} + k\right)a^{k-1}b^2 + \cdots$$
$$+ \left(\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}\right)a^{k-r+1}b^r$$
$$+ \cdots + (1 + k)ab^k + b^{k+1}$$

Si los coeficientes se simplifican, obtenemos el enunciado P_n con $k + 1$ sustituido por n. Entonces, P_{k+1} es verdadero y por tanto P_n se cumple para todo entero positivo n, lo que completa la demostración. ■

10.5 Ejercicios

Ejer. 1–12: Evalúe la expresión.

1 $6!0!$

2 $8!0!$

3 $3!5!$

4 $4!7!$

5 $\dfrac{8!}{5!}$

6 $\dfrac{6!}{3!}$

7 $\dbinom{8}{0}$

8 $\dbinom{9}{9}$

9 $\dbinom{7}{5}$

10 $\dbinom{8}{4}$

11 $\dbinom{52}{5}$

12 $\dbinom{52}{2}$

Ejer. 13–18: Reescriba como una expresión que no contenga factoriales.

13 $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

14 $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

15 $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}$

16 $\dfrac{(3n+1)!}{(3n-1)!}$

17 $\dfrac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2}$

18 $\dfrac{[(2n+2)!]^2}{[(2n)!]^2}$

Ejer. 19–32: Use el teorema del binomio para expandir y simplificar.

19 $(4x - y)^3$

20 $(x^2 + 2y)^3$

21 $(x + y)^6$

22 $(x + y)^4$

23 $(x - y)^7$

24 $(x - y)^6$

25 $(3t - 5s)^4$

26 $(2t - s)^5$

27 $\left(\frac{1}{3}x + y^2\right)^5$

28 $\left(\frac{1}{2}x + y^3\right)^4$

29 $\left(\dfrac{1}{x^2} + 3x\right)^6$

30 $\left(\dfrac{1}{x^3} - 2x\right)^5$

31 $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

32 $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

Ejer. 33–50: Sin expandir completamente, encuentre el (los) término(s) indicado(s) en la expansión de la expresión.

33 $(x^3 - 2x^{-2})^8$; primeros dos términos

34 $(2x^4 + 3x^{-2})^6$; primeros dos términos

35 $(3c^{2/5} + c^{4/5})^{25}$; primeros tres términos

36 $(x^3 + 5x^{-2})^{20}$; primeros tres términos

37 $(4z^{-1} - 3z)^{15}$; últimos tres términos

38 $(s - 2t^3)^{12}$; últimos tres términos

39 $\left(\dfrac{3}{c} + \dfrac{c^2}{4}\right)^7$; sexto término

40 $\left(3x^2 - \sqrt{y}\right)^9$; quinto término

41 $\left(\frac{1}{3}u + 4v\right)^8$; séptimo término

42 $(3x^2 - y^3)^{10}$; cuarto término

43 $(x^{1/2} + y^{1/2})^8$; término medio

44 $(rs^2 + t)^7$; dos términos medios

45 $(2y + x^2)^8$; término que contenga x^{10}

46 $(x^2 - 2y^3)^5$; término que contenga y^6

47 $(3y^3 - 2x^2)^4$; término que contenga y^9

48 $\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right)^8$; término que contenga c^2

49 $\left(3x - \dfrac{1}{4x}\right)^6$; término que no contenga x

50 $(xy - 3y^{-3})^8$; término que no contenga y

51 Calcule $(1.2)^{10}$ usando los primeros tres términos en la expansión de $(1 + 0.2)^{10}$ y compare su respuesta con la obtenida usando calculadora.

52 Calcule $(0.9)^4$ usando los primeros tres términos en la expansión de $(1 - 0.1)^4$ y compare su respuesta con la obtenida usando calculadora.

Ejer. 53–54: Simplifique la expresión usando el teorema del binomio.

53 $\dfrac{(x + h)^4 - x^4}{h}$

54 $\dfrac{(x + h)^5 - x^5}{h}$

55 Demuestre que $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n - 1}$ para $n \geq 1$.

56 Demuestre que $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n}$ para $n \geq 0$.

10.6 Permutaciones

Suponga que cuatro equipos participan en un torneo en el que se van a determinar el primero, segundo, tercero y cuarto lugares. Para identificarlos, marcamos los equipos A, B, C y D. Encontremos el número de diferentes formas en que el primero y segundo lugares se pueden decidir. Es conveniente usar un **diagrama de árbol,** como en la figura 1. Después de la palabra INICIO, aparecen las cuatro posibilidades para primer lugar. De cada una de éstas, una flecha apunta a un posible ganador del segundo lugar. Las posiciones finales indican los posibles resultados, de izquierda a derecha. Se encuentran al seguir las diferentes trayectorias (*ramas* del árbol) que llevan de la palabra INICIO al equipo en segundo lugar. El número total de resultados es 12, que es el producto del número de opciones (4) para el primer lugar y el número de opciones (3) para el segundo lugar (después que el primero se haya determinado).

Encontremos ahora el número total de formas en que se pueden llenar las posiciones primera, segunda, tercera y cuarta. Para trazar un diagrama de árbol, podemos empezar por dibujar flechas desde la palabra INICIO a cada posible ganador A, B, C o D del primer lugar. A continuación trazamos flechas de éstos a los posibles ganadores del segundo lugar, como se hizo en la figura 1. Desde cada posición de segundo lugar trazamos entonces flechas que indiquen las posibles posiciones en tercer lugar. Por último, trazamos flechas al equipo en cuarto lugar. Si consideramos sólo el caso en el que el equipo A termine en primer lugar, tenemos el diagrama que se muestra en la figura 2.

FIGURA 1

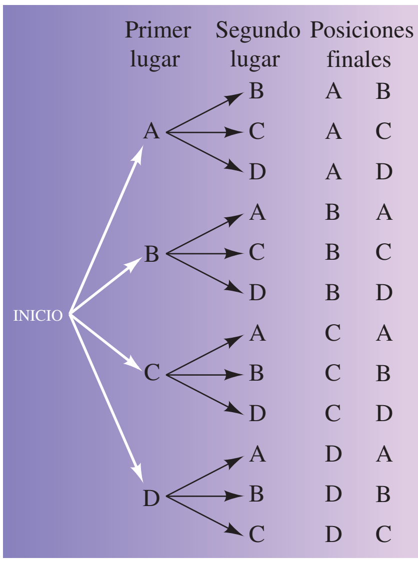
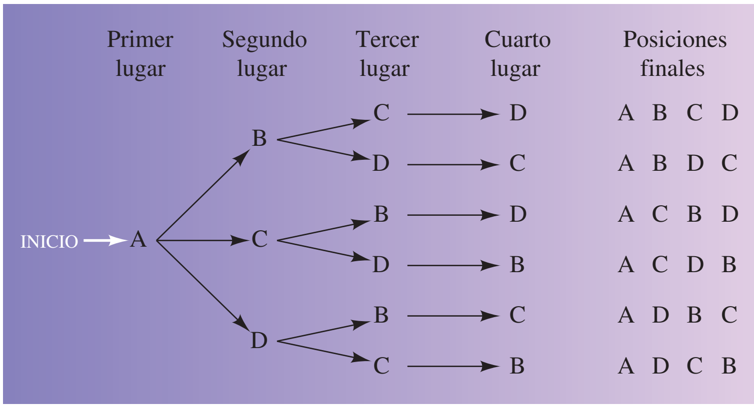


FIGURA 2



Note que hay seis posibles posiciones finales en las que el equipo A ocupa el primer lugar. En un diagrama de árbol completo habría también otras tres ramas de este tipo correspondientes a llegadas en primer lugar para B, C y D. Un diagrama completo mostraría las siguientes 24 posibilidades para las posiciones finales:

A primero	ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB,
B primero	BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA,
C primero	CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA,
D primero	DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.

Note que el número de posibilidades (24) es el producto del número de formas (4) en que el primer lugar puede ocurrir, el número de formas (3) en que el segundo lugar puede ocurrir (después que el primer lugar se haya determinado), el número de posibles resultados (2) para el tercer lugar (después que los primeros dos lugares se hayan determinado) y el número de formas (1) en que el cuarto lugar puede presentarse (después que los tres primeros lugares se hayan tomado).

La exposición precedente ilustra la siguiente regla general, que aceptamos como axioma básico de conteo.

Principio fundamental de conteo

Sea $E_1, E_2, \ldots, E_k$ una sucesión de k eventos. Si, para cada i, el evento E_i puede ocurrir en m_i formas, entonces el número total de formas en que todos los eventos pueden tener lugar es el producto $m_1m_2 \cdots m_k$.

Regresando a nuestra primera ilustración, representemos con E_1 la determinación del equipo en primer lugar, de modo que $m_1 = 4$. Si E_2 denota la determinación del equipo en segundo lugar, entonces $m_2 = 3$. Por tanto, el número de resultados para la sucesión E_1, E_2 es $4 \cdot 3 = 12$, que es igual que el hallado por medio del diagrama de árbol. Si continuamos a E_3, la determinación del equipo en tercer lugar, entonces $m_3 = 2$, y por lo tanto $m_1m_2m_3 = 24$. Por último, si E_1, E_2 y E_3 han ocurrido, hay sólo un resultado posible para E_4. Entonces, $m_4 = 1$ y $m_1m_2m_3m_4 = 24$.

En lugar de equipos, veamos ahora a a, b, c y d meramente como símbolos y consideremos los diversos *órdenes* o *distribuciones* que se pueden asignar a estos símbolos, tomándolos dos a la vez, tres a la vez o cuatro a la vez.

Si nos abstraemos en esta forma podemos aplicar nuestros métodos a otras situaciones similares. Los arreglos que hemos explicado son **arreglos sin repeticiones,** ya que un símbolo no puede usarse más de una vez en una configuración. En el ejemplo 1 consideraremos arreglos en los que las repeticiones *se permiten*.

Previamente definimos pares ordenados y ternas ordenadas. Del mismo modo, una *cuarteta ordenada* es un conjunto que contiene cuatro elementos, x_1, x_2, x_3, x_4 en el que se ha especificado un ordenamiento, de modo que uno de los elementos puede mencionarse como el *primer elemento*, otro como el *segundo elemento* y así sucesivamente. El símbolo (x_1, x_2, x_3, x_4) se usa como la cuarteta ordenada que tiene primer elemento x_1, segundo elemento x_2, tercer elemento x_3 y cuarto elemento x_4. En general, para cualquier entero positivo r, hablamos de la ***r*-upla ordenada**

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

como un conjunto de r elementos en los que x_1 está designado como el primer elemento, x_2 como el segundo elemento y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 Determinar el número de *r*-upla

Usando sólo las letras *a, b, c* y *d*, determine cuántas de las siguientes se pueden obtener:

(a) ternas ordenadas **(b)** cuartetas ordenadas **(c)** r-tuplas ordenadas

SOLUCIÓN

(a) Debemos determinar el número de símbolos de la forma (x_1, x_2, x_3) que se puede obtener usando sólo las letras a, b, c y d. Esto no es lo mismo que una lista de primero, segundo y tercer lugares como en nuestra ilustración previa, porque no hemos excluido la posibilidad de repeticiones. Por ejemplo, (a, b, a), (a, a, b) y (a, a, a) son ternas ordenadas diferentes. Si, para $i = 1, 2, 3$, con E_i representamos la determinación de x_i en la terna ordenada (x_1, x_2, x_3), entonces, como se permiten repeticiones, hay cuatro posibilidades, que son a, b, c y d, para cada E_1, E_2 y E_3. En consecuencia, por el principio fundamental de conteo, el número total de ternas ordenadas es $4 \cdot 4 \cdot 4$, o sea 64.

(b) El número de posibles cuartetas ordenadas de la forma (x_1, x_2, x_3, x_4) es $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ o 256

(c) El número de r-uplas ordenadas es el producto $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 4$, con el 4 apareciendo como factor r veces. Ese producto es igual a 4^r. ■

EJEMPLO 2 Seleccionar oficiales de clase

Un grupo está formado por 60 muchachas y 40 muchachos. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar un director, subdirector, tesorero y secretario si el tesorero debe ser una muchacha, el secretario debe ser un muchacho y un estudiante no puede tener más de un cargo?

SOLUCIÓN Si un evento está especializado en alguna forma (por ejemplo, el tesorero *debe* ser una muchacha), entonces el evento debe ser considerado antes que cualesquiera eventos no especializados. Así, representamos con E_1 la selección del tesorero y con E_2 la selección del secretario. A continuación

denotamos con E_3 y E_4 las selecciones para director y subdirector, respectivamente. Al igual que en el principio fundamental de conteo, con m_i denotamos el número de formas diferentes en que E_i puede ocurrir para $i = 1, 2, 3$ y 4. Se deduce que $m_1 = 60$, $m_2 = 40$, $m_3 = 60 + 40 - 2 = 98$ y $m_4 = 97$. Por el principio fundamental de conteo, el número total de posibilidades es

$$m_1 m_2 m_3 m_4 = 60 \cdot 40 \cdot 98 \cdot 97 = 22{,}814{,}400.$$

■

Cuando trabajamos con conjuntos, por lo general no nos interesa el orden o arreglo de los elementos, pero en el resto de esta sección el arreglo de los elementos será nuestro principal interés.

Definición de permutación

Sea S un conjunto de n elementos y sea $1 \leq r \leq n$. Una **permutación** de r elementos de S es un arreglo, sin repeticiones, de r elementos.

También usamos la frase **permutación de *n* elementos tomados *r* a la vez.** El símbolo $P(n, r)$ denotará el número de permutaciones diferentes de r elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos. Como caso especial, $P(n, n)$ denota el número de arreglos de n elementos de S; es decir, el número de formas de configurar *todos* los elementos de S.

En nuestra primera exposición respecto a cuatro equipos A, B, C y D, teníamos $P(4, 2) = 12$, porque hay 12 diferentes formas de configurar los cuatro equipos en grupos de dos. También mostramos que el número de formas para configurar los elementos A, B, C y D es 24. En notación de permutación escribiríamos este resultado como $P(4, 4) = 24$.

El siguiente teorema nos da una fórmula general para $P(n, r)$.

Teorema sobre el número de permutaciones diferentes

Sea S un conjunto de n elementos y sea $1 \leq r \leq n$. El número de permutaciones diferentes de r elementos de S es

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1).$$

DEMOSTRACIÓN El problema de determinar $P(n, r)$ es equivalente a determinar el número de r-uplas diferentes $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ tales que cada x_i es un elemento de S y ningún elemento de S aparece dos veces en la misma r-upla. Podemos hallar este número por medio del principio fundamental de conteo. Para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, representemos con E_i la determinación del elemento x_i y sea m_i el número de formas diferentes de escoger x_i. Deseamos aplicar la sucesión $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Tenemos n posibles opciones para x_1 y consecuentemente $m_1 = n$. Como no se permiten repeticiones, tenemos $n - 1$ opciones para x_2, de modo que $m_2 = n - 1$. Si continuamos en esta forma, sucesivamente obtenemos $m_3 = n - 2$, $m_4 = n - 3$ y por último $m_r = n - (r - 1)$ o bien, lo que es equivalente, $m_r = n - r + 1$. En consecuencia, usando el principio fundamental de conteo, obtenemos la fórmula para $P(n, r)$. ■

Note que *la fórmula para $P(n, r)$ en el teorema previo contiene exactamente r factores en el lado derecho,* como se muestra en la ilustración siguiente.

ILUSTRACIÓN **Número de permutaciones diferentes**

- $P(n, 1) = n$
- $P(n, 3) = n(n - 1)(n - 2)$
- $P(n, 2) = n(n - 1)$
- $P(n, 4) = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)$

EJEMPLO 3 **Evaluar $P(n, r)$**

Encuentre $P(5, 2)$, $P(6, 4)$ y $P(5, 5)$.

SOLUCIÓN Usaremos la fórmula para $P(n, r)$ del teorema precedente. En cada caso, primero calculamos el valor de $(n - r + 1)$.

$$5 - 2 + 1 = \underline{4}, \quad \text{entonces} \quad P(5, 2) = 5 \cdot \underline{4} = 20$$
$$6 - 4 + 1 = \underline{3}, \quad \text{entonces} \quad P(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \underline{3} = 360$$
$$5 - 5 + 1 = \underline{1}, \quad \text{entonces} \quad P(5, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underline{1} = 120$$

■

EJEMPLO 4 **Arreglar el orden de bateo para un equipo de béisbol**

Un equipo de béisbol está formado por nueve jugadores. Encuentre el número de formas de arreglar las primeras cuatro posiciones del orden de bateo si se excluye al *pitcher*.

SOLUCIÓN Deseamos hallar el número de permutaciones de 8 objetos tomados 4 a la vez. Usando la fórmula para $P(n, r)$ con $n = 8$ y $r = 4$, tenemos $n - r + 1 = 5$ y se deduce que

$$P(8, 4) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

■

El siguiente resultado nos da una forma para $P(n, r)$ que contiene el símbolo factorial.

Forma factorial para $P(n, r)$

Si n es un entero positivo y $1 \leq r \leq n$, entonces

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}.$$

DEMOSTRACIÓN Si hacemos $r = n$ en la fórmula para $P(n, r)$ del teorema sobre permutaciones, obtenemos el número de arreglos diferentes de *todos* los elementos de un conjunto formado por n elementos. En este caso,

$$n - r + 1 = n - n + 1 = 1$$

y entonces

$$P(n, n) = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

En consecuencia, $P(n, n)$ es el producto de los primeros n enteros positivos. Este resultado también está dado por la forma factorial porque si $r = n$, entonces

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

Si $1 \leq r < n$, entonces

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot[(n-r)!]}{(n-r)!}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

Esto concuerda con la fórmula para $P(n, r)$ del teorema sobre permutaciones. ■

EJEMPLO 5 **Evaluar $P(n, r)$ usando factoriales**

Use la forma factorial para $P(n, r)$ para hallar $P(5, 2)$, $P(6, 4)$ y $P(5, 5)$.

SOLUCIÓN

$$P(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 5\cdot 4 = 20$$
$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$$
$$P(5, 5) = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{1} = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$$
■

$P(n, r)$ está denotada como nPr en muchas calculadoras. Podemos calcular las permutaciones del ejemplo 5 como sigue.

5 MATH ◁ 2 2 ENTER

```
5 nPr 2
             20
6 nPr 4
            360
5 nPr 5
            120
```

10.6 Ejercicios

Ejer. 1–10: Encuentre el número.

1 $P(17, 1)$

2 $P(20, 1)$

3 $P(9, 6)$

4 $P(5, 3)$

5 $P(5, 5)$

6 $P(4, 4)$

7 $P(6, 5)$

8 $P(7, 6)$

9 $P(52, 5)$

10 $P(52, 2)$

Ejer. 11–14: Simplifique la permutación.

11 $P(n, 0)$

12 $P(n, 1)$

13 $P(n, n-1)$

14 $P(n, 2)$

15 ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar de los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 si las repeticiones

(a) no se permiten? **(b)** se permiten?

16 Trabaje el ejercicio 15 para números de cuatro dígitos.

17 ¿Cuántos números se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 si no se permiten repeticiones? (*Nota:* 42 y 231 son ejemplos de esos números.)

18 Determine el número de enteros positivos menores que 10,000 que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 si se permiten repeticiones.

19 **Posiciones en baloncesto** Si ocho equipos de baloncesto participan en un torneo, encuentre el número de formas diferentes que el primero, segundo y tercer lugares se pueden decidir, suponiendo que no se permiten empates.

20 **Posiciones en baloncesto** Trabaje el ejercicio 19 para 12 equipos.

21 **Combinación de prendas de vestir** Una muchacha tiene cuatro faldas y seis blusas. ¿Cuántas combinaciones diferentes de falda y blusa puede usar?

22 **Combinación de prendas de vestir** Consulte el ejercicio 21. Si la muchacha tiene también tres suéteres, ¿Cuántas combinaciones diferentes de falda, blusa y suéter puede usar?

23 **Números de placas de vehículos** En un cierto estado, las placas de automóviles empiezan con una letra del alfabeto, seguida de cinco dígitos (0, 1, 2, . . . , 9). Encuentre cuántas placas diferentes de vehículos son posibles si

(a) el primer dígito que sigue a la letra no puede ser 0

(b) la primera letra no puede ser O o I, y el primer dígito no puede ser 0

24 **Lanzar los dados** Dos dados son lanzados uno después del otro. ¿En cuántas formas diferentes pueden caer? Ponga en lista el número de formas diferentes en que la suma de los puntos puede ser igual a

(a) 3 **(b)** 5 **(c)** 7 **(d)** 9 **(e)** 11

25 **Arreglo de asientos** Una fila de seis asientos de un salón de clases se va a llenar seleccionando miembros de un grupo de diez estudiantes.

(a) ¿En cuántas formas diferentes pueden ser ocupados los asientos?

(b) Si hay seis muchachos y cuatro muchachas en el grupo, y si muchachos y muchachas han de estar alternados, encuentre el número de distribuciones diferentes de asientos.

26 **Programación de cursos** Un estudiante de cierta universidad puede tomar matemáticas a las 8, 10, 11 o 14 horas; inglés a las 9, 10, 13 o 14 horas, e historia a las 8, 11, 14 o 15 horas. Encuentre el número de formas diferentes en las que el estudiante puede programar los tres cursos.

27 **Examen de verdadero o falso** ¿En cuántas formas diferentes puede completarse un examen formado por diez preguntas de verdadero o falso?

28 **Examen de opción múltiple** Un examen está formado por seis preguntas de opción múltiple y hay cinco opciones para cada pregunta. ¿En cuántas formas diferentes puede completarse el examen?

29 **Arreglo de asientos** ¿En cuántas formas diferentes pueden sentarse ocho personas en una fila?

30 **Arreglo de libros** ¿En cuántas formas diferentes pueden acomodarse diez libros en un estante?

31 **Semáforo** Con seis banderas diferentes, ¿cuántas señales diferentes pueden enviarse si se colocan tres banderas, una arriba de la otra, en un asta de banderas?

32 **Selección de libros** ¿En cuántas formas diferentes pueden seleccionarse cinco libros de un conjunto de libros de doce volúmenes?

33 **Claves de estación de radio** ¿Cuántas claves de cuatro letras de identificación de una estación de radio se pueden formar si la primera letra debe ser K o W y las repeticiones

(a) no se permiten? **(b)** se permiten?

34 **Designaciones de fraternidad** Hay 24 letras en el alfabeto griego. ¿Cuántas fraternidades pueden especificarse al seleccionar tres letras griegas si las repeticiones

(a) no se permiten? **(b)** se permiten?

35 **Números telefónicos** ¿Cuántos números telefónicos de diez dígitos se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, . . . , 9 si el primer dígito no puede ser 0?

36 **Orden de bateo en béisbol** Después de seleccionar nueve jugadores para un partido de béisbol, el *manager* del equipo arregla el orden al bat de modo que el *pitcher* sea el último en batear y el mejor bateador sea el tercero en el orden al bat. ¿En cuántas formas diferentes puede acomodarse el resto del orden al bat?

37 **Código de acceso en cajeros automáticos** Un cliente recuerda que 2, 4, 7 y 9 son los dígitos de un código de acceso de cuatro dígitos para un cajero automático. Desafortunadamente, el cliente ha olvidado el orden de los dígitos. Encuentre el máximo número posible de intentos necesario para obtener el código correcto.

38 **Código de acceso en cajeros automáticos** Trabaje el ejercicio 37 si los dígitos son 2, 4 y 7 y uno de estos dígitos se repite en el código de cuatro dígitos.

39 **Posibilidades de combinación de bloqueo** Una mujer tiene una combinación de bloqueo que tiene 60 números. Ella sabe que la combinación correcta consiste en 3 números no repetibles, pero lo ha olvidado. Si le toma 8 segundos intentar una combinación, ¿cuánto tiempo se tarda aproximadamente en probar todas las combinaciones?

40 **Posibilidades de bloqueo de un maletín** Un hombre tiene un maletín con un bloqueo que consta de 6 esferas, cada una con 10 números y ha olvidado la combinación correcta. Si le lleva tres segundos intentar una combinación, ¿cuánto tiempo se tarda en probar todas las combinaciones?

41 **Seleccionar asientos en un teatro** Tres matrimonios han comprado boletos para una obra. Las esposas han de tomar asiento juntas y los seis asientos están en una fila. ¿En cuántas formas pueden acomodarse las seis personas?

42 **Resultados de una carrera de caballos** Diez caballos están registrados en una carrera. Si se pasa por alto la posibilidad de un empate para cualquier lugar, ¿en cuántas formas pueden determinarse los ganadores de los lugares primero, segundo y tercero?

43 **Posibilidades de almuerzos** Los propietarios de un restaurante anuncian que ofrecen 1,114,095 almuerzos diferentes basados en el hecho de que tienen 16 “guarniciones gratis” junto con cualquiera de sus 17 platillos de menú (sándwiches, *hot dogs* y ensaladas). ¿Cómo llegaron a ese número?

44 Barajar cartas

(a) ¿En cuántas formas pueden quedar las 52 cartas de un mazo al barajarlas?

(b) ¿En cuántas formas pueden quedar las cartas para que los cuatro ases aparezcan arriba del mazo?

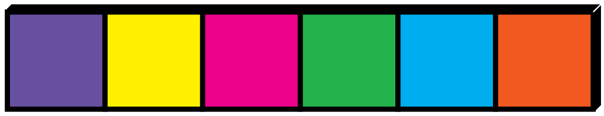
45 Palíndromos numéricos Un palíndromo es un entero, por ejemplo 45654, que se lee igual de izquierda a derecha que a la inversa.

(a) ¿Cuántos palíndromos de cinco dígitos hay?

(b) ¿Cuántos palíndromos de n dígitos hay?

46 Arreglo de colores Cada uno de los seis cuadrados que se ven en la figura ha de llenarse con alguno de diez colores posibles. ¿Cuántas formas hay de aplicar color a la franja mostrada en la figura para que no haya dos cuadros adyacentes con el mismo color?

EJERCICIO 46



47 Este ejercicio requiere de una calculadora de gráficas que pueda graficar $x!$

(a) Grafique $y = \dfrac{x!\,e^x}{x^x\sqrt{2\pi x}}$ en (0,20], y calcule la asíntota horizontal.

(b) Use la gráfica del inciso (a) para hallar una aproximación para $n!$ si n es un entero positivo grande.

48 **(a)** ¿Qué pasa si se usa calculadora para hallar $P(150, 50)$? Explique.

(b) Calcule r si $P(150, 50) = 10^r$ usando la siguiente fórmula de matemáticas avanzadas:

$$\log n! \approx \frac{n \ln n - n}{\ln 10}$$

10.7 Permutaciones y combinaciones distinguibles

Ciertos problemas consisten en hallar diferentes arreglos de objetos, algunos de los cuales son indistinguibles. Por ejemplo, suponga que nos dan cinco discos del mismo tamaño, tres de los cuales son negros, uno es blanco y el otro es rojo. Encontremos el número de formas en que se puedan acomodar en fila para que se obtengan arreglos de colores diferentes. Si los discos fueran todos de diferentes colores, entonces el número de arreglos sería 5!, o sea 120. No obstante, como algunos de los discos tienen la misma apariencia, no podemos obtener 120 arreglos diferentes. Para aclarar este punto, escribamos

N N N B R

para el arreglo que tenga discos negros en las primeras tres posiciones de la fila, el disco blanco en la cuarta posición y el disco rojo en la quinta. Los primeros tres discos se pueden acomodar en 3!, o sea 6, formas diferentes, pero estos arreglos no se pueden distinguir uno del otro porque los primeros tres discos se parecen. Decimos que esas 3! Permutaciones son **no distinguibles.** Del mismo modo, dado cualquier otro arreglo, por ejemplo

N R N B N,

hay 3! formas diferentes de acomodar los tres discos, pero aquí también cada uno de estos arreglos es no distinguible de los otros. Llamemos **permutaciones distinguibles** a dos arreglos de objetos si una no se puede obtener de la otra al reacomodar objetos semejantes. Así, N N N B R y N R N B N son permutaciones distinguibles de los cinco discos. Denotemos con k el número de permutaciones distinguibles. Como a cada uno de estos arreglos corresponden 3! permutaciones *no distinguibles*, debemos tener $3!/k = 5!$, el número de permutaciones de cinco objetos *diferentes.* En consecuencia, $k = 5!/3! = 5 \cdot 4 = 20$. Por el mismo tipo de razonamiento podemos obtener la siguiente extensión de esta exposición.

Primer teorema sobre permutaciones distinguibles

Si r objetos de un conjunto de n objetos son semejantes y si los objetos restantes son diferentes entre sí y distintos de los r objetos, entonces el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es

$$\frac{n!}{r!}.$$

Podemos generalizar este teorema para el caso en el que hay varios subconjuntos de objetos no distinguibles. Por ejemplo, considere ocho discos, de los cuales cuatro son negros, tres son blancos y uno es rojo. En este caso, con cada arreglo como la siguiente

N B N B N B N R,

hay 4! arreglos de los discos negros y 3! arreglos de los discos blancos que no tienen efecto en el arreglo de colores. En consecuencia, 4!3! posibles arreglos de los discos no producirán permutaciones distinguibles. Si denotamos con k el número de permutaciones *distinguibles*, entonces $4!3!k = 8!$, porque 8! Es el número de permutaciones que obtendríamos si los discos fueran todos diferentes. Por lo tanto, el número de permutaciones distinguibles es

$$k = \frac{8!}{4!\,3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{4!}{4!} = 280.$$

Se puede demostrar el siguiente resultado.

Segundo teorema sobre permutaciones distinguibles

Si, en un conjunto de n objetos, n_1 son semejantes de una clase, n_2 son semejantes de otra clase, . . . , n_k son semejantes de otra clase adicional y

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k,$$

entonces el número de permutaciones distinguibles de n objetos es

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2! \cdots n_k!}.$$

EJEMPLO 1 **Hallar un número de permutaciones distinguibles**

Encuentre el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *Mississippi*.

SOLUCIÓN En este ejemplo nos dan un conjunto de once objetos en el que cuatro son de una clase (la letra *s*), cuatro son de otra clase (*i*), dos son de una tercera clase (*p*) y uno es de una cuarta clase (*M*). En consecuencia, por el teorema precedente, tenemos $11 = 4 + 4 + 2 + 1$ y el número de permutaciones distinguibles es

$$\frac{11!}{4!\,4!\,2!\,1!} = 34{,}650.$$

■

Cuando trabajamos con permutaciones, nuestro interés se centra en los ordenamientos o arreglos de elementos. Ahora no hagamos caso del orden o arreglo de elementos y consideremos la siguiente pregunta: dado un conjunto que contenga n elementos distintos, ¿en cuántas formas puede escogerse un subconjunto de r elementos con $r \leq n$? Antes de contestar, expresemos una definición.

Definición de combinación

Sea S un conjunto de n elementos y sea $1 \leq r \leq n$. Una **combinación** de r elementos de S es un subconjunto de S que contiene r elementos distintos.

Si S contiene n elementos, también usamos la frase **combinación de *n* elementos tomados *r* a la vez.** El símbolo $C(n, r)$ denotará el número de combinaciones de r elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos.

Teorema sobre el número de combinaciones

El número de combinaciones de r elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos es

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

La fórmula para $C(n, r)$ es idéntica a la fórmula para el coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ de la sección 10.5.

DEMOSTRACIÓN Si S contiene n elementos, entonces, para hallar $C(n, r)$, debemos hallar el número total de subconjuntos de la forma

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$$

tal que los x_i son elementos *diferentes* de S. Como los r elementos $x_1, x_2, \ldots, x_r$ se pueden arreglar en $r!$ formas diferentes, cada subconjunto produce $r!$ diferentes r-uplas. Así, el número total de r-tuplas *diferentes es* $r!C(n, r)$. No obstante, en la sección previa hallamos que el número total de r-tuplas es

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

En consecuencia, $$r!\,C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Dividiendo entre $r!$ ambos lados de la última ecuación, nos da la fórmula para $C(n, r)$. ■

A partir de la prueba, note que

$$P(n, r) = r!\,C(n, r),$$

lo cual significa que hay *más permutaciones que combinaciones* cuando escogemos un subconjunto de r elementos de un conjunto de n elementos. Para recordar esta relación, considere una presidencia, por ejemplo la de Obama-Biden. Hay sólo un grupo o combinación de estas dos personas, pero cuando un ordenamiento de presidente-vicepresidente está asociado con estas dos personas, hay dos permutaciones y Obama-Biden es claramente diferente de Biden-Obama.

Cuando usted lea los ejemplos y trabaje los ejercicios, recuerde lo siguiente:

Si el orden de selección es importante, use una *permutación*.
Si el orden de selección *no es* importante, use una *combinación*.

EJEMPLO 2 **Escoger un equipo de béisbol**

Un equipo de béisbol de la liga pequeña tiene seis jardineros, cinco *pitchers* y dos receptores. Cada uno de los jardineros puede jugar cualquiera de las tres posiciones de jardines y cada jugador de cuadro puede jugar cualquiera de las cuatro posiciones del campo corto. ¿En cuántas formas puede escogerse un equipo de nueve jugadores?

Recuerde que si el orden de selección se puede soslayar, use una combinación.

SOLUCIÓN El número de formas de escoger tres jardineros de los seis candidatos es

$$C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

El número de formas en que se pueden escoger los jugadores de cuadro es

$$C(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!\,4!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Hay cinco formas de escoger un *pitcher* y dos opciones para el receptor. Se deduce del principio fundamental de conteo que el número total de formas de escoger un equipo es

$$20 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 2 = 7000.$$

■

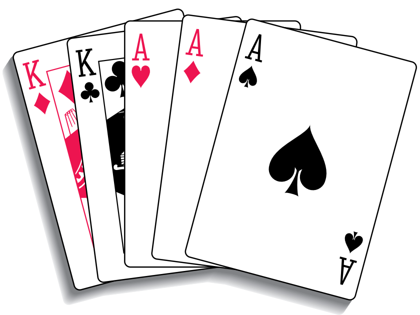
EJEMPLO 3 **Recibir un full en cartas**

En un tipo de póquer, una mano de cinco cartas se da de un mazo de 52 cartas.

(a) ¿Cuántas manos son posibles?

(b) Un *full* es una mano de tres cartas de una denominación y dos cartas de otra denominación. (Las 13 denominaciones son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K y A) ¿Cuántas manos son *full*?

FIGURA 1



SOLUCIÓN

(a) El orden en el que se dan las cinco cartas no es importante, de modo que usamos una combinación:

$$C(52, 5) = \frac{52!}{(52-5)!\,5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}598{,}960$$

(b) Primero determinamos en cuántas formas nos pueden dar un *full* específico, por ejemplo 3 ases y dos reyes (vea la figura 1). Hay cuatro cartas de cada denominación y el orden de selección se puede pasar por alto, de modo que usamos combinaciones:

El orden de selección ***no es*** *importante, de modo que usamos* ***combinaciones.*** →

$$\text{número de formas de recibir 3 ases} = C(4, 3)$$
$$\text{número de formas de recibir 2 reyes} = C(4, 2)$$

Ahora debemos escoger las dos denominaciones. Como los 3 ases y 2 reyes es un *full* diferente a 3 reyes y 2 ases, el orden en que se seleccionan las denominaciones es importante, de modo que usamos una permutación:

El orden de selección ***es*** *importante, de modo que usamos una* ***permutación.*** →

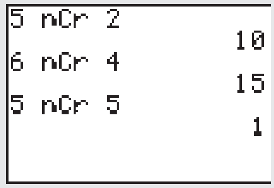
$$\text{número de formas de seleccionar dos denominaciones} = P(13, 2)$$

Por el teorema fundamental de conteo, el número de *fulls* es

$$C(4, 3) \cdot C(4, 2) \cdot P(13, 2) = 4 \cdot 6 \cdot 156 = 3744.$$ ■

Las secuencias de tecleo para calcular combinaciones son casi idénticas a aquellas para calcular permutaciones; sólo use nCr en lugar de nPr.

5 [MATH] [◁] [3] 2 [ENTER]



Note que si $r = n$, la fórmula para $C(n, r)$ se convierte en

$$C(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Es conveniente asignar un significado a $C(n, r)$ si $r = 0$. Si la fórmula ha de ser verdad en este caso, debemos tener

$$C(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1.$$

En consecuencia, *definimos* $C(n, 0) = 1$, lo cual es igual que $C(n, n)$. Por último, por consistencia, también *definimos* $C(0, 0) = 1$. Por tanto, $C(n, r)$ tiene significado para todos los enteros negativos n y r con $r \leq n$.

EJEMPLO 4 **Hallar el número de subconjuntos de un conjunto**

Sea S un conjunto de n elementos. Encuentre el número de subconjuntos distintos de S.

SOLUCIÓN Sea r cualquier entero no negativo tal que $r \leq n$. De nuestro trabajo previo, el número de subconjuntos de S que consta de r elementos es $C(n, r)$ o $\binom{n}{r}$. En consecuencia, para hallar el número total de subconjuntos, es suficiente hallar la suma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}. \qquad (*)$$

Recordando la fórmula para el teorema del binomio,

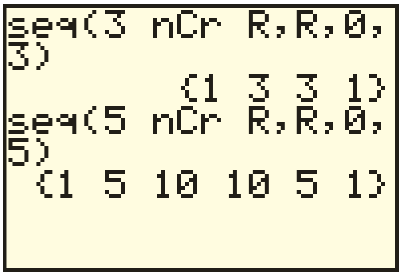
$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

podemos ver que la suma indicada (*) es precisamente la expansión binomial de $(1 + 1)^n$. Por tanto, hay 2^n subconjuntos de un conjunto de n elementos. En particular, un conjunto de 3 elementos tiene 2^3, o sea 8, subconjuntos diferentes. Un conjunto de 4 elementos tiene 2^4, o sea 16, subconjuntos. Un conjunto de 10 elementos tiene 2^{10}, o sea 1024, subconjuntos. ■

El triángulo de Pascal, introducido en la sección 10.5, se puede recordar fácilmente mediante la siguiente forma de combinación:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \end{array}$$

FIGURA 2



Si combinamos esta información con la del ejemplo 4, concluimos que el tercer coeficiente de la expansión de $(a + b)^4$, $\binom{4}{2}$, es exactamente el mismo que el número de subconjuntos de dos elementos de un conjunto que contiene cuatro elementos. Lo dejamos como ejercicio para hallar una generalización del último enunciado (vea el ejercicio de análisis 6 al final del capítulo). Note que podemos usar el comando de sucesión para generar las filas del triángulo de Pascal, como se muestra en la figura 2.

10.7 Ejercicios

Ejer. 1–10: Encuentre el número.

1 $C(17, 1)$

2 $C(20, 1)$

3 $C(9, 6)$

4 $C(5, 3)$

5 $C(5, 5)$

6 $C(4, 4)$

7 $C(6, 5)$

8 $C(7, 6)$

9 $C(52, 5)$

10 $C(52, 2)$

Ejer. 11–14: Simplifique la combinación

11 $C(n, 0)$

12 $C(n, 1)$

13 $C(n, n - 1)$

14 $C(n, 2)$

Ejer. 15–16: Encuentre el número de posibles arreglos de color para los 12 discos dados, acomodados en una fila.

15 5 negros, 3 rojos, 2 blancos, 2 verdes

16 3 negros, 3 rojos, 3 blancos, 3 verdes

17 Encuentre el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *bookkeeper* (contador).

18 Encuentre el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *moon* (luna). Cite todas las permutaciones.

19 **Escoger equipos de baloncesto** Diez personas desean jugar en un partido de baloncesto. ¿En cuántas formas diferentes pueden formarse dos equipos de cinco jugadores?

20 **Seleccionar preguntas de prueba** Un estudiante puede contestar 6 preguntas cualesquiera de un total de 10 en un examen.

(a) ¿En cuántas formas pueden seleccionarse seis preguntas?

(b) ¿Cuántas selecciones son posibles si las primeras dos preguntas deben contestarse?

Ejer. 21–22: Considere ocho puntos cualesquiera tales que no haya tres colineales.

21 ¿Cuántas líneas se determinan?

22 ¿Cuántos triángulos se determinan?

23 **Arreglo de libros** Un estudiante tiene cinco libros de matemáticas, cuatro libros de historia y ocho libros de ficción. ¿En cuántas formas diferentes se pueden acomodar en un estante si libros de la misma categoría se ponen uno junto al otro?

24 **Selección de un equipo de baloncesto** Un equipo de baloncesto está formado de doce jugadores.

(a) Sin poner atención a posiciones, ¿en cuántas formas puede seleccionarse un equipo de cinco?

(b) Si el centro de un equipo debe ser seleccionado de dos individuos específicos del equipo y los otros cuatro miembros del equipo de los diez jugadores restantes, encuentre el número de diferentes equipos posibles

25 Selección de un equipo de futbol Un equipo de futbol está formado por tres centros, diez linieros que pueden ser guard o tackle, tres quarterbacks, seis halfbacks, cuatro ends y cuatro fullbacks. Un equipo debe tener un centro, dos fullbacks, dos tackle, dos ends, dos (halfbacks), un quarterbacks y un (fullback). ¿En cuántas formas diferentes puede seleccionarse un grupo del equipo?

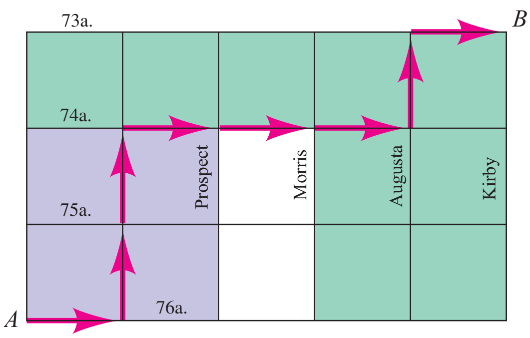
26 Acomodar llaves en un llavero ¿En cuántas formas diferentes se pueden acomodar siete llaves en un llavero, si las llaves se pueden deslizar por completo alrededor del anillo?

27 Comité de selección Un comité de 3 hombres y 2 mujeres se ha de seleccionar de un grupo de 12 hombres y 8 mujeres. Determine el número de formas diferentes de seleccionar el comité.

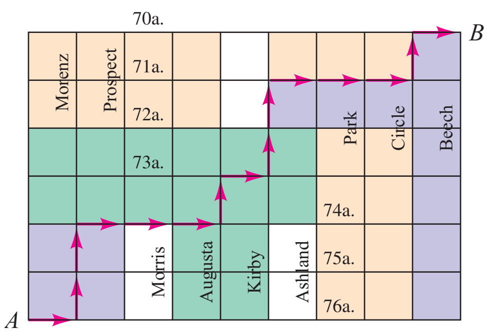
28 Orden de nacimiento Denotemos con las letras G y B el nacimiento de una niña y un niño, respectivamente. Para una familia de tres niños y tres niñas, un orden posible de nacimientos es G G G B B B, ¿cuántos órdenes de nacimiento son posibles para estos seis hijos?

Ejer. 29–30: En la figura se muestra un mapa de calles y un posible camino del punto *A* al punto *B*. ¿Cuántos caminos posibles hay de *A* a *B* si los movimientos están restringidos para ser a la derecha o hacia arriba? (*Sugerencia:* si R denota el movimiento de una unidad a la derecha y U denota el movimiento de una unidad hacia arriba, entonces el camino del ejercicio 29 puede especificarse con R U U R R R U R.)

29



30



31 Selecciones de lotería Para ganar un juego de lotería estatal, un jugador debe seleccionar correctamente seis números del 1 al 49.

(a) Encuentre el número total de selecciones posibles.

(b) Trabaje el inciso (a) si un jugador selecciona sólo números pares.

32 Asignaciones de oficina Un departamento de matemáticas tiene diez profesores pero sólo nueve oficinas, de modo que una oficina debe ser compartida por dos personas. ¿En cuántas formas diferentes se pueden asignar las oficinas?

33 Torneo de tenis En un torneo de tenis *round robin*, cada uno de los jugadores se enfrenta al resto de los jugadores exactamente una vez. ¿Cuántos jugadores deben participar en un torneo de 45 encuentros?

34 Examen de verdadero o falso Un examen de verdadero o falso tiene 20 preguntas.

(a) ¿En cuántas formas diferentes puede completarse el examen?

(b) ¿En cuántas formas diferentes puede un estudiante contestar correctamente 10 preguntas?

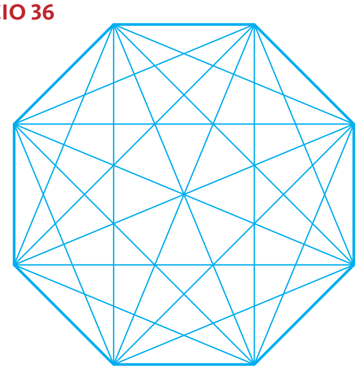
35 Serie de campeonato de baloncesto El ganador de la serie de campeonato de siete juegos de la NBA es el equipo que gana cuatro juegos. ¿En cuántas formas diferentes puede la serie extenderse a siete juegos?

36 Un diseño geométrico está determinado al unir cada par de vértices de un octágono (vea la figura).

(a) ¿Cuántos triángulos en el diseño tienen sus tres vértices en el octágono?

(b) ¿Cuántos cuadriláteros en el diseño tienen sus cuatro vértices en el octágono?

EJERCICIO 36



37 Selección de helados Una nevería tiene 31 sabores diferentes y anuncia que sirve casi 4500 barquillos diferentes de tres cucharadas, cada cucharada de un sabor diferente. ¿Cómo se obtuvo este número?

38 Selección de condimentos para hamburguesa Un restaurante de comida rápida anuncia que ofrece cualquier combinación de 8 condimentos en una hamburguesa, dando así 256 opciones a un cliente. ¿Cómo se obtuvo este número?

39 **Selección de beca** Un comité va a seleccionar 30 estudiantes de un grupo de 1000 para que reciban becas. ¿En cuántas formas podrían seleccionarse los estudiantes si cada beca vale

(a) la misma cantidad?

(b) una cantidad diferente?

40 **Clasificación en pista** Doce velocistas están corriendo en una eliminatoria; los que obtengan los cuatro mejores tiempos avanzarán a las finales.

(a) ¿En cuántas formas puede ser seleccionado este grupo de cuatro?

(b) Si los cuatro mejores tiempos se "siembran" (clasifican) en las finales, ¿en cuántas formas puede seleccionarse y "sembrarse" este grupo de cuatro?

41 **Manos de póquer** Consulte el ejercicio 3. ¿Cuántas "manos" tendrán exactamente tres reyes?

42 **Manos de bridge** ¿Cuántas manos de 13 cartas dadas de un mazo estándar tendrán exactamente siete espadas?

Ejer. 43–44: (a) Calcule la suma S_n para $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$, donde si $n < r$, entonces $\binom{n}{r} = 0$. (b) Prediga una fórmula general para S_n.

43 $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \cdots$

44 $(1)\binom{n}{1} - (2)\binom{n}{2} + (3)\binom{n}{3} - (4)\binom{n}{4} + (5)\binom{n}{5} - \cdots$

Ejer. 45–48: (a) Grafique $C(n, r)$ para un valor dado de n, donde $r = 1, 2, 3, \ldots, n$. (b) Determine el máximo de $C(n, r)$ y el (los) valor(es) de r donde ocurre este máximo

45 $n = 10$

46 $n = 13$

47 $n = 19$

48 $n = 20$

49 Demuestre que $C(n, r - 1) + C(n, r) = C(n + 1, r)$. Interprete esta fórmula en términos del triángulo de Pascal.

10.8 Probabilidad

Si se lanzan al aire dos dados, ¿cuáles es la posibilidad de que salga un 7? Si una persona recibe cinco cartas de un mazo estándar de 52 cartas, ¿cuál es la posibilidad de que obtenga tres ases? En el siglo XVII, preguntas similares acerca de juegos de azar llevaron al estudio de la *probabilidad*. Desde ese tiempo, la teoría de probabilidad ha crecido extensamente y ahora se usa para pronosticar resultados de una gran variedad de situaciones que surgen en ciencias naturales y sociales.

Cualquier proceso de posibilidad, por ejemplo lanzar al aire una moneda, lanzar un dado, recibir una carta de un mazo, determinar si un artículo fabricado es defectuoso o hallar la presión sanguínea de una persona, es un **experimento.** Una consecuencia de un experimento en un **resultado.** Restringiremos nuestra exposición a experimentos para los que los resultados son **igualmente probables** a menos que se indique otra cosa. Esto significa, por ejemplo, que si una moneda se lanza al aire, suponemos que la posibilidad de obtener una "cara" es igual que la de obtener una "cruz". Del mismo modo, si se lanza un dado, suponemos que el dado es "limpio", es decir, hay igual posibilidad de obtener ya sea 1, 2, 3, 4, 5 o 6. El conjunto S de todos los posibles resultados de un experimento es el **espacio muestral** del experimento. Así, si el experimento consiste en lanzar una moneda al aire y hacemos que H o T denoten el resultado de obtener una "cara" o "cruz", respectivamente, entonces el espacio muestral S puede estar denotado por

$$S = \{\text{H}, \text{T}\}.$$

Si un dado "limpio" se lanza al aire en un experimento, entonces el conjunto S de todos los posibles resultados (espacio muestral) es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

La siguiente definición expresa, en términos matemáticos, la noción de obtener resultados *particulares* de un experimento

Definición de evento

Sea S el espacio muestral de un experimento. Un **evento** asociado con al experimento es cualquier subconjunto E de S.

Consideremos el experimento de lanzar al aire un solo dado, de modo que el espacio muestral es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces el evento E asociado con el experimento consiste en el resultado de obtener un 4 en el tiro. Diferentes eventos pueden estar asociados con el mismo experimento. Por ejemplo, si hacemos $E = \{1, 3, 5\}$, entonces este evento consiste en obtener un número impar en un tiro del dado.

Como otra ilustración, suponga que el experimento consiste en lanzar al aire dos monedas, una después de la otra. Si hacemos que HH denote el resultado en el que aparecen dos caras, HT el de una cara en la primera moneda y una cruz en la segunda, y así sucesivamente, entonces el espacio muestral S del experimento puede estar denotado por

$$S = \{\text{HH, HT, TH, TT}\}.$$

Si definimos

$$E = \{\text{HT, TH}\},$$

entonces el evento E consiste en la aparición de una cara en una de las monedas y una cruz en la otra.

A continuación definiremos lo que significa la *probabilidad* de un evento. En toda nuestra exposición supondremos que el espacio muestral S de un experimento contiene sólo un número finito de elementos. Si E es un evento, *los símbolos* $n(E)$ y $n(S)$ *denotarán el número de elementos en E y S, respectivamente.* Recuerde que E y S constan de resultados que son igualmente probables.

Definición de la probabilidad de un evento

Sea S el espacio muestral de un experimento y E un evento. La **probabilidad** $P(E)$ de E está dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

Como E es un subconjunto de S, vemos que

$$0 \le n(E) \le n(S).$$

Dividiendo entre $n(S)$ obtenemos

$$\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(E)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \quad \text{o en forma equivalente,} \quad 0 \le P(E) \le 1.$$

Note que $P(E) = 0$ si E no contiene elementos y $P(E) = 1$ si $E = S$.

El siguiente ejemplo proporciona tres ilustraciones de la definición precedente si E contiene exactamente un elemento.

EJEMPLO 1 **Hallar la probabilidad de un evento**

(a) Si una moneda se lanza al aire, encuentre la probabilidad de que caiga con una cara hacia arriba.

(b) Si se lanza un dado "limpio", encuentre la probabilidad de obtener un 4.

(c) Si se lanzan al aire dos monedas, encuentre la probabilidad de que ambas caigan con la "cara" hacia arriba.

SOLUCIÓN Para cada experimento citaremos los conjuntos S y E y luego usaremos la definición de probabilidad de un evento para hallar $P(E)$.

(a) $S = \{H, T\}, \qquad E = \{H\}, \qquad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{2}$

(b) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad E = \{4\}, \qquad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

(c) $S = \{HH, HT, TH, TT\}, \qquad E = \{HH\}, \qquad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}$ ■

En el inciso (a) del ejemplo 1 hallamos que la probabilidad de obtener una cara en un tiro de una moneda es $\frac{1}{2}$. Consideramos que esto significa que si una moneda se lanza al aire muchas veces, el número de veces que una "cara" quede hacia arriba debe ser alrededor de la mitad del número total de tiros. Por lo tanto, para 100 tiros, una "cara" debe aparecer alrededor de 50 veces. Es poco probable que este número sea *exactamente* 50. Una probabilidad de $\frac{1}{2}$ significa que si hacemos que el número de tiros aumente, entonces el número de veces que la "cara" quede hacia arriba *se aproxima* a la mitad del número total de tiros. Se pueden hacer observaciones similares para los incisos (b) y (c) del ejemplo 1.

En los siguientes dos ejemplos consideramos experimentos en los que un evento contiene más de un elemento.

EJEMPLO 2 **Hallar probabilidades cuando dos dados se lanzan al aire**

Si dos dados se lanzan al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener una suma de

(a) 7? **(b)** 9?

SOLUCIÓN Consideremos un dado como *el primer dado* y el otro como *el segundo dado*. Usaremos pares ordenados para representar resultados como sigue: (2, 4) denota el resultado de obtener un 2 en el primer dado y un 4 en el segundo; (5, 3) representa un 5 en el primer dado y un 3 en el segundo; y así sucesivamente. Como hay seis posibilidades diferentes para el primer número del par ordenado y, con cada uno de éstos, seis posibilidades diferentes para el segundo número, el número total de pares ordenados es $6 \times 6 = 36$. Por tanto, si S es el espacio muestral, entonces $n(S) = 36$.

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\},$$

y en consecuencia $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(b) Si E es el evento correspondiente a obtener una suma de 9, entonces

$$E = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

y $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$ ■

En el siguiente ejemplo (y en los ejercicios), cuando se indica que una o más cartas se sacan de un mazo, queremos decir que cada carta se saca de un mazo estándar de 52 cartas y *no* se restituye antes de sacar la siguiente carta.

EJEMPLO 3 **Hallar la probabilidad de sacar cierta mano de cartas**

Suponga que cinco cartas se sacan de un mazo de cartas. Encuentre la probabilidad de que las cinco sean de corazones.

SOLUCIÓN El espacio muestral S del experimento es el conjunto de todas las "manos" posibles de cinco cartas que se pueden formar con las 52 cartas del mazo. Se deduce de nuestro trabajo de la sección precedente que $n(S) = C(52,5)$.

Como hay 13 cartas de corazones, el número de formas diferentes de obtener una mano que contenga cinco corazones es $C(13, 5)$. En consecuencia, si E representa este evento, entonces

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(13, 5)}{C(52, 5)} = \frac{\dfrac{13!}{5!8!}}{\dfrac{52!}{5!47!}} = \frac{1287}{2{,}598{,}960} \approx 0.0005 = \frac{5}{10{,}000} = \frac{1}{2000}.$$

Este resultado implica que si el experimento se realiza muchas veces, una mano de cinco corazones debe sacarse aproximadamente una vez cada 2000 veces. ■

Suponga que S es el espacio muestral de un experimento y E_1 y E_2 son dos eventos asociados con el experimento. Si E_1 y E_2 no tienen elementos en común, se denominan *conjuntos disjuntos* y escribimos $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ (el *conjunto vacío*). En este caso, si ocurre un evento, el otro no puede ocurrir; hay **eventos mutuamente exclusivos.** Así, si $E = E_1 \cup E_2$, entonces

$$n(E) = n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2).$$

En consecuencia,

$$P(E) = \frac{n(E_1) + n(E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)},$$

o

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2).$$

La probabilidad de E es por lo tanto la suma de las probabilidades de E_1 y E_2. Hemos demostrado lo siguiente.

Teorema sobre eventos mutuamente exclusivos

Si E_1 y E_2 son eventos mutuamente exclusivos y $E = E_1 \cup E_2$, entonces

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

El teorema precedente se puede extender a cualquier número de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ que sean mutuamente exclusivos en el sentido de que si $i \neq j$, entonces $E_i \cap E_j = \varnothing$. La conclusión del teorema es entonces

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k).$$

EJEMPLO 4 **Hallar probabilidades cuando se lancen al aire dos dados**

Si se lanzan al aire dos dados, encuentre la probabilidad de obtener una suma de 7 o 9.

SOLUCIÓN Denotemos con E_1 el evento de obtener un 7 y E_2 el de obtener un 9. Como E_1 y E_2 no pueden ocurrir en forma simultánea, son eventos mutuamente exclusivos. Deseamos hallar la probabilidad del evento $E = E_1 \cup E_2$. Del ejemplo 2 sabemos que $P(E_1) = \frac{6}{36}$ y $P(E_2) = \frac{4}{36}$. En consecuencia, por el último teorema,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1) + P(E_2) \\ &= \tfrac{6}{36} + \tfrac{4}{36} = \tfrac{10}{36} = 0.2\overline{7}. \end{aligned}$$

■

Si E_1 y E_2 son eventos que posiblemente tengan elementos en común, entonces se puede demostrar lo siguiente.

Teorema sobre la probabilidad de que ocurra uno o ambos de los eventos

Si E_1 y E_2 son dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

Note que si E_1 y E_2 son mutuamente exclusivos, entonces $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ y $P(E_1 \cap E_2) = 0$. En consecuencia, el último teorema incluye, como caso especial, el teorema sobre eventos mutuamente exclusivos.

EJEMPLO 5 **Hallar la probabilidad de seleccionar cierta carta de un "mazo"**

Si se selecciona una carta de un "mazo", encuentre la probabilidad de que la carta sea un "joto" o una de espadas.

SOLUCIÓN Denotemos con E_1 el evento de que la carta sea un "joto" y E_2 el evento que sea una de espadas. Los eventos E_1 y E_2 *no son* mutuamente exclusivos, porque hay una carta, "joto" o de espadas, en ambos eventos y por tanto $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{52}$. Por el teorema precedente, la probabilidad de que la carta sea "joto" o de espadas es

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= \tfrac{4}{52} + \tfrac{13}{52} - \tfrac{1}{52} = \tfrac{16}{52} \approx 0.31. \end{aligned}$$

■

Al resolver problemas de probabilidad, con frecuencia es útil asignar categorías a los resultados de un espacio muestral S en un evento E y el conjunto E' de elementos de S que no están en E. E' recibe el nombre de **complemento** de E. Note que

$$E \cup E' = S \qquad \text{y} \qquad n(E) + n(E') = n(S).$$

Si dividimos entre $n(S)$ ambos lados de la última ecuación, tendremos

$$\frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(E')}{n(S)} = 1.$$

En consecuencia,

$$P(E) + P(E') = 1, \qquad \text{o} \qquad P(E) = 1 - P(E').$$

Usaremos la última fórmula en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 **Hallar la probabilidad de sacar cierta mano de cartas**

Si 13 cartas se sacan de un mazo, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 de ellas sean de corazones?

SOLUCIÓN Si $P(k)$ denota la probabilidad de obtener k corazones, entonces la probabilidad de obtener *al menos* dos corazones es

$$P(2) + P(3) + P(4) + \cdots + P(13).$$

Como las únicas probabilidades restantes son $P(0)$ y $P(1)$, la probabilidad deseada es igual a

$$1 - [P(0) + P(1)].$$

Para calcular $P(k)$ para cualquier k, podemos considerar el mazo como dividido en dos grupos: corazones y no corazones. Para $P(0)$ observamos que de los 13 corazones del mazo, no obtenemos ninguno y de las 39 cartas que no son corazones, obtenemos 13. Como el número de formas de seleccionar 13 cartas de un mazo de 52 cartas es $C(52, 13)$, vemos que

$$P(0) = \frac{n(0)}{n(S)} = \frac{C(13, 0) \cdot C(39, 13)}{C(52, 13)} \approx 0.0128.$$

La probabilidad $P(1)$ corresponde a obtener 1 de los corazones y 12 de las 39 no corazones. Así,

$$P(1) = \frac{n(1)}{n(S)} = \frac{C(13, 1) \cdot C(39, 12)}{C(52, 13)} \approx 0.0801.$$

En consecuencia, la probabilidad deseada es

$$1 - [P(0) + P(1)] \approx 1 - [0.0128 + 0.0801] = 0.9071.$$ ■

Las palabras *probabilidad* y *posibilidad* se usan a veces indistintamente. Si bien conocer una nos permite calcular la otra, son muy diferentes.

Definición de las posibilidades de un evento

Sea S el espacio muestral de un experimento, E un evento y E' su complemento. Las **posibilidades** $O(E)$ a favor de que ocurra el evento E están dadas por

$$n(E) \quad \text{a} \quad n(E').$$

Las posibilidades $n(E)$ a $n(E')$ a veces se denotan con $n(E) : n(E')$.

Podemos considerar las posibilidades a favor de un evento E como el número de formas en que E ocurre, en comparación con el número de formas en que E no ocurre. Del mismo modo, las posibilidades en *contra* de que ocurra E están dadas por $n(E')$ a $n(E)$.

EJEMPLO 7 **Hallar posibilidades cuando se lanzan dos dados**

Si se lanzan dos dados y E es el evento de tirar una suma de 7, ¿cuáles son las posibilidades

(a) a favor de E? **(b)** en contra de E?

SOLUCIÓN Del ejemplo 2 tenemos $n(E) = 6$ y $n(S) = 36$, de modo que

$$n(E') = n(S) - n(E) = 36 - 6 = 30.$$

(a) Las posibilidades a favor de obtener una suma de 7 son $n(E)$ a $n(E')$ o

6 a 30 o bien, lo que es equivalente 1 a 5.

(b) Las posibilidades en contra para obtener una suma de 7 son $n(E')$ a $n(E)$ o

30 a 6 o bien, lo que es equivalente, 5 a 1. ■

EJEMPLO 8 **Hallar probabilidades y posibilidades**

(a) Si $P(E) = 0.75$, encuentre $O(E)$.

(b) Si $O(E)$ son 6 a 5, encuentre $P(E)$.

SOLUCIÓN

(a) Como $P(E) = 0.75 = \frac{3}{4}$ y $P(E) = n(E)/n(S)$, podemos hacer

$$n(E) = 3 \quad \text{y} \quad n(S) = 4.$$

Entonces, $n(E') = n(S) - n(E) = 4 - 3 = 1$ y $O(E)$ están dadas por

$$n(E) \quad \text{a} \quad n(E'), \quad \text{o} \quad 3 \quad \text{a} \quad 1.$$

(b) Como $O(E)$ son 6 a 5 y $O(E)$ son $n(E)$ a $n(E')$, podemos hacer

$$n(E) = 6 \quad \text{y} \quad n(E') = 5.$$

En consecuencia, $n(S) = n(E) + n(E') = 6 + 5 = 11$ y

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{11}.$$ ■

Se dice que dos eventos E_1 y E_2 son **independientes** si el suceso de uno no influye en que ocurra el otro.

Teorema sobre eventos independientes

Si E_1 y E_2 son eventos independientes, entonces

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2).$$

En palabras, el teorema expresa que si E_1 y E_2 son eventos independientes, la probabilidad de que E_1 y E_2 ocurran simultáneamente es el producto de sus probabilidades. Note que si dos eventos E_1 y E_2 son mutuamente exclusivos, entonces $P(E_1 \cap E_2) = 0$ y no pueden ser independientes. (Suponemos que tanto E_1 como E_2 son no vacíos.)

Si un evento ocurre una vez cada n ensayos (en promedio), una pregunta común es ¿(Cuántos ensayos son necesarios para tener un 50% de probabilidad de que ocurra el evento? El siguiente ejemplo responde a una pregunta similar para un evento específico.

FIGURA 1



EJEMPLO 9 Probabilidades de sacar una escalera real

Una escalera real es una mano de cinco cartas que consiste un A, K, Q, J y 10 del mismo palo (vea figura 1). En un determinado juego de póquer, un ciclo de escalera real se acerca 40 390 manos (cada mano comienza con un nuevo mazo de cartas). Aproxime el número de manos que hay que jugar para tener un 25% de probabilidades de sacar a una escalera real.

SOLUCIÓN Sea E el evento de sacar a una escalera real, por lo que $p(E) = \frac{1}{40{,}390}$ y $p(E') = \frac{40{,}389}{40{,}390}$. Debido a que cada parte se inicia con un nuevo mazo de cartas, las manos son eventos independientes, por lo que la probabilidad de no sacar una escalera real en dos manos consecutivas es de $\frac{40{,}389}{40{,}390} \cdot \frac{40{,}389}{40{,}390} = \left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right)^2$, en tres manos consecutivas es de $\left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right)^3$ y en manos consecutivas n es $\left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right)^n$. Un 25% de probabilidades de que ocurra E es lo mismo que un 75% de probabilidades de que E' ocurra. Podemos resolver para n de la siguiente manera:

$$\left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right)^n = 0.75 \qquad \text{iguale probabilidades para E}'$$

$$\ln\left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right)^n = \ln 0.75 \qquad \text{saque ln en ambos lados}$$

$$n \ln\left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right) = \ln 0.75 \qquad \text{ley 3 de los logaritmos}$$

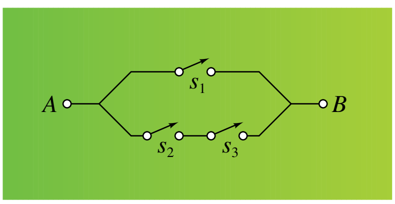
$$n = \frac{\ln 0.75}{\ln\left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right)} \qquad \text{divida}$$

$$n \approx 11{,}619 \qquad \text{aproxime}$$

Porcentaje de probabilidad de sacar una escalera real	Número de manos jugados
25%	11,619
50%	27,996
75%	55,992
90%	93,000

Así, jugar alrededor de 11,619 manos nos da una probabilidad de 25% de sacar una escalera real. Cálculos similares nos da la tabla en el margen. Tenga en cuenta que 27,996 manos es un poco inferior a la media dada de 40,390 manos, pero 93,000 indica que se pueden jugar muchas manos sin sacar una escalera real; de hecho, ¡*ningún* número de manos jugadas garantizará sacar la escurridiza escalera real! ■

FIGURA 2



EJEMPLO 10 Una aplicación de probabilidad a un sistema eléctrico

Un sistema eléctrico tiene abiertos los interruptores s_1, s_2 y s_3, como se ve en la figura 2. Los interruptores operan de manera independiente uno del otro y la corriente circulará de A a B si s_1 está cerrado o si *tanto* s_2 como s_3 están cerrados.

(a) Si S_k denota el evento de que s_k esté cerrado, donde $k = 1, 2, 3$, exprese, en términos de $P(S_1)$, $P(S_2)$ y $P(S_3)$, la probabilidad p de que circule corriente de A a B.

(b) Encuentre p si $P(S_k) = \frac{1}{2}$ para cada k.

SOLUCIÓN

(a) La probabilidad p de que ocurra S_1 o S_2 y S_3 es

$$p = P(S_1 \cup (S_2 \cap S_3)).$$

Usando el teorema sobre la probabilidad de que ocurran dos eventos cualesquiera S_1 o $S_2 \cap S_3$, obtenemos

$$p = P(S_1) + P(S_2 \cap S_3) - P(S_1 \cap (S_2 \cap S_3)).$$

Aplicando dos veces el teorema sobre eventos independientes, tendremos

$$p = P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2 \cap S_3).$$

Por último, usando una vez más el teorema sobre eventos independientes, vemos que

$$p = P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3).$$

(b) Si $P(S_k) = \frac{1}{2}$ para cada k, entonces de acuerdo con el inciso (a) la probabilidad de que circule corriente de A a B es

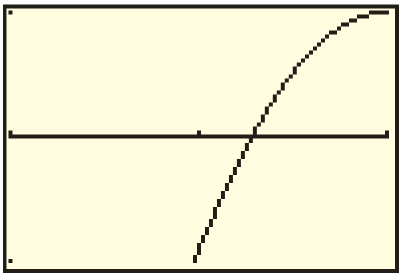
$$p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8} = 0.625.$$ ■

EJEMPLO 11 **Una continuación del ejemplo 10**

Consulte el ejemplo 9. Si la probabilidad de que s_k esté cerrado es igual para cada k, determine $P(S_k)$ de manera que $p = 0.99$.

SOLUCIÓN Como la probabilidad $P(S_k)$ es igual para cada k, hacemos $P(S_k) = x$ para $k = 1, 2, 3$. Sustituyendo en la fórmula para p obtenida en el inciso (a) del ejemplo 10, obtenemos

FIGURA 3
$[0.8, 1, 0.1]$ por $[-0.01, 0.01, 0.01]$



$$p = x + x \cdot x - x \cdot x \cdot x = -x^3 + x^2 + x.$$

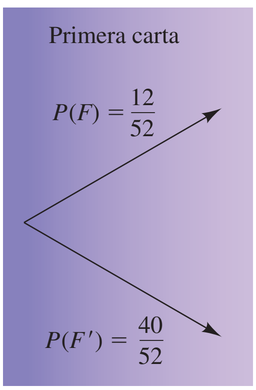
Haciendo $p = 0.99$ tendremos la ecuación

$$-x^3 + x^2 + x = 0.99.$$

Al graficar $y = -x^3 + x^2 + x - 0.99$ usando una pantalla estándar, vemos que hay tres puntos de cruce con el eje x. La probabilidad deseada debe estar entre $x = 0$ y $x = 1$ y debe ser más bien cercana a 1. Usando las dimensiones de pantalla de $[0.8, 1, 0.1]$ por $[-0.01, 0.01, 0.01]$, obtenemos un trazo semejante al de la figura 3. Usando una función raíz o cero tendremos $x \approx 0.93$. En consecuencia, $P(S_k) \approx 0.93$.

Note que la probabilidad de que un interruptor esté cerrado es *menor* que la probabilidad de que circule corriente por el sistema. ■

FIGURA 4



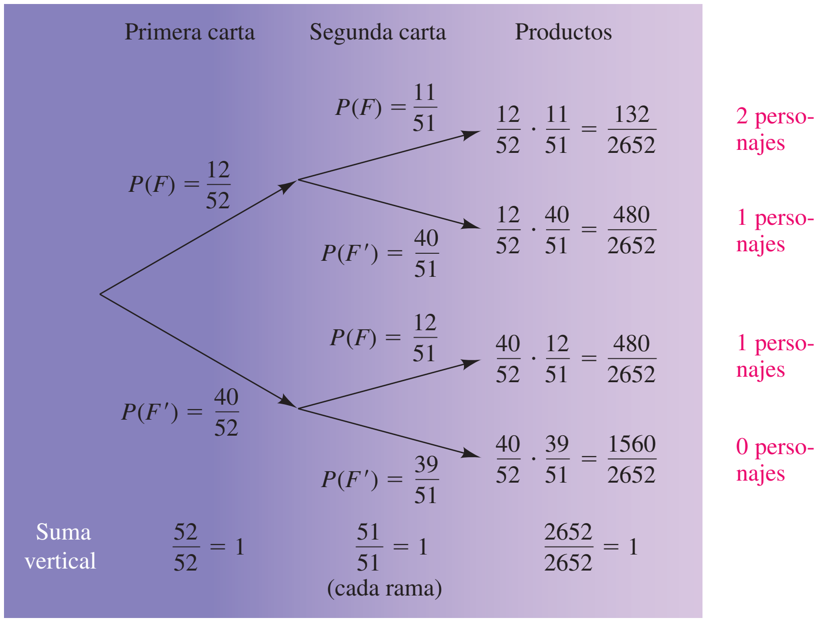
EJEMPLO 12 **Usar un diagrama de árbol para hallar una probabilidad**

Si dos cartas se sacan de un mazo, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas sea un personaje?

SOLUCIÓN Denotemos con F el evento de sacar un personaje. Hay 12 cartas de personaje en un mazo de 52 cartas, de modo que $P(F) = \frac{12}{52}$. Podemos describir esta probabilidad, así como la probabilidad de su complemento, con el *diagrama de árbol* que se ve en la figura 4.

Las probabilidades para la segunda carta dependen de lo que haya sido la primera. Para abarcar todas las posibilidades para la segunda carta, enlazamos ramas con probabilidades semejantes al extremo de cada rama del primer diagrama de árbol, como se ve en la figura 5.

FIGURA 5



La columna de productos es una lista de las probabilidades para todas las posibilidades de dos cartas; por ejemplo, la probabilidad de que ambas cartas sean figuras es $\frac{132}{2652}$. Las sumas verticales deben ser igual a 1; calcular esto es una buena forma de comprobar los cálculos. Para contestar la pregunta, podemos sumar las primeras tres probabilidades en la columna de productos o restar la cuarta probabilidad de 1. Usando el último método, tenemos

$$1 - \frac{1560}{2652} = \frac{1092}{2652} = \frac{7}{17} \approx 41\%.$$

■

Con frecuencia es de interés saber qué cantidad de rendimiento se puede esperar de una inversión en un juego de azar. La siguiente definición nos ayudará a contestar preguntas que caen en esta categoría

Definición de valor esperado

Suponga que una variable puede pagar cantidades $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con probabilidades correspondientes $p_1, p_2, \ldots, p_n$. El **valor esperado** VE de la variable está dado por

$$\text{VE} = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n = \sum_{k=1}^{n} a_kp_k.$$

EJEMPLO 13 **Valor esperado de un solo anillo**

Algunos estados donde se permiten loterías ofrecen a veces juegos en los que se imprime cierto número de anillos (para abrir una lata), algunos de los cuales se canjean por dinero y los demás no tienen valor. Suponga que en un juego en particular hay 4000 anillos, 432 de los cuales se canjean de acuerdo con la tabla siguiente.

Número de anillos	Valor
4	\$100
8	50
20	20
400	2

Encuentre el valor esperado de un anillo que se vende en \$1.

SOLUCIÓN Las cantidades de pago de \$100, \$50, \$20 y \$2 tienen probabilidades $\frac{4}{4000}, \frac{8}{4000}, \frac{20}{4000}, \frac{400}{4000}$, respectivamente. Los restantes 3568 anillos tienen un pago de \$0. Por la definición precedente, el valor esperado de un solo anillo es

$$\begin{aligned} EV &= 100 \cdot \tfrac{4}{4000} + 50 \cdot \tfrac{8}{4000} + 20 \cdot \tfrac{20}{4000} + 2 \cdot \tfrac{400}{4000} + 0 \cdot \tfrac{3568}{4000} \\ &= \tfrac{2000}{4000} = \$0.50. \end{aligned}$$

Así, después de restar el costo de \$1 del anillo, podemos esperar una *pérdida* de \$0.50 en cada anillo que compremos. Note que no podemos perder \$0.50 en ningún anillo individual, pero podemos esperar perder a largo plazo esta cantidad en cada anillo. Este juego da un rendimiento muy malo para el comprador y una sana utilidad para el vendedor. ■

El valor esperado de \$0.50 obtenido en el ejemplo 12 se puede considerar como la cantidad que esperaríamos pagar por participar en el juego si éste fuera *justo*, es decir, no esperaríamos ganar o perder ningún dinero después de participar en el juego varias veces.

En esta sección simplemente hemos introducido varios conceptos básicos acerca de probabilidades. La persona interesada debe consultar libros y cursos enteros dedicados a esta rama de las matemáticas.

10.8 Ejercicios

Ejer. 1–2: Una sola carta se saca de un mazo. Encuentre la probabilidad y las posibilidades de que la carta sea como se especifica.

1 **(a)** un rey

(b) un rey o una reina

(c) un rey, una reina o un joto

2 **(a)** un corazón

(b) un corazón o un diamante

(c) un corazón, un diamante o una de bastos

Ejer. 3–4: Se lanza al aire un solo dado. Encuentre la probabilidad y las posibilidades de que el dado sea como se especifica.

3 **(a)** un 4 **(b)** un 6 **(c)** un 4 o un 6

4 **(a)** un número par **(b)** un número divisible entre 5

(c) un número par o un número divisible entre 5

Ejer. 5–6: Una urna contiene cinco bolas rojas, seis verdes y cuatro blancas. Si se saca una sola de ellas, encuentre la probabilidad y las posibilidades de que sea como se especifica.

5 **(a)** roja **(b)** verde **(c)** roja o blanca

6 **(a)** blanca **(b)** verde o blanca **(c)** no verde

Ejer. 7–8: Se lanzan al aire dos dados. Encuentre la probabilidad y las posibilidades de que la suma sea como se especifica.

7 **(a)** 11 **(b)** 8 **(c)** 11 u 8

8 **(a)** mayor que 9 **(b)** un número impar

Ejer. 9–10: Se lanzan al aire tres dados. Encuentre la probabilidad del evento especificado.

9 Una suma de 5

10 Un seis aparece en exactamente un dado

11 Si se lanzan al aire tres monedas, encuentre la probabilidad de que aparezcan exactamente dos caras.

12 Si se lanzan al aire cuatro monedas, encuentre la probabilidad de obtener dos caras y dos cruces.

13 Si $P(E) = \frac{5}{7}$, encuentre $O(E)$ y $O(E')$.

14 Si $P(E) = 0.4$, encuentre $O(E)$ y $O(E')$.

15 Si $O(E)$ son 9 a 5, encuentre $O(E')$ y $P(E)$.

16 Si $O(E')$ son 7 a 3, encuentre $O(E)$ y $P(E)$.

Ejer. 17–18: Para el valor dado de $P(E)$, calcule $O(E)$ en términos de "X a 1".

17 $P(E) \approx 0.659$

18 $P(E) \approx 0.822$

Ejer. 19–24: Suponga que se sacan cinco cartas de un mazo. Encuentre la probabilidad de obtener las cartas indicadas.

19 Cuatro de una clase (por ejemplo cuatro ases o cuatro reyes)

20 Tres ases y dos reyes

21 Cuatro diamantes y una de espadas

22 Cinco personajes

23 Una corrida (cinco cartas del mismo palo)

24 Una escalera real (un as, rey, reina, joto y 10 del mismo palo)

25 Si se lanza al aire un solo dado, encuentre la probabilidad de obtener un número impar o un número primo.

26 Una sola carta se saca de un mazo. Encuentre la probabilidad de que la carta sea roja o de personaje.

27 Si la probabilidad de que un bateador en béisbol conecte un imparable en un turno al bat es de 0.326, encuentre la probabilidad de que el bateador no conecte *hit* en 4 turnos al bat.

28 Si la probabilidad de que un jugador de baloncesto enceste un tiro libre es 0.9, encuentre la probabilidad de que el jugador enceste al menos 1 de 2 tiros libres.

Ejer. 29–30: Los resultados 1, 2, . . . , 6 de un experimento y sus probabilidades aparecen en la tabla siguiente.

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0.25	0.10	0.15	0.20	0.25	0.05

Para los eventos indicados, encuentre (a) $P(E_2)$, (b) $P(E_1 \cap E_2)$, (c) $P(E_1 \cup E_2)$ y (d) $P(E_2 \cup E_3')$.

29 $E_1 = \{1, 2\}$; $E_2 = \{2, 3, 4\}$; $E_3 = \{4, 6\}$

30 $E_1 = \{1, 2, 3, 6\}$; $E_2 = \{3, 4\}$; $E_3 = \{4, 5, 6\}$

Ejer. 31–32: Una caja contiene 10 chips rojos, 20 azules y 30 verdes. Si se sacan 5 chips de la caja, encuentre la probabilidad de sacar los que se indican.

31 (a) todos azules

(b) al menos 1 verde

(c) al menos 1 rojo

32 (a) exactamente 4 verdes

(b) al menos 2 rojos

(c) a lo sumo 2 azules

33 **Examen de verdadero o falso** Un examen de verdadero o falso contiene ocho preguntas. Si un estudiante adivina la respuesta para cada pregunta, encuentre la probabilidad de que

(a) ocho respuestas sean correctas

(b) siete respuestas sean correctas y una incorrecta

(c) seis respuestas sean correctas y dos sean incorrectas

(d) al menos seis respuestas sean correctas

34 **Selección de comité** Un comité de 6 miembros se va a seleccionar al sacar nombres de personas de un sombrero. Si el sombrero contiene los nombres de 8 hombres y 14 mujeres, encuentre la probabilidad de que el comité esté formado por 3 hombres y 3 mujeres.

Ejer. 35–36: Se sacan cinco cartas de un mazo. Encuentre la probabilidad del evento especificado.

35 Obtener al menos un as

36 Obtener al menos una carta de corazones

37 **Experimento de cartas y dados** Cada palo de un mazo está formado por un as (A), nueve cartas numeradas (2, 3, . . . , 10) y tres personajes (J, Q, K). Un experimento consiste en sacar una sola carta de un mazo seguido por tirar un solo dado.

(a) Describa el espacio muestral S del experimento y encuentre $n(S)$.

(b) Sea E_1 el evento formado por los resultados en los que una carta de número se saca y el número de puntos en el dado es igual que el número de la carta. Encuentre $n(E_1)$, $n(E_1{}')$ y $P(E_1)$.

(c) Sea E_2 el evento en el que la carta sacada es un personaje, y sea E_3 el evento en el que el número de puntos del dado es par. ¿E_2 y E_3 son mutuamente exclusivos? ¿Son independientes? Encuentre $P(E_2)$, $P(E_3)$, $P(E_2 \cap E_3)$ y $P(E_2 \cup E_3)$.

(d) ¿E_1 y E_2 son mutuamente exclusivos? ¿Son independientes? Encuentre $P(E_1 \cap E_2)$ y $P(E_1 \cup E_2)$.

38 Experimento de letra y número Un experimento consiste en seleccionar una letra del alfabeto y uno de los dígitos 0, 1, . . . , 9.

(a) Describa el espacio muestral S del experimento y encuentre $n(S)$.

(b) Suponga que las letras del alfabeto se asignan a números como sigue: $A = 1, B = 2, \ldots, Z = 26$. Sea E_1 el evento en el que el dígito de unidades del número asignado a la letra del alfabeto es igual al dígito seleccionado. Encuentre $n(E_1)$, $n(E_1{}')$ y $P(E_1)$.

(c) Sea E_2 el evento de que la letra sea una de las cinco vocales y E_3 el evento de que el dígito un número primo. ¿E_2 y E_3 son mutuamente exclusivos? ¿Son independientes? Encuentre $P(E_2)$, $P(E_3)$, $P(E_2 \cap E_3)$ y $P(E_2 \cup E_3)$.

(d) Sea E_4 el evento en el que el valor numérico de la carta es par. ¿Son E_2 y E_4 mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Encuentre $P(E_2 \cap E_4)$ y $P(E_2 \cup E_4)$.

39 Lanzar dados Si se lanzan dos dados, encuentre la probabilidad de que la suma sea mayor que 5.

40 Lanzar dados Si se lanzan tres dados, encuentre la probabilidad de que la suma sea menor que 16.

41 Conformación de familia Suponiendo que los nacimientos de niñas y niños sean igualmente probables, encuentre la probabilidad de que una familia con cinco hijos tenga

(a) solo niños **(b)** al menos una niña

42 Máquina tragamonedas Una máquina tragamonedas común y corriente contiene tres carretes y cada uno de éstos contiene 20 símbolos. Si el primer carrete tiene cinco campanas, el carrete del medio tiene cuatro campanas y el último carrete tiene dos campanas, encuentre la probabilidad de obtener tres campanas en una fila.

43 Experimento de percepción extrasensorial (PE) En un sencillo experimento diseñado para probar PE, cuatro cartas (joto, reina, rey y un as) se barajan y luego se ponen boca abajo en una mesa. El individuo trata entonces de identificar cada una de las cuatro cartas, dando un nombre diferente a cada una de ellas. Si el individuo está adivinando, encuentre la probabilidad de identificar correctamente

(a) las cuatro cartas

(b) exactamente dos de las cuatro cartas

44 Lanzar dados Se lanzan tres dados.

(a) Encuentre la probabilidad de que todos los dados muestren el mismo número de puntos.

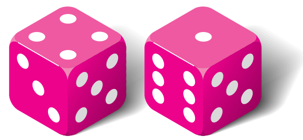
(b) Encuentre la probabilidad de que los números de puntos en los dados sean todos diferentes.

(c) Trabaje los incisos (a) y (b) para n dados.

45 Dados "cargados" Para un dado normal, la suma de los puntos en las caras opuestas es 7. En la figura se muestra un par de dados "cargados" en los que *el mismo* número de puntos aparece en caras opuestas. Encuentre la probabilidad de tirar una suma de

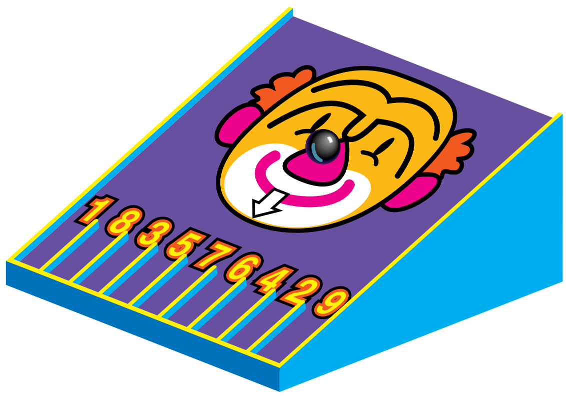
(a) 7 **(b)** 8

EJERCICIO 45



46 Juego de feria En un juego común de carnaval, tres bolas se lanzan en un plano inclinado hacia ranuras numeradas del 1 al 9, como se ve en la figura. Debido a que las ranuras son tan angostas, los jugadores no tienen control sobre dónde se recolectan las bolas. Se da un premio si la suma de los tres números es menor que 7. Encuentre la probabilidad de ganar un premio.

EJERCICIO 46



47 Muertes por fumar En un año promedio durante 1995–1996, el fumar causó 442,398 muertes en Estados Unidos. De estas muertes, las enfermedades cardiovasculares fueron 148,605, Cáncer fueron 155,761 y enfermedades respiratorias, por ejemplo enfisema fueron 98,007.

(a) Encuentre la probabilidad de que una muerte relacionada con fumar fuera el resultado ya sea de enfermedad cardiovascular o de cáncer.

(b) Determine la probabilidad de que una muerte relacionada con fumar no fuera el resultado de enfermedades respiratorias.

48 Horas de inicio de trabajo En una encuesta acerca de la hora en que las personas se van a su trabajo, se encontró que 8.2 millones van a trabajar entre la medianoche y las 6:00 a.m., 60.4 millones entre las 6:00 y las 9:00 a.m. y 18.3 millones entre las 9:00 a.m. y la medianoche.

(a) Encuentre la probabilidad de que una persona vaya al trabajo entre las 6:00 a.m. y la medianoche.

(b) Determine la probabilidad de que una persona vaya a trabajar entre la medianoche y las 6:00 a.m.

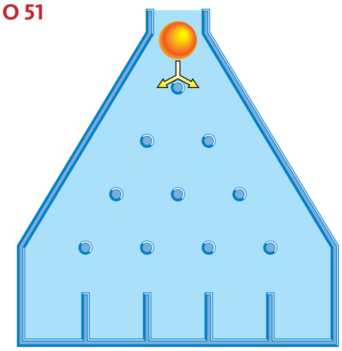
49 **Exposición al arsénico y cáncer** En cierto condado, 2% de las personas tienen cáncer. De los que tienen cáncer, 70% han estado expuestos a altos niveles de arsénico; de los que no tienen cáncer, 10% han estado expuestos. ¿Qué porcentaje de las personas que han estado expuestas a altos niveles de arsénico tienen cáncer? (*Sugerencia:* use un diagrama de árbol.)

50 **Computadoras y chips defectuosos** Un fabricante de computadoras compra 30% de sus chips al proveedor A y el resto al proveedor B. Dos por ciento de los chips del proveedor A son defectuosos, así como son el 4% de los chips del proveedor B. ¿Aproximadamente qué porcentaje de los chips defectuosos son del proveedor B?

51 **Demostración de probabilidad** En la figura se muestra una pequeña versión de un aparato para demostración de probabilidad. Una pequeña bola se deja caer en la parte superior del laberinto y cae al fondo. Cada vez que la bola golpea un obstáculo, hay un 50% de probabilidad de que se mueva a la izquierda. Encuentre la probabilidad de que la bola termine en la ranura

(a) de la extrema izquierda **(b)** del centro

EJERCICIO 51

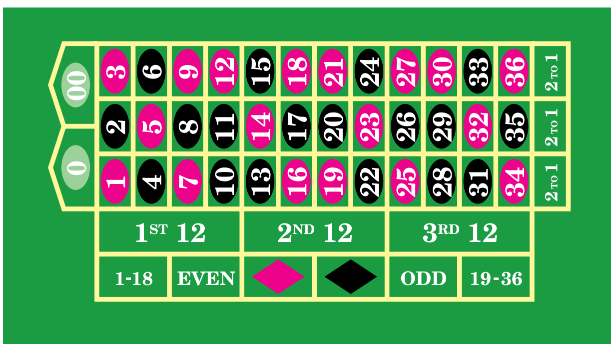


52 **Ruleta** En la versión estadounidense de la ruleta, una pelota se lanza alrededor de una rueda y tiene igual probabilidad de caer en cualquiera de las 38 ranuras numeradas 0, 00, 1, 2, . . . , 36. En la figura se muestra una distribución estándar de apuestas para ruleta, donde el color del óvalo corresponde al color de la ranura de la rueda. Encuentre la probabilidad de que la pelota caiga

(a) en una ranura negra

(b) en una ranura negra dos veces consecutivas

EJERCICIO 52



53 **Seleccionar números de lotería** En una versión de un popular juego de lotería, un jugador selecciona seis de los números del 1 al 54. La agencia a cargo de la lotería también selecciona seis números. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador iguale los seis números si se compran dos boletos de 50¢? (Este premio "gordo" vale al menos $2 millones en dinero y crece de acuerdo con el número de boletos vendidos.)

54 **Lotería** Consulte el ejercicio 53. El jugador puede ganar unos $1000 por igualar cinco de los seis números y alrededor de $40 si iguala cuatro de los seis números. Encuentre la probabilidad de que el jugador gane algún dinero del premio en la compra de un billete.

55 **Control de calidad** En un procedimiento de control de calidad para probar bombillas defectuosas, se seleccionan al azar dos bombillas de una muestra grande sin restituirlas. Si cualquiera de las bombillas está defectuosa, todo el lote se rechaza. Suponga que una muestra de 200 bombillas contiene 5 de ellas defectuosas. Encuentre la probabilidad de que la muestra sea rechazada. (*Sugerencia:* primero calcule la probabilidad de que ninguna bombilla sea defectuosa.)

56 **Expectativa de vida** Un hombre tiene 54 años de edad y una mujer tiene 34. La probabilidad de que el hombre viva 10 años más es 0.74, mientras que la probabilidad de que la mujer viva 10 años más a partir de ahora es 0.94. Suponga que sus expectativas de vida no están relacionadas.

(a) Encuentre la probabilidad de que ambos vivan 10 años más a partir de ahora.

(b) Determine la probabilidad de que ninguno viva 10 años más a partir de ahora.

(c) Determine la probabilidad de que al menos uno de ellos viva 10 años más a partir de ahora.

57 **Jugar a los dados** En el juego de *dados*, hay dos formas en que un jugador pueda ganar una apuesta de *línea de paso*. El jugador gana de inmediato si dos dados se tiran y la suma de ambos es 7 u 11. Si su suma es 4, 5, 6, 8, 9 o 10, el jugador todavía puede ganar una apuesta de línea de paso si este mismo número (llamado *punto*) se tira otra vez antes de tirar un 7. Encuentre la probabilidad de que el jugador gane

(a) una apuesta de línea de paso en el primer tiro

(b) una apuesta de línea de paso con un 4 en el primer tiro

(c) en cualquier apuesta de línea de paso

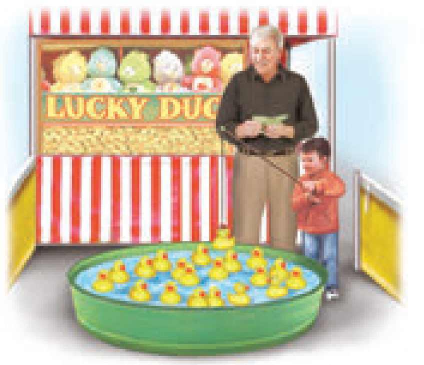
58 **Dados sin dados** Consulte el ejercicio 57. En el juego de dados, un jugador pierde una apuesta de línea de paso si obtiene una suma de 2, 3 o 12 en el primer tiro (conocido como "dados"). En otra versión del juego, llamada *"dados sin dados"*, el jugador no pierde si tira dados y no gana al tirar un 11 en el primer tiro. En cambio, el jugador gana si el primer tiro es un 7 o si el punto (2–12, excluyendo 7) se repite antes de tirar un 7. Encuentre la probabilidad de que el jugador gane en una apuesta de línea de paso en dados sin dados.

59 **Probabilidades de escoger una canica única** Hay una canica morada en una caja de 200 canicas. Un niño elige una canica al azar y la reemplaza hasta que la canica morada es seleccionada. ¿Cuántas selecciones resultan en alrededor de un 60% de posibilidad de seleccionar la canica morada?

60 Vuelva a hacer el ejercicio 59 si ahora hay solamente 100 canicas en la caja.

61 **Pesca de patos** Hay 20 patos de hule en un tanque de una feria local y capturar los tres patos especialmente marcados resulta en un gran premio. Si un abuelo quiere que haya un 80% de posibilidad de que su nieto gane un gran premio, ¿cuántas rondas de pesca debe estar dispuesto a pagar?

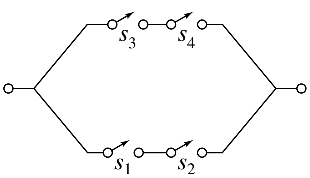
EJERCICIO 61



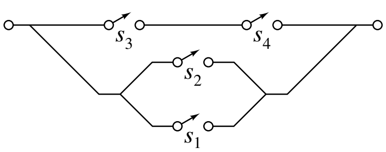
62 **Giros de la gran rueda** Un juego tiene una gran rueda con 24 ranuras. Cuando un concursante hace girar la rueda y cae en una de las dos ranuras especialmente marcadas, el concursante recibe el gran premio. Los productores del programa quieren saber cuántas vueltas darán lugar a una probabilidad de 90% de que los grandes premios sean ganados. Determine el número de vueltas.

Ejer. 63–64: Consulte los ejemplos 9 y 10. (a) Encuentre p para el sistema eléctrico que se muestra en la figura si $P(S_k) = 0.9$ para cada k. (b) Use una gráfica para estimar $P(S_k)$ si $p = 0.99$.

63



64



65 **Probabilidad de cumpleaños**

(a) Demuestre que la probabilidad p de que n personas tengan todas ellas diferentes cumpleaños está dada por

$$p = \frac{365!}{365^n(365 - n)!}.$$

(b) Si en un salón hay 32 personas, calcule la probabilidad de que dos o más de ellas tengan *el mismo* cumpleaños. (Primero calcule ln p al usar la siguiente fórmula de matemáticas avanzadas:

$$\ln n! \approx n \ln (n - n.)$$

66 **Probabilidad de cumpleaños** Consulte el ejercicio 65. Encuentre el mínimo número de personas en un salón tales que la probabilidad de que cada una tenga un cumpleaños diferente sea menor que $\frac{1}{2}$. *Sugerencia:* reescriba la fórmula para p del inciso (a) del ejercicio previo como

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{365 - n + 1}{365}.$$

67 **Una apuesta en dados** Consulte el ejercicio 57. Un jugador recibe \$2 por ganar una apuesta de línea de base de \$1. Calcule el valor esperado de una apuesta de \$1.

68 **Una apuesta en la ruleta** Consulte el ejercicio 52. Si un jugador apuesta \$1 a que la bolita caerá en una ranura negra, recibirá \$2 si así ocurre. Calcule el valor esperado de una apuesta de \$1.

69 **Ganar el premio de un concurso** Un concurso ofrece los siguientes premios en dinero:

Número de premios	1	10	100	1000
Valor del premio	\$1,000,000	\$100,000	\$10,000	\$1000

Si el patrocinador espera 20 millones de concursantes, encuentre el valor esperado para un solo concursante.

70 **Ganancias del premio de un torneo** Un torneo de boliche tiene la desventaja de que 80 jugadores participantes están todos empatados. Los premios del torneo aparecen en la tabla.

Lugares	1o.	2o.	3o.	4o.	5o.–10o.
Premio	\$1000	\$500	\$300	\$200	\$100

Encuentre las ganancias esperadas para un concursante.

CAPÍTULO 10 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–4: Encuentre los primeros cuatro términos y el séptimo término de la sucesión que tiene el *n*-ésimo término dado.

1 $\left\{\dfrac{5n}{3-2n^2}\right\}$

2 $\{(-1)^{n+1}-(0.1)^n\}$

3 $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

4 $\left\{\dfrac{2^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$

Ejer. 5–8: Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión infinita definida en forma repetitiva.

5 $a_1 = 10, \quad a_{k+1} = 1 + (1/a_k)$

6 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = a_k!$

7 $a_1 = 9, \quad a_{k+1} = \sqrt{a_k}$

8 $a_1 = 1, \quad a_{k+1} = (1 + a_k)^{-1}$

Ejer. 9–14: Evalúe.

9 $\sum_{k=1}^{5}(k^2+4)$

10 $\sum_{k=2}^{6}\dfrac{2k-8}{k-1}$

11 $\sum_{k=7}^{100} 10$

12 $\sum_{k=1}^{4}(2^k-10)$

13 $\sum_{k=5}^{72}(3x^2)$

14 $\sum_{k=0}^{100}\left(\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)$

Ejer. 15–26: Exprese la suma en términos de notación de suma. (Las respuestas no son únicas.)

15 $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

16 $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

17 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$

18 $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$

19 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}$

20 $\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{14}+\frac{4}{19}$

21 $100 - 95 + 90 - 85 + 80$

22 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$

23 $a_0 + a_1x^4 + a_2x^8 + \cdots + a_{25}x^{100}$

24 $a_0 + a_1x^3 + a_2x^6 + \cdots + a_{20}x^{60}$

25 $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^6}{6}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$

26 $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}$

27 Una sucesión está definida recursivamente por $a_1 = 4$, $a_2 = 5$,

$$a_{k+1} = 2a_k + a_{k-1}$$

para $k \geq 2$. Encuentre los siguientes términos de la sucesión.

28 Encuentre el décimo término y la suma de los primeros diez términos de la sucesión aritmética cuyos primeros dos términos son $4 + \sqrt{3}$ y 3.

29 Encuentre la suma de los primeros ocho términos de la sucesión aritmética en la que el cuarto término es 9 y la diferencia común es -5.

30 Los términos quinto y treceavo de una sucesión aritmética son 5 y 77, respectivamente. Encuentre el primer término y el décimo término.

31 Encuentre el número de términos de la sucesión aritmética con $a_1 = 1$, $d = 5$ y $S = 342$.

32 Inserte cuatro medias aritméticas entre 20 y -10.

33 Encuentre el décimo término de la sucesión geométrica cuyos primeros dos términos son $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$.

34 Si una sucesión geométrica tiene 3 y -0.3 como sus términos tercero y cuarto, respectivamente, encuentre el octavo término.

35 Dada una sucesión geométrica con $a_3 = 16$ y $a_7 = 625$, encuentre a_8.

36 Encuentre la media geométrica de 4 y 8.

37 En cierta sucesión geométrica, el octavo término es 100 y la razón común es $-\frac{3}{2}$. Encuentre el primer término.

38 Inserte dos medias geométricas entre 7 y 354,571.

39 Dada una sucesión aritmética tal que $S_{12} = 402$ y $a_{12} = 50$, encuentre a_1 y d.

40 Dada una sucesión geométrica tal que $a_5 = \frac{1}{16}$ y $r = \frac{3}{2}$, encuentre a_1 y S_5.

Ejer. 41–44: Evalúe.

41 $\sum_{k=1}^{15} (5k - 2)$ 42 $\sum_{k=1}^{10} \left(6 - \frac{1}{2}k\right)$

43 $\sum_{k=1}^{10} \left(2^k - \frac{1}{2}\right)$ 44 $\sum_{k=1}^{8} \left(\frac{1}{2} - 2^k\right)$

45 Encuentre la suma de la serie geométrica infinita

$$1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \cdots.$$

46 Encuentre el número racional cuya representación decimal es $6.\overline{274}$.

Ejer. 47–51: Demuestre que el enunciado es verdadero para todo entero positivo *n*.

47 $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$

48 $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(2n + 1)(n + 1)}{3}$

49 $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n}{2n + 1}$

50 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

51 3 es un factor de $n^3 + 2n$.

52 Demuestre que $n^2 + 3 < 2^n$ para todo entero positivo $n \geq 5$.

Ejer. 53–54: Encuentre el mínimo entero positivo *j* para el cual el enunciado es verdadero. Use el principio extendido de inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todo entero mayor que *j*.

53 $2^n \leq n!$ 54 $10^n \leq n^n$

Ejer. 55–56: Use el teorema del binomio para expandir y simplificar la expresión.

55 $(x^2 - 3y)^6$ 56 $(2x + y^3)^4$

Ejer. 57–60: Sin expandir por completo, encuentre el (los) término(s) indicado(s) en la expansión de la expresión.

57 $(x^{2/5} + 2x^{-3/5})^{20}$; primeros tres términos

58 $\left(y^3 - \frac{1}{2}c^2\right)^9$; sexto término

59 $(4x^2 - y)^7$; término que contiene x^{10}

60 $(2c^3 + 5c^{-2})^{10}$; término que no contiene c

61 **Materiales de construcción** 10 piezas de madera de 2 × 2 se han de cortar en cinco secciones para formar materiales de construcción para niños; las longitudes de los cinco bloques han de formar una sucesión aritmética.

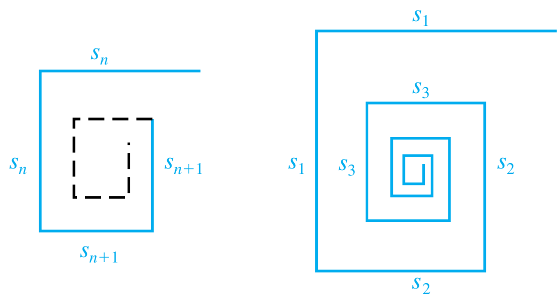
(a) Demuestre que la diferencia d en longitudes debe ser menor que 1 pie.

(b) Si el bloque más pequeño ha de tener una longitud de 6 pulgadas, encuentre las longitudes de las otras cuatro piezas.

62 **Construcción de una escalera** Una escalera se ha de construir con 16 barrotes cuyas longitudes disminuyen uniformemente de 20 pulgadas en la base a 16 pulgadas en el otro extremo. Encuentre la longitud total del material necesario para los barrotes.

63 En la primera figura se muestra una curva de rectas interrumpidas obtenida al tomar dos lados adyacentes de un cuadrado, cada uno de longitud s_n, decreciendo la longitud del lado en un factor f con $0 < f < 1$ y formando dos lados de un cuadrado más pequeño, cada uno de longitud $s_{n+1} = f \times s_n$. El proceso se repite entonces hasta el infinito. Si $s_1 = 1$ en la segunda figura, exprese la longitud de la curva de recta interrumpida resultante (infinita) en términos de f.

EJERCICIO 63



64 Las leyes conmutativa y asociativa de la adición garantizan que la suma de los enteros del 1 al 10 sea independiente del orden en el que los números se sumen. ¿En cuántas formas diferentes se pueden sumar estos enteros?

65 **Selección de cartas**

(a) ¿En cuántas formas se pueden seleccionar 13 cartas de un mazo?

(b) ¿En cuántas formas se pueden seleccionar 13 cartas para obtener cinco espadas, tres corazones, tres bastos y dos diamantes?

66 ¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si las repeticiones

(a) no se permiten? (b) se permiten

67 **Selección de preguntas de examen**

(a) ¿Si un estudiante debe contestar 8 de 12 preguntas sobre un examen, ¿cuántas selecciones diferentes de preguntas son posibles?

(b) ¿Cuántas selecciones son posibles si las primeras tres preguntas deben ser contestadas?

68 **Arreglos de color** Si seis discos negros, cinco rojos, cuatro blancos, y dos verdes son acomodados en una fila ¿cuál es el número de posibles distribuciones de colores?

69 Si $O(E)$ son 8 a 5, encuentre $O(E')$ y $P(E)$.

70 **Lanzar monedas al aire** Encuentre la probabilidad de que las monedas se igualen si

(a) dos muchachos lanzan cada uno una moneda

(b) tres muchachos lanzan cada uno una moneda

71 **Dar cartas** Si se dan cuatro cartas de un mazo, encuentre la probabilidad de que

(a) las cuatro cartas sean del mismo color

(b) las cartas dadas sean alternadas rojo-negro-rojo-negro

72 **Probabilidades de participar en una rifa** Si 1000 boletos se venden para una rifa, encuentre la probabilidad de ganar si una persona compra

(a) 1 boleto **(b)** 10 boletos **(c)** 50 boletos

73 **Lanzar monedas al aire** Si cuatro monedas se lanzan al aire, encuentre la probabilidad y las posibilidades de obtener una cara y tres cruces.

74 **Examen de verdadero o falso** Un examen contiene seis preguntas de verdadero o falso; se requieren al menos cuatro respuestas correctas para una calificación aprobatoria. Si un estudiante adivina en cada respuesta, ¿cuál es la probabilidad de

(a) aprobar? **(b)** no aprobar?

75 **Probabilidades en dados y cartas** Si se lanza un solo dado y luego se saca una carta de un mazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener

(a) un 6 en el dado y el rey de corazones?

(b) Un 6 en el dado o el rey de corazones?

76 **Demografía poblacional** En una población de 5000 personas, 1000 tienen más de 60 años de edad y 2000 son mujeres. Se sabe que 40% de las mujeres tienen más de 60 años de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar de esa ciudad sea mujer o que tenga más de 60 años?

77 **Movimiento en backgammon** En el juego de backgammon, a los jugadores se les permite mover sus fichas el mismo número de espacios que la suma de los puntos en dos dados, pero si se tira un doble (esto es, ambos dados muestran el mismo número de puntos), entonces los jugadores pueden mover sus fichas dos veces la suma de los puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador pueda mover sus fichas al menos 10 espacios en un tiro dado?

78 **Probabilidades de escoger una carta única** Un hombre selecciona una carta al azar de una nueva baraja y la reemplaza hasta que la reina de espadas es seleccionada. ¿Cuántas selecciones resultan en alrededor de un 75% de probabilidades de seleccionar la reina de espadas?

79 **Juegos en una serie** Dos equipos de béisbol igualmente acoplados están jugando una serie de partidos. El primer equipo en ganar cuatro juegos gana la serie. Encuentre el número esperado de partidos de la serie.

80 **Probabilidad de ases** En un popular juego de póquer, a los jugadores se les reparten dos cartas de una baraja de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que a un jugador se le repartan un par de ases.

CAPÍTULO 10 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 Una pregunta de examen contiene cuatro términos de una sucesión como 2, 4, 6 y 8 y pide el quinto término. Demuestre que el quinto término puede ser *cualquier* número real a al hallar el n-ésimo término de una sucesión que tiene 2, 4, 6, 8 y a como sus primeros cinco términos.

2 Determine si $\square$ debe sustituirse con $\leq$ o $\geq$ En

$$n \;\square\; (\ln n)^3$$

para que el enunciado sea verdadero cuando $n \geq j$, donde j es el mínimo entero positivo para el cual el enunciado es verdadero. Encuentre j.

Ejer. 3–4: (a) Use el método de los ejercicios 41 y 42 de la sección 10.4 para hallar una fórmula para la suma. (b) Verifique que la fórmula hallada en el inciso (a) sea verdadera para toda *n*.

3 $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$

4 $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3$

5 Determine el máximo factorial que su calculadora pueda calcular. Algunos valores comunes son 69! y 449!. Especule en cuanto a por qué estos números son los máximos valores que su calculadora puede evaluar.

6 Encuentre una relación entre los coeficientes de la expansión de $(a + b)^n$ y el número de subconjuntos distintos de un conjunto de n elementos.

7 **Rebote de pelota** Cuando una pelota se deja caer de una altura de h pies, llega al suelo en $\sqrt{h}/4$ segundos. La pelota rebota a una altura de d pies en $\sqrt{d}/4$ segundos. Si una pelota de caucho se deja caer de una altura de 10 pies y rebota a la mitad de su altura después de cada caída, ¿durante aproximadamente cuántos segundos viaja la pelota?

8 **Torneo de tragamonedas** Un torneo de tragamonedas se llevará a cabo durante un mes de 30 días, ocho horas al día, con 36 participantes por hora. La estructura del premio es como sigue:

Lugar	1o.	2o.	3o.	4o.	5o.
Precio $	4000	2000	1500	1000	800

Lugar	6o.	7o.	8o.	9o.	10o.
Precio $	600	500	400	300	200

Lugar	11o.– 50o.	51o.– 100o.	101o.– 300o.	301o.– 500o.
Precio $	100	75	50	25

También hay un premio diario otorgado como sigue: \$250 para el primero, \$100 para el segundo y \$50 para el tercero. ¿Cuánto esperaría pagar una persona por una cuota de entrada si el torneo ha de ser limpio (sin trampas)?

9 **Dinero de un premio** Suponga que el décimo premio de un torneo de \$1600 será de \$100 y cada lugar debe valer aproximadamente 10% más que el siguiente premio. Analice la distribución realista de valores de premio si se redondean al más cercano centavo, dólar, cinco dólares y diez dólares?

10 **Cubierta en pizzas** Un restaurante de pizzas patrocina un anuncio que dice que logró un total de 1,048,576 formas posibles de ordenar 2 pizzas, con hasta 5 cubiertas en cada una. Analice la forma en que la empresa calculó el número de posibles formas de ordenar una pizza y determine cuántas cubiertas existen.

11 **Powerball** El powerball es un popular juego de lotería en muchos estados estadounidenses. El jugador selecciona cinco enteros del 1 al 55 y un entero del 1 al 42. Estos números corresponden a cinco bolas blancas y una roja de Powerball sacada por la Asociación de Lotería de Estados. Para ganar el premio mayor, el jugador debe igualar los seis números. Los premios para todos los aciertos se indican en la tabla siguiente.

Acierto	**Premio**
5 blancas y una roja	Premio mayor
5 blancas	\$200,000
4 blancas y una roja	\$10,000
4 blancas	\$100
3 blancas y una roja	\$100
3 blancas	\$7
2 blancas y una roja	\$7
1 blanca y una roja	\$4
sólo roja	\$3

(a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio mayor?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar cualquier premio?

(c) ¿Cuál es el valor esperado del juego sin el premio mayor?

(d) ¿Cuánto necesita valer el premio mayor para que esta lotería sea considerada limpia (sin trampas)?

12 **Probabilidad y probabilidades de confusión** Analice el siguiente enunciado. "Existe 20% de probabilidad de que un solicitante masculino sea admitido, pero la probabilidad es tres veces mayor para un solicitante femenino." ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante femenino sea admitido?

13 Sea $a = 0$ y $b = 1$ en

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

y analice el resultado.

14 Investigue las sumas parciales de

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{3/2}}{2^{3n+2}} \left(\frac{2}{3n + 1} + \frac{1}{3n + 2} \right)$$

y analícelas.

15 **(a)** Examine las siguientes identidades para $\tan nx$ en términos de $\tan x$:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$\tan 4x = \frac{4 \tan x - 4 \tan^3 x}{1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x}$$

Usando un patrón formado por las tres identidades prediga una identidad para $\tan 5x$ en términos de $\tan x$.

(b) A continuación aparecen identidades para $\cos 2x$ y $\operatorname{sen} 2x$:

$\cos 2x = 1 \cos^2 x \qquad -1 \operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen} 2x = \qquad 2 \cos x \operatorname{sen} x$

Escriba identidades similares para $\cos 3x$ y $\operatorname{sen} 3x$ y luego $\cos 4x$ y $\operatorname{sen} 4x$. Use un patrón para predecir identidades para $\cos 5x$ y $\operatorname{sen} 5x$.

CAPÍTULO 10 EXAMEN DE CAPÍTULO

1 Calcule la suma del cuarto y el octavo término de la sucesión $\{3 + 1/n\}$.

2 Calcule los dos siguientes términos de la sucesión definida en forma repetitiva:

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 2, \quad a_{k+2} = 4a_{k+1} - 3a_k \quad \text{para} \quad k \geq 1$$

3 Calcule la suma $\sum_{k=189}^{652} \frac{3}{29}$.

4 Calcule la suma $\sum_{k=0}^{8} (2j - 7)$.

5 Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión aritmética 25, 18, 11, ...

6 Dados $a_{12} = 109$ y $a_{347} = 2119$ para una sucesión aritmética, calcule a_{856}.

7 Exprese la suma $6 + 17 + 28 + \cdots + 25{,}460$ en términos de la notación de suma y calcule la suma

8 Inserte tres medias aritméticas entre 5217 y 8789.

9 Un hombre compra una cortadora de césped que cuenta con 7 ajustes de altura que varían de 1 a 3.8 pulgadas. Su servicio de jardinería informa que la hierba se corta a una altura entre 2.5 y 3.5 pulgadas. Suponiendo que las configuraciones forman una secuencia aritmética, encuentre todas las configuraciones de altura aceptables (con una precisión de 0.01 pulgadas).

10 Encuentre la fórmula para el n-ésimo término de la sucesión geométrica 36, 12, 4, ...

11 Dados $a_2 = \frac{1}{2}$ y $a_5 = -32$ para una sucesión geométrica, calcule a_9.

12 Dados $a_1 = \frac{3}{8}$ y $r = 3$ para una sucesión geométrica, use una fórmula de suma para hallar S_8.

13 Calcule la suma $2125 - 1275 + 765 - \cdots$.

14 Encuentre el número racional representado por $1.\overline{47}$

15 Calcule la media geométrica de 40 y 250.

16 Considere la declaración "la bolsa de valores sube un 8% cada año". Escriba la fórmula para el n-ésimo término de una secuencia geométrica que describa la afirmación e interprete a_{15}.

17 Demuestre que la afirmación $2 + 8 + 14 + \cdots + (6n - 4) = 3n^2 - n$ es cierta para todo entero positivo n.

18 Utilice el teorema del binomio para expandir y simplificar $(2x - 5y^2)^3$.

19 Calcule el decimocuarto término (simplificado) en la expansión de $(2x^2 - x^{-1})^{18}$.

20 Calcule los dos primeros términos en el desarrollo de $(x^4 - 3x^{-2})^{12}$.

21 En términos de factoriales ¿cómo se compara $P(150, 50)$ con $C(150, 50)$?

22 Suponga que cualquier dígito puede ser utilizado en cualquier lugar de un número de 9 dígitos de seguridad social. Si la población de Estados Unidos es de 300 millones, ¿cuántos números de seguridad social no utilizados hay?

23 Un número de serie se compone de una letra del alfabeto, seguido por otra letra diferente, seguidas de dos dígitos. ¿Cuántos diferentes números de serie son posibles?

24 De un grupo de equipos de futbol, los concursantes pueden elegir uno de los 30 equipos cada semana durante 17 semanas pero no pueden escoger el mismo equipo más de una vez. Aproxime la cantidad de formas en las que un competidor puede elegir los equipos durante 17 semanas.

25 Hay ocho partidos de béisbol que se juegan en un día. ¿De cuántas maneras pueden listarse los ganadores (o perdedores)?

26 ¿De cuántas maneras puede un mazo estándar de 52 cartas barajarse de manera que las primeras 13 cartas sean todas las espadas (hay sólo 13 espadas en la baraja)?

27 Un comité de siete personas se elige entre un grupo de 10 hombres y 12 mujeres. Calcule la probabilidad (a cuatro decimales) de que este comité esté compuesto por 3 hombres y 4 mujeres.

28 Una librería va a seleccionar a cinco alumnos de un grupo de 5000 para recibir certificados de regalo. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los alumnos si cada certificado vale la misma cantidad?

29 Si se lanzan diez monedas, encuentre la probabilidad (a la más cercana décima de porcentaje) de obtener exactamente siete caras.

30 Una sola carta se extrae de un mazo de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que la tarjeta sea negra o de personaje.

31 Si la probabilidad de que un evento ocurra es $3/11$, ¿cuáles son las posibilidades de que el mismo evento ocurra?

32 Si $P(E) = 0.63$, calcule $O(E)$ (con dos decimales) en términos de "X a 1".

33 Si una mujer está lanzando un dado, ¿cuál es la probabilidad de no sacar un seis en cuatro lanzamientos?

34 Si una mujer está lanzando un dado, ¿cuántos lanzamientos resultarán en alrededor de un 90% de probabilidades de sacar un seis?

35 Un concurso ofrece los siguientes premios en efectivo.

Número de premios	1	10	50
Valor de los premios	$1,000,000	$100,000	$5000

Si el patrocinador espera 20 millones de concursantes, encuentre el valor esperado para un solo concursante.

11

Temas de geometría analítica

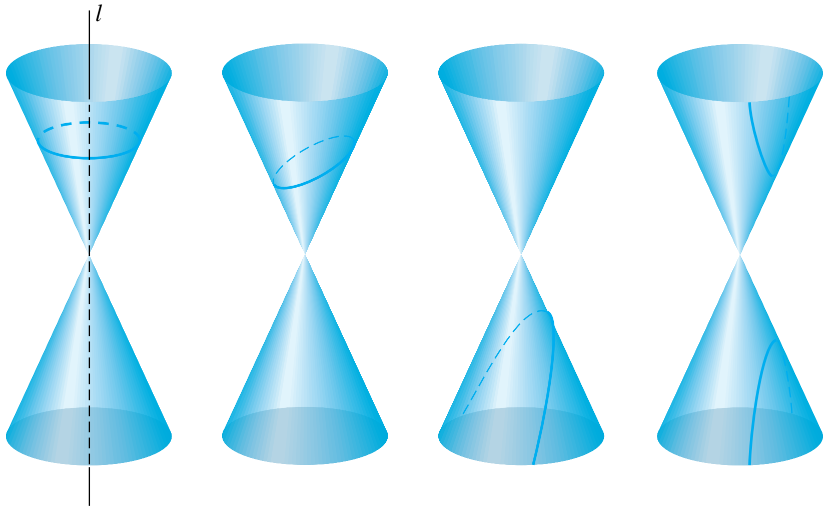
La geometría plana incluye el estudio de figuras, por ejemplo rectas, circunferencias y triángulos, que se encuentren en un plano. Los teoremas se demuestran por razonamiento en forma deductiva a partir de ciertos postulados. En geometría analítica las figuras geométricas planas se investigan cuando al introducir sistemas de coordenadas se usan ecuaciones y fórmulas. Si el estudio de geometría analítica se resumiera por medio de un enunciado, quizá lo siguiente sería apropiado: dada una ecuación, encuentre su gráfica y, a la inversa, dada una gráfica, encuentre su ecuación. En este capítulo aplicaremos métodos con coordenadas a varias figuras planas básicas.

11.1 Parábolas

Las *secciones cónicas,* también llamadas *cónicas*, pueden obtenerse al cortar con un plano un cono circular recto de doble rama. Al variar la posición del plano, obtenemos una *circunferencia*, una *elipse*, una *parábola*, o una *hipérbola*, como se ilustra en la figura 1.

FIGURA 1

(a) Circunferencia **(b)** Elipse **(c)** Parábola **(d)** Hipérbola



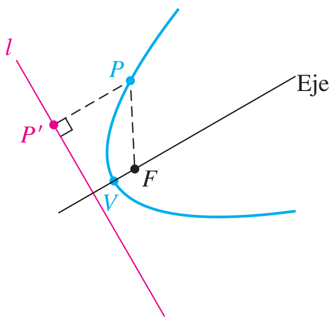
Se obtienen *cónicas degeneradas* si el plano corta el cono en sólo un punto o a lo largo de una o dos rectas que se encuentren en el cono. Las secciones cónicas fueron estudiadas ampliamente por los antiguos griegos, quienes descubrieron propiedades que hacen posible que expresemos sus definiciones en términos de puntos y rectas, como lo hacemos en nuestra exposición.

De nuestro trabajo en la sección 3.6, si $a \neq 0$, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una *parábola* con un eje vertical. A continuación expresamos una definición general de una parábola y deducimos ecuaciones para parábolas que tienen un eje vertical o un eje horizontal.

Definición de una parábola

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo F (el **foco**) y una recta fija l (la **directriz**) que está en el plano.

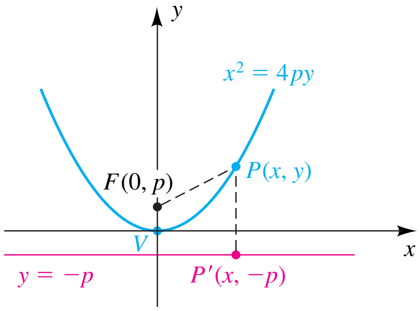
FIGURA 2



Supondremos que F no está en l, porque esto resultaría en una recta. Si P es un punto del plano y P' es el punto en l determinado por una recta que pasa por P que es perpendicular a l (vea figura 2), entonces, por la definición precedente, P está en la parábola si y sólo si las distancias $d(P, F)$ y $d(P, P')$ son iguales. El **eje** de la parábola es la recta que pasa por F y es perpendicular a la directriz. El **vértice** de la parábola es el punto V sobre el eje situado a media distancia entre F y l. El vértice es el punto en la parábola más cercano a la directriz.

Para obtener una ecuación sencilla para una parábola, coloque el eje y a lo largo del eje de la parábola, con el origen en el vértice V, como se ve en la figura 3. En este caso, el foco F tiene coordenadas $(0, p)$ para algún número real $p \neq 0$, y la ecuación de la directriz es $y = -p$. (La figura muestra el caso

FIGURA 3



$p > 0$.) Por la fórmula de la distancia, un punto $P(x, y)$ está en la gráfica de la parábola si y sólo si $d(P, F) = d(P, P')$; es decir, si

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

Una ecuación equivalente para la parábola es

$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la parábola satisface $x^2 = 4py$. A la inversa, si (x, y) es una solución de $x^2 = 4py$, entonces al revertir los pasos previos vemos que el punto (x, y) está sobre la parábola.

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba, como en la figura 3. Si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. La gráfica es simétrica con respecto al eje y porque la sustitución de $-x$ por x no cambia la ecuación $x^2 = 4py$.

Si intercambiamos los papeles de x y y, obtenemos

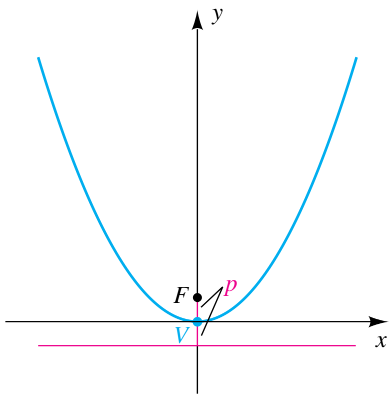
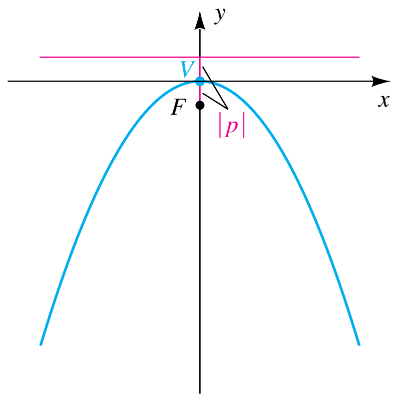
$$y^2 = 4px \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad x = \frac{1}{4p}y^2.$$

Ésta es una ecuación de una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$ y abre a la derecha si $p > 0$ o a la izquierda si $p < 0$. La ecuación de la directriz es $x = -p$.

Por comodidad nos referimos a "la parábola $x^2 = 4py$" (o $y^2 = 4px$) en lugar de "la parábola con ecuación $x^2 = 4py$" (o $y^2 = 4px$).

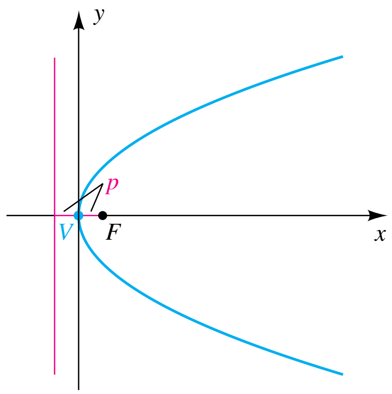
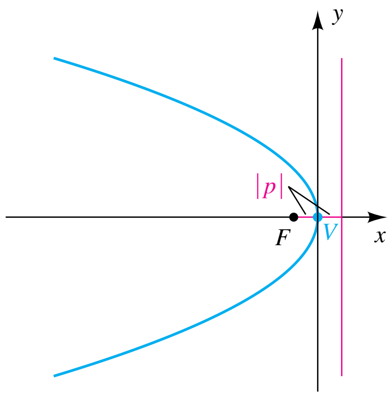
La tabla siguiente resume nuestra exposición.

Parábolas con vértice $V(0, 0)$

Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$x^2 = 4py$ o $y = \frac{1}{4p}x^2$ Foco: $F(0, p)$ Directriz: $y = -p$		

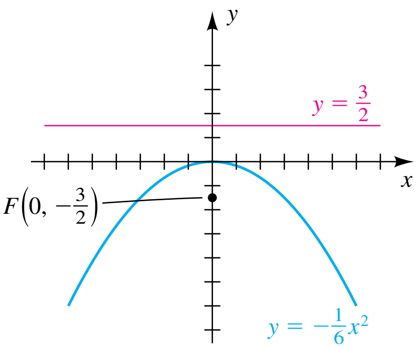
(continúa)

Parábolas con vértice $V(0, 0)$

Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$y^2 = 4px$ o $x = \frac{1}{4p}y^2$ Foco: $F(p, 0)$ Directriz: $x = -p$		

Vemos de la tabla que para cualquier número real a diferente de cero, la gráfica de la **ecuación estándar** $y = ax^2$ o $x = ay^2$ es una parábola con vértice $V(0, 0)$. Además, $a = 1/(4p)$ o, lo que es equivalente, $p = 1/(4a)$, donde $|p|$ es la distancia entre el foco F y el vértice V. Para hallar la directriz l, recuerde que l está también a una distancia $|p|$ de V.

FIGURA 4



EJEMPLO 1 **Hallar el foco y directriz de una parábola**

Encuentre el foco y directriz de la parábola $y = -\frac{1}{6}x^2$ y trace su gráfica.

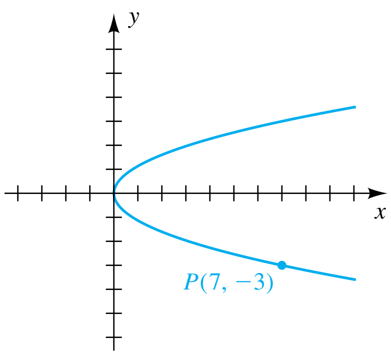
SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma $y = ax^2$, con $a = -\frac{1}{6}$. Al igual que en la tabla precedente, $a = 1/(4p)$ y por tanto

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4\left(-\frac{1}{6}\right)} = \frac{1}{-\frac{4}{6}} = -\frac{3}{2}.$$

Así, la parábola abre hacia abajo y tiene foco $F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, como se ilustra en la figura 4. La directriz es la recta horizontal $y = \frac{3}{2}$, que está a una distancia $\frac{3}{2}$ arriba de V, como se muestra en la figura. ■

EJEMPLO 2 **Hallar una ecuación de una parábola que satisfaga condiciones prescritas**

FIGURA 5



(a) Encuentre la ecuación de una parábola que tenga vértice en el origen, abra a la derecha y pase por el punto $P(7, -3)$.

(b) Encuentre el foco de la parábola.

SOLUCIÓN

(a) La parábola está trazada en la figura 5. Una ecuación de una parábola con vértice en el origen que abre a la derecha tiene la forma $x = ay^2$ para algún número a. Si $P(7, -3)$ está sobre la gráfica, entonces podemos sustituir 7 por x y -3 por y para hallar a:

$$7 = a(-3)^2 \qquad \text{o} \qquad a = \tfrac{7}{9}$$

En consecuencia, una ecuación para la parábola es $x = \frac{7}{9}y^2$.

(b) El foco está a una distancia p a la derecha del vértice. Como $a = \frac{7}{9}$, tenemos

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4\left(\frac{7}{9}\right)} = \frac{9}{28}.$$

Por tanto, el foco tiene coordenadas $\left(\frac{9}{28}, 0\right)$. ■

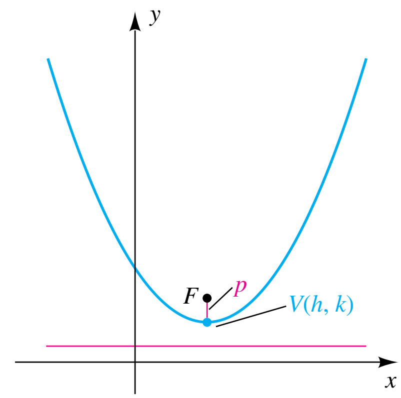
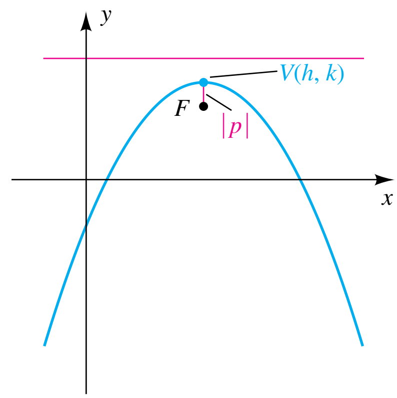
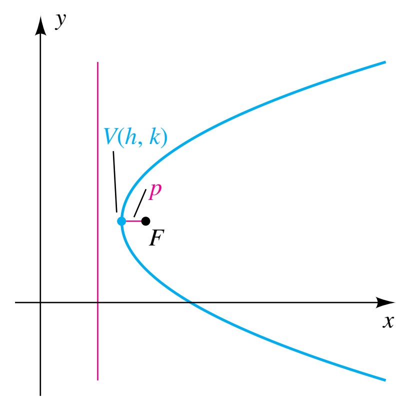
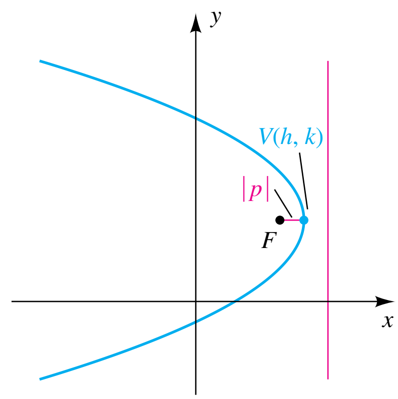
Si tomamos una ecuación estándar de una parábola (de la forma $x^2 = 4py$) y sustituimos x con $x - h$ y y con $y - k$, entonces

$$x^2 = 4py \quad \text{se convierte en} \quad (x - h)^2 = 4p(y - k). \qquad (*)$$

De nuestra discusión de traslaciones en la sección 3.5, reconocemos que la gráfica de la segunda ecuación puede obtenerse de la gráfica de la primera ecuación al desplazarla h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba, con ello se mueve el vértice de (0, 0) a (h, k). Si elevamos al cuadrado el lado izquierdo de (*) y simplificamos, tendremos una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales.

Del mismo modo, si empezamos con $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, se puede escribir en la forma $x = ay^2 + by + c$. En la tabla siguiente, $V(h, k)$ ha sido colocado en el primer cuadrante, pero la información dada en la columna de la extrema izquierda se cumple cualquiera que sea la posición de V.

Parábolas con vértice $V(h, k)$

Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ o $y = ax^2 + bx + c$, donde $p = \frac{1}{4a}$ Foco: $F(h, k + p)$ Directriz: $y = k - p$		
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ o $x = ay^2 + by + c$, donde $p = \frac{1}{4a}$ Foco: $F(h + p, k)$ Directriz: $x = h - p$		

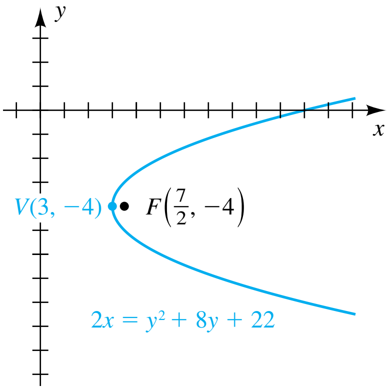
EJEMPLO 3 Trazar una parábola con un eje horizontal

Trace la gráfica de $2x = y^2 + 8y + 22$.

SOLUCIÓN La ecuación puede escribirse en la forma mostrada en la segunda fila de la tabla precedente, $x = ay^2 + by + c$, de modo que vemos en la tabla que la gráfica es una parábola con un eje horizontal. Primero escribimos la ecuación dada como

$$y^2 + 8y + \underline{\quad} = 2x - 22 + \underline{\quad}$$

FIGURA 6



y luego completamos el cuadrado al sumar $\left[\frac{1}{2}(8)\right]^2 = 16$ a ambos lados:

$$\begin{aligned} y^2 + 8y + 16 &= 2x - 6 \\ (y + 4)^2 &= 2(x - 3) \end{aligned}$$

Al consultar la última tabla, vemos que $h = 3$, $k = -4$ y $4p = 2$ o bien, lo que es equivalente, $p = \frac{1}{2}$. Esto nos da lo siguiente.

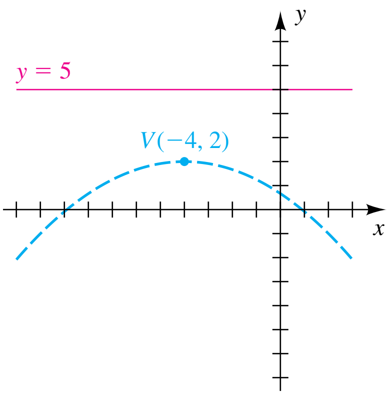
El vértice $V(h, k)$ es $V(3, -4)$.

El foco es $F(h + p, k) = F\left(3 + \frac{1}{2}, -4\right)$, o $F\left(\frac{7}{2}, -4\right)$.

La directriz es $x = h - p = 3 - \frac{1}{2}$ o $x = \frac{5}{2}$.

La parábola está trazada en la figura 6. ■

FIGURA 7



EJEMPLO 4 Hallar una ecuación de una parábola dados su vértice y directriz

Una parábola tiene vértice $V(-4, 2)$ y directriz $y = 5$. Exprese la ecuación de la parábola en la forma $y = ax^2 + bx + c$.

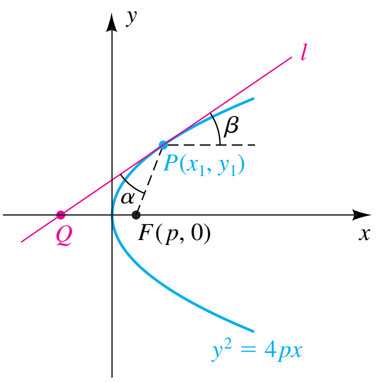
SOLUCIÓN El vértice y directriz se muestran en la figura 7. Las líneas interrumpidas indican una posible posición para la parábola. La última tabla muestra que una ecuación de la parábola es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k),$$

con $h = -4$ y $k = 2$ y con p igual a 3 *negativo*, porque V está 3 unidades *debajo de* la directriz. Esto nos da

$$(x + 4)^2 = -12(y - 2).$$

FIGURA 8



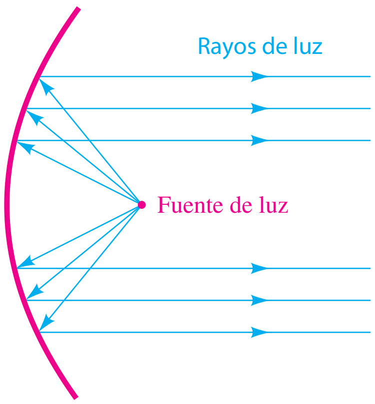
La última ecuación puede expresarse en la forma $y = ax^2 + bx + c$, como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 16 &= -12y + 24 \\ 12y &= -x^2 - 8x + 8 \\ y &= -\tfrac{1}{12}x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$ ■

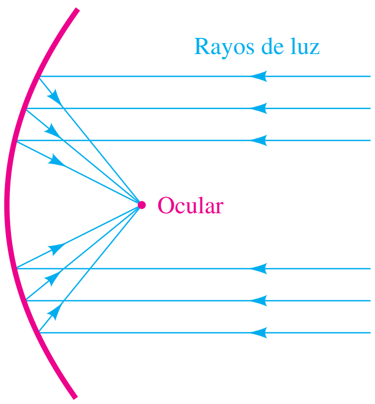
Una propiedad importante está asociada con una recta tangente a la parábola. (Una *recta tangente* a una parábola tiene exactamente un punto en común con la parábola pero no la cruza.) Suponga que l es la recta tangente en un punto $P(x_1, y_1)$ sobre la gráfica de $y^2 = 4px$, y sea F el foco. Como en la figura 8, denotemos con α el ángulo entre l y el segmento de recta FP y denotemos

FIGURA 9

(a) Espejo de proyector



(b) Espejo de telescopio



con β el ángulo entre l y la semirrecta horizontal indicada con punto extremo P. Se puede demostrar que $\alpha = \beta$. Esta *propiedad reflexiva* tiene numerosas aplicaciones. Por ejemplo, la forma del espejo de un faro se obtiene al hacer girar una parábola alrededor de su eje. Esta superficie tridimensional resultante se dice que está *generada* por la parábola y se llama **paraboloide**. El **foco** del paraboloide es el mismo que el foco de la parábola generadora. Si una fuente de luz se coloca en F, entonces, por una ley de física (el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia), un haz de luz se reflejará a lo largo de una recta paralela al eje (vea la figura 9(a)). El mismo principio se usa en la construcción de espejos para telescopios u hornos solares, un haz de luz dirigido hacia el espejo parabólico y paralelo al eje se reflejará en el foco (vea la figura 9(b)). Las antenas para sistemas de radar, telescopios de radio y micrófonos de campo que se emplean en juegos de futbol también hacen uso de esta propiedad.

EJEMPLO 5 Localizar el foco de una antena satelital de TV

El interior de una antena satelital de TV es un disco que tiene forma de un paraboloide (finito) que tiene diámetro de 12 pies y 2 pies de profundidad, como se muestra en la figura 10. Encuentre la distancia del centro del disco al foco.

FIGURA 10

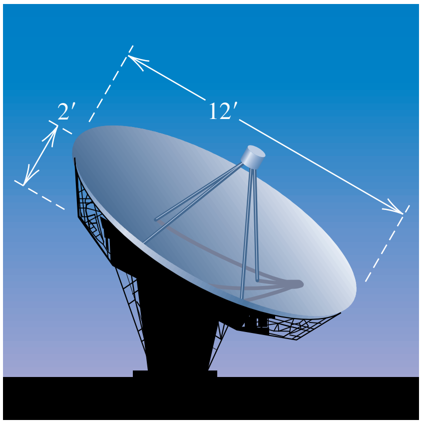
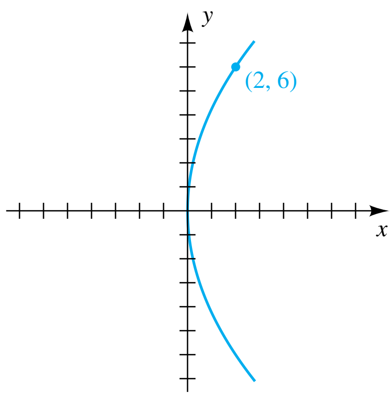


FIGURA 11



SOLUCIÓN La parábola generadora está trazada en un plano xy en la figura 11, donde hemos colocado el vértice de la parábola en el origen y su eje a lo largo del eje x. Una ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$, donde p es la distancia requerida del centro del disco al foco. Como el punto (2, 6) está en la parábola, obtenemos

$$6^2 = 4p \cdot 2 \qquad \text{o} \qquad p = \tfrac{36}{8} = 4.5 \text{ pies.}$$

■

En el siguiente ejemplo se utiliza una herramienta de graficación para trazar la gráfica de una parábola con un eje horizontal.

EJEMPLO 6 **Graficar semiparábolas**

Grafique $x = y^2 + 2y - 4$.

SOLUCIÓN La gráfica es una parábola con eje horizontal. Como y no es una función de x, de la ecuación despejaremos y y obtendremos dos ecuaciones (en forma muy semejante a como lo hicimos con circunferencias en el ejemplo 11 de la sección 3.2). Empezamos por despejar y de la ecuación equivalente

$$y^2 + 2y - 4 - x = 0$$

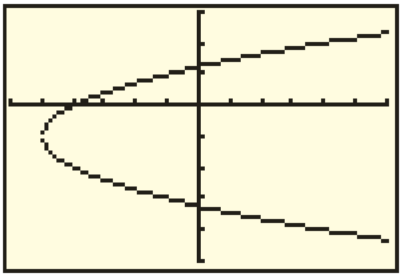
en términos de x usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$, y $c = -4 - x$:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-4 - x)}}{2(1)} \quad \text{fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20 + 4x}}{2} \quad \text{simplifique}$$

$$= -1 \pm \sqrt{x + 5} \quad \text{factorice } \sqrt{4}\text{; simplifique}$$

FIGURA 12
$[-6, 6]$ por $[-5, 3]$



La última ecuación, $y = -1 \pm \sqrt{x + 5}$, representa la mitad superior de la parábola $\left(y = -1 + \sqrt{x + 5}\right)$ y la mitad inferior $\left(y = -1 - \sqrt{x + 5}\right)$. Note que $y = -1$ es el eje de la parábola.

A continuación, hacemos las asignaciones

$$Y_1 = -1 + \sqrt{x + 5} \qquad \text{y} \qquad Y_2 = -1 - \sqrt{x + 5}.$$

Ahora graficamos Y_1 y Y_2 para obtener una imagen semejante a la figura 12. ■

11.1 Ejercicicos

Ejer. 1–12: Hallar el vértice, foco y directriz de la parábola. Trace su gráfica, mostrando el foco y la directriz.

1 $8y = x^2$

2 $x^2 = -3y$

3 $2y^2 = -3x$

4 $20x = y^2$

5 $(x + 2)^2 = -8(y - 1)$

6 $(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y + 1)$

7 $(y - 2)^2 = \frac{1}{4}(x - 3)$

8 $(y + 1)^2 = -12(x + 2)$

9 $y = x^2 - 4x + 2$

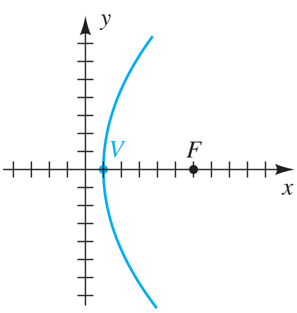
10 $x^2 + 20y = 10$

11 $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$

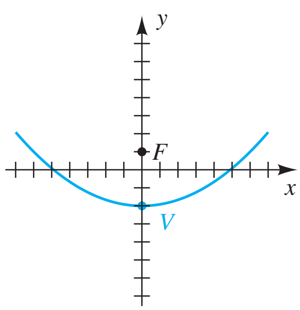
12 $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

Ejer. 13–20: Hallar la ecuación para la parábola mostrada en la figura.

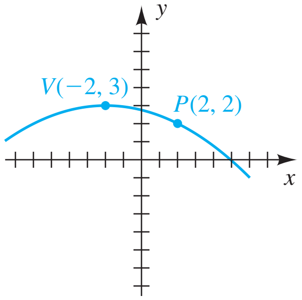
13



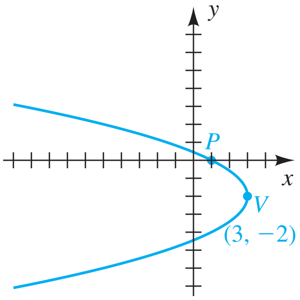
14



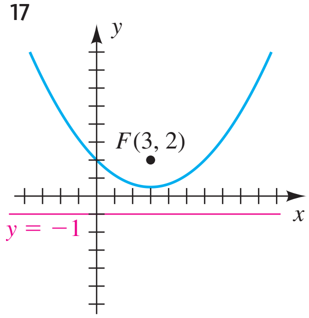
15



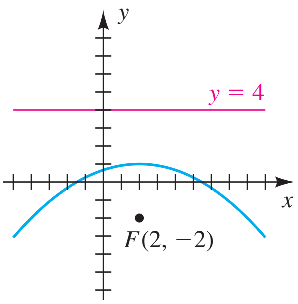
16



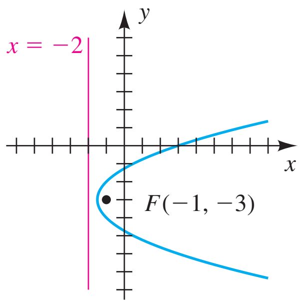
17



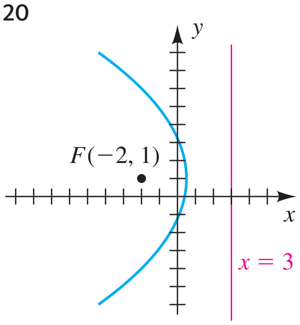
18



19



20



Ejer. 21–36: Encuentre la ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

21 Foco $F(2, 0)$, directriz $x = -2$

22 Foco $F(-4, 0)$, directriz $x = 4$

23 Foco $F(6, 4)$, directriz $y = -2$

24 Foco $F(-3, -2)$, directriz $y = 1$

25 Vértice $V(3, -5)$, directriz $x = 2$

26 Vértice $V(-2, 3)$, directriz $x = 1$

27 Vértice $V(-2, 3)$, directriz $y = 5$

28 Vértice $V(4, 2)$, directriz $y = -6$

29 Vértice $V(-1, 0)$, foco $F(-4, 0)$

30 Vértice $V(-2, 1)$, foco $F(2, 1)$

31 Vértice $V(1, -2)$, foco $F(1, 0)$

32 Vértice $V(4, 7)$, foco $F(4, 2)$

33 Vértice en el origen, simétrica con respecto al eje y y que pasa por el punto $(2, -3)$

34 Vértice en el origen, simétrica con respecto al eje y y que pasa por el punto $(6, 3)$

35 Vértice $V(-3, 5)$, eje paralelo al eje x y que pasa por el punto $(5, 9)$

36 Vértice $V(3, -2)$, eje paralelo al eje x e intersección en 1 con el eje y.

Ejer. 37–40: Encuentre la ecuación para el conjunto de puntos en un plano xy que sean equidistantes del punto P y la recta l.

37 $P(0, 5)$; l: $y = -3$

38 $P(7, 0)$; l: $x = 1$

39 $P(-6, 3)$; l: $x = -2$

40 $P(5, -2)$; l: $y = 4$

Ejer. 41–48: Encuentre la ecuación para la mitad indicada de la parábola.

41 Mitad inferior de $(y + 1)^2 = x + 3$

42 Mitad superior de $(y - 2)^2 = x - 4$

43 Mitad derecha de $(x + 1)^2 = y - 4$

44 Mitad izquierda de $(x + 3)^2 = y + 2$

45 Mitad superior de $(y - 5)^2 = x + 2$

46 Mitad inferior de $(y + 4)^2 = x - 3$

47 Mitad izquierda de $(x - 2)^2 = y + 1$

48 Mitad derecha de $(x - 4)^2 = y - 5$

Ejer. 49–52: Determine si la gráfica de la ecuación es la mitad superior, inferior, izquierda o derecha de una parábola y encuentra la ecuación de la parábola.

49 $y = \sqrt{x - 6} - 2$

50 $y = -\sqrt{x + 3} + 4$

51 $x = -\sqrt{y + 7} - 3$

52 $x = \sqrt{y - 4} + 8$

Ejer. 53–54: Encuentre la ecuación para la parábola que tiene un eje vertical y pasa por los puntos dados.

53 $P(2, 5)$, $Q(-2, -3)$, $R(1, 6)$

54 $P(3, -1)$, $Q(1, -7)$, $R(-2, 14)$

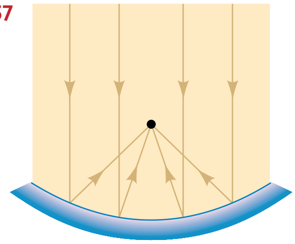
Ejer. 55–56: Encuentre la ecuación para la parábola que tiene un eje horizontal y pasa por los puntos dados.

55 $P(-1, 1)$, $Q(11, -2)$, $R(5, -1)$

56 $P(2, 1)$, $Q(6, 2)$, $R(12, -1)$

57 **Espejo de telescopio** Un espejo para un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloide (finito) de 8 pulgadas de diámetro y 1 pulgada de profundidad. ¿A qué distancia del centro del espejo se colectará la luz entrante?

EJERCICIO 57

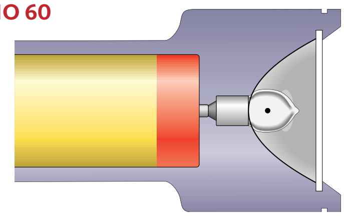


58 **Plato de antena** El plato de una antena satelital tiene la forma de un paraboloide que mide 10 pies de diámetro en el extremo abierto y tiene 3 pies de profundidad. ¿A qué distancia del centro del plato debe colocarse el receptor para recibir la máxima intensidad de ondas de sonido?

59 **Reflector de un proyector** El reflector de un proyector tiene la forma de un paraboloide, con la fuente de luz en el foco. Si el reflector mide 3 pies de diámetro en la abertura y 1 pie de profundidad, ¿dónde está el foco?

60 **Espejo de una linterna** El espejo de una linterna tiene la forma de un paraboloide de 4 pulgadas de diámetro y $\frac{3}{4}$ de pulgada de profundidad, como se ve en la figura. ¿Dónde debe colocarse la bombilla para que los rayos de luz emitidos sean paralelos al eje del paraboloide?

EJERCICIO 60



61 **Plato receptor** Un plato receptor de sonido, que se emplea en eventos deportivos al aire libre, está construido en forma de un paraboloide con su foco a 5 pulgadas del vértice. Determine el ancho del plato si la profundidad ha de ser de 2 pies.

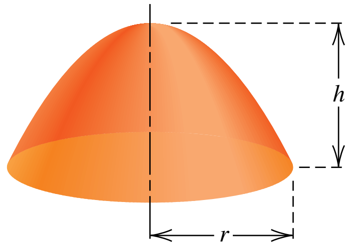
62 **Plato receptor** Trabaje el ejercicio 61 si el receptor está a 9 pulgadas del vértice.

63 **Reflector parabólico**

(a) La longitud focal del paraboloide (finito) de la figura es la distancia p entre su vértice y foco. Exprese p en términos de r y h.

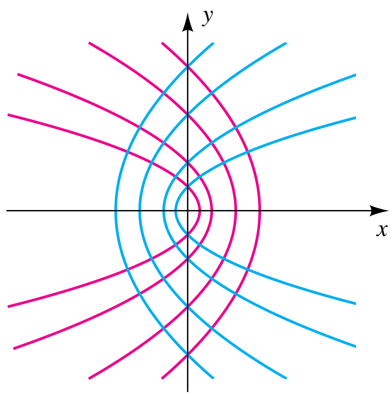
(b) Un reflector se va a construir con una longitud focal de 10 pies y una profundidad de 5 pies. Encuentre el radio del reflector.

EJERCICIO 63



64 **Parábolas confocales** La parábola $y^2 = 4p(x + p)$ tiene su foco en el origen y su eje a lo largo del eje x. Al asignar diferentes valores a p, obtenemos una familia de parábolas confocales, como se ve en la figura. Estas familias se presentan en el estudio de electricidad y magnetismo. Demuestre que hay exactamente dos parábolas en la familia que pasan por un punto dado $P(x_1, y_1)$ si $y_1 \neq 0$.

EJERCICIO 64



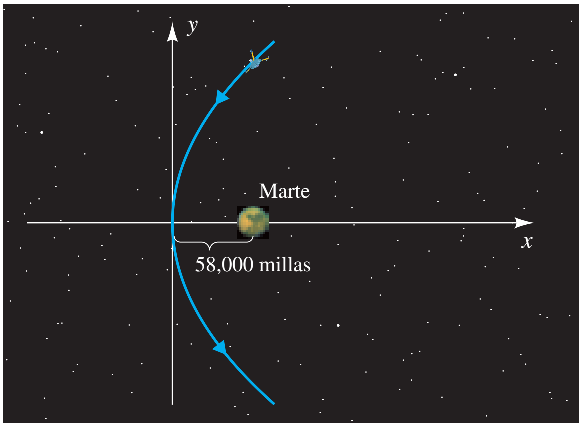
65 **Radiotelescopio de Jodrell Bank** Un radiotelescopio tiene la forma de un paraboloide de revolución, con longitud focal p y diámetro de base $2a$. Del cálculo, el área superficial S disponible para recolectar ondas de radio es

$$S = \frac{8\pi p^2}{3}\left[\left(1 + \frac{a^2}{4p^2}\right)^{3/2} - 1\right].$$

Uno de los radiotelescopios más grandes, situado en Jodrell Bank, Cheshire, Inglaterra, tiene diámetro de 250 pies y longitud focal de 75 pies. Calcule S a los mil pies cuadrados más cercanos.

66 **Trayectoria de satélite** Un satélite se desplazará en una trayectoria parabólica cercana a un planeta si su velocidad v en metros por segundo satisface la ecuación $v = \sqrt{2k/r}$, donde r es la distancia en metros entre el satélite y el centro del planeta y k es una constante positiva. El planeta estará situado en el foco de la parábola y el satélite pasará una vez por el planeta. Suponga que un satélite está diseñado para seguir una trayectoria parabólica y pasará a no más de 58,000 millas de Marte, como se ve en la figura de la página siguiente.

EJERCICIO 66



(a) Determine una ecuación de la forma $x = ay^2$ que describa su trayectoria de vuelo.

(b) Para Marte, $k = 4.28 \times 10^{13}$. Aproxime la máxima velocidad del satélite.

(c) Encuentre la velocidad del satélite cuando su coordenada y sea de 100,000 millas.

Ejer. 67–68: Grafique la ecuación

67 $x = -y^2 + 2y + 5$ **68** $x = 2y^2 + 3y - 7$

Ejer. 69–70: Grafique las parábolas en el mismo plano de coordenadas y calcule los puntos de intersección.

69 $y = x^2 - 2.1x - 1$; $x = y^2 + 1$

70 $y = -2.1x^2 + 0.1x + 1.2$; $x = 0.6y^2 + 1.7y - 1.1$

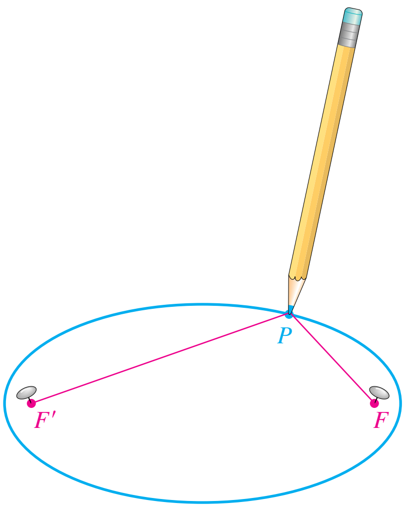
11.2 Elipses

Una elipse se puede definir como sigue.

Definición de una elipse

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en un plano, la suma de cuyas distancias desde dos puntos fijos (los **focos**) en el plano es una constante positiva.

FIGURA 1



Podemos trazar una elipse en papel como sigue: inserte dos tachuelas en el papel en cualesquiera puntos F y F', y sujete los extremos de una cuerda a las tachuelas. Después de enrollar la cuerda en un lápiz y tensarla, como en el punto P de la figura 1, mueva el lápiz manteniendo tensa la cuerda. La suma de las distancias $d(P, F)$ y $d(P, F')$ es la longitud de la cuerda y por lo tanto es constante; así, el lápiz trazará una elipse con focos en F y F'. El punto medio del segmento $F'F$ se llama **centro** de la elipse. Al cambiar las posiciones de F y F' mientras se mantiene fija la longitud de la cuerda, podemos variar considerablemente la forma de la elipse. Si F y F' están separadas de modo que $d(F, F')$ es casi igual a la longitud de la cuerda, la elipse es plana. Si $d(F, F')$ es cercana a cero, la elipse es casi una circunferencia. Si $F = F'$, obtenemos una circunferencia con centro F.

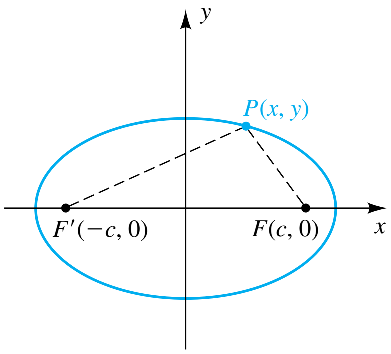
Para obtener una ecuación sencilla para una elipse, seleccione el eje x como la recta por la cual pasan los dos focos F y F', con el centro de la elipse en el origen. Si F tiene coordenadas $(c, 0)$ con $c > 0$, entonces, como en la figura 2, F' tiene coordenadas $(-c, 0)$. En consecuencia, la distancia entre F y F' es $2c$. La suma constante de las distancias de P desde F y F' estará denotada por $2a$. Para obtener puntos que no estén sobre el eje x, debemos tener $2a > 2c$; es decir, $a > c$. Por definición, $P(x, y)$ está sobre la elipse si y sólo si son verdaderas las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

FIGURA 2



Si elevamos al cuadrado ambos lados de la última ecuación tendremos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

o bien,

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Al elevar de nuevo al cuadrado ambos lados tendremos

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

o bien,

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Si se dividen ambos lados entre $a^2(a^2 - c^2)$, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Recordando que $a > c$ y por lo tanto $a^2 - c^2 > 0$, tenemos

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad \text{o} \qquad b^2 = a^2 - c^2.$$

Esta sustitución nos da la ecuación

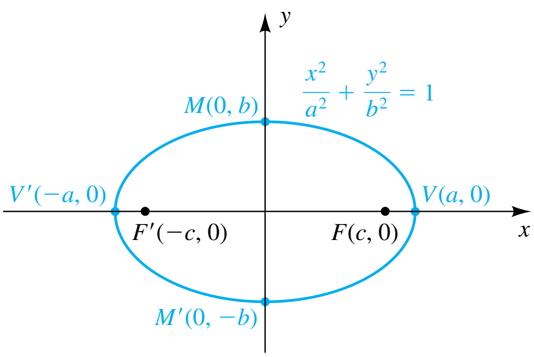
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Note que si $c = 0$, entonces $b^2 = a^2$ y tenemos una circunferencia. También observe que si $c = a$, entonces $b = 0$ y tenemos una cónica degenerada; es decir, un punto.

Como $c > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$, se deduce que $a^2 > b^2$ y por tanto $a > b$.

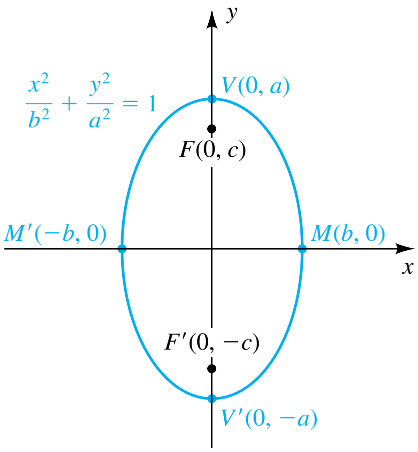
Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la elipse en la figura 3 satisfacen la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. A la inversa, si (x, y) es una solución de esta ecuación, entonces al invertir los pasos precedentes vemos que el punto (x, y) está sobre la elipse.

FIGURA 3



Podemos hallar los puntos de intersección de la elipse con el eje x al hacer $y = 0$ en la ecuación y obtendremos $x^2/a^2 = 1$, o $x^2 = a^2$. En consecuencia, los puntos de intersección con el eje x son a y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ sobre la gráfica se llaman **vértices** de la elipse (vea la figura 3). El segmento de recta $V'V$ se denomina **eje mayor.** Del mismo modo, al hacer $x = 0$ en la ecuación, obtenemos $y^2/b^2 = 1$ o $y^2 = b^2$. Por lo tanto, los puntos de intersección con el eje y son b y $-b$. El segmento entre $M'(0, -b)$ y $M(0, b)$ recibe el nombre de **eje menor** de la elipse. El eje mayor es siempre más largo que el eje menor porque $a > b$.

FIGURA 4



Si aplicamos las pruebas de simetría, vemos que la elipse es simétrica con respecto al eje x, el eje y y el origen.

De manera similar, si tomamos los focos sobre el eje y, obtenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

En este caso, los vértices de la elipse son $(0, \pm a)$ y los puntos extremos del eje menor son $(\pm b, 0)$, como se ve en la figura 4.

La exposición precedente puede resumirse como sigue.

Ecuaciones estándar de una elipse con centro en el origen

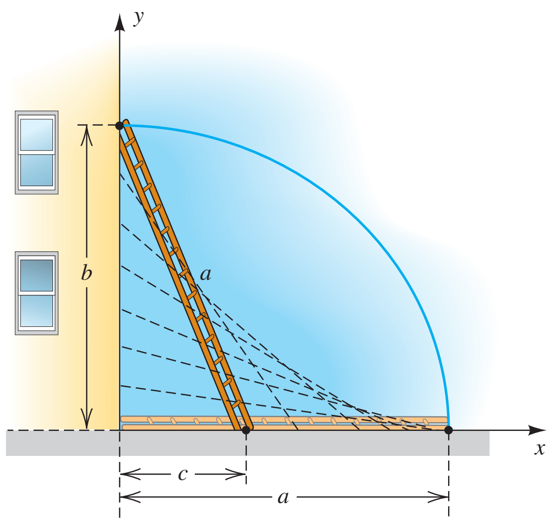
La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde $a > b > 0$, es una elipse con centro en el origen. La longitud del eje mayor es $2a$, y la longitud del eje menor es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

Para ayudar a recordar la relación para los focos, considere el triángulo recto formado por una escalera de longitud a *que se apoya contra un edificio, como se ve en la figura 5. Por el teorema de Pitágoras,* $b^2 + c^2 = a^2$*. En esta posición, los extremos de la escalera están en un foco y un punto extremo del eje menor. Si la escalera baja, los extremos de la escalera estarán en el centro de la elipse y en un punto extremo del eje mayor.*

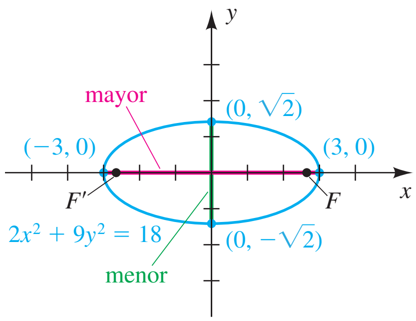
FIGURA 5



EJEMPLO 1 **Trazar una elipse con centro en el origen**

Trace la gráfica de $2x^2 + 9y^2 = 18$ y encuentre los focos.

FIGURA 6



SOLUCIÓN Para escribir esta ecuación en forma estándar, divida cada término entre 18 para obtener una constante de 1:

$$\frac{2x^2}{18} + \frac{9y^2}{18} = \frac{18}{18}, \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$$

La gráfica es una elipse con centro en el origen y focos en un eje de coordenadas. De la última ecuación, como $9 > 2$, el eje mayor y los focos están en el eje x. Con $a^2 = 9$, tenemos $a = 3$ y los vértices son $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$. Como $b^2 = 2$, $b = \sqrt{2}$ y los puntos extremos del eje menor son $M(0, \sqrt{2})$ y $M'(0, -\sqrt{2})$. Note que en este caso V y V' también son los puntos de intersección con el eje x, y M y M' son también los puntos de intersección con el eje y.

Ahora trazamos la gráfica con eje mayor de longitud $2a = 2(3) = 6$ (que se muestra en rojo en la figura 6) y eje menor de longitud $2b = 2\sqrt{2} \approx 2.8$ (mostrado en verde).

Para hallar los focos, hacemos $a = 3$ y $b = \sqrt{2}$ y calculamos

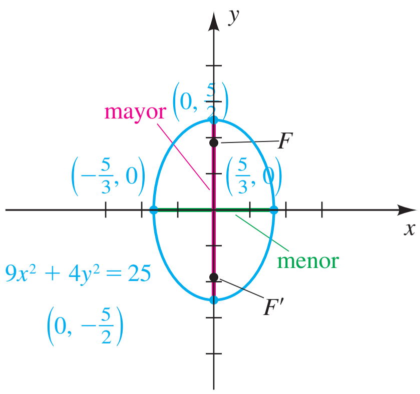
$$c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 7.$$

Por lo tanto, $c = \sqrt{7}$ y los focos son $F(\sqrt{7}, 0)$ y $F'(-\sqrt{7}, 0)$. ■

EJEMPLO 2 **Trazar una elipse con centro en el origen**

Trace la gráfica de $9x^2 + 4y^2 = 25$ y encuentre los focos.

FIGURA 7



SOLUCIÓN Divida cada término entre 25 para obtener la forma estándar:

$$\frac{9x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = \frac{25}{25} \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{\frac{25}{9}} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

La gráfica es una elipse con centro en el origen. Como $\frac{25}{4} > \frac{25}{9}$, el eje mayor y los focos están en el eje y. Con $a^2 = \frac{25}{4}$, $a = \frac{5}{2}$, y por tanto los vértices son $V(0, \frac{5}{2})$ y $V'(0, -\frac{5}{2})$ (también los puntos de intersección con el eje y). Como $b^2 = \frac{25}{9}$, $b = \frac{5}{3}$ y los puntos extremos del eje menor son $M(\frac{5}{3}, 0)$ y $M'(-\frac{5}{3}, 0)$ (también los puntos de intersección con el eje x).

Trace la gráfica con eje mayor de longitud $2a = 2(\frac{5}{2}) = 5$ (mostrado en rojo en la figura 7) y eje menor de longitud $2b = 2(\frac{5}{3}) = 3\frac{1}{3}$ (mostrado en verde).

Para hallar los focos, hacemos $a = \frac{5}{2}$ y $b = \frac{5}{3}$ y calculamos

$$c^2 = a^2 - b^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{125}{36}.$$

Por lo tanto, $c = \sqrt{125/36} = 5\sqrt{5}/6 \approx 1.86$ y los focos son aproximadamente $F(0, 1.86)$ y $F'(0, -1.86)$ ■

EJEMPLO 3 **Hallar una ecuación de una elipse dados sus vértices y focos**

Encuentre la ecuación de la elipse con vértices $(\pm 4, 0)$ y focos $(\pm 2, 0)$.

SOLUCIÓN Como los focos están sobre el eje x y están equidistantes del origen, el eje mayor está sobre el eje x y la elipse tiene centro $(0, 0)$. Así, la ecuación general de una elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como los vértices son $(\pm 4, 0)$, concluimos que $a = 4$. Como los focos son $(\pm 2, 0)$, tenemos $c = 2$. Por lo tanto,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 2^2 = 12,$$

y la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

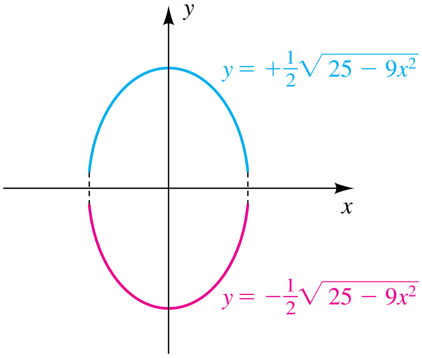
■

En ciertas aplicaciones es necesario trabajar con sólo la mitad de una elipse. El siguiente ejemplo indica cómo hallar ecuaciones en tales casos.

EJEMPLO 4 **Hallar ecuaciones para semielipses**

Encuentre ecuaciones para la mitad superior, mitad inferior, mitad izquierda y mitad derecha de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$.

FIGURA 8



SOLUCIÓN La gráfica de toda la elipse se trazó en la figura 7. Para hallar ecuaciones para las mitades superior e inferior, despejamos y en términos de x, como sigue:

$$9x^2 + 4y^2 = 25 \qquad \text{enunciado}$$

$$y^2 = \frac{25 - 9x^2}{4} \qquad \text{despeje } y^2$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{25 - 9x^2}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2} \qquad \text{saque la raíz cuadrada}$$

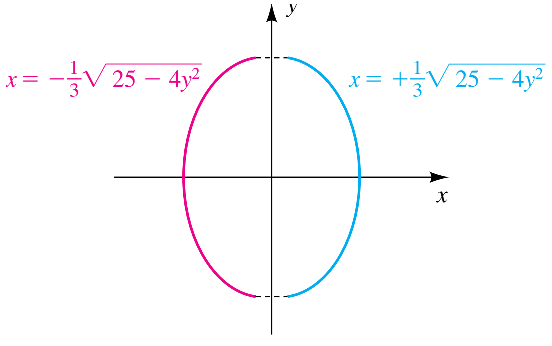
Como $\sqrt{25 - 9x^2} \geq 0$, se deduce que las ecuaciones para las mitades superior e inferior son $y = \frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2}$ y $y = -\frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2}$, respectivamente, como se ve en la figura 8.

Para hallar ecuaciones para las mitades izquierda y derecha, usamos un procedimiento similar al anterior y despejamos x en términos de y, obteniendo

$$x = \pm\sqrt{\frac{25 - 4y^2}{9}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}.$$

La mitad izquierda de la elipse tiene la ecuación $x = -\frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}$ y la mitad derecha está dada por $x = \frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}$, como se muestra en la figura 9.

FIGURA 9



■

Si tomamos una ecuación estándar de una elipse $(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1)$ y sustituimos x con $x - h$ y y con $y - k$, entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{se convierte en} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \qquad (*)$$

La gráfica de (*) es una elipse con centro (h, k). Elevando al cuadrado términos en (*) y simplificando tendremos una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde los coeficientes son números reales y tanto A como C son positivos. A la inversa, si empezamos con esa ecuación, entonces al completar cuadrados podemos obtener una forma que nos ayuda a obtener el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor. Esta técnica se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Trazar una elipse con centro (h, k)**

Trace la gráfica de la ecuación

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0.$$

SOLUCIÓN Empezamos por agrupar los términos que contengan a x y los que contengan a y:

$$(16x^2 + 64x) + (9y^2 - 18y) = 71$$

A continuación, factorizamos los coeficientes de x^2 y y^2 como sigue:

$$16(x^2 + 4x + \underline{\quad}) + 9(y^2 - 2y + \underline{\quad}) = 71$$

Ahora completamos los cuadrados para las expresiones dentro de los paréntesis:

$$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 71 + \underline{16 \cdot 4} + \underline{9 \cdot 1}$$

Al sumar 4 a la expresión dentro de los primeros paréntesis hemos sumado 64 al lado izquierdo de la ecuación, y por tanto debemos compensar al sumar 64 al lado derecho. Del mismo modo, al sumar 1 a la expresión dentro de los segundos paréntesis hemos sumado 9 al lado izquierdo, y en consecuencia debemos sumar 9 al lado derecho. La última ecuación se puede escribir como

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 144.$$

Al dividir entre 144 para obtener 1 en el lado derecho tendremos

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$

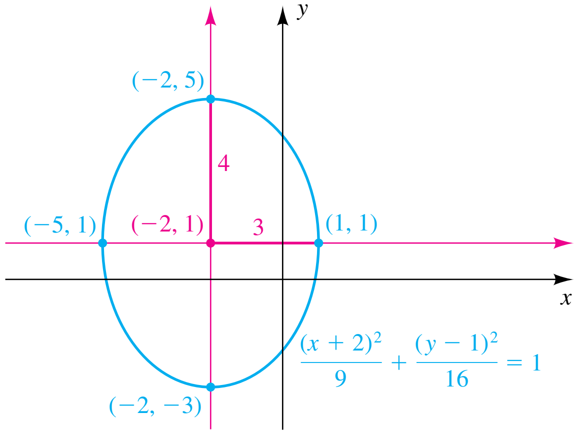
La gráfica de la última ecuación es una elipse con centro $C(-2, 1)$ y eje mayor en la recta vertical $x = -2$ (porque $9 < 16$). Usando $a = 4$ y $b = 3$ tendremos la elipse de la figura 10.

Para hallar los focos, primero calculamos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4^2 - 3^2 = 7.$$

La distancia del centro de la elipse a los focos es $c = \sqrt{7}$. Como el centro es $(-2, 1)$, los focos son $\left(-2, 1 \pm \sqrt{7}\right)$.

FIGURA 10



Calculadoras de gráficas y programas de cómputo a veces no pueden trazar las gráficas de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

como la considerada en el último ejemplo. En estos casos debemos primero despejar y de la ecuación en términos de x y luego trazar las dos funciones resultantes, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 **Graficar semielipses**

Trace la gráfica de $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y + 9 = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación puede ser considerada como una ecuación cuadrática con y de la forma $ay^2 + by + c = 0$ al reacomodar términos como sigue:

$$4y^2 - 8y + (3x^2 + 12x + 9) = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática a la ecuación previa, con $a = 4$, $b = -8$ y $c = 3x^2 + 12x + 9$ tendremos

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3x^2 + 12x + 9)}}{2(4)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}}{8} \\ &= 1 \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}. \end{aligned}$$

Note que no simplificamos por completo el radicando, porque estaremos usando una calculadora de gráficas.

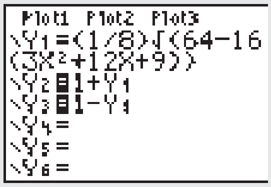
(continúa)

Ahora hacemos las asignaciones

$$Y_1 = \frac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}, \quad Y_2 = 1 + Y_1, \quad \text{and} \quad Y_3 = 1 - Y_1.$$

Hacer asignaciones Y.

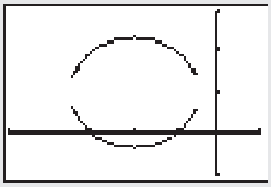
[Y=] [(] 1 [÷] 8 [)] [2nd] [√] 64 [−] 16
[(] 3 [X,T,θ,n] [x²] [+] 12 [X,T,θ,n] [+] 9
[)] [)] [▽]
1 [+] [VARS] [▷] [1] [1] [▽]
1 [−] [VARS] [▷] [1] [1]



Desactivar Y1.

[△] [△] [△] [◁] [ENTER]

Ahora grafica Y_2 y Y_3 en la pantalla $[-5, 1]$ por $[-1, 3]$.



■

Las elipses pueden ser muy planas o casi circulares. Para obtener información acerca de la *redondez* de una elipse, a veces usamos el término *excentricidad*, que se define como sigue, con a, b y c teniendo el mismo significado que antes.

Definición de excentricidad

La **excentricidad** e de una elipse es

$$e = \frac{\text{distancia de centro a foco}}{\text{distancia de centro a vértice}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Considere la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, y suponga que la longitud $2a$ del eje mayor es fija y la longitud $2b$ del eje menor es variable (note que $0 < b < a$). Como b^2 es positiva, $a^2 - b^2 < a^2$ y por tanto $\sqrt{a^2 - b^2} < a$. Dividiendo entre a ambos lados de la última desigualdad nos dará $\sqrt{a^2 - b^2}/a < 1$ o $0 < e < 1$. Si b es cercana a 0 (c es cercana a a), entonces $\sqrt{a^2 - b^2} \approx a$, $e \approx 1$, y la elipse es muy plana. Este caso está ilustrado en la figura 11(a), con $a = 2$, $b = 0.3$ y $e \approx 0.99$. Si b es cercana a a (c es cercana a 0), entonces $\sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$, $e \approx 0$, y la elipse es casi circular. Este caso está ilustrado en la figura 11(b), con $a = 2$, $b = 1.9999$ y $e \approx 0.01$.

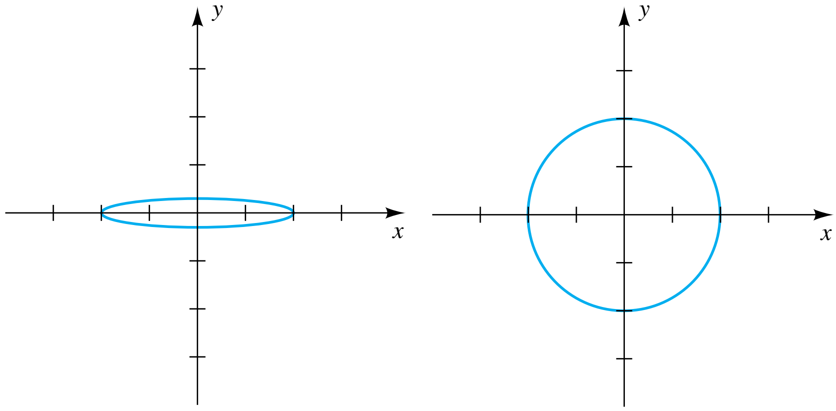
En la figura 11(a), los focos están cercanos a los vértices.

En la figura 11(b), los focos están cercanos al origen.

Note que la elipse de la figura 5 en la página 771 tiene excentricidad $\frac{5}{13} \approx 0.38$ y aparece casi circular.

FIGURA 11

(a) Excentricidad casi 1 **(b)** Excentricidad casi 0



Después de muchos años de analizar una enorme cantidad de datos empíricos, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571–1630) formuló tres leyes que describen el movimiento de planetas alrededor del Sol. La primera ley de Kepler expresa que la órbita de cada planeta del sistema solar es una elipse con el Sol en un foco. La mayor parte de todas estas órbitas es casi circular, de modo que sus excentricidades correspondientes son cercanas a 0. Para ilustrar, para la Tierra, $e \approx 0.017$; para Marte, $e \approx 0.093$; y para Urano, $e \approx 0.046$. Las órbitas de Mercurio y el planeta enano Plutón son menos circulares, con excentricidades de 0.206 y 0.249, respectivamente.

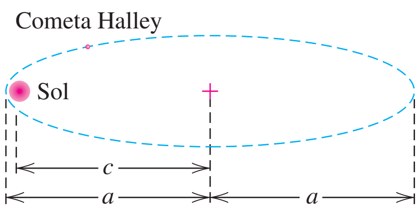
Numerosos cometas tienen órbitas elípticas con el Sol en un foco. En este caso la excentricidad e es cercana a 1, y la elipse es muy plana. En el siguiente ejemplo usamos la **unidad astronómica** (UA), es decir, la distancia promedio de la Tierra al Sol, para especificar grandes distancias (1 UA ≈ 93,000,000 millas).

EJEMPLO 7 Aproximar una distancia en una trayectoria elíptica

El cometa Halley tiene una órbita elíptica con excentricidad $e = 0.967$. Lo más cerca que el cometa Halley llega al Sol es 0.587 UA. Aproxime la distancia máxima del cometa al Sol, al 0.1 de UA más cercano.

SOLUCIÓN La figura 12 ilustra la órbita del cometa, donde c es la distancia del centro de la elipse a un foco (el Sol) y $2a$ es la longitud del eje mayor.

FIGURA 12



Como $a - c$ es la distancia mínima entre el Sol y el cometa, tenemos (en UA)

$$a - c = 0.587 \qquad \text{o} \qquad a = c + 0.587.$$

Como $e = c/a = 0.967$, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} c &= 0.967a && \text{multiplique por } a \\ &= 0.967(c + 0.587) && \text{sustituya por } a \\ &\approx 0.967c + 0.568 && \text{multiplique} \\ c - 0.967c &\approx 0.568 && \text{reste } 0.967c \\ c(1 - 0.967) &\approx 0.568 && \text{factorice } c \\ c &\approx \frac{0.568}{0.033} \approx 17.2 && \text{despeje } c \end{aligned}$$

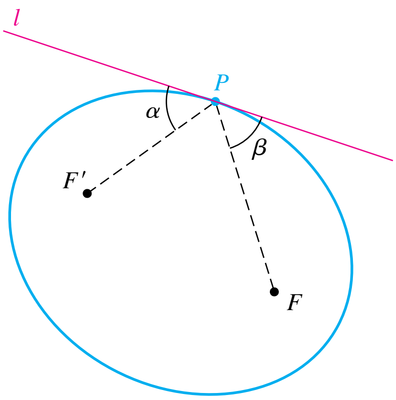
Como $a = c + 0.587$, obtenemos

$$a \approx 17.2 + 0.587 \approx 17.8,$$

y la distancia máxima entre el Sol y el cometa es

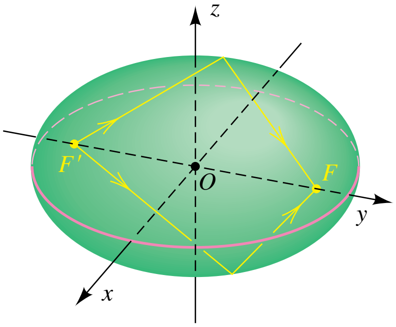
$$a + c \approx 17.8 + 17.2 = 35.0 \text{ AU}. \quad ■$$

FIGURA 13



Una elipse tiene una *propiedad reflectora* análoga a la de la parábola estudiada al final de la sección previa. Para ilustrar, denotemos con l la recta tangente en el punto P sobre una elipse con focos F y F', como se ve en la figura 13. Si α es el ángulo agudo entre $F'P$ y l y si β es el ángulo agudo entre FP y l, se puede demostrar que $\alpha = \beta$. Entonces, si un rayo de luz o un sonido emana de un foco, es reflejado al otro foco. Esta propiedad se usa en el diseño de ciertos tipos de equipo óptico.

FIGURA 14



Si la elipse con centro O y focos F' y F sobre el eje x se hace girar alrededor del eje x, como se ilustra en la figura 14, obtenemos una superficie tridimensional llamada **elipsoide**. La mitad superior o la inferior es un **semielipsoide,** como lo es la mitad derecha o la mitad izquierda. Las ondas de sonido u otros impulsos que sean emitidos desde foco F' serán reflejados por el elipsoide hacia el foco F. Esta propiedad se usa en el diseño de *galerías susurrantes*, que son estructuras con límites superiores elipsoidales, en donde una persona que susurra en un foco puede ser escuchada en el otro foco. Ejemplos de galerías susurrantes se pueden hallar en la Rotonda del edificio del capitolio en Washington, D.C y el tabernáculo mormón en Salt Lake City.

La propiedad reflectora de los elipsoides (y semielipsoides) se usa en medicina moderna en un aparato llamado *litotriptor*, que desintegra piedras del riñón por medio de ondas de choque de alta energía bajo el agua. Después de tomar mediciones extremadamente precisas, el operador coloca al paciente de modo que la piedra esté en un foco. Entonces se generan ondas de choque de muy alta frecuencia en el otro foco y las ondas reflejadas rompen la piedra del riñón. El tiempo de recuperación con esta técnica suele ser de 3 a 4 días, en lugar de 2 a 3 semanas con cirugía convencional. Además, la tasa de mortalidad es menor que 0.01% en comparación con el 2-3% para la cirugía tradicional (vea ejercicios 63–64).

11.2 Ejercicicos

Ejer. 1–14: Encuentre los vértices y focos de la elipse. Trace su gráfica, mostrando los focos.

1 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

2 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

3 $\dfrac{x^2}{15} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

4 $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{49} = 1$

5 $4x^2 + y^2 = 16$

6 $y^2 + 9x^2 = 9$

7 $4x^2 + 25y^2 = 1$

8 $10y^2 + x^2 = 5$

9 $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y+4)^2}{9} = 1$

10 $\dfrac{(x+2)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

11 $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$

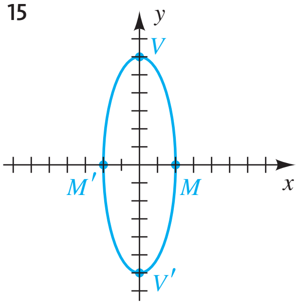
12 $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$

13 $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$

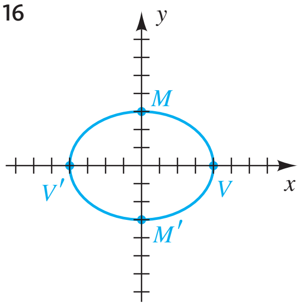
14 $4x^2 + y^2 = 2y$

Ejer. 15–18: Encuentre la ecuación para la elipse que se muestra en la figura.

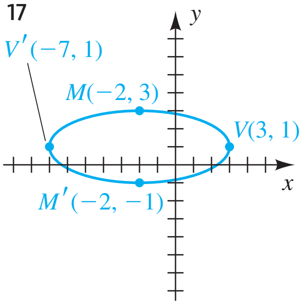
15



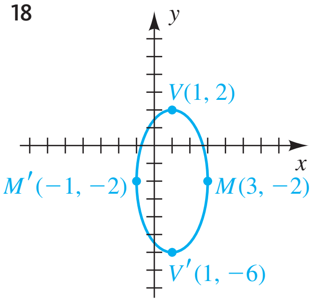
16



17



18



Ejer. 19–36: Encuentre la ecuación para la elipse que tiene su centro en el origen y satisface las condiciones dadas.

19 Vértices $V(\pm 8, 0)$, focos $F(\pm 5, 0)$

20 Vértices $V(0, \pm 7)$, focos $F(0, \pm 2)$

21 Vértices $V(0, \pm 5)$, eje menor de longitud 3

22 Vértices $V(\pm 7, 0)$, eje menor de longitud 5

23 Focos $F(\pm 3, 0)$, eje menor de longitud 2

24 Focos $F(0, \pm 4)$, eje menor de longitud 4

25 Vértices $V(0, \pm 6)$, que pasan por (3, 2)

26 Vértices $V(\pm 13, 0)$, que pasan por (5, 6)

27 Que pasan por (2, 3) y (6, 1)

28 Que pasan por (2, 8) y (4, 4)

29 Excentricidad $\frac{3}{4}$, vértices $V(0, \pm 4)$

30 Excentricidad $\frac{4}{7}$, vértices $V(\pm 7, 0)$

31 Excentricidad $\frac{1}{2}$, que pasa por (1, 3) vértices en el eje x,

32 Excentricidad $\frac{2}{3}$, que pasa por (1, 4) vértices en el eje y,

33 Intersecciones con el eje x ± 2, Intersecciones con el eje y $\pm\frac{1}{3}$

34 Intersecciones con el eje x $\pm\frac{1}{2}$, Intersecciones con el eje y ± 4

35 Eje mayor horizontal de longitud 8, eje menor de longitud 5

36 Eje mayor vertical de longitud 7, eje menor de longitud 6

Ejer. 37–40: Encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones. Trace ambas gráficas en el mismo plano de coordenadas y muestre los puntos de intersección.

37 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

38 $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 189 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

39 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 + y^2 = 43 \end{cases}$

40 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

Ejer. 41–44: Encuentre la ecuación para el conjunto de puntos en un plano *xy* tal que la suma de las distancias de *F* y *F′* sea *k*.

41 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$; $k = 10$

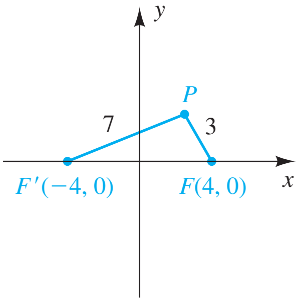
42 $F(12, 0)$, $F'(-12, 0)$; $k = 26$

43 $F(0, 15)$, $F'(0, -15)$; $k = 34$

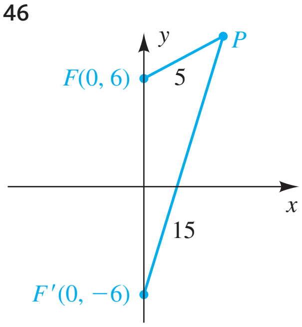
44 $F(0, 8)$, $F'(0, -8)$; $k = 20$

Ejer. 45–46: Encuentre la ecuación para la elipse con focos *F* y *F′* que pase por *P*. Trace la elipse.

45



46



Ejer. 47–50: Encuentre la ecuación para la mitad indicada de la elipse.

47 Mitad izquierda de $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

48 Mitad derecha de $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{121} = 1$

49 Mitad superior de $x^2 + 3y^2 = 17$

50 Mitad inferior de $2x^2 + 5y^2 = 12$

Ejer. 51–58: Determine si la gráfica de la ecuación es la mitad superior, inferior, izquierda o derecha de una elipse, y encuentre una ecuación para la elipse.

51 $y = 11\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{49}}$

52 $y = -6\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{25}}$

53 $x = -\frac{1}{3}\sqrt{9 - y^2}$

54 $x = \frac{4}{5}\sqrt{25 - y^2}$

55 $x = 1 + 2\sqrt{1 - \dfrac{(y + 2)^2}{9}}$

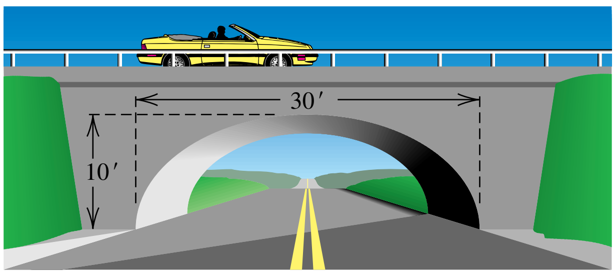
56 $x = -2 - 5\sqrt{1 - \dfrac{(y - 1)^2}{16}}$

57 $y = 2 - 7\sqrt{1 - \dfrac{(x + 1)^2}{9}}$

58 $y = -1 + \sqrt{1 - \dfrac{(x - 3)^2}{16}}$

59 **Dimensiones de un arco** Un arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco mide 30 pies de diámetro y la parte más alta del arco mide 10 pies arriba del pavimento horizontal, como se ve en la figura. Encuentre la altura del arco a 6 pies del centro de la base.

EJERCICIO 59

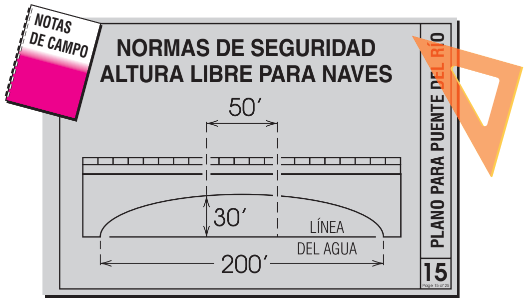


60 **Diseño de un puente** Se ha de construir un puente para cruzar un río que tiene 200 pies de ancho. El arco del puente ha de ser semielíptico y debe estar construido de modo que un barco, de menos de 50 pies de ancho y 30 pies de alto, pueda pasar con seguridad por debajo, como se muestra en la figura en la página siguiente.

(a) Encuentre una ecuación para el arco.

(b) Aproxime la altura del arco en el centro del puente.

EJERCICIO 60



61 Órbita de la Tierra Suponga que la longitud del eje mayor de la órbita de la Tierra es de 186,000,000 de millas y que la excentricidad es 0.017. Aproxime, a las 1000 millas más cercanas, las distancias máxima y mínima entre la Tierra y el Sol.

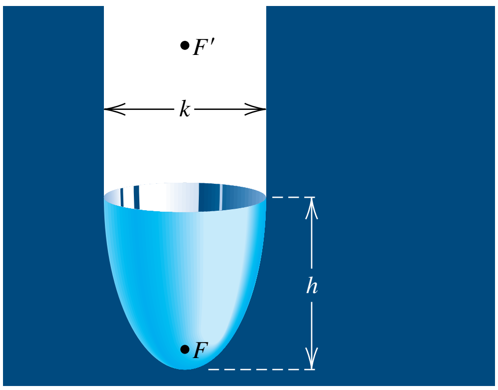
62 Órbita de Mercurio El planeta Mercurio se desplaza en una órbita elíptica que tiene excentricidad 0.206 y eje mayor de longitud 0.774 UA. Encuentre las distancias máxima y mínima entre Mercurio y el Sol.

63 Reflector elíptico La forma básica de un reflector elíptico es un semielipsoide de altura h y diámetro k, como se muestra en la figura. Las ondas emitidas desde el foco F se reflejan de la superficie y entran al foco F'.

(a) Exprese las distancias $d(V, F)$ y $d(V, F')$ en términos de h y k.

(b) Un reflector elíptico de 17 centímetros de altura se ha de construir para que las ondas emitidas desde F se reflejen en un punto F', que está a 32 cm de V. Encuentre el diámetro del reflector y la ubicación de F.

EJERCICIO 63

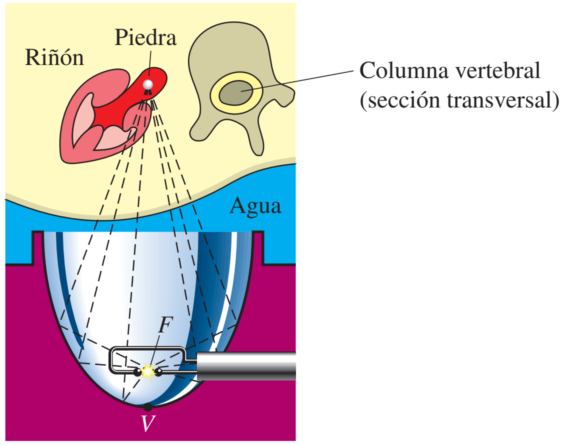


64 Operación de un *litotriptor* Se ha de construir un *litotriptor* de 15 cm de altura y 18 cm de diámetro (vea la figura). Ondas de choque de alta energía bajo el agua se emitirán desde el foco F que está más cercano al vértice V.

(a) Encuentre la distancia de V a F.

(b) ¿A qué distancia de V (en la dirección vertical) debe estar ubicada una piedra de riñón?

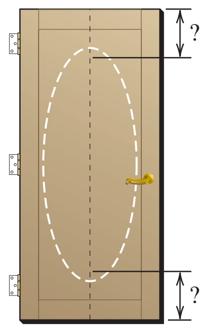
EJERCICIO 64



65 Galería susurrante El techo superior de una galería susurrante tiene la forma de semielipsoide que se ve en la figura 14, con el punto más alto del techo 15 pies arriba del piso elíptico y los vértices del piso a 50 pies entre sí. Si dos personas están de pie en los focos F' y F, ¿a qué distancia de los vértices están sus pies?

66 Diseño oval Un artista planea crear un diseño elíptico con eje mayor de 60″ y eje menor de 24″, centrado en una puerta que mide 80″ por 36″, usando el método descrito por la figura 1. En una recta vertical que divide en dos a la puerta, ¿aproximadamente a qué distancia de cada extremo de la puerta deben insertarse las tachuelas? ¿De qué largo debe ser la cuerda?

EJERCICIO 66



Ejer. 67–68: Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas. Dado el semieje mayor a en millones de kilómetros y excentricidad, e, grafique la órbita para el planeta. Centre el eje mayor sobre el eje x y trace la ubicación del Sol en un foco.

67 Trayectoria de la Tierra $a = 149.6, \quad e = 0.093$

68 Trayectoria de Plutón $a = 5913, \quad e = 0.249$

Ejer. 69–72: Grafique las elipses en el mismo plano de coordenadas y calcule sus puntos de intersección.

69 $\dfrac{x^2}{2.9} + \dfrac{y^2}{2.1} = 1; \qquad \dfrac{x^2}{4.3} + \dfrac{(y - 2.1)^2}{4.9} = 1$

70 $\dfrac{x^2}{3.9} + \dfrac{y^2}{2.4} = 1; \qquad \dfrac{(x + 1.9)^2}{4.1} + \dfrac{y^2}{2.5} = 1$

71 $\dfrac{(x + 0.1)^2}{1.7} + \dfrac{y^2}{0.9} = 1; \qquad \dfrac{x^2}{0.9} + \dfrac{(y - 0.25)^2}{1.8} = 1$

72 $\dfrac{x^2}{3.1} + \dfrac{(y - 0.2)^2}{2.8} = 1; \qquad \dfrac{(x + 0.23)^2}{1.8} + \dfrac{y^2}{4.2} = 1$

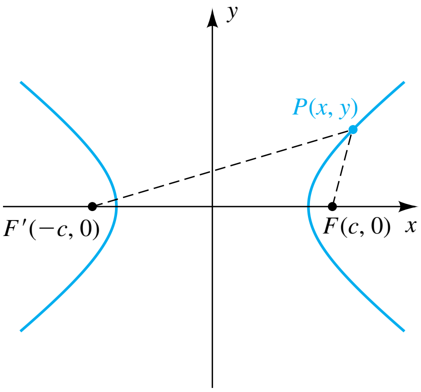
11.3 Hipérbolas

La definición de una hipérbola es semejante a la de una elipse. El único cambio es que en lugar de usar la *suma* de distancias desde dos puntos fijos, usamos la *diferencia*.

Definición de hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos de un plano, la diferencia de cuyas distancias desde dos puntos fijos (los **focos**) en el plano es una constante positiva.

FIGURA 1



Para hallar una ecuación sencilla para una hipérbola, seleccionamos un sistema de coordenadas con focos en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y denotamos la distancia (constante) con $2a$. El punto medio del segmento $F'F$ (el origen) se denomina **centro** de la hipérbola. Al consultar la figura 1, vemos que un punto $P(x, y)$ está en la hipérbola si y sólo si es verdadero cualquiera de los dos postulados siguientes:

(1) $d(P, F') - d(P, F) = 2a$ o **(2)** $d(P, F) - d(P, F') = 2a$

Si P no está en el eje x, entonces de la figura 1 vemos que

$$d(P, F) < d(F', F) + d(P, F'),$$

porque la longitud de un lado de un triángulo es siempre menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Del mismo modo,

$$d(P, F') < d(F', F) + d(P, F).$$

Formas equivalentes para las dos desigualdades previas son

$$d(P, F) - d(P, F') < d(F', F) \quad \text{y} \quad d(P, F') - d(P, F) < d(F', F).$$

Como las diferencias en los lados izquierdos de estas desigualdades son ambas iguales a $2a$ y como $d(F', F) = 2c$, las últimas dos desigualdades implican que $2a < 2c$ o $a < c$. (Recuerde que para elipses teníamos $a > c$.)

A continuación, las ecuaciones (1) y (2) pueden ser sustituidas por la ecuación única

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Usando la fórmula de la distancia para hallar $d(P, F)$ y $d(P, F')$, obtenemos una ecuación de la hipérbola:

$$\left|\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}\right| = 2a$$

Empleando el tipo de procedimiento de simplificación que empleamos para deducir una ecuación para una elipse, podemos reescribir la ecuación precedente como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Por último, si hacemos

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{con} \quad b > 0$$

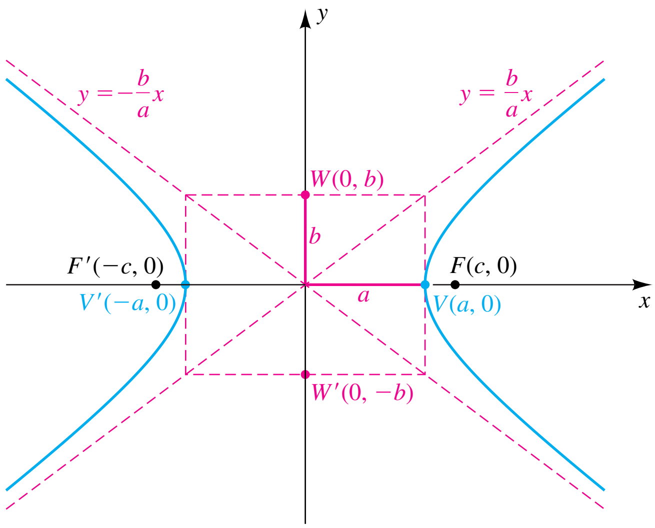
en la ecuación precedente, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la hipérbola de la figura 1 satisfacen la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. A la inversa, si (x, y) es una solución de esta ecuación, entonces al invertir pasos vemos que el punto (x, y) está sobre la hipérbola.

Aplicando pruebas de simetría, vemos que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes y el origen. Podemos hallar los puntos de intersección con el eje x de la hipérbola si hacemos $y = 0$ en la ecuación. Si hacemos esto, tendremos $x^2/a^2 = 1$ o $x^2 = a^2$ y en consecuencia los puntos de intersección con el eje x son a y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ sobre la gráfica se denominan **vértices** de la hipérbola (vea la figura 2). El segmento de recta $V'V$ recibe el nombre de **eje transversal.** La gráfica no tiene putos de intersección con el eje y, porque la ecuación $-y^2/b^2 = 1$ tiene las soluciones *complejas* $y = \pm bi$. Los puntos $W(0, b)$ y $W'(0, -b)$ son puntos extremos del **eje conjugado** $W'W$. Los puntos W y W' no están sobre la hipérbola, pero, como veremos, son útiles para describir la gráfica.

FIGURA 2



Si despejamos y de la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ tendremos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Si $x^2 - a^2 < 0$ o bien, lo que es equivalente, $-a < x < a$, entonces no hay puntos (x, y) sobre la gráfica. *Hay* puntos $P(x, y)$ sobre la gráfica si $x \geq a$ o $x \leq -a$.

Se puede demostrar que *las rectas* $y = \pm(b/a)x$ *son asíntotas para la hipérbola.* Estas asíntotas sirven como excelentes guías para trazar la gráfica. Una forma cómoda de trazar las asíntotas es primero localizar los vértices $V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$ y los puntos $W(0, b)$, $W'(0, -b)$ (vea la figura 2). Si se trazan rectas, una vertical y una horizontal, que pasen por estos puntos extremos de

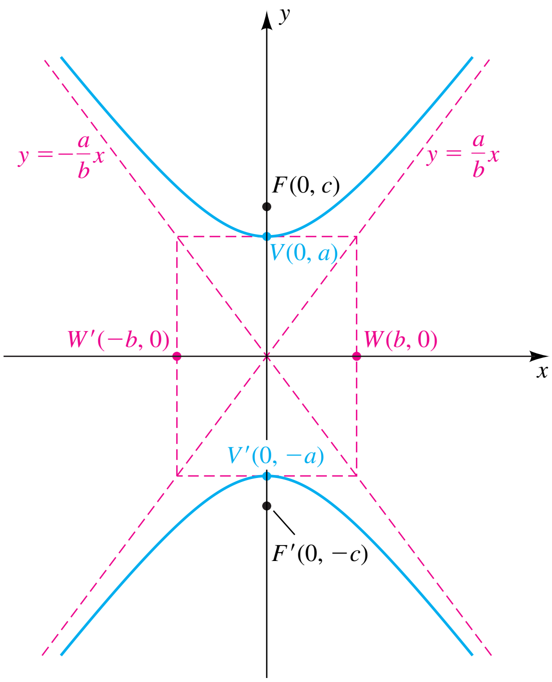
los ejes transversal y conjugado, respectivamente, entonces las diagonales del **rectángulo auxiliar** resultante tienen pendientes b/a y $-b/a$. En consecuencia, al extender estas diagonales obtenemos las asíntotas $y = \pm(b/a)x$. La hipérbola se traza entonces como en la figura 2, usando las asíntotas como guías. Las dos partes que conforman la hipérbola se denominan **rama derecha** y **rama izquierda** de la hipérbola.

Del mismo modo, si tomamos los focos sobre el eje y, obtenemos la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

En este caso, los vértices de la hipérbola son $(0, \pm a)$ y los puntos extremos del eje conjugado son $(\pm b, 0)$, como se ve en la figura 3. Las asíntotas son $y = \pm(a/b)x$ (*no* $y = \pm(b/a)x$, como en el caso previo), y ahora nos referimos a las dos partes que conforman la hipérbola como la **rama superior** y la **rama inferior** de la hipérbola.

FIGURA 3



La exposición precedente puede resumirse como sigue:

Ecuaciones estándar de una hipérbola con centro en el origen

La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

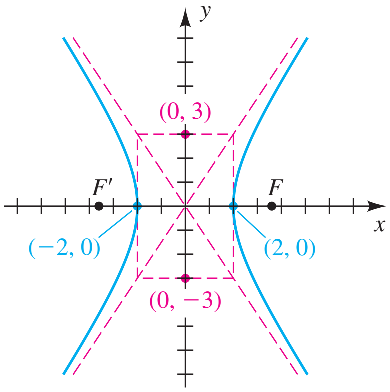
es una hipérbola con centro en el origen. La longitud del eje transversal es $2a$ y la longitud del eje conjugado es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Note que los vértices están sobre el eje x si el término en x^2 tiene un coeficiente positivo (la primera ecuación en el recuadro de líneas antes) o en el eje y si el término en y^2 tiene un coeficiente positivo (la segunda ecuación).

EJEMPLO 1 **Trazar una hipérbola con centro en el origen**

Trace la gráfica de $9x^2 - 4y^2 = 36$. Encuentre los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

FIGURA 4



SOLUCIÓN De las observaciones que preceden a este ejemplo, la gráfica es una hipérbola con centro en el origen. Para expresar la ecuación dada en forma estándar, dividimos ambos lados entre 36 y simplificamos, obteniendo

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Al comparar $(x^2/4) - (y^2/9) = 1$ con $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, vemos que $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$; esto es, $a = 2$ y $b = 3$. La hipérbola tiene sus vértices sobre el eje x, porque hay puntos de intersección con el eje x y no con el eje y. Los vértices $(\pm 2, 0)$ y los puntos extremos $(0, \pm 3)$ del eje conjugado determinan el rectángulo auxiliar cuyas diagonales (prolongadas) nos dan las asíntotas. La gráfica de la ecuación está trazada en la figura 4.

Para hallar los focos, calculamos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13.$$

Entonces, $c = \sqrt{13}$ y los focos son $F\left(\sqrt{13}, 0\right)$ y $F'\left(-\sqrt{13}, 0\right)$.

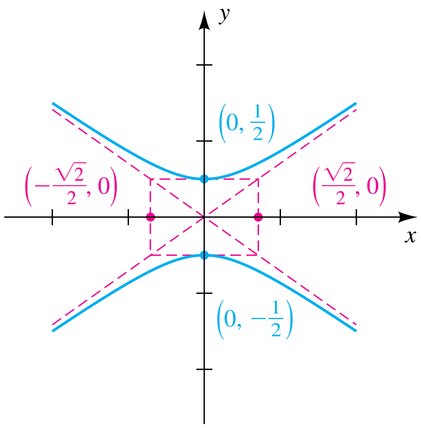
Las ecuaciones de las asíntotas, $y = \pm\frac{3}{2}x$, se pueden hallar al consultar la gráfica o con las ecuaciones $y = \pm(b/a)x$. ■

El ejemplo precedente indica que para hipérbolas no es siempre verdadero que $a > b$, como en el caso de las elipses. De hecho, podemos tener $a < b$, $a > b$ o $a = b$

EJEMPLO 2 **Trazar una hipérbola con centro en el origen**

Trace la gráfica de $4y^2 - 2x^2 = 1$. Encuentre los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

FIGURA 5



SOLUCIÓN Para expresar la ecuación dada en forma estándar, escribimos

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Entonces,

$$a^2 = \tfrac{1}{4}, \qquad b^2 = \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad c^2 = a^2 + b^2 = \tfrac{3}{4},$$

y en consecuencia

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad c = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La hipérbola tiene sus vértices en el eje y, porque hay puntos de intersección con el eje y y no con el eje x. Los vértices son $\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$, los puntos extremos de los ejes conjugados son $\left(\pm\sqrt{2}/2, 0\right)$ y los focos son $\left(0, \pm\sqrt{3}/2\right)$. La gráfica está trazada en la figura 5.

(continúa)

Para hallar las ecuaciones de las asíntotas, consultamos la figura o usamos $y = \pm(a/b)x$, para obtener $y = \pm\left(\sqrt{2}/2\right)x$. ■

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación de una hipérbola que satisfaga condiciones prescritas

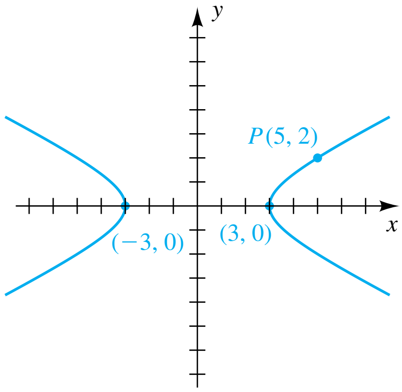
Una hipérbola tiene vértices $(\pm 3, 0)$ y pasa por el punto $P(5, 2)$. Encuentre su ecuación, focos y asíntotas.

SOLUCIÓN Empezamos por trazar una hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ que pase por el punto $P(5, 2)$, como en la figura 6.

Una ecuación de la hipérbola tiene la forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

FIGURA 6



Como $P(5, 2)$ está sobre la hipérbola, las coordenadas x y y satisfacen esta ecuación; es decir,

$$\frac{5^2}{3^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1.$$

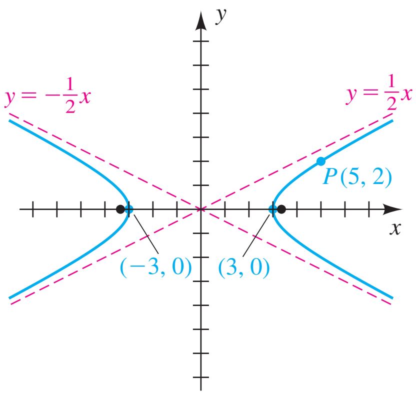
Al despejar b^2 nos da $b^2 = \frac{9}{4}$, y por tanto una ecuación para la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

o bien, lo que es equivalente,

$$x^2 - 4y^2 = 9.$$

FIGURA 7



Para hallar los focos, primero calculamos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}.$$

Por tanto, $c = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \approx 3.35$ y los focos son $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{5}, 0\right)$.

Las ecuaciones generales de las asíntotas son $y = \pm(b/a)x$. Sustituyendo $a = 3$ y $b = \frac{3}{2}$ nos da $y = \pm\frac{1}{2}x$, como se muestra en la figura 7. ■

El siguiente ejemplo indica cómo hallar ecuaciones para ciertas partes de una hipérbola.

EJEMPLO 4 Hallar ecuaciones de partes de una hipérbola

La hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ se estudió en el ejemplo 1. Resuelva la ecuación como se indica y describa la gráfica resultante.

(a) Para x en términos de y **(b)** Para y en términos de x

SOLUCIÓN

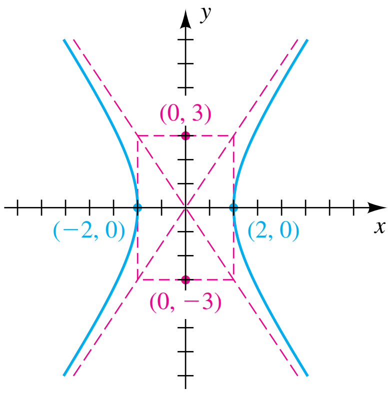
(a) Despejamos x en términos de y como sigue:

$$9x^2 - 4y^2 = 36 \qquad \text{enunciado}$$

$$x^2 = \frac{36 + 4y^2}{9} \qquad \text{despeje } x^2$$

$$x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2} \qquad \text{factorice 4 y saque la raíz}$$

FIGURA 8



La gráfica de la ecuación $x = \frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ es la rama derecha de la hipérbola trazada en la figura 4 (y repetida en la figura 8), y la gráfica de $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ es la rama izquierda.

(b) Despejamos y en términos de x como sigue:

$$
\begin{aligned}
9x^2 - 4y^2 &= 36 && \text{enunciado} \\
y^2 &= \frac{9x^2 - 36}{4} && \text{despeje } y^2 \\
y &= \pm\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4} && \text{factorice 9 y saque la raíz cuadrada}
\end{aligned}
$$

La gráfica de $y = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ es la mitad superior de las ramas derecha e izquierda, y la gráfica de $y = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ es la mitad inferior de estas ramas. ■

Como fue el caso para elipses, podemos usar traslaciones para ayudar a trazar hipérbolas que tienen centros en algún punto $(h, k) \neq (0, 0)$. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

EJEMPLO 5 **Trazar una hipérbola con centro (h, k)**

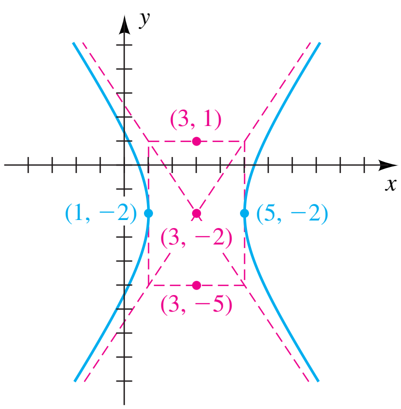
Trace la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0.$$

SOLUCIÓN Arreglamos nuestro trabajo usando un procedimiento semejante al empleado para elipses en el ejemplo 5 de la sección previa:

$$
\begin{aligned}
(9x^2 - 54x) + (-4y^2 - 16y) &= -29 && \text{agrupe términos} \\
9(x^2 - 6x + \underline{\quad}) - 4(y^2 + 4y + \underline{\quad}) &= -29 && \text{factorice 9 y } -4 \\
9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) &= -29 + \underline{9 \cdot 9} - \underline{4 \cdot 4} && \text{complete los cuadrados} \\
9(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 &= 36 && \text{factorice y simplifique} \\
\frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{9} &= 1 && \text{divida entre 36}
\end{aligned}
$$

FIGURA 9



La última ecuación indica que la hipérbola tiene centro $C(3, -2)$ con vértices y focos en la recta horizontal $y = -2$, porque el término que contiene a x es positivo. También sabemos que

$$a^2 = 4, \qquad b^2 = 9 \qquad \text{y} \qquad c^2 = a^2 + b^2 = 13.$$

Por lo tanto,

$$a = 2, \qquad b = 3 \qquad \text{y} \qquad c = \sqrt{13}.$$

Como se ilustra en la figura 9, los vértices son $(3 \pm 2, -2)$; es decir, $(5, -2)$ y $(1, -2)$. Los puntos extremos del eje conjugado son $(3, -2 \pm 3)$; es decir, $(3, 1)$ y $(3, -5)$. Los focos son $\left(3 \pm \sqrt{13}, -2\right)$; y las ecuaciones de las asíntotas son

$$y + 2 = \pm\frac{3}{2}(x - 3).$$ ■

Los resultados de las secciones 11.1 a la 11.3 indican que la gráfica de toda ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

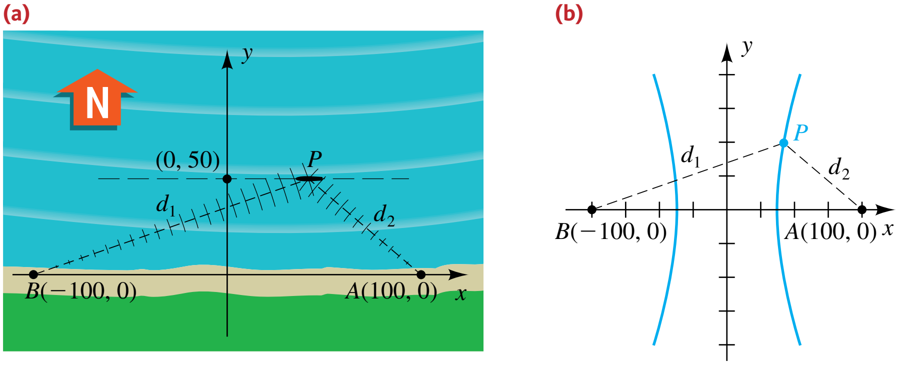
es una cónica, excepto para ciertos casos degenerados en los que se obtiene un punto, una o dos rectas o no se obtiene gráfica. Aun cuando hemos considerado sólo ejemplos especiales, nuestros métodos se pueden aplicar a cualquier ecuación como ésta. Si A y C son iguales y diferentes de 0, entonces la gráfica, cuando exista, es una circunferencia o, en casos excepcionales, un punto. Si A y C son desiguales pero tienen el mismo signo, se obtiene una ecuación cuya gráfica, cuando exista, es una elipse (o un punto). Si A y C tienen signos contrarios, se obtiene una ecuación de una hipérbola o posiblemente, en el caso degenerado, dos rectas que se cruzan. Si A o C (pero no ambas) es 0, la gráfica es una parábola o, en ciertos casos, un par de rectas paralelas.

Concluiremos esta sección con una aplicación donde aparecen hipérbolas.

EJEMPLO 6 **Localizar un barco**

La estación A de guardacostas está a 200 millas directamente al este de otra estación B. Un barco está navegando en una línea paralela y a 50 millas al norte de la recta que pasa por A y B. Se transmiten señales de radio de A y B a una velocidad de 980 pies/μs. Si, a la 1:00 p.m., la señal desde B llega al barco 400 microsegundos después que la señal desde A, localice la posición del barco en ese momento.

FIGURA 10



SOLUCIÓN Introduzcamos un sistema de coordenadas, como se ve en la figura 10(a), con las estaciones en los puntos A y B sobre el eje x y el barco en el punto P sobre la recta $y = 50$. Como a la 1:00 p.m. la señal tarda 400 microsegundos más en llegar desde B que desde A, la diferencia $d_1 - d_2$ en las distancias indicadas en este tiempo es

$$d_1 - d_2 = (980)(400) = 392{,}000 \text{ pies.}$$

Dividiendo entre 5280 (pies/millas) nos da

$$d_1 - d_2 = \frac{392{,}000}{5280} = 74.\overline{24} \text{ mi}$$

A la 1:00 p.m., el punto P está en la rama derecha de una hipérbola cuya ecuación es $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ (vea la figura 10(b)), formada por todos los puntos cuya diferencia en distancias desde los focos B y A es $d_1 - d_2$. En nuestra deducción de la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, hacemos $d_1 - d_2 = 2a$; se concluye que en la presente situación

$$a = \frac{74.\overline{24}}{2} = 37.\overline{12} \qquad \text{y} \qquad a^2 \approx 1378.$$

Como la distancia c desde el origen a cualquiera de los focos es 100,

$$b^2 = c^2 - a^2 \approx 10{,}000 - 1378, \qquad \text{or} \qquad b^2 \approx 8622.$$

En consecuencia, una ecuación (aproximada) para la hipérbola que tiene focos A y B y pasa por P es

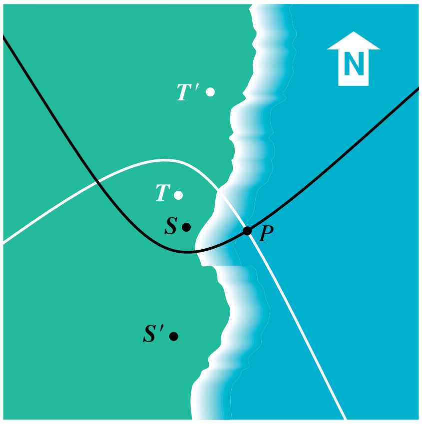
$$\frac{x^2}{1378} - \frac{y^2}{8622} = 1.$$

Si hacemos $y = 50$ (la coordenada y de P), obtenemos

$$\frac{x^2}{1378} - \frac{2500}{8622} = 1.$$

Al despejar x tendremos $x \approx 42.16$. Redondeando a la milla más cercana, encontramos que las coordenadas de P son aproximadamente (42, 50). ■

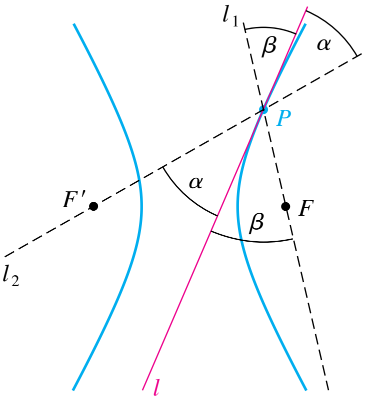
FIGURA 11



Una extensión del método empleado en el ejemplo 6 es la base para el sistema de navegación LORAN (Long Range Navigation). Este sistema contiene dos pares de radiotransmisores, como los situados en T, T' y S, S' en la figura 11. Suponga que las señales enviadas por los transmisores en T y T' llegan a un radiorreceptor en un barco situado en algún punto P. La diferencia en los tiempos de llegada de las señales se puede usar para determinar la diferencia en las distancias de P desde T y T'. Así, P se encuentra en una rama de una hipérbola con focos en T y T'. Repitiendo este proceso para el otro par de transmisores, vemos que P también está en una rama de una hipérbola con focos en S y S'. La intersección de estas dos ramas determina la posición de P.

Una hipérbola tiene una *propiedad reflectora* análoga a la de la elipse estudiada en la sección previa. Para ilustrar, denotemos con l la recta tangente a un punto P en una hipérbola con focos F y F', como se ve en la figura 12. Si α es el ángulo agudo entre $F'P$ y l y si β es el ángulo agudo entre FP y l, se puede demostrar que $\alpha = \beta$. Si un rayo de luz se dirige a lo largo de la recta l_1 hacia F, se refleja en P a lo largo de la recta l_2 hacia F'. Esta propiedad se usa en el diseño de telescopios del tipo Cassegrain (vea el ejercicio 78).

FIGURA 12



11.3 Ejercicios

Ejer. 1–16: Encuentre los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola. Trace su gráfica, mostrando las asíntotas y los focos.

1 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

2 $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{16} = 1$

3 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

4 $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$

5 $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$

6 $y^2 - \frac{x^2}{15} = 1$

7 $y^2 - 4x^2 = 16$

8 $x^2 - 2y^2 = 8$

9 $16x^2 - 36y^2 = 1$

10 $y^2 - 16x^2 = 1$

11 $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$

12 $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

13 $144x^2 - 25y^2 + 864x - 100y - 2404 = 0$

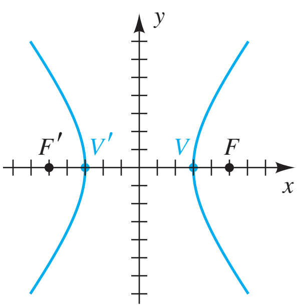
14 $y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$

15 $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$

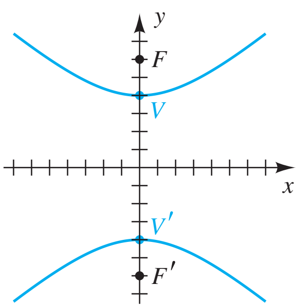
16 $25x^2 - 9y^2 + 100x - 54y + 10 = 0$

Ejer. 17–20: Encuentre la ecuación para la hipérbola mostrada en la figura.

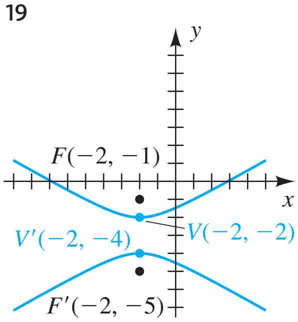
17



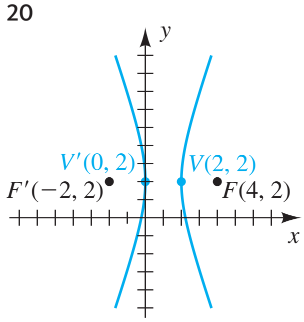
18



19



20



Ejer. 21–36: Encuentre la ecuación para la hipérbola que tiene su centro en el origen y satisface las condiciones dadas.

21 Focos $F(0, \pm 4)$, vértices $V(0, \pm 1)$

22 Focos $F(\pm 8, 0)$, vértices $V(\pm 5, 0)$

23 Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $V(\pm 3, 0)$

24 Focos $F(0, \pm 3)$, vértices $V(0, \pm 2)$

25 Focos $F(0, \pm 5)$, eje conjugado de longitud 4

26 Focos $F(\pm 7, 0)$, eje conjugado de longitud 8

27 Vértices $V(\pm 4, 0)$, que pasa por (8, 2)

28 Vértices $V(0, \pm 12)$, que pasa por (5, 13)

29 Vértices $V(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$

30 Vértices $V(0, \pm 6)$, asíntotas $y = \pm 3x$

31 Focos $F(0, \pm 10)$, asíntotas $y = \pm \frac{1}{3}x$

32 Focos $F(\pm 34, 0)$, asíntotas $y = \pm \frac{3}{5}x$

33 Intersección con $x \pm 5$, asíntotas $y = \pm 2x$

34 Intersecciones con eje y ± 2, asíntotas $y = \pm\frac{1}{4}x$

35 Eje vertical transversal de longitud 10, eje conjugado de longitud 14

36 Eje horizontal transversal de longitud 6, eje conjugado de longitud 2

Ejer. 37–46: Identifique la gráfica de la ecuación como una parábola (con eje vertical u horizontal), circunferencia, elipse o hipérbola.

37 $\frac{1}{3}(x + 2) = y^2$

38 $y^2 = \frac{14}{3} - x^2$

39 $x^2 + 6x - y^2 = 7$

40 $x^2 + 4x + 4y^2 - 24y = -36$

41 $-x^2 = y^2 - 25$

42 $x = 2x^2 - y + 4$

43 $4x^2 - 16x + 9y^2 + 36y = -16$

44 $x + 4 = y^2 + y$

45 $x^2 + 3x = 3y - 6$

46 $9x^2 - y^2 = 10 - 2y$

Ejer. 47–50: Encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones. Trace ambas gráficas sobre el mismo plano de coordenadas y muestre los puntos de intersección.

47 $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 16 \\ y - x = 4 \end{cases}$

48 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y^2 - 3x = 0 \end{cases}$

49 $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 4 \\ x^2 + 4y^2 = 32 \end{cases}$

50 $\begin{cases} y^2 - 3x^2 = 6 \\ x^2 + y^2 = 106 \end{cases}$

Ejer. 51–54: Encuentre la ecuación para el conjunto de puntos en un plano *xy* de manera que la diferencia de las distancias desde *F* y *F′* sea *k*.

51 $F(13, 0)$, $F'(-13, 0)$; $k = 24$

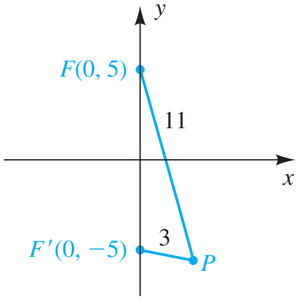
52 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$; $k = 8$

53 $F(0, 10)$, $F'(0, -10)$; $k = 16$

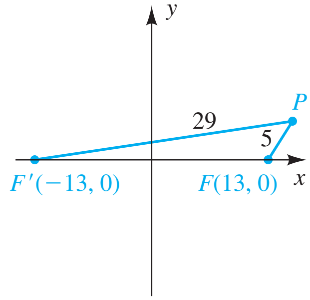
54 $F(0, 17)$, $F'(0, -17)$; $k = 30$

Ejer. 55–56: Encuentre una ecuación para la hipérbola con focos *F* y *F′* que pasa por *P*. Trace la hipérbola.

55



56



Ejer. 57–64: Encuentre una ecuación para la parte indicada de la hipérbola.

57 Rama inferior de $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{36} = 1$

58 Rama superior de $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{25} = 1$

59 Rama izquierda de $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

60 Rama derecha de $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

61 Mitades derechas de las ramas de $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{81} = 1$

62 Mitades izquierdas de las ramas de $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$

63 Mitades superiores de las ramas de $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

64 Mitades inferiores de las ramas de $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1$

Ejer. 65–72: Describa la parte de una hipérbola dada por la ecuación.

65 $x = \frac{5}{4}\sqrt{y^2 + 16}$

66 $x = -\frac{5}{4}\sqrt{y^2 + 16}$

67 $y = \frac{3}{7}\sqrt{x^2 + 49}$

68 $y = -\frac{3}{7}\sqrt{x^2 + 49}$

69 $y = -\frac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$

70 $y = \frac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$

71 $x = -\frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$

72 $x = \frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$

73 Las gráficas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

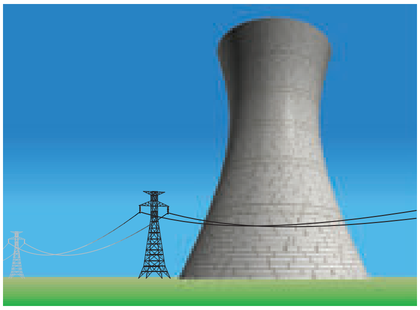
se denominan *hipérbolas conjugadas.* Trace las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo plano de coordenadas, con $a = 5$ y $b = 3$, y describa la relación entre las dos gráficas.

74 Encuentre una ecuación de la hipérbola con focos $(h \pm c, k)$ y vértices $(h \pm a, k)$, donde

$$0 < a < c \quad \text{y} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

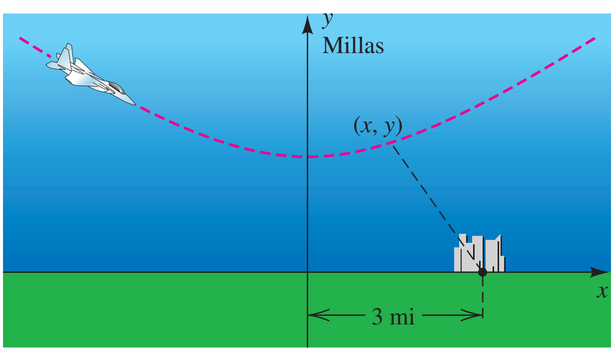
75 **Torre de enfriamiento** Una torre de enfriamiento, como la que se ve en la figura, es una estructura hiperbólica. Suponga que el diámetro de su base es de 100 metros y su diámetro más pequeño de 48 metros se encuentra a 84 metros de la base. Si la torre mide 120 metros de altura, calcule su diámetro en la parte más alta.

EJERCICIO 75



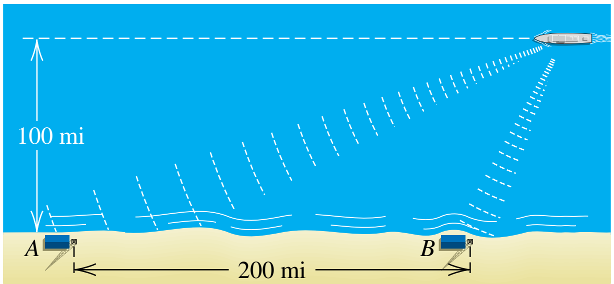
76 **Maniobra de un avión** Un avión está volando a lo largo de la trayectoria hiperbólica que se ilustra en la figura. Si una ecuación de la trayectoria es $2y^2 - x^2 = 8$, determine la cercanía a la que llega el avión de un pueblo situado en (3, 0). (*Sugerencia:* denote con S el cuadrado de la distancia desde un punto (x, y) sobre la trayectoria a (3, 0) y encuentre el valor mínimo de S.)

EJERCICIO 76



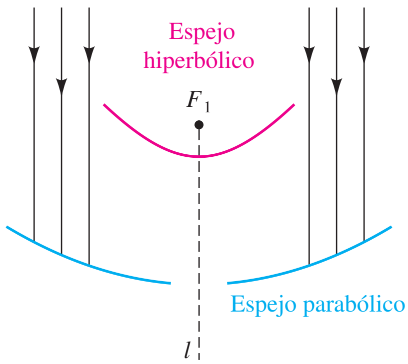
77 **Localizar un barco** Un barco está siguiendo un curso que está a 100 millas de una costa recta y paralelo a ésta. El barco transmite una señal de auxilio que es recibida por dos estaciones de guardacostas A y B, situadas a 200 millas una de la otra, como se ve en la figura. Al medir la diferencia en tiempos de recepción de señal, se determina que el barco está 160 millas más cerca de B que de A. ¿Dónde está el barco?

EJERCICIO 77



78 **Diseño de un telescopio** El diseño de un telescopio Cassegrain (que data de 1672) hace uso de las propiedades reflectoras de la parábola y la hipérbola. En la figura se muestra un espejo parabólico (seccionado), con foco en F_1 y eje a lo largo de la recta l, y un espejo hiperbólico, con un foco también en F_1 y eje transversal a lo largo de l. ¿En dónde, finalmente, se colectan las ondas de luz entrantes paralelas al eje común?

EJERCICIO 78



Ejer. 79–80: Grafique las hipérbolas en el mismo plano de coordenadas y estime el punto de intersección en el primer cuadrante de ambas.

79 $\frac{(y - 0.1)^2}{1.6} - \frac{(x + 0.2)^2}{0.5} = 1;$

$\frac{(y - 0.5)^2}{2.7} - \frac{(x - 0.1)^2}{5.3} = 1$

80 $\frac{(x - 0.1)^2}{0.12} - \frac{y^2}{0.1} = 1; \frac{x^2}{0.9} - \frac{(y - 0.3)^2}{2.1} = 1$

Ejer. 81–82: Grafique las hipérbolas en el mismo plano de coordenadas y determine el número de puntos de intersección.

81 $\dfrac{(x-0.3)^2}{1.3} - \dfrac{y^2}{2.7} = 1; \dfrac{y^2}{2.8} - \dfrac{(x-0.2)^2}{1.2} = 1$

82 $\dfrac{(x+0.2)^2}{1.75} - \dfrac{(y-0.5)^2}{1.6} = 1;$

$\dfrac{(x-0.6)^2}{2.2} - \dfrac{(y+0.4)^2}{2.35} = 1$

83 **Trayectoria de un cometa** Los cometas pueden desplazarse en trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas alrededor del Sol. Si un cometa se mueve en una trayectoria parabólica o hiperbólica, pasará cerca del Sol una vez y nunca regresará. Suponga que las coordenadas de un cometa en millas se pueden describir con la ecuación

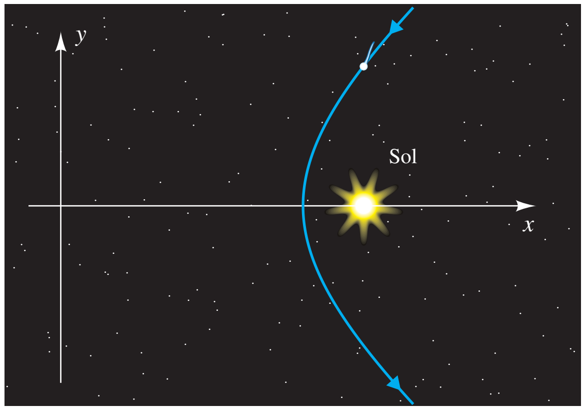
$$\frac{x^2}{26 \times 10^{14}} - \frac{y^2}{18 \times 10^{14}} = 1 \quad \text{para} \quad x > 0,$$

donde el Sol está ubicado en un foco, como se ve en la figura.

(a) Aproxime las coordenadas del Sol.

(b) Para que el cometa mantenga una trayectoria hiperbólica, la velocidad mínima v del cometa, en metros por segundo, debe satisfacer $v > \sqrt{2k/r}$, donde r es la distancia entre el cometa y el centro del Sol en metros y $k = 1.325 \times 10^{20}$ es una constante. Determine v cuando r es mínima.

EJERCICIO 83



11.4 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Si f es una función, la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ se denomina *curva plana.* No obstante, esta definición es restrictiva porque excluye numerosas gráficas útiles. La siguiente definición es más general.

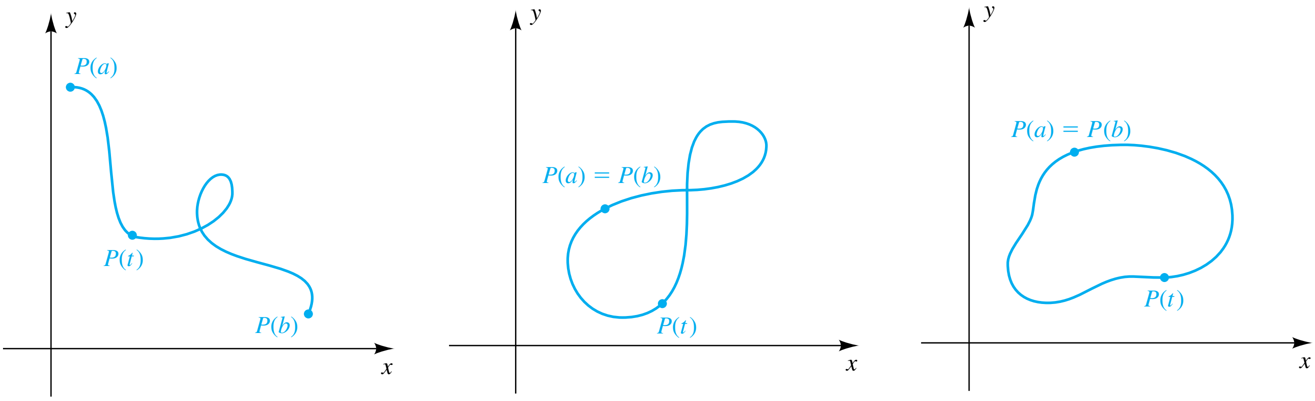
Definición de curva plana Una **curva plana** es un conjunto C de pares ordenadas $(f(t), g(t))$, donde f y g son funciones definidas en un intervalo I.

Para mayor sencillez, nos referimos a una curva plana como una **curva**. La **gráfica** de C en la definición precedente está formada por todos los puntos $P(t) = (f(t), g(t))$ en un plano xy, para t en I. Usaremos el término *curva* indistintamente con *gráfica de una curva*. A veces consideramos el punto $P(t)$ como que traza la curva C a medida que t varía en el intervalo I.

Las gráficas de varias curvas están trazadas en la figura 1, donde I es un intervalo cerrado $[a, b]$; es decir, $a \leq t \leq b$. En el inciso (a) de la figura, $P(a) \neq P(b)$, y $P(a)$ y $P(b)$ se denominan **puntos extremos** de C. La curva en (a)

FIGURA 1

(a) Curva (b) Curva cerrada (c) Curva cerrada simple



se intersecta a sí misma; esto es, dos valores diferentes de t producen el mismo punto. Si $P(a) = P(b)$, como en la figura 1(b), entonces C es una **curva cerrada.** Si $P(a) = P(b)$ y C no se intersecta a sí misma en ningún otro punto, como en la figura 1(c), entonces C es una **curva cerrada simple.**

Una forma cómoda de representar curvas se da en la siguiente definición.

Definición de ecuaciones paramétricas

Sea C la curva formada por todos los pares ordenados $(f(t), g(t))$, donde f y g están definidas en un intervalo I. Las ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

para t en I, son **ecuaciones paramétricas** para C con **parámetro** t.

La curva C en esta definición se conoce como una **curva parametrizada** y las ecuaciones paramétricas son una **parametrización** de C. Con frecuencia usamos la notación

$$x = f(t), \quad y = g(t); \quad t \text{ en } I$$

para indicar el dominio I de f y g. Podemos referirnos a estas ecuaciones como la **ecuación *x*** y la **ecuación *y*.**

A veces es posible eliminar el parámetro y obtener una ecuación conocida con x y y para C. En casos sencillos podemos trazar una gráfica de una curva parametrizada al localizar puntos y unirlos en orden creciente de t, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 **Trazar la gráfica de una curva parametrizada**

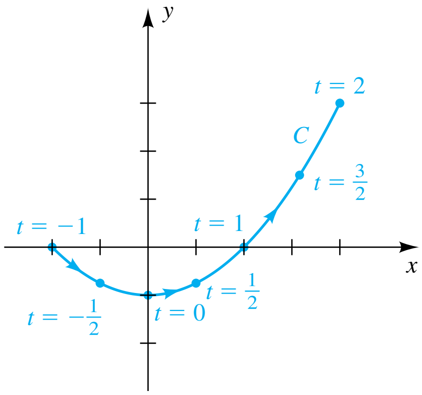
Trace la gráfica de la curva C que tiene la parametrización

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -1 \leq t \leq 2.$$

SOLUCIÓN Usamos las ecuaciones paramétricas para tabular coordenadas de puntos $P(x, y)$ en C, como sigue.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

FIGURA 2
$x = 2t,\ y = t^2 - 1;\ -1 \le t \le 2$



La localización de puntos lleva al trazo de la figura 2. Las puntas de flecha en la gráfica indican la dirección en la que $P(x, y)$ traza la curva cuando t *aumenta* de -1 a 2.

Podemos obtener una descripción más conocida de la gráfica al eliminar el parámetro. Si de la ecuación en x despejamos t, obtenemos $t = \frac{1}{2}x$. Sustituyendo esta expresión por t en la ecuación y nos da

$$y = \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 - 1.$$

La gráfica de esta ecuación en x y y es una parábola simétrica con respecto al eje y con vértice $(0, -1)$. No obstante, como $x = 2t$ y $-1 \le t \le 2$, vemos que $-2 \le x \le 4$ para puntos (x, y) en C, y por tanto C es la parte de la parábola entre los puntos $(-2, 0)$ y $(4, 3)$ mostrada en la figura 2. ■

Como indican las puntas de flecha de la figura 2, el punto $P(x, y)$ traza la curva C de *izquierda a derecha* cuando t aumenta. Las ecuaciones paramétricas

$$x = -2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -2 \le t \le 1$$

nos dan la misma gráfica; pero, a medida que t aumenta, $P(x, y)$ traza la curva de *derecha a izquierda*. Para otras parametrizaciones, el punto $P(x, y)$ puede oscilar hacia delante y hacia atrás cuando t aumenta.

La **orientación** de una curva parametrizada C es la dirección determinada al *aumentar* los valores del parámetro. Con frecuencia indicamos una orientación al poner puntas de flecha en C, como en la figura 2. Si $P(x, y)$ se mueve hacia adelante y hacia atrás cuando t aumenta, podemos poner flechas *a lo largo* de C.

Como hemos observado, una curva puede tener diferentes orientaciones, dependiendo de la parametrización. Para ilustrar, la curva C del ejemplo 1 está dada en forma paramétrica por cualquiera de las siguientes:

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -1 \le t \le 2$$
$$x = t, \quad y = \tfrac{1}{4}t^2 - 1; \quad -2 \le t \le 4$$
$$x = -t, \quad y = \tfrac{1}{4}t^2 - 1; \quad -4 \le t \le 2$$

EJEMPLO 2 **Trazar gráficas en modo paramétrico**

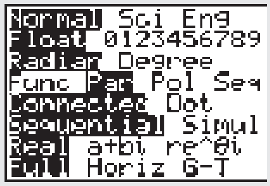
Trace la gráfica de la curva *C* que tiene la parametrización

$$x = t^2 - 3, \; y = 3t; \; -4 \leq t \leq 4.$$

SOLUCIÓN

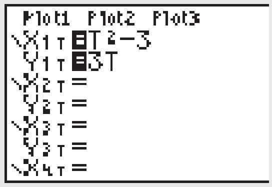
Poner en modo paramétrico.

MODE ▽ (3 veces) ▷ ENTER



Asignar las ecuaciones.

Y= X,T,θ,n x^2 − 3
▽ 3 X,T,θ,n ▽

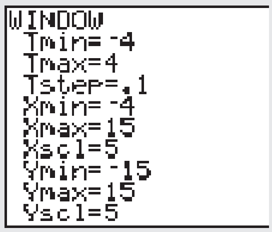


(El subíndice 1T en X y Y indica que X_{1T} y Y_{1T} representan el primer *par* de ecuaciones paramétricas.)

Cuando grafiquemos ecuaciones paramétricas, necesitamos asignar valores mínimos (Tmín) y máximos (Tmáx) al parámetro *t*, además de dimensiones de pantalla. También necesitamos seleccionar un incremento, o valor de paso (Tstep), para *t*. Un valor típico para Tstep es 0.1. Si se selecciona un valor más pequeño de Tstep, la precisión del trazo aumenta pero también aumenta el tiempo necesario para trazar la gráfica.

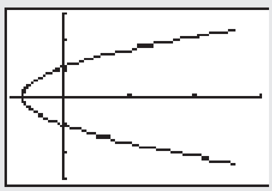
Asignar valores de ventana.

WINDOW −4 ▽ 4 ▽ .1 ▽
−4 ▽ 15 ▽ 5 ▽ −15 ▽ 15 ▽ 5



Grafique la curva.

GRAPH



Observe la orientación de la curva.

Ahora presione TRACE y use las teclas de izquierda y derecha del cursor para trazar *C*. Observe los valores citados para T, X y Y. Note la forma en que los valores de T corresponden a la selección de Tstep. Trate de graficar *C* con Tstep = 1, 2, 4 y 8. ■

El siguiente ejemplo demuestra que a veces es útil eliminar el parámetro *antes* de graficar los puntos.

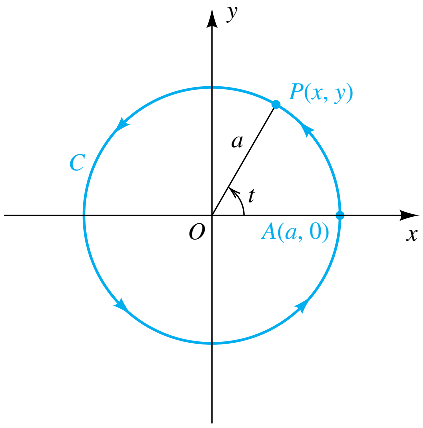
EJEMPLO 3 **Describir el movimiento de un punto**

Un punto se mueve en un plano tal que su posición $P(x, y)$ en el tiempo t está dada por

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t; \quad t \text{ en } \mathbb{R},$$

donde $a > 0$. Describa el movimiento del punto.

FIGURA 3
$x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$; t en $\mathbb{R}$



SOLUCIÓN Cuando x y y contienen funciones trigonométricas de t, a veces podemos eliminar el parámetro t al aislar las funciones trigonométricas, elevamos al cuadrado ambos lados de las ecuaciones y luego usamos una de las identidades de Pitágoras, como sigue:

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t \qquad \text{enunciado}$$

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{a} = \operatorname{sen} t \qquad \text{aísle } \cos t \text{ y } \operatorname{sen} t$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t, \quad \frac{y^2}{a^2} = \operatorname{sen}^2 t \qquad \text{eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

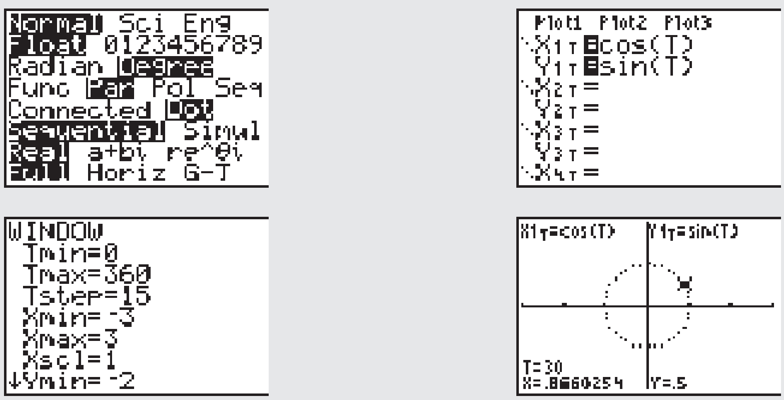
$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{multiplique por } a^2$$

Esto muestra que el punto $P(x, y)$ se mueve en la circunferencia C de radio a con centro en el origen (vea figura 3). El punto está en $A(a, 0)$ cuando $t = 0$, en $(0, a)$ cuando $t = \pi/2$, en $(-a, 0)$ cuando $t = \pi$, en $(0, -a)$ cuando $t = 3\pi/2$ y de nuevo en $A(a, 0)$ cuando $t = 2\pi$. Así, P se mueve alrededor de C en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj, haciendo una revolución cada 2π unidades de tiempo. La orientación de C está indicada por puntas de flecha en la figura 3.

Note que en este ejemplo podemos interpretar t geométricamente como la medida en radianes del ángulo generado por el segmento de recta OP. ■

Valores de seno y coseno en la circunferencia unitaria

Para completar el último ejemplo, se pueden usar ecuaciones paramétricas como ayuda para conocer y recordar valores de las funciones seno y coseno. Ponga la calculadora en los siguientes modos: Degree (grados), Par(amétrico) y Dot (punto). Haga las asignaciones de función cos(T) a X_{1T} y sen(T) a Y_{1T}. A continuación asigne 0 a Tmín, 360 a Tmáx y 15 a Tstep. Grafique en la ventana $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. El uso del comando trace (trazar) y las teclas del cursor deja ver numerosos valores conocidos acerca de la circunferencia unitaria.



EJEMPLO 4 **Trazar la gráfica de una curva parametrizada**

Trace la gráfica de la curva C que tiene la parametrización

$$x = -2 + t^2, \quad y = 1 + 2t^2; \quad t \text{ en } \mathbb{R},$$

e indique la orientación.

SOLUCIÓN Para eliminar el parámetro, usamos la ecuación x para obtener $t^2 = x + 2$ y luego sustituimos por t^2 en la ecuación y. Entonces,

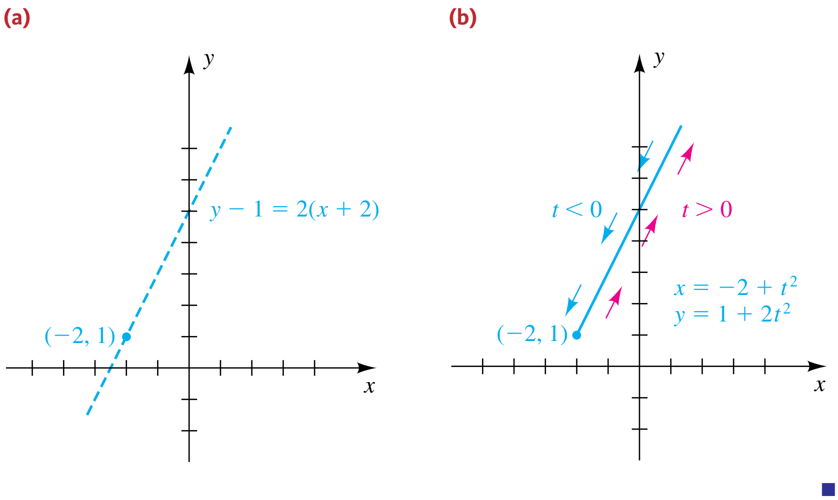
$$y = 1 + 2(x + 2).$$

La gráfica de la última ecuación es la recta de pendiente 2 que pasa por el punto $(-2, 1)$, como está indicado por la línea interrumpida de la figura 4(a) en la página siguiente. No obstante, como $t^2 \geq 0$, vemos de las ecuaciones paramétricas para C que

$$x = -2 + t^2 \geq -2 \quad \text{y} \quad y = 1 + 2t^2 \geq 1.$$

Entonces, la gráfica de C es la parte de la recta a la derecha de $(-2, 1)$ (el punto correspondiente a $t = 0$), como se muestra en la figura 4(b). La orientación está indicada por las flechas a lo largo de C. A medida que t aumenta en el intervalo $(-\infty, 0]$, $P(x, y)$ baja la curva hacia el punto $(-2, 1)$. Cuando t aumenta en $[0, \infty)$, $P(x, y)$ sube la curva alejándola de $(-2, 1)$.

FIGURA 4



Si una curva C es descrita por una ecuación $y = f(x)$ para alguna función f, entonces una forma fácil de obtener ecuaciones paramétricas para C es hacer

$$x = t, \quad y = f(t),$$

donde t está en el dominio de f. Por ejemplo, si $y = x^3$, entonces las ecuaciones paramétricas son

$$x = t, \quad y = t^3; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Podemos usar muchas sustituciones diferentes por x, siempre que cuando t varíe en algún intervalo, t tome todo valor del dominio de f. Entonces, la gráfica de $y = x^3$ está dada también por

$$x = t^{1/3}, \quad y = t; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Note, sin embargo, que las ecuaciones paramétricas

$$x = \text{sen}\, t, \quad y = \text{sen}^3\, t; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$$

dan sólo esa parte de la gráfica de $y = x^3$ entre los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

EJEMPLO 5 **Hallar ecuaciones paramétricas para una recta**

Hállense tres parametrizaciones para la recta de pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1).

SOLUCIÓN Por la forma de punto-pendiente, una ecuación para la recta es

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad (*)$$

Si hacemos $x = t$, entonces $y - y_1 = m(t - x_1)$ y obtenemos la parametrización

$$x = t, \quad y = y_1 + m(t - x_1); \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Obtenemos otra parametrización para la recta si hacemos $x - x_1 = t$ en $(*)$. En este caso $y - y_1 = mt$ y tenemos

$$x = x_1 + t, \quad y = y_1 + mt; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Como tercera ilustración, si hacemos $x - x_1 = \tan t$ en $(*)$, entonces

$$x = x_1 + \tan t, \quad y = y_1 + m \tan t; \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Hay muchas otras parametrizaciones para la recta. ■

En el siguiente ejemplo usamos ecuaciones paramétricas para modelar la trayectoria de un proyectil (objeto). Estas ecuaciones se desarrollan por medio de métodos de física y cálculo. Suponemos que el cuerpo se mueve cerca de la superficie de la Tierra bajo la influencia sólo de la gravedad; esto es, la resistencia del aire y otras fuerzas que pudieran afectar la aceleración son insignificantes. También suponemos que el suelo está nivelado y que la curvatura de la Tierra no es un factor para determinar la trayectoria del cuerpo.

EJEMPLO 6 **Trayectoria de un proyectil**

La trayectoria de un proyectil en el tiempo t se puede modelar usando las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = (s \cos \alpha)t, \quad y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (s \,\text{sen}\, \alpha)t + h; \quad t \geq 0, \qquad \textbf{(1)}$$

donde, en $t = 0$, s es la velocidad del proyectil en pies/s, α es el ángulo que la trayectoria forma con la horizontal y h está en pies. La aceleración debida a la gravedad es $g = 32$ pies/s^2. Suponga que el proyectil es disparado a una rapidez de 1024 pies/s a un ángulo de 30° de la horizontal desde una altura de 2304 pies (vea la figura 5 en la página siguiente).

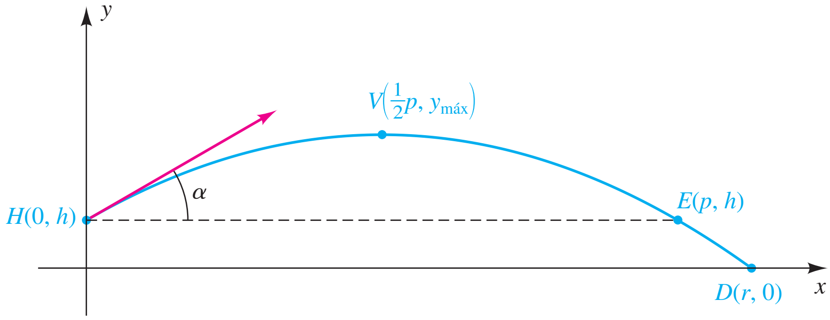
(a) Encuentre ecuaciones paramétricas para el proyectil.

(b) Encuentre el alcance r del proyectil, es decir, la distancia horizontal que recorre antes de llegar al suelo.

(c) Encuentre una ecuación con x y y para el proyectil.

(d) Encuentre el punto y tiempo en los que el proyectil alcanza su máxima altitud.

FIGURA 5



SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo 1024 por s, 30° por α, 32 por g y 2304 por h en las ecuaciones paramétricas en (1), tendremos

$$x = (1024 \cos 30°)t, \quad y = -\tfrac{1}{2}(32)t^2 + (1024 \text{ sen } 30°)t + 2304; \quad t \geq 0.$$

La simplificación dará

$$x = 512\sqrt{3}\,t, \quad y = -16t^2 + 512t + 2304; \quad t \geq 0. \qquad \textbf{(2)}$$

(b) Para hallar el alcance r del proyectil, debemos hallar el punto D de la figura 5 en el que el proyectil cae al suelo. Como la coordenada y de D es 0, hacemos $y = 0$ en la ecuación y de (2) y despejamos t:

$$\begin{aligned} y &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{enunciado en (2)} \\ 0 &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{sea } y = 0 \\ 0 &= t^2 - 32t - 144 && \text{divida entre } -16 \\ 0 &= (t - 36)(t + 4) && \text{factorice} \end{aligned}$$

Como $t \geq 0$, debemos tener $t = 36$ segundos. Ahora podemos usar la ecuación x en (2) para obtener el alcance:

$$x = 512\sqrt{3}\,t = 512\sqrt{3}(36) = 18{,}432\sqrt{3} \approx 31{,}925 \text{ pies}$$

(c) Para eliminar el parámetro t, de la ecuación x en (2) despejamos t y sustituimos esta expresión por t en la ecuación y en (2):

$$\begin{aligned} x &= 512\sqrt{3}\,t \quad \text{implica} \quad t = \frac{x}{512\sqrt{3}} && \text{de la ecuación } x \text{ en (2) despeje } t \\ y &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{ecuación } y \text{ en (2)} \\ y &= -16\left(\frac{x}{512\sqrt{3}}\right)^2 + 512\left(\frac{x}{512\sqrt{3}}\right) + 2304 && \text{sea } t = \frac{x}{512\sqrt{3}} \\ y &= -\frac{1}{49{,}152}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2304 && \text{simplifique} \qquad \textbf{(3)} \end{aligned}$$

La última ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, que muestra que la trayectoria del proyectil es parabólica.

(d) La coordenada y del punto E en la figura 5 es 2304, de modo que podemos hallar el valor de t en E al resolver la ecuación $y = 2304$:

$$\begin{aligned} y &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{enunciado en (2)} \\ 2304 &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{sea } y = 2304 \\ 0 &= -16t^2 + 512t && \text{reste 2304} \\ 0 &= -16t(t - 32) && \text{factorice} \end{aligned}$$

Entonces, si $y = 2304$, $t = 0$ o $t = 32$. Como la trayectoria es parabólica, la coordenada x de V es la mitad de la coordenada p en x de E. También, el valor de t en V es la mitad del valor de t en E, así $t = \frac{1}{2}(32) = 16$ en V. Podemos hallar los valores x y y en V al sustituir 16 por t en (2):

$$x = 512\sqrt{3}\,t = 512\sqrt{3}(16) = 8192\sqrt{3} \approx 14{,}189 \text{ pies}$$

y

$$y = -16t^2 + 512t + 2304 = -16(16)^2 + 512(16) + 2304 = 6400 \text{ pies}$$

Así, el proyectil alcanza su máxima altitud cuando $t = 16$ a aproximadamente (14, 189, 6400).

Una forma alternativa de hallar la máxima altitud es usar el teorema para localizar el vértice de una parábola para hallar el valor x ($x = -b/(2a)$) del punto más alto en la gráfica de la ecuación (3) y luego usar las ecuaciones en (2) para hallar t y y. ■

Vea en los ejercicios de análisis 7 y 8, al final del capítulo, problemas relacionados que se refieren al ejemplo 6.

Ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = a \text{ sen } \omega_1 t, \quad y = b \cos \omega_2 t; \quad t \geq 0,$$

donde a, b, ω_1 y ω_2 son constantes, se presentan en teoría eléctrica. Las variables x y y por lo general representan voltajes o corrientes en el tiempo t. La curva resultante es a veces difícil de trazar; pero, usando un osciloscopio y aplicando voltajes o corrientes en las terminales de entrada, podemos representar la gráfica, una **figura de Lissajous,** en la pantalla del osciloscopio. Las calculadoras de gráficas son muy útiles para obtener estas complicadas gráficas.

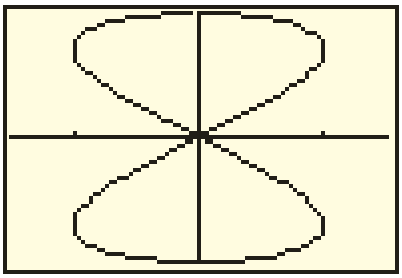
EJEMPLO 7 **Graficar una figura de Lissajous**

Trace la gráfica de la figura de Lissajous que tiene la parametrización

$$x = \text{sen } 2t, \quad y = \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Determine los valores de t que correspondan a la curva en cada cuadrante.

FIGURA 6
$[-1.5, 1.5]$ por $[-1, 1]$



SOLUCIÓN Primero necesitamos poner nuestra calculadora de gráficas en modo paramétrico. A continuación hacemos las asignaciones

$$X_{1T} = \text{sen } 2t \qquad \text{y} \qquad Y_{1T} = \cos t.$$

Para este ejemplo, usamos Tmín = 0, Tmáx = 2π y Tstep = 0.1. Como x y y están entre -1 y 1, asignaremos -1 a Ymín y 1 a Ymáx. Para conservar nuestra proporción de pantalla en 3:2, seleccionamos -1.5 para Xmín y 1.5 para Xmáx y entonces graficamos X_{1T} y Y_{1T} para obtener la figura de Lissajous de la figura 6.

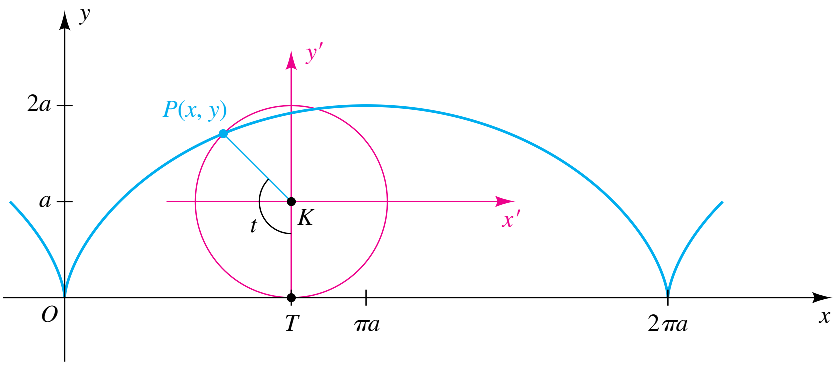
Al consultar las ecuaciones paramétricas vemos que cuando t aumenta de 0 a $\pi/2$, el punto $P(x, y)$ empieza en (0, 1) y traza la parte de la curva en el primer cuadrante (por lo general en la dirección de giro de las manecillas del reloj). Cuando t aumenta de $\pi/2$ a π, $P(x, y)$ traza la parte en el tercer cuadrante (en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj). Para $\pi < t < 3\pi/2$, obtenemos la parte en el cuarto cuadrante; y $3\pi/2 < t < 2\pi$ nos da la parte en el segundo cuadrante. ■

EJEMPLO 8 **Hallar ecuaciones paramétricas para una cicloide**

La curva trazada por un punto fijo P en la circunferencia de un círculo cuando el círculo gira a lo largo de una recta en un plano se denomina **cicloide**. Encuentre ecuaciones paramétricas para una cicloide.

SOLUCIÓN Suponga que el círculo tiene radio a y que gira a lo largo (y arriba) del eje x en la dirección positiva. Si una posición de P es el origen, entonces la figura 7 describe parte de la curva y una posición posible del círculo. La parte de la curva en forma de V en $x = 2\pi a$ se llama **cúspide.**

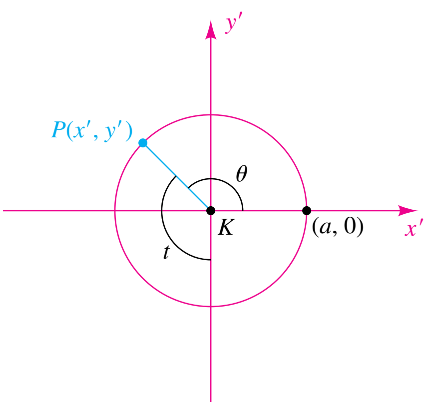
FIGURA 7



Denotemos con K el centro del círculo y en T el punto de tangencia con el eje x. Introducimos, como parámetro t, la medida en radianes del ángulo TKP. La distancia que el círculo ha girado es $d(O, T) = at$ (fórmula para la longitud de un arco circular). En consecuencia, las coordenadas de K son $(x, y) = (at, a)$. Si consideramos un sistema de coordenadas $x'y'$ con origen en $K(at, a)$ y si $P(x', y')$ denota el punto P con respecto a este sistema, entonces, al sumar x' y y' a las coordenadas x y y de K, obtenemos

$$x = at + x', \qquad y = a + y'.$$

FIGURA 8



Si, como en la figura 8, θ denota un ángulo en posición estándar en el plano $x'y'$, entonces $\theta + t = 3\pi/2$ o bien, lo que es equivalente, $\theta = (3\pi/2) - t$. En consecuencia,

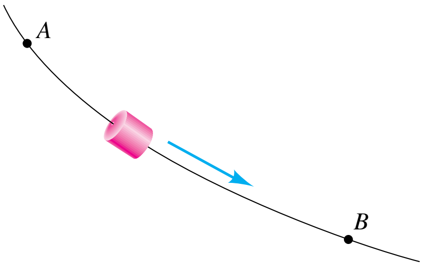
$$x' = a\cos\theta = a\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -a \operatorname{sen} t$$

$$y' = a \operatorname{sen}\theta = a \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -a\cos t,$$

y la sustitución en $x = at + x'$, $y = a + y'$ nos da ecuaciones paramétricas para la cicloide:

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t); \quad t \text{ en } \mathbb{R}$$ ■

FIGURA 9



Si $a < 0$, entonces la gráfica de $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ es la cicloide invertida que resulta si el círculo del ejemplo 8 gira *abajo* del eje x. Esta curva tiene varias propiedades físicas importantes. Para ilustrar, suponga que un alambre delgado pasa por dos puntos fijos A y B, como se ve en la figura 9 y que la forma del alambre se puede cambiar al doblarlo en cualquier forma. Suponga además que se permite que una cuentecilla se deslice por el alambre y que la única fuerza que actúa sobre ella es la gravedad. Ahora preguntamos cuál de todas las trayectorias posibles permitirá que la cuentecilla se deslice de A a B en el mínimo tiempo. Es natural pensar que la trayectoria deseada es el segmento de recta de A a B, pero ésta no es la respuesta correcta. La trayectoria que requiere el menor tiempo coincide con la gráfica de una cicloide invertida con A en el origen. Como la velocidad de la cuentecilla aumenta con más rapidez a lo largo de la cicloide que de la recta que pasa por A y B, la cuentecilla llega a B con más rapidez aun cuando la distancia sea mayor.

Hay otra propiedad interesante de esta **curva de mínimo descenso.** Suponga que A es el origen y B es el punto con coordenada x de $\pi|a|$, es decir, el punto más bajo en la cicloide en el primer arco a la derecha de A. Si la cuentecilla se suelta en *cualquier* punto entre A y B, se puede demostrar que el *tiempo* necesario para que llegue a B es siempre *el mismo.*

Ocurren variaciones de la cicloide en aplicaciones. Por ejemplo, si la rueda de una motocicleta gira en un camino recto, entonces la curva trazada por un punto fijo en uno de los rayos es una curva semejante a una cicloide. En este caso la curva no tiene cúspides ni se cruza con el camino (el eje x) como lo cruza la gráfica de una cicloide. Si la rueda de un tren gira en una vía de ferrocarril, entonces la curva trazada por un punto fijo en la circunferencia de la rueda (que se prolonga bajo la vía) contiene lazos a intervalos regulares. Otras cicloides se definen en los ejercicios 53 y 54.

11.4 Ejercicios

Ejer. 1–30: Encuentre la ecuación en x y y cuya gráfica contenga los puntos sobre la curva C. Trace la gráfica de C e indique la orientación.

1 $x = t - 2$, $\quad y = 2t + 3$; $\quad 0 \le t \le 5$

2 $x = 1 - 2t$, $\quad y = 1 + t$; $\quad -1 \le t \le 4$

3 $x = t^2 + 1$, $\quad y = t^2 - 1$; $\quad -2 \le t \le 2$

4 $x = t^3 + 1$, $\quad y = t^3 - 1$; $\quad -2 \le t \le 2$

5 $x = 4t^2 - 5$, $\quad y = 2t + 3$; $\quad t$ en $\mathbb{R}$

6 $x = 1 - 9t^2$, $\quad y = 3t + 1$; $\quad t$ en $\mathbb{R}$

7 $x = t^6 - 5$, $\quad y = t^3$; $\quad t \ge -1$

8 $x = \sqrt{t}$, $\quad y = 3t + 4$; $\quad t \ge 0$

9 $x = 4 \cos t + 1$, $\quad y = 3 \operatorname{sen} t$; $\quad 0 \le t \le 2\pi$

10 $x = 2 \operatorname{sen} t$, $\quad y = 3 \cos t$; $\quad 0 \le t \le 2\pi$

11 $x = 2 - 3 \operatorname{sen} t$, $\quad y = -1 - 3 \cos t$; $\quad 0 \le t \le 2\pi$

12 $x = \cos t - 2$, $\quad y = \operatorname{sen} t + 3$; $\quad 0 \le t \le 2\pi$

13 $x = \sec t$, $\quad y = \tan t$; $\quad -\pi/2 < t < \pi/2$

14 $x = \csc t$, $\quad y = \cot t$; $\quad -\pi < t < 0$

15 $x = \cos 2t$, $\quad y = \operatorname{sen} t$; $\quad -\pi \le t \le \pi$

16 $x = \cos t$, $\quad y = \cos 2t$; $\quad -\pi \le t \le \pi$

17 $x = t^2$, $\quad y = 2 \ln t$; $\quad t > 0$

18 $x = \cos^3 t$, $\quad y = \operatorname{sen}^3 t$; $\quad 0 \le t \le 2\pi$

19 $x = \text{sen } t$, $y = \csc t$; $0 < t \leq \pi/2$

20 $x = e^t$, $y = e^{-t}$; t en $\mathbb{R}$

21 $x = t$, $y = \sqrt{t^2 - 1}$; $|t| \geq 1$

22 $x = -\sqrt{t^2 - 1}$, $y = t$; $|t| \geq 1$

23 $x = -2\sqrt{1 - t^2}$, $y = t$; $|t| \leq 1$

24 $x = \frac{6}{5}\sqrt{25 - t^2}$, $y = t$; $|t| \leq 5$

25 $x = t$, $y = \sqrt{t^2 - 2t + 1}$; $0 \leq t \leq 4$

26 $x = 2t$, $y = 8t^3$; $-1 \leq t \leq 1$

27 $x = (t + 1)^3$, $y = (t + 2)^2$; $0 \leq t \leq 2$

28 $x = t^3$, $y = t^2$; t en $\mathbb{R}$

29 $x = e^t$, $y = e^{-2t}$; t en $\mathbb{R}$

30 $x = \tan t$, $y = 1$; $-\pi/2 < t < \pi/2$

31 (a) Describa la gráfica de una curva C que tiene la parametrización

$$x = 3 + 2 \text{ sen } t,\ y = -2 + 2 \cos t;\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(b) Cambie la parametrización a

$$x = 3 - 2 \text{ sen } t,\ y = -2 + 2 \cos t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describa cómo cambia la gráfica del inciso (a).

(c) Cambie la parametrización a

$$x = 3 - 2 \text{ sen } t,\ y = -2 - 2 \cos t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describa cómo cambia la gráfica del inciso (a).

32 (a) Describa la gráfica de una curva C que tiene la parametrización

$$x = -2 + 3 \text{ sen } t,\ y = 3 - 3 \cos t;\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(b) Cambie la parametrización a

$$x = -2 - 3 \text{ sen } t,\ y = 3 + 3 \cos t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describa cómo cambia la gráfica del inciso (a).

(c) Cambie la parametrización a

$$x = -2 + 3 \text{ sen } t,\ y = 3 + 3 \cos t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describa cómo cambia la gráfica del inciso (a).

Ejer. 33–34: Las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 están dadas paramétricamente, para t en $\mathbb{R}$. Trace sus gráficas e indique orientaciones.

33 C_1: $x = t^2$, $y = t$
C_2: $x = t^4$, $y = t^2$
C_3: $x = \text{sen}^2\, t$, $y = \text{sen } t$
C_4: $x = e^{2t}$, $y = -e^t$

34 C_1: $x = t$, $y = 1 - t$
C_2: $x = 1 - t^2$, $y = t^2$
C_3: $x = \cos^2 t$, $y = \text{sen}^2\, t$
C_4: $x = \ln t - t$, $y = 1 + t - \ln t$; $t > 0$

Ejer. 35–36: Las ecuaciones paramétricas especifican la posición de un punto en movimiento $P(x, y)$ en el tiempo t. Trace la gráfica e indique el movimiento de P cuando t aumenta.

35 (a) $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$; $0 \leq t \leq \pi$

(b) $x = \text{sen } t$, $y = \cos t$; $0 \leq t \leq \pi$

(c) $x = t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$; $-1 \leq t \leq 1$

36 (a) $x = t^2$, $y = 1 - t^2$; $0 \leq t \leq 1$

(b) $x = 1 - \ln t$, $y = \ln t$; $1 \leq t \leq e$

(c) $x = \cos^2 t$, $y = \text{sen}^2\, t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

37 Demuestre que

$$x = a \cos t + h,\quad y = b \text{ sen } t + k;\quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

son ecuaciones paramétricas de una elipse con centro (h, k) y ejes de longitudes $2a$ y $2b$.

38 Demuestre que

$$x = a \sec t + h,\quad y = b \tan t + k;\quad -\pi/2 < t < 3\pi/2 \text{ y } t \neq \pi/2$$

son ecuaciones paramétricas de una hipérbola con centro (h, k), eje transversal de longitud $2a$ y eje conjugado de longitud $2b$. Determine los valores de t para cada rama.

Ejer. 39–40: (a) Encuentre tres parametrizaciones que den la misma gráfica que la ecuación dada. (b) Encuentre tres parametrizaciones que den sólo una parte de la gráfica de la ecuación dada.

39 $y = x^2$

40 $y = \ln x$

Ejer. 41–44: Consulte las ecuaciones en (1) del ejemplo 6. Encuentre el alcance y la altitud máxima para los valores dados.

41 $s = 256\sqrt{3}$, $\alpha = 60°$, $h = 400$

42 $s = 512\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$, $h = 1088$

43 $s = 704$, $\alpha = 45°$, $h = 0$

44 $s = 2448$, $\alpha = 30°$, $h = 0$

45 Consulte el ejemplo 7.

(a) Describa la figura de Lissajous dada por $f(t) = a \text{ sen } \omega t$ y $g(t) = b \cos \omega t$ para $t \geq 0$ y $a \neq b$.

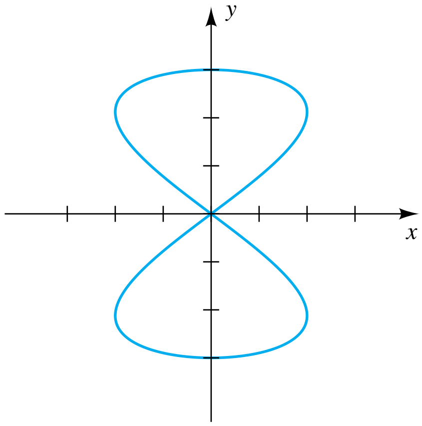
(b) Suponga que $f(t) = a \text{ sen } \omega_1 t$ y $g(t) = b \text{ sen } \omega_2 t$, donde ω_1 y ω_2 son números racionales positivos, y escriba ω_2/ω_1 como m/n para enteros positivos m y n. Demuestre que si $p = 2\pi n/\omega_1$, entonces $f(t + p) = f(t)$ y $g(t + p) = g(t)$. Concluya que la curva se traza de nuevo a sí misma cada p unidades de tiempo.

46 Abajo se observa la figura de Lissajous dada por

$$x = 2 \text{ sen } 3t, \quad y = 3 \text{ sen } 1.5t; \quad t \geq 0.$$

Encuentre el periodo de la figura, es decir, la duración del intervalo de t más pequeño que trace la curva.

EJERCICIO 46



Ejer. 47–50: Las figuras de Lissajous se usan en el estudio de circuitos eléctricos para determinar la diferencia de fase ϕ entre un voltaje conocido $V_1(t) = A$ sen (ωt) y un voltaje desconocido $V_2(t) = B$ sen $(\omega t + \phi)$ que tiene la misma frecuencia. Los voltajes se grafican paramétricamente como $x = V_1(t)$ y $y = V_2(t)$. Si ϕ es agudo, entonces

$$\phi = \text{sen}^{-1} \frac{y_{\text{int}}}{y_{\text{máx}}},$$

donde y_{int} es el punto de intersección con el eje y no negativo y $y_{\text{máx}}$ es el valor y máximo sobre la curva.

(a) Grafique la curva paramétrica $x = V_1(t)$ y $y = V_2(t)$ para el intervalo especificado de t.

(b) Use la gráfica para calcular ϕ en grados.

47 $V_1(t) = 3 \text{ sen } (240\pi t), \quad V_2(t) = 4 \text{ sen } (240\pi t); \quad 0 \leq t \leq 0.01$

48 $V_1(t) = 6 \text{ sen } (120\pi t), \quad V_2(t) = 5 \cos (120\pi t); \quad 0 \leq t \leq 0.02$

49 $V_1(t) = 80 \text{ sen } (60\pi t), \quad V_2(t) = 70 \cos (60\pi t - \pi/3); \quad 0 \leq t \leq 0.035$

50 $V_1(t) = 163 \text{ sen } (120\pi t), \quad V_2(t) = 163 \text{ sen } (120\pi t + \pi/4); \quad 0 \leq t \leq 0.02$

Ejer. 51–52: Grafique la figura de Lissajous en la pantalla $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ para el intervalo especificado de t.

51 $x(t) = \text{sen } (6\pi t), \quad y(t) = \cos (5\pi t); \quad 0 \leq t \leq 2$

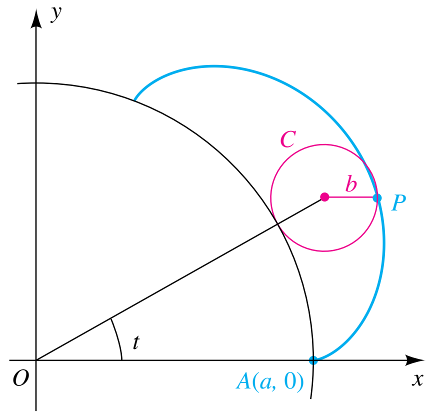
52 $x(t) = \text{sen } (4t), \quad y(t) = \text{sen } (3t + \pi/6); \quad 0 \leq t \leq 6.5$

53 Un círculo C de radio b gira en el exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y $b < a$. Sea P un punto fijo en C y la posición inicial de P sea $A(a, 0)$, como se ve en la figura. Si el parámetro t es el ángulo desde el eje x positivo al segmento de recta que va de O al centro de C, demuestre que las ecuaciones paramétricas para la curva trazada por P (una *epicicloide*) son

$$x = (a + b) \cos t - b \cos \left(\frac{a + b}{b} t\right),$$

$$y = (a + b) \text{ sen } t - b \text{ sen } \left(\frac{a + b}{b} t\right); \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

EJERCICIO 53



54 Si el círculo C del ejercicio 53 gira en el interior del segundo círculo (vea la figura), entonces la curva trazada por P es una *hipocicloide*.

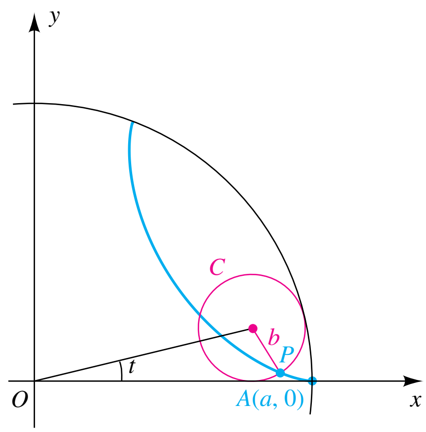
(a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva son

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \left(\frac{a - b}{b} t\right),$$

$$y = (a - b) \text{ sen } t - b \text{ sen } \left(\frac{a - b}{b} t\right); \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(b) Si $b = \frac{1}{4}a$, demuestre que $x = a \cos^3 t$, $y = a \text{ sen}^3 t$ y trace la gráfica.

EJERCICIO 54



55 Si $b = \frac{1}{3}a$ en el ejercicio 53, encuentre ecuaciones paramétricas para la epicicloide y trace la gráfica.

56 El radio del círculo B es un tercio del que tiene el círculo A. ¿Cuántas revoluciones hará el círculo B cuando ruede alrededor del círculo A hasta llegar a su punto de partida? (*Sugerencia:* use el ejercicio 49.)

Ejer. 57–60: Grafique la curva.

57 $x = 3\ \text{sen}^5\ t, \quad y = 3\cos^5 t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

58 $x = 8\cos t - 2\cos 4t,$
$y = 8\ \text{sen}\ t - 2\ \text{sen}\ 4t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

59 $x = 3t - 2\ \text{sen}\ t, \quad y = 3 - 2\cos t; \quad -8 \le t \le 8$

60 $x = 2t - 3\ \text{sen}\ t, \quad y = 2 - 3\cos t; \quad -8 \le t \le 8$

Ejer. 61–64: Grafique las curvas dadas en el mismo plano de coordenadas y describa la forma de la figura resultante.

61 C_1: $x = 2\ \text{sen}\ 3t, \quad y = 3\cos 2t; \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

C_2: $x = \frac{1}{4}\cos t + \frac{3}{4}, \quad y = \frac{1}{4}\ \text{sen}\ t + \frac{3}{2}; \quad 0 \le t \le 2\pi$

C_3: $x = \frac{1}{4}\cos t - \frac{3}{4}, \quad y = \frac{1}{4}\ \text{sen}\ t + \frac{3}{2}; \quad 0 \le t \le 2\pi$

C_4: $x = \frac{3}{4}\cos t, \quad y = \frac{1}{4}\ \text{sen}\ t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

C_5: $x = \frac{1}{4}\cos t, \quad y = \frac{1}{8}\ \text{sen}\ t + \frac{3}{4}; \quad \pi \le t \le 2\pi$

62 C_1: $x = \frac{3}{2}\cos t + 1, \quad y = \text{sen}\ t - 1; \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

C_2: $x = \frac{3}{2}\cos t + 1, \quad y = \text{sen}\ t + 1; \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

C_3: $x = 1, \quad y = 2\tan t; \quad -\pi/4 \le t \le \pi/4$

63 C_1: $x = \tan t, \quad y = 3\tan t; \quad 0 \le t \le \pi/4$

C_2: $x = 1 + \tan t, \quad y = 3 - 3\tan t; \quad 0 \le t \le \pi/4$

C_3: $x = \frac{1}{2} + \tan t, \quad y = \frac{3}{2}; \quad 0 \le t \le \pi/4$

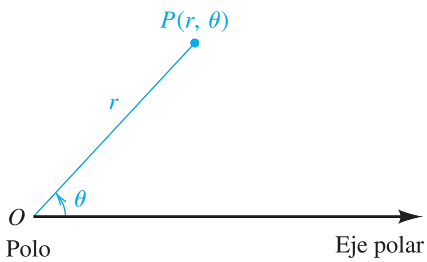
64 C_1: $x = 1 + \cos t, \quad y = 1 + \text{sen}\ t; \quad \pi/3 \le t \le 2\pi$

C_2: $x = 1 + \tan t, \quad y = 1; \quad 0 \le t \le \pi/4$

11.5 Coordenadas polares

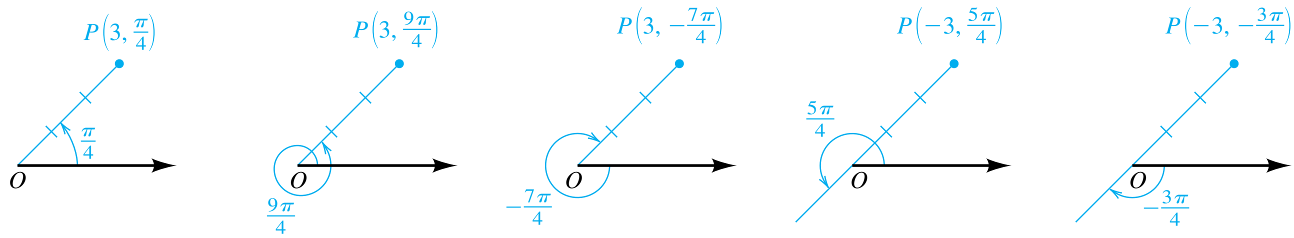
En un sistema de coordenadas rectangulares, el par ordenado (a, b) denota el punto cuyas distancias dirigidas desde los ejes x y y son b y a, respectivamente. Otro método para representar puntos es usar *coordenadas polares*. Empezamos con un punto fijo O (el **origen**, o **polo**) y una semirrecta dirigida (el **eje polar**) con punto extremo O. A continuación consideramos cualquier punto P en el plano diferente de O. Si, como se ilustra en la figura 1, $r = d(O, P)$ y θ denota la medida de cualquier ángulo determinado por el eje polar y OP, entonces r y θ son **coordenadas polares** de P y los símbolos (r, θ) o $P(r, \theta)$ se usan para denotar P. Como de costumbre, θ es considerado positivo si el ángulo es generado por una rotación del eje polar en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj y negativo si la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. Se pueden usar medidas en radianes o en grados para θ.

FIGURA 1



Las coordenadas polares de un punto no son únicas. Por ejemplo, $(3, \pi/4)$, $(3, 9\pi/4)$ y $(3, -7\pi/4)$ todas representan el mismo punto (vea la figura 2). También dejaremos que r sea negativa. En este caso, en lugar de medir $|r|$ unidades a lo largo del lado terminal del ángulo θ, medimos a lo largo de la semirrecta con punto extremo O que tiene dirección *opuesta* a la del lado terminal. Los puntos correspondientes a los pares $(-3, 5\pi/4)$ y $(-3, -3\pi/4)$ se localizan también en la figura 2.

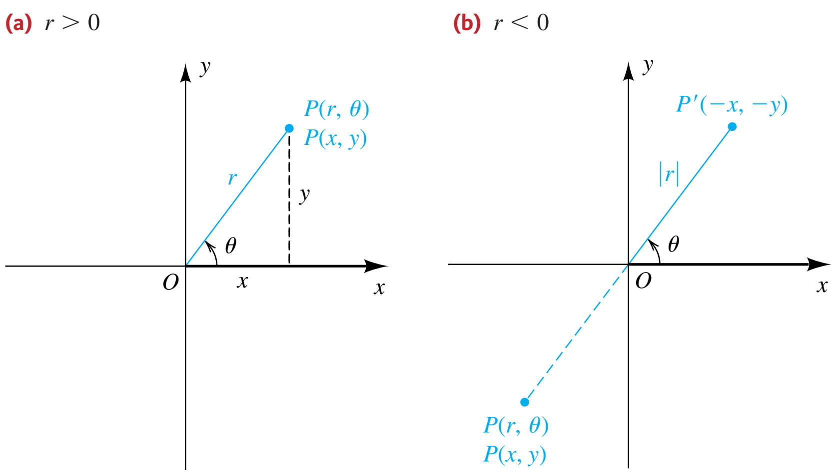
FIGURA 2



Convenimos en que el polo O tiene coordenadas polares $(0, \theta)$ para *cualquier* θ. Una asignación de pares ordenados de la forma (r, θ) a puntos en un plano es un **sistema de coordenadas polares** y el plano es un **plano $r\theta$.**

A continuación superponemos un plano xy sobre un plano $r\theta$ de modo que el eje x positivo coincida con el eje polar. A cualquier punto P en el plano se le pueden asignar entonces coordenadas rectangulares (x, y) o coordenadas polares (r, θ). Si $r > 0$, tenemos una situación semejante a la ilustrada en la figura 3(a); si $r < 0$, tenemos la que se muestra en el inciso (b) de la figura. En la figura 3(b), para fines posteriores, también hemos localizado el punto P', que tiene coordenadas polares $(|r|, \theta)$ y coordenadas rectangulares $(-x, -y)$.

FIGURA 3



El siguiente resultado especifica relaciones entre (x, y) y (r, θ), donde se supone que el eje x positivo coincide con el eje polar.

Relaciones entre coordenadas rectangulares y polares

Las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) de un punto P están relacionadas como sigue:

$$\textbf{(1)}\ \ x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\textbf{(2)}\ \ r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \ \text{ si } x \neq 0$$

DEMOSTRACIONES

(1) Aun cuando hemos representado θ como un ángulo agudo en la figura 3, la exposición que sigue es válida para todos los ángulos.

Si $r > 0$, como en la figura 3(a), entonces $\cos\theta = x/r$ y $\mathrm{sen}\,\theta = y/r$, y por tanto

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Si $r < 0$, entonces $|r| = -r$, en la figura 3(b) vemos que

$$\cos\theta = \frac{-x}{|r|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}, \qquad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{-y}{|r|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}.$$

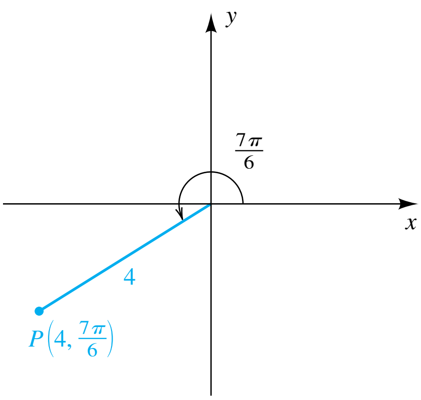
La multiplicación por r nos da la relación 1, y por lo tanto estas fórmulas se cumplen si r es positiva o negativa.

Si $r = 0$, entonces el punto es el polo y otra vez vemos que las fórmulas en (1) son verdaderas.

(2) Las fórmulas de la relación 2 se obtienen fácilmente de la figura 3(a). Por el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = r^2$. De la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, $\tan\theta = y/x$ (si $x \neq 0$). Si $x = 0$, entonces $\theta = (\pi/2) + \pi n$ para algún entero n. ■

Podemos usar el resultado precedente para cambiar de un sistema de coordenadas a otro.

FIGURA 4



EJEMPLO 1 **Cambiar coordenadas polares a coordenadas rectangulares**

Si $(r, \theta) = (4, 7\pi/6)$ son coordenadas polares de un punto P, encuentre las coordenadas rectangulares de p.

SOLUCIÓN El punto P está trazado en la figura 4. Sustituyendo $r = 4$ y $\theta = 7\pi/6$ en la relación 1 del resultado precedente, obtenemos lo siguiente:

$$x = r\cos\theta = 4\cos(7\pi/6) = 4\left(-\sqrt{3}/2\right) = -2\sqrt{3}$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 4\,\mathrm{sen}\,(7\pi/6) = 4(-1/2) = -2$$

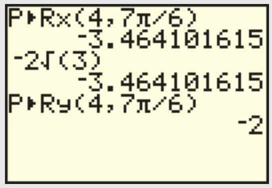
En consecuencia, las coordenadas rectangulares de P son $(x, y) = \left(-2\sqrt{3}, -2\right)$. ■

Confirmemos los resultados del ejemplo 1 en una calculadora de gráficas.

Conversión de polar a rectangular

Usamos el comando "dada polar–ejecuta *x*".

2nd ANGLE 7 4 , 7
2nd π ÷ 6) ENTER



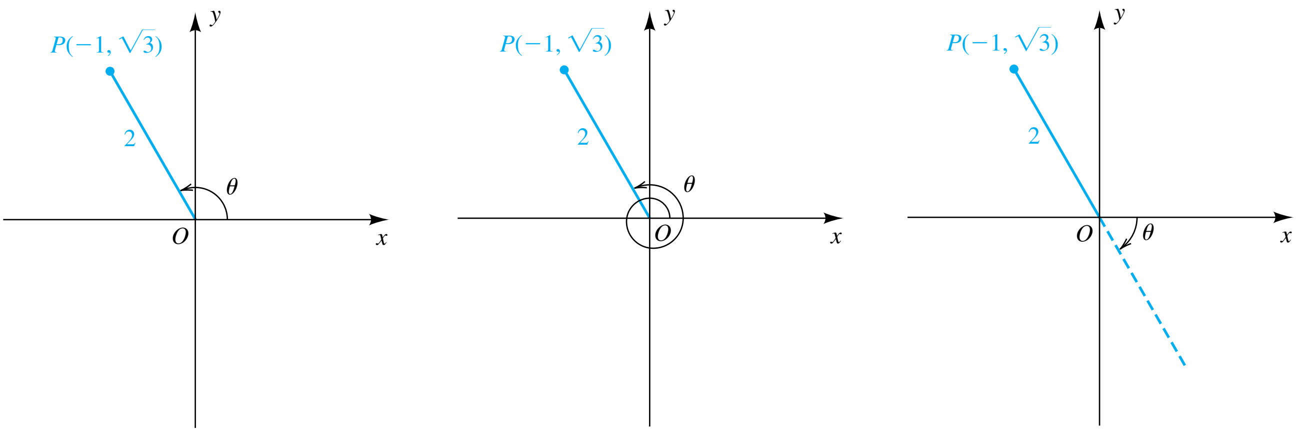
La segunda entrada, $-2\sqrt{(3)}$, confirma lo correcto del valor *x*. Ahora usamos el comando "dada polar–ejecuta *y*"

2nd ANGLE 8 4 , 7
2nd π ÷ 6) ENTER

EJEMPLO 2 **Cambiar coordenadas rectangulares a coordenadas polares**

Si $(x, y) = \left(-1, \sqrt{3}\right)$ son coordenadas rectangulares de un punto *P*, encuentre tres pares diferentes de coordenadas polares (r, θ) para *P*.

FIGURA 5
(a) **(b)** **(c)**



SOLUCIÓN En la figura 5(a)-(c) se ilustran tres posibilidades para θ. Usando $x = -1$ y $y = \sqrt{3}$ en la relación 2 entre coordenadas rectangulares y polares, obtenemos

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4,$$

y como *r* es positivo en la figura 5(a), $r = 2$. Usando

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3},$$

vemos que el ángulo de referencia para θ es $\theta_R = \pi/3$ y entonces

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

(continúa)

Así, $(2, 2\pi/3)$ es un par de coordenadas polares para P.

Al consultar la figura 5(b) y los valores obtenidos para P en la figura 5(a), obtenemos

$$r = 2 \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}.$$

En consecuencia, $(2, 8\pi/3)$ es otro par de coordenadas polares para P.

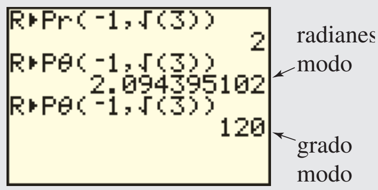
En la figura 5(c), $\theta = -\pi/3$. En este caso usamos $r = -2$ para obtener $(-2, -\pi/3)$ como tercer par de coordenadas polares para P. ■

Confirmamos el primer resultado del ejemplo 2 en una calculadora de gráficas.

Conversión rectangular a polar

Usamos el comando "dada rectangular–ejecuta r".

2nd ANGLE 5 −1 ,
2nd √ 3)) ENTER



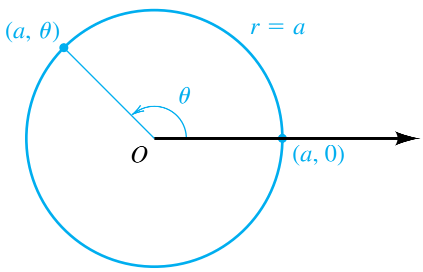
A continuación usamos el comando "dada rectangular–ejecuta θ"

2nd ANGLE 6 −1 ,
2nd √ 3)) ENTER

Para ver el último resultado en grados, cambiamos el modo de radianes a modo de grados.

MODE ▽ ▽ ▷ ENTER
2nd QUIT 2nd ENTRY ENTER

FIGURA 6

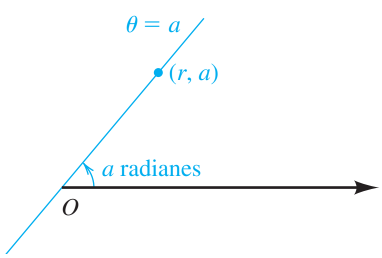


Una **ecuación polar** es una ecuación con r y θ. Una **solución** de una ecuación polar es un par ordenado (a, b) que lleva a una igualdad si a es sustituida por r y b por θ. La **gráfica** de una ecuación polar es el conjunto de todos los puntos (en un plano $r\theta$) que corresponden a las soluciones.

Las ecuaciones polares más sencillas son $r = a$ y $\theta = a$, donde a es un número real diferente de cero. Como las soluciones de la ecuación polar $r = a$ son de la forma (a, θ) para *cualquier* ángulo θ, se deduce que la gráfica es una circunferencia de radio $|a|$ con centro en el polo. Una gráfica para $a > 0$ está trazada en la figura 6. La misma gráfica se obtiene para $r = -a$.

Las soluciones de la ecuación polar $\theta = a$ son de la forma (r, a) para *cualquier* número real r. Como la coordenada a (el ángulo) es constante, la gráfica de $\theta = a$ es una recta que pasa por el origen, como se ve en la figura 7 para un ángulo agudo a.

FIGURA 7



Podemos usar las relaciones entre coordenadas rectangulares y polares para transformar una ecuación polar en una ecuación con x y y, y viceversa. Este procedimiento se ilustra en los tres ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación polar de una recta

Encuentre una ecuación polar de una recta arbitraria.

SOLUCIÓN Toda recta en un plano de coordenadas xy es la gráfica de una ecuación lineal que se puede escribir en la forma $ax + by = c$. Usando las

fórmulas $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ tendremos las siguientes ecuaciones polares equivalentes:

$$ar\cos\theta + br\,\text{sen}\,\theta = c \quad \text{sustituya por } x \text{ y } y$$
$$r(a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta) = c \quad \text{factorice } r$$

Si $a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta \neq 0$, la última ecuación se puede escribir como sigue:

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta}$$

■

EJEMPLO 4 **Cambiar una ecuación con *x* y *y* a ecuación polar**

Encuentre una ecuación polar para la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$.

SOLUCIÓN Usando las fórmulas $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, obtenemos las siguientes ecuaciones polares:

$$(r\cos\theta)^2 - (r\,\text{sen}\,\theta)^2 = 16 \quad \text{sustituya por } x \text{ y } y$$
$$r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\,\theta = 16 \quad \text{eleve al cuadrado los términos}$$
$$r^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) = 16 \quad \text{factorice } r^2$$
$$r^2\cos 2\theta = 16 \quad \text{fórmula de doble ángulo}$$
$$r^2 = \frac{16}{\cos 2\theta} \quad \text{divida entre } \cos 2\theta$$

La división entre $\cos 2\theta$ es permisible porque $\cos 2\theta \neq 0$. (Note que si $\cos 2\theta = 0$, entonces $r^2\cos 2\theta \neq 16$.) También podemos escribir la ecuación polar como $r^2 = 16\sec 2\theta$. ■

EJEMPLO 5 **Cambiar una ecuación polar a una ecuación con *x* y *y***

Encuentre una ecuación con x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r = a\,\text{sen}\,\theta$, con $a \neq 0$. Trace la gráfica.

SOLUCIÓN Una fórmula que relaciona $\text{sen}\,\theta$ y y está dada por $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Para introducir la expresión $r\,\text{sen}\,\theta$ en la ecuación $r = a\,\text{sen}\,\theta$, multiplicamos ambos lados por r y tendremos

$$r^2 = ar\,\text{sen}\,\theta.$$

A continuación, si sustituimos $x^2 + y^2$ por r^2 y y por $r\,\text{sen}\,\theta$, la última ecuación se convierte en

$$x^2 + y^2 = ay,$$

o

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

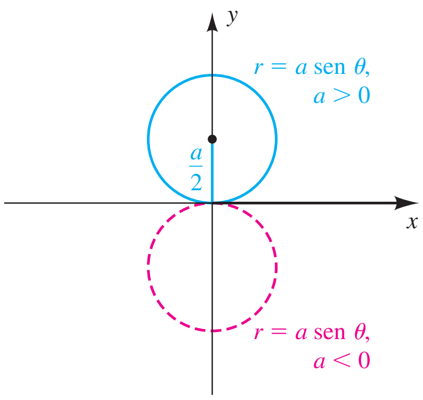
Si completamos el cuadrado en y tendremos

$$x^2 + y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

o

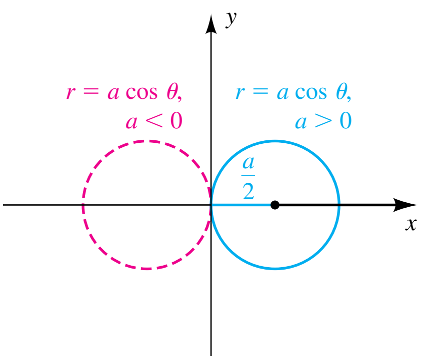
$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

FIGURA 8



En el plano xy, la gráfica de la última ecuación es una circunferencia con centro $(0, a/2)$ y radio $|a|/2$, como se ilustra en la figura 8 para el caso $a > 0$ (la circunferencia de línea continua) y $a < 0$ (la circunferencia con línea discontinua). ■

FIGURA 9



Usando el mismo método que en el ejemplo precedente, podemos demostrar que la gráfica de $r = a \cos \theta$, con $a \neq 0$, es una circunferencia de radio $a/2$ del tipo ilustrado en la figura 9.

En los ejemplos siguientes obtenemos las gráficas de ecuaciones polares al localizar puntos y examinar la relación entre intervalos θ e intervalos r. A medida que el lector avance en esta sección, debe tratar de reconocer formas de ecuaciones polares para que pueda trazar sus gráficas con sólo localizar unos cuantos puntos.

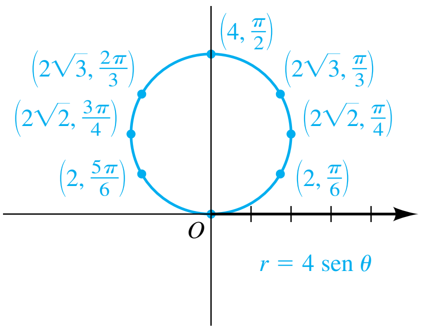
EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de una ecuación polar

Trace la gráfica de la ecuación polar $r = 4 \text{ sen } \theta$.

SOLUCIÓN La demostración de que la gráfica de $r = 4 \text{ sen } \theta$ es una circunferencia se dio en el ejemplo 5. La tabla siguiente muestra algunas soluciones de la ecuación. Hemos incluido una tercera fila en la tabla que contiene aproximaciones a r de un lugar decimal.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0
r (aprox.)	0	2	2.8	3.5	4	3.5	2.8	2	0

FIGURA 10



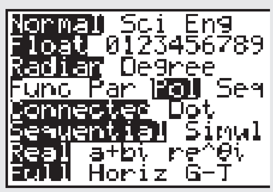
Como ayuda para localizar puntos en el plano $r\theta$ mostrado en la figura 10, hemos prolongado el eje polar en la dirección negativa e introducido una recta vertical que pasa por el polo (esta recta es la gráfica de la ecuación $\theta = \pi/2$). Otros puntos adicionales obtenidos al hacer variar θ de π a 2π se encuentran en el mismo punto que $(2, \pi/6)$; el punto correspondiente a $\left(-2\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$ es el mismo que se obtuvo a partir de $\left(2\sqrt{2}, \pi/4\right)$; etcétera. Si aumentamos θ en todos los números reales, obtenemos los mismos puntos una y otra vez debido a la periodicidad de la función seno. ■

Graficar una ecuación polar

Ahora veremos algunas funciones de coordenadas polares en una calculadora de gráficas, usando $r = 4 \text{ sen } \theta$ del ejemplo 6.

Cambiar a modo polar.

MODE ▽ (3 veces) ▷ ▷ ENTER



Hacer una asignación r.

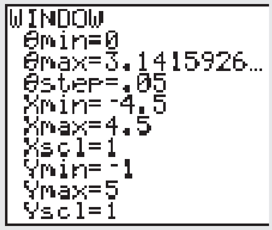
[Y=] 4 [SIN] [X,T,θ,n] [ )]



Fijar valores de ventana.

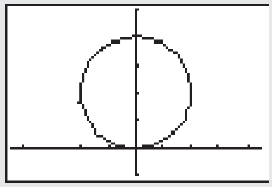
Usaremos θmín $= 0$ a θmáx $= \pi$ porque esto nos da la circunferencia. Para θstep, usaremos 0.05. Un valor más pequeño como 0.01 hace más lento el proceso de graficación, y un valor más grande como 0.5 resulta en una figura más burda.

[WINDOW] 0 [▽] [2nd] [π] [▽]
.05 [▽] −4.5 [▽] 4.5 [▽] 1 [▽]
−1 [▽] 5 [▽] 1



Graficar la función.

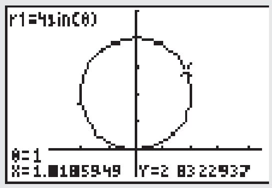
[GRAPH]



Trazar la gráfica (modo rectangular).

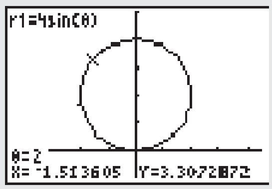
Ahora introducimos el modo trace (trazar) y usamos teclas del cursor para movernos alrededor de la circunferencia. Note que la calculadora muestra los valores θ, X y Y

[TRACE] ([▷] y [◁])



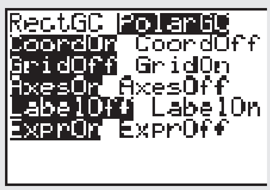
Evalúe la función para $\theta = 2$.

[2nd] [CALC] [1] 2 [ENTER]



Cambiar a coordenadas polares.

[2nd] [FORMAT] [▷] [ENTER]

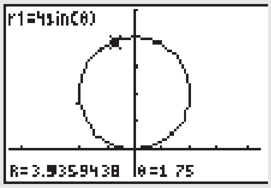


(continúa)

Trazar la gráfica (modo polar).

Ahora graficamos y trazamos la circunferencia otra vez. Note que la calculadora muestra los valores de R y θ.

GRAPH TRACE (▷ y ◁)



Crear una tabla.

A continuación examinamos la tabla de valores, poniendo TblStart en 0 y ΔTbl en $\pi/12$.

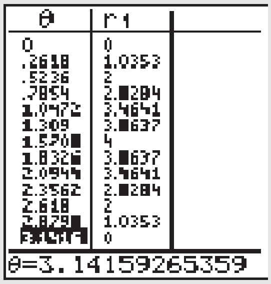
2nd TBLSET 0 ▽ 2nd π ÷ 12



Comparar tablas.

Ahora comparamos los valores de las tablas con los obtenidos en el ejemplo 6.

2nd TABLE



EJEMPLO 7 **Trazar la gráfica de una ecuación polar**

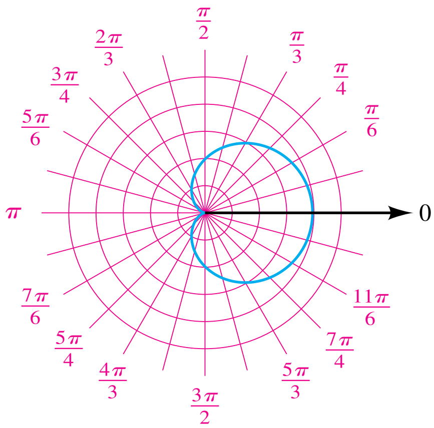
Trace la gráfica de la ecuación polar $r = 2 + 2 \cos \theta$.

SOLUCIÓN Como la función coseno disminuye de 1 a -1 cuando θ varía de 0 a π, se deduce que r disminuye de 4 a 0 en este intervalo de θ. La tabla siguiente exhibe algunas soluciones de $r = 2 + 2 \cos \theta$, junto con aproximaciones de un lugar decimal a r.

$\boldsymbol{\theta}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\boldsymbol{r}$	4	$2 + \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{2}$	3	2	1	$2 - \sqrt{2}$	$2 - \sqrt{3}$	0
$\boldsymbol{r}$ **(aprox.)**	4	3.7	3.4	3	2	1	0.6	0.3	0

Localizar puntos en un plano $r\theta$ lleva a la mitad superior de la gráfica trazada en la figura 11. (Hemos empleado papel de gráficas de coordenadas polares, que muestra líneas que pasan por O a varios ángulos y circunferencias concéntricas con centros en el polo.)

FIGURA 11

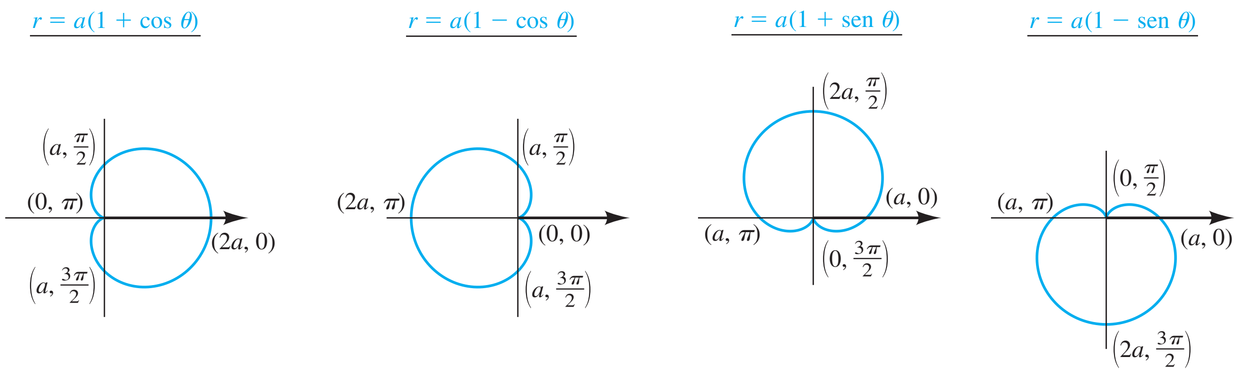


Si θ aumenta de π a 2π, entonces $\cos\theta$ aumenta de -1 a 1 y en consecuencia r aumenta de 0 a 4. Localizar puntos para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ nos da la mitad inferior de la gráfica.

Puede obtenerse la misma gráfica al tomar otros intervalos de longitud 2π para θ. ■

La gráfica en forma de corazón del ejemplo 7 es un **cardioide.** En general, la gráfica de cualquiera de las ecuaciones polares de la figura 12, con $a \neq 0$, es un cardioide.

FIGURA 12



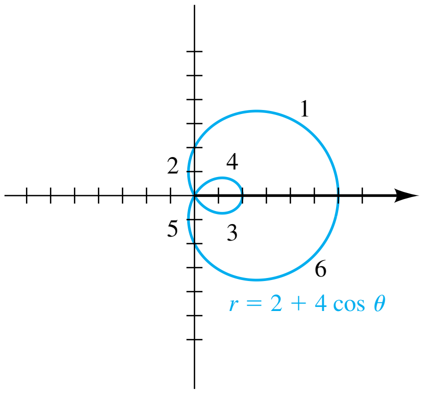
Si a y b no son cero, entonces las gráficas de las siguientes ecuaciones polares son **limaçons** (caracoles)**:**

$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a + b\operatorname{sen}\theta$$

Note que los limaçons especiales en los que $|a| = |b|$ son cardioides.

Usar el intervalo θ $[0, 2\pi]$ (o $[-\pi, \pi]$) suele ser suficiente para graficar ecuaciones polares. Para ecuaciones con gráficas más complejas, a veces es útil graficar con subintervalos de $[0, 2\pi]$ que son determinados por los valores de θ que hacen $r = 0$; es decir, los **valores polares.** Demostraremos esta técnica en el siguiente ejemplo.

FIGURA 13



EJEMPLO 8 **Trazar la gráfica de una ecuación polar**

Trace la gráfica de la ecuación polar $r = 2 + 4 \cos \theta$.

SOLUCIÓN Primero hallamos los valores polares al resolver la ecuación $r = 0$:

$$2 + 4 \cos \theta = 0 \qquad \text{sea } r = 0$$

$$\cos \theta = -\tfrac{1}{2} \qquad \text{despeje } \cos \theta$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \qquad \text{despeje } \theta \text{ en } [0, 2\pi]$$

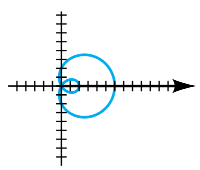
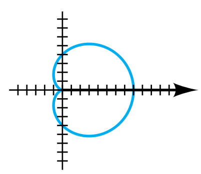
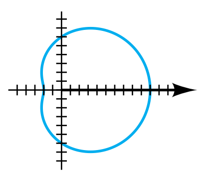
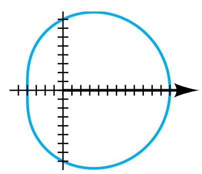
A continuación construimos una tabla de valores θ de 0 a 2π usando subintervalos determinados por los ángulos cuadrantales y los valores polares. Los números de fila en el lado izquierdo corresponden a los números en la figura 13.

	θ	$\cos \theta$	$4 \cos \theta$	$r = 2 + 4 \cos \theta$
(1)	$0 \to \pi/2$	$1 \to 0$	$4 \to 0$	$6 \to 2$
(2)	$\pi/2 \to 2\pi/3$	$0 \to -1/2$	$0 \to -2$	$2 \to 0$
(3)	$2\pi/3 \to \pi$	$-1/2 \to -1/2$	$-2 \to -4$	$0 \to -2$
(4)	$\pi \to 4\pi/3$	$-1 \to -1/2$	$-4 \to -2$	$-2 \to 0$
(5)	$4\pi/3 \to 3\pi/2$	$-1/2 \to 0$	$-2 \to 0$	$0 \to 2$
(6)	$3\pi/2 \to 2\pi$	$0 \to 1$	$0 \to 4$	$2 \to 6$

El lector debe verificar las entradas de la tabla con la figura, en especial para las filas 3 y 4 (en las que el valor de r es negativo). La gráfica se llama limaçon con un lazo interior. ■

La tabla siguiente resume las cuatro categorías de limaçones de acuerdo con la relación entre a y b en las ecuaciones generales citadas.

Limaçons $a \pm b \cos \theta$, $a \pm b$ sen θ $(a > 0, b > 0)$

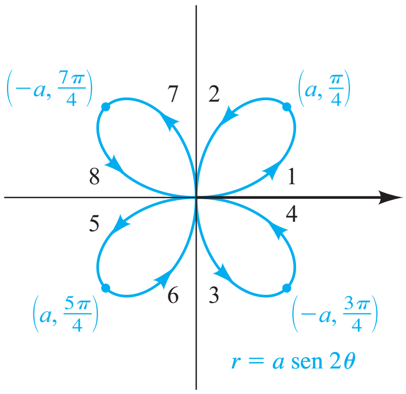
Nombre	Limaçon con un lazo interior	Cardioide	Limaçon con un rizo	Limaçon convexo
Condición	$\frac{a}{b} < 1$	$\frac{a}{b} = 1$	$1 < \frac{a}{b} < 2$	$\frac{a}{b} \geq 2$
Gráfica específica				
Ecuación específica	$r = 2 + 4 \cos \theta$	$r = 4 + 4 \cos \theta$	$r = 6 + 4 \cos \theta$	$r = 8 + 4 \cos \theta$

EJEMPLO 9 **Trazar la gráfica de una ecuación polar**

Trace la gráfica de la ecuación polar $r = a$ sen2θ parar $a > 0$.

SOLUCIÓN La tabla siguiente contiene intervalos de θ y los correspondientes valores de r. Los números de fila en el lado izquierdo corresponden a los números de la figura 14.

FIGURA 14



	θ	2θ	sen 2θ	$r = a$ sen 2θ
(1)	$0 \to \pi/4$	$0 \to \pi/2$	$0 \to 1$	$0 \to a$
(2)	$\pi/4 \to \pi/2$	$\pi/2 \to \pi$	$1 \to 0$	$a \to 0$
(3)	$\pi/2 \to 3\pi/4$	$\pi \to 3\pi/2$	$0 \to -1$	$0 \to -a$
(4)	$3\pi/4 \to \pi$	$3\pi/2 \to 2\pi$	$-1 \to 0$	$-a \to 0$
(5)	$\pi \to 5\pi/4$	$2\pi \to 5\pi/2$	$0 \to 1$	$0 \to a$
(6)	$5\pi/4 \to 3\pi/2$	$5\pi/2 \to 3\pi$	$1 \to 0$	$a \to 0$
(7)	$3\pi/2 \to 7\pi/4$	$3\pi \to 7\pi/2$	$0 \to -1$	$0 \to -a$
(8)	$7\pi/4 \to 2\pi$	$7\pi/2 \to 4\pi$	$-1 \to 0$	$-a \to 0$

El lector debe verificar las entradas de la tabla con la figura, en especial para las filas 3, 4, 7 y 8 (en las que el valor de r es negativo). ■

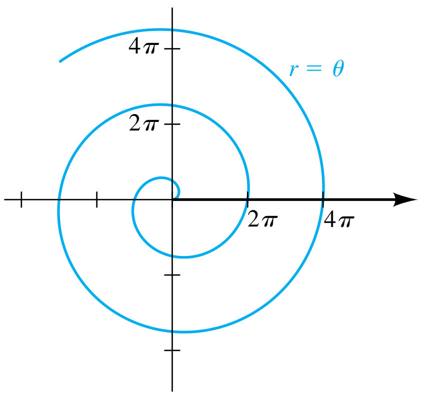
La gráfica del ejemplo 9 es una **rosa de cuatro hojas.** En general, una ecuación polar de la forma

$$r = a \text{ sen } n\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \cos n\theta$$

para cualquier entero positivo n mayor que 1 y cualquier número real a diferente de cero tiene una gráfica que está formada por varias espiras que pasan por el origen. Si n es par, hay $2n$ espiras y si n es impar, hay n espiras.

La gráfica de la ecuación polar $r = a\theta$ para cualquier número real a diferente de cero es una **espiral de Arquímedes**. El caso $a = 1$ se considera en el ejemplo siguiente.

FIGURA 15



EJEMPLO 10 **Trazar la gráfica de una espiral de Arquímedes**

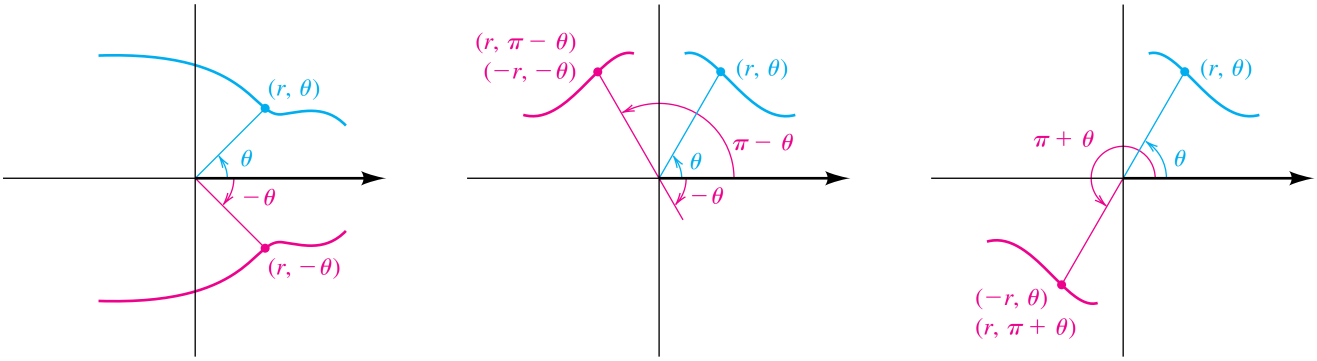
Trace la gráfica de la ecuación polar $r = \theta$ para $\theta \geq 0$.

SOLUCIÓN La gráfica está formada por todos los puntos que tienen coordenadas polares de la forma (c, c) para todo número real $c \geq 0$. Así, la gráfica contiene los puntos $(0, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, (π, π), etcétera. Cuando θ aumenta, r aumenta con la misma rapidez, y la espiral se enrolla alrededor del origen en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj, cruzando el eje polar en $0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, como se ilustra en la figura 15.

Si a θ se le permite ser negativo, entonces cuando θ disminuye por valores negativos, la espiral resultante se enrolla alrededor del origen y es la imagen simétrica, con respecto al eje vertical, de la curva trazada en la figura 15. ■

Si superponemos un plano xy sobre un plano $r\theta$, entonces la gráfica de una ecuación polar puede ser simétrica con respecto al eje x (el eje polar), el eje y (la recta $\theta = \pi/2$) o el origen (el polo). Algunas simetrías típicas se ilustran en la figura 16. El siguiente resultado resume estas simetrías.

FIGURA 16 Simetrías de gráficas de ecuaciones polares



Pruebas de simetría

(1) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto al eje polar si la sustitución de $-\theta$ por θ lleva a una ecuación equivalente.

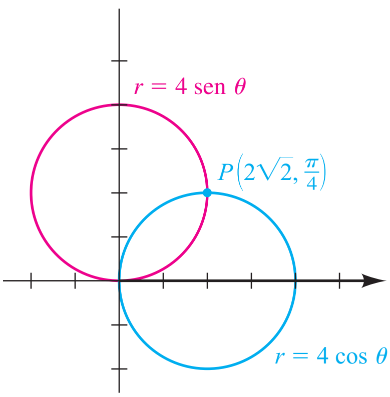
(2) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto a la recta vertical $\theta = \pi/2$ si la sustitución ya sea de (a) $\pi - \theta$ por θ o (b) $-r$ por r y $-\theta$ por θ lleva a una ecuación equivalente.

(3) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto al polo si la sustitución ya sea de (a) $\pi + \theta$ por θ o (b) $-r$ por r lleva a una ecuación equivalente

Para ilustrar, como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la gráfica de la ecuación polar $r = 2 + 4\cos\theta$ en el ejemplo 8 es simétrica con respecto al eje polar, por la prueba 1. Como $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, la gráfica del ejemplo 6 es simétrica con respecto a la recta $\theta = \pi/2$, por la prueba 2. La gráfica de la rosa de cuatro hojas el ejemplo 9 es simétrica con respecto al eje polar, la recta $\theta = \pi/2$ y el polo. Pueden establecerse otras pruebas de simetría, pero las que hemos citado están entre las más fáciles de aplicar.

A diferencia de la gráfica de una ecuación con x y y, la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ puede ser simétrica con respecto al eje polar, la recta $\theta = \pi/2$ o el polo *sin* que satisfaga una de las pruebas precedentes de simetría. Esto es cierto debido a las muchas formas diferentes de especificar un punto en coordenadas polares.

FIGURA 17



Otra diferencia entre sistemas de coordenadas rectangulares y polares es que los puntos de intersección de dos gráficas no siempre pueden hallarse al resolver simultáneamente ecuaciones polares. Para ilustrar, del ejemplo 6, la gráfica de $r = 4\operatorname{sen}\theta$ es una circunferencia de diámetro 4 con centro en $(2, \pi/2)$ (vea la figura 17.) Del mismo modo, la gráfica de $r = 4\cos\theta$ es una circunferencia de diámetro 4 con centro en $(2, 0)$ en el eje polar. Al consultar la figura 17, vemos que las coordenadas del punto de intersección $P(2\sqrt{2}, \pi/4)$ en el primer cuadrante satisfacen ambas ecuaciones; no obstante, el origen O, que está en cada circunferencia, *no se puede hallar* al resolver las ecuaciones simultáneamente. Entonces, al buscar puntos de intersección de gráficas polares, a veces es necesario consultar las gráficas mismas, *además* de resolver las dos ecuaciones simultáneamente.

Un método alternativo es usar ecuaciones diferentes (equivalentes) para las gráficas. Vea el ejercicio de análisis 12 al final del capítulo.

11.5 Ejercicios

1 ¿Cuáles coordenadas polares representan el mismo punto que $(3, \pi/3)$?

(a) $(3, 7\pi/3)$ (b) $(3, -\pi/3)$ (c) $(-3, 4\pi/3)$

(d) $(3, -2\pi/3)$ (e) $(-3, -2\pi/3)$ (f) $(-3, -\pi/3)$

2 ¿Cuáles coordenadas polares representan el mismo punto que $(4, -\pi/2)$?

(a) $(4, 5\pi/2)$ (b) $(4, 7\pi/2)$ (c) $(-4, -\pi/2)$

(d) $(4, -5\pi/2)$ (e) $(-4, -3\pi/2)$ (f) $(-4, \pi/2)$

Ejer. 3–8: Cambie las coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

3 (a) $(3, \pi/4)$ (b) $(-1, 2\pi/3)$

4 (a) $(5, 5\pi/6)$ (b) $(-6, 7\pi/3)$

5 (a) $(8, -2\pi/3)$ (b) $(-3, 5\pi/3)$

6 (a) $(4, -\pi/4)$ (b) $(-2, 7\pi/6)$

7 $\left(6, \arctan \frac{3}{4}\right)$ 8 $\left(10, \operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

Ejer. 9–12: Cambie las coordenadas rectangulares a coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \le \theta \le 2\pi$

9 (a) $(-1, 1)$ (b) $\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$

10 (a) $\left(3\sqrt{3}, 3\right)$ (b) $(2, -2)$

11 (a) $\left(7, -7\sqrt{3}\right)$ (b) $(5, 5)$

12 (a) $\left(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$ (b) $\left(-4, 4\sqrt{3}\right)$

Ejer. 13–36: Encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación con x y y.

13 $x = -3$ 14 $y = 2$

15 $y = -4$ 16 $x = 5$

17 $x^2 + y^2 = 16$ 18 $x^2 + y^2 = 2$

19 $y^2 = 6x$ 20 $x^2 = 8y$

21 $x^2 = 5y$ 22 $y^2 = 3x$

23 $x + y = 3$ 24 $2y = -x + 4$

25 $2y = -x$ 26 $y = 6x$

27 $y^2 - x^2 = 4$ 28 $xy = 8$

29 $xy = -3$ 30 $x^2 - y^2 = 9$

31 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 32 $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

33 $x^2 + (y + 3)^2 = 9$ 34 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

35 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

36 $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

Ejer. 37–60: Encuentre una ecuación con x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar. Úsela para ayudar a trazar la gráfica en un plano $r\theta$.

37 $r \cos \theta = 5$ 38 $r \operatorname{sen} \theta = -2$

39 $r = -3 \csc \theta$ 40 $r = 4 \sec \theta$

41 $r = -5$ 42 $r = 2$

43 $r - 6 \operatorname{sen} \theta = 0$ 44 $r - 6 \cos \theta = 0$

45 $\theta = \pi/4$ 46 $\theta = 2\pi/3$

47 $r^2(4 \operatorname{sen}^2 \theta - 9 \cos^2 \theta) = 36$

48 $r^2(\cos^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta) = 16$

49 $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$ 50 $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = -10$

51 $r^2 \cos 2\theta = 1$ 52 $r^2 \cos 2\theta = -9$

53 $r(\operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta) = 6$

54 $r(3 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta) = 12$

55 $r(\operatorname{sen} \theta + r \cos^2 \theta) = 1$

56 $r(r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta) = 3$

57 $r = 8 \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta$

58 $r = 2 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta$

59 $r = \tan \theta$

60 $r = 6 \cot \theta$

Ejer. 61–94: Trace la gráfica de la ecuación polar

61 $r = 5$ 62 $r = -2$

63 $\theta = -\pi/6$ 64 $\theta = \pi/4$

65 $r = 3 \cos \theta$ 66 $r = -2 \operatorname{sen} \theta$

67 $r = 4 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta$ 68 $r = 6 \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta$

69 $r = 4(1 - \operatorname{sen} \theta)$ 70 $r = 3(1 + \cos \theta)$

71 $r = -6(1 + \cos \theta)$ 72 $r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$

73 $r = 2 + 4 \text{ sen } \theta$

74 $r = 1 + 2 \cos \theta$

75 $r = \sqrt{3} - 2 \text{ sen } \theta$

76 $r = 2\sqrt{3} - 4 \cos \theta$

77 $r = 2 - \cos \theta$

78 $r = 5 + 3 \text{ sen } \theta$

79 $r = 4 \csc \theta$

80 $r = -3 \sec \theta$

81 $r = 8 \cos 3\theta$

82 $r = 2 \text{ sen } 4\theta$

83 $r = 3 \text{ sen } 2\theta$

84 $r = 8 \cos 5\theta$

85 $r^2 = 4 \cos 2\theta$ (lemniscata)

86 $r^2 = -16 \text{ sen } 2\theta$

87 $r = 2^\theta, \theta \geq 0$ (espiral)

88 $r = e^{2\theta}, \theta \geq 0$ (espiral logarítmica)

89 $r = 2\theta, \theta \geq 0$

90 $r\theta = 1, \theta > 0$ (espiral)

91 $r = 6 \text{ sen}^2 (\theta/2)$

92 $r = -4 \cos^2 (\theta/2)$

93 $r = 2 + 2 \sec \theta$ (concoide)

94 $r = 1 - \csc \theta$

95 Si $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ son puntos en un plano $r\theta$, use la ley de los cosenos para demostrar que

$$[d(P_1, P_2)]^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos (\theta_2 - \theta_1).$$

96 Demuestre que la gráfica de cada ecuación es una circunferencia, y encuentre su centro y radio.

(a) $r = a \text{ sen } \theta, a \neq 0$

(b) $r = b \cos \theta, b \neq 0$

(c) $r = a \text{ sen } \theta + b \cos \theta, a \neq 0$ y $b \neq 0$

Ejer. 97–98: Consulte el ejercicio 85 de la sección 6.6. Suponga que una estación de radio tiene dos torres de transmisión ubicadas a lo largo de una recta norte-sur y que las torres están separadas una distancia de $\frac{1}{2}\lambda$, donde λ es la longitud de onda de la señal de transmisión de la estación. Entonces la intensidad I de la señal en la dirección θ puede ser expresada por la ecuación dada, donde I_0 es la máxima intensidad de la señal.

(a) Grafique I usando coordenadas polares con $I_0 = 5$ para $\theta \in [0, 2\pi]$.

(b) Determine las direcciones en las que la señal de radio tiene intensidad máxima y mínima.

97 $I = \frac{1}{2}I_0[1 + \cos (\pi \text{ sen } \theta)]$

98 $I = \frac{1}{2}I_0[1 + \cos (\pi \text{ sen } 2\theta)]$

Ejer. 99–100: Grafique la ecuación polar para los valores indicados de θ y use la gráfica para determinar simetrías.

99 $r = 2 \text{ sen}^2 \theta \tan^2 \theta; \quad -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$

100 $r = \dfrac{4}{1 + \text{sen}^2 \theta}; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Ejer. 101–102: Grafique las ecuaciones polares sobre el mismo plano de coordenadas y estime los puntos de intersección de las gráficas.

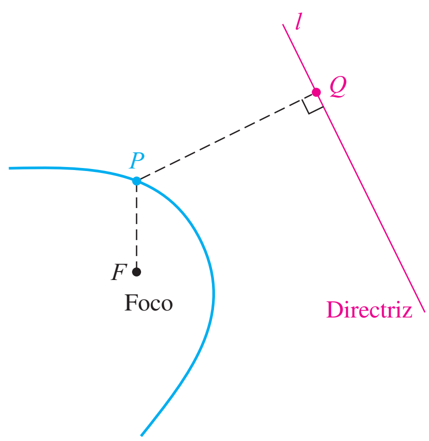
101 $r = 8 \cos 3\theta, \quad r = 4 - 2.5 \cos \theta$

102 $r = 2 \text{ sen}^2 \theta, \quad r = \frac{3}{4}(\theta + \cos^2 \theta)$

11.6 Ecuaciones polares de cónicas

El siguiente teorema combina las definiciones de parábola, elipse e hipérbola en una descripción unificada de las secciones cónicas. La constante e en el enunciado del teorema es la **excentricidad** de la cónica. El punto F es el **foco** de la cónica y la recta l es una **directriz.** Las posibles posiciones de F y l están ilustradas en la figura 1

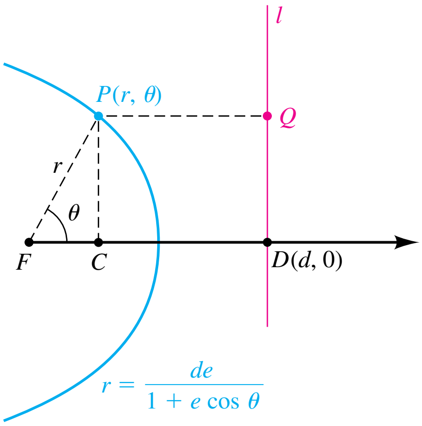
FIGURA 1



Teorema sobre cónicas

Sea F un punto fijo y l una recta fija en un plano. El conjunto de todos los puntos P en el plano, tales que la razón $d(P, F)/d(P, Q)$ es una constante positiva e con $d(P, Q)$ la distancia de P a l, es una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ y una hipérbola si $e > 1$.

FIGURA 2



DEMOSTRACIÓN Si $e = 1$, entonces $d(P, F) = d(P, Q)$ y, por definición, la cónica resultante es una parábola con foco F y directriz l.

Suponga a continuación que $0 < e < 1$. Es conveniente introducir un sistema de coordenadas polares en el plano con F como el polo y l perpendicular al eje polar en el punto $D(d, 0)$, con $d > 0$, como se ilustra en la figura 2. Si $P(r, \theta)$ es un punto en el plano tal que $d(P, F)/d(P, Q) = e < 1$, entonces P se encuentra a la izquierda de l. Sea C la proyección de P sobre el eje polar. Como

$$d(P, F) = r \qquad \text{y} \qquad d(P, Q) = d - r\cos\theta,$$

se deduce que P satisface la condición del teorema si y sólo si lo siguiente es verdadero:

$$\frac{r}{d - r\cos\theta} = e$$

$$r = de - er\cos\theta$$

$$r(1 + e\cos\theta) = de$$

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}$$

Las mismas ecuaciones se obtienen si $e = 1$, pero no hay punto (r, θ) sobre la gráfica si $1 + \cos\theta = 0$.

Una ecuación con x y y correspondiente a $r = de - er\cos\theta$ es

$$\sqrt{x^2 + y^2} = de - ex.$$

Elevar al cuadrado ambos lados y reacomodar términos lleva a

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = d^2e^2.$$

Al completar el cuadrado y simplificar, obtenemos

$$\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Por último, dividiendo ambos lados entre $d^2e^2/(1 - e^2)^2$ nos da una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con $h = -de^2/(1 - e^2)$. En consecuencia, la gráfica es una elipse con centro en el punto $(h, 0)$ sobre el eje x y con

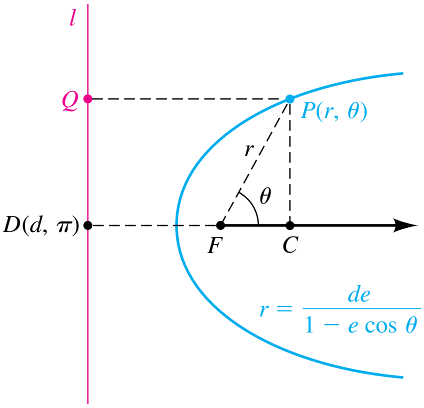
$$a^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2} \qquad \text{y} \qquad b^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2}.$$

Como

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2},$$

obtenemos $c = de^2/(1 - e^2)$ y por lo tanto $|h| = c$. Esto demuestra que F es un foco de la elipse. También se tiene que $e = c/a$. Una demostración similar se puede dar para el caso $e > 1$. ■

FIGURA 3

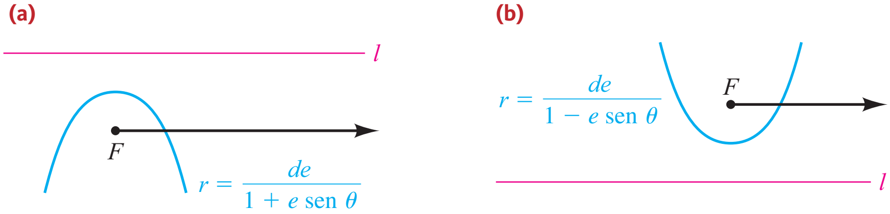


También podemos demostrar que toda cónica que no sea degenerada puede ser descrita por medio del enunciado del teorema sobre cónicas. Esto nos da una formulación de secciones cónicas que es equivalente al empleado previamente. Como el teorema incluye los tres tipos de cónicas, a veces se considera como definición para las secciones cónicas.

Si hubiéramos escogido el foco F a la *derecha* de la directriz, como se ve en la figura 3 (con $d > 0$), entonces hubiera resultado la ecuación $r = de/(1 - e \cos \theta)$. (Note el signo menos en lugar del signo más.) Ocurren otros cambios de signo si se deja que d sea negativa.

Si hubiéramos tomado l *paralela* al eje polar a través uno de los puntos $(d, \pi/2)$ o $(d, 3\pi/2)$, como se ilustra en la figura 4, entonces las ecuaciones correspondientes hubieran contenido sen θ en lugar de cos θ

FIGURA 4



El siguiente teorema resume nuestra exposición

Teorema sobre ecuaciones polares de cónicas

Una ecuación polar que tenga una de las cuatro formas

$$r = \frac{de}{1 \pm e \cos \theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{de}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta}$$

es una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ o una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 **Trazar la gráfica de una ecuación polar de una elipse**

Trace la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 + 2 \cos \theta}.$$

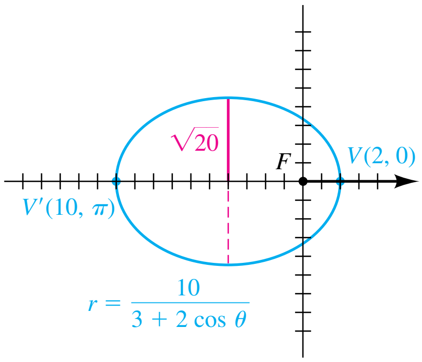
SOLUCIÓN Primero dividimos entre 3 el numerador y el denominador de la fracción para obtener el término constante 1 del denominador:

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 + \frac{2}{3} \cos \theta}$$

Esta ecuación tiene una de las formas del teorema precedente, con $e = 2/3$. Entonces, la gráfica es una elipse con foco F en el polo y eje mayor a lo largo del eje polar. Hallamos los puntos extremos del eje mayor al hacer $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Esto nos da los puntos $V(2, 0)$ y $V'(10, \pi)$. Por lo tanto

$$2a = d(V', V) = 12 \quad \text{o} \quad a = 6.$$

FIGURA 5



El centro de la elipse es el punto medio $(4, \pi)$ del segmento $V'V$. Usando el hecho de que $e = c/a$, obtenemos

$$c = ae = 6\left(\tfrac{2}{3}\right) = 4.$$

Por tanto, $$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20.$$

Así, $b = \sqrt{20}$. La gráfica está trazada en la figura 5. Para referencia, hemos superpuesto un sistema de coordenadas xy sobre el sistema polar. ■

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de una ecuación polar de una hipérbola

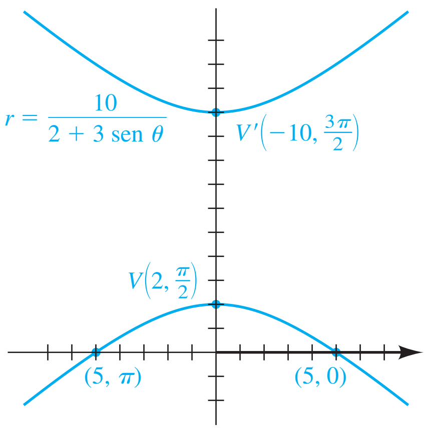
Trace la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{10}{2 + 3\,\text{sen}\,\theta}.$$

SOLUCIÓN Para expresar la ecuación en la forma apropiada, dividimos entre 2 el numerador y denominador de la fracción:

$$r = \frac{5}{1 + \frac{3}{2}\,\text{sen}\,\theta}$$

FIGURA 6



Así, $e = \frac{3}{2}$, y, por el teorema sobre ecuaciones polares de cónicas, la gráfica es una hipérbola con un foco en el polo. La expresión sen θ nos dice que el eje transversal de la hipérbola es perpendicular al eje polar. Para hallar los vértices, hacemos $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$ en la ecuación dada. Esto nos da los puntos $V(2, \pi/2)$ y $V'(-10, 3\pi/2)$. En consecuencia,

$$2a = d(V, V') = 8 \quad \text{o} \quad a = 4.$$

Los puntos $(5, 0)$ y $(5, \pi)$ sobre la gráfica se pueden usar para trazar la rama inferior de la hipérbola. La rama superior se obtiene por simetría, como se ve en la figura 6. Si deseamos más precisión o más información, calculamos

$$c = ae = 4\left(\tfrac{3}{2}\right) = 6$$

y $$b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20.$$

Las asíntotas se pueden construir entonces en la forma usual. ■

EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de una ecuación polar de una parábola

Trace la gráfica de la ecuación polar

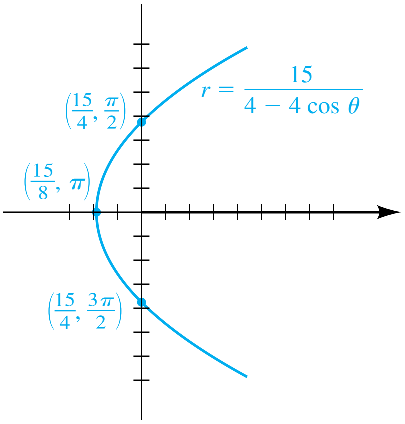
$$r = \frac{15}{4 - 4\cos\theta}.$$

SOLUCIÓN Para obtener la forma apropiada, dividimos el numerador y denominador entre 4

$$r = \frac{\frac{15}{4}}{1 - \cos\theta}$$

(continúa)

FIGURA 7



En consecuencia, $e = 1$ y, por el teorema sobre ecuaciones polares de cónicas, la gráfica es una parábola con foco en el polo. Podemos obtener un trazo al localizar los puntos que corresponden a los ángulos cuadrantales indicados en la tabla siguiente.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	indefinido	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{4}$

Note que no hay punto sobre la gráfica correspondiente a $\theta = 0$, porque el denominador $1 - \cos\theta$ es 0 para ese valor. Localizando los tres puntos y usando el hecho de que la gráfica es una parábola con foco en el polo nos da el trazo de la figura 7. ■

Si deseamos sólo un trazo aproximado de una cónica, entonces se recomienda la técnica empleada en el ejemplo 3. Para usar este método, localizamos (si posible) puntos correspondientes a $\theta = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. Estos puntos, junto con el tipo de cónica (obtenido del valor de la excentricidad e), fácilmente llevan al trazo.

EJEMPLO 4 Expresar una ecuación polar de una cónica en términos de *x* y *y*

Encuentre una ecuación con x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar

$$r = \frac{15}{4 - 4\cos\theta}.$$

SOLUCIÓN

$r(4 - 4\cos\theta) = 15$		multiplique por el mcd
$4r - 4r\cos\theta = 15$		distribuya
$4\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right) - 4x = 15$		sustituya por r y $r\cos\theta$
$4\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 15 + 4x$		aísle el término radical
$16(x^2 + y^2) = 225 + 120x + 16x^2$		eleve al cuadrado ambos lados
$16y^2 = 225 + 120x$		simplifique

Podemos escribir la última ecuación como $x = \frac{16}{120}y^2 - \frac{225}{120}$ o, simplificada, $x = \frac{2}{15}y^2 - \frac{15}{8}$. Reconocemos esta ecuación como la de una parábola con vértice $V\left(-\frac{15}{8}, 0\right)$ y que abre a la derecha. Su gráfica sobre un sistema de coordenadas xy sería igual que la gráfica de la figura 7 ■

EJEMPLO 5 Hallar una ecuación polar de una cónica que satisface condiciones prescritas

Encuentre una ecuación polar de la cónica con un foco en el polo, excentricidad $e = \frac{1}{2}$ y directriz $r = -3\sec\theta$.

SOLUCIÓN La ecuación $r = -3 \sec \theta$ de la directriz se puede escribir $r \cos \theta = -3$, que es equivalente a $x = -3$ en un sistema de coordenadas rectangulares. Esto nos da la situación ilustrada en la figura 3, con $d = 3$. En consecuencia, una ecuación polar tiene la forma

$$r = \frac{de}{1 - e \cos \theta}.$$

Ahora sustituimos $d = 3$ y $e = \frac{1}{2}$:

$$r = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta} \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad r = \frac{3}{2 - \cos \theta} \quad ■$$

11.6 Ejercicios

Ejer. 1–12: Encuentre la excentricidad y clasifique la cónica. Trace la gráfica y marque los vértices.

1 $r = \dfrac{12}{6 + 2 \operatorname{sen} \theta}$

2 $r = \dfrac{12}{6 - 2 \operatorname{sen} \theta}$

3 $r = \dfrac{12}{2 - 6 \cos \theta}$

4 $r = \dfrac{12}{2 + 6 \cos \theta}$

5 $r = \dfrac{3}{2 + 2 \cos \theta}$

6 $r = \dfrac{3}{2 - 2 \operatorname{sen} \theta}$

7 $r = \dfrac{4}{\cos \theta - 2}$

8 $r = \dfrac{4 \sec \theta}{2 \sec \theta - 1}$

9 $r = \dfrac{6 \csc \theta}{2 \csc \theta + 3}$

10 $r = \dfrac{8 \csc \theta}{2 \csc \theta - 5}$

11 $r = \dfrac{4 \csc \theta}{1 + \csc \theta}$

12 $r = \csc \theta (\csc \theta - \cot \theta)$

Ejer. 13–24: Encuentre ecuaciones con *x* y *y* para las ecuaciones polares de los ejercicios 1-12.

Ejer. 25–32: Encuentre una ecuación polar de la cónica con foco en el polo que tenga la excentricidad y la ecuación de directriz dadas

25 $e = \frac{1}{3}, \quad r = 2 \sec \theta$

26 $e = 1, \quad r \cos \theta = 5$

27 $e = \frac{4}{3}, \quad r \cos \theta = -3$

28 $e = 3, \quad r = -4 \sec \theta$

29 $e = 1, \quad r \operatorname{sen} \theta = -2$

30 $e = 4, \quad r = -3 \csc \theta$

31 $e = \frac{2}{5}, \quad r = 4 \csc \theta$

32 $e = \frac{3}{4}, \quad r \operatorname{sen} \theta = 5$

Ejer. 33–34: Encuentre una ecuación polar de la parábola con foco en el polo y el vértice dado.

33 $V\left(4, \dfrac{\pi}{2}\right)$

34 $V(5, 0)$

Ejer. 35–36: Una elipse tiene un foco en el polo con el centro *C* y vértice *V* dados. Encuentre (a) la excentricidad y (b) una ecuación polar para la elipse.

35 $C\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right), V\left(1, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

36 $C(2, \pi), V(1, 0)$

37 **Primera ley de Kepler** La primera ley de Kepler expresa que los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco. Para hallar una ecuación de una órbita, ponga el polo *O* en el centro del Sol y el eje polar a lo largo del eje mayor de la elipse (vea la figura).

(a) Demuestre que una ecuación de la órbita es

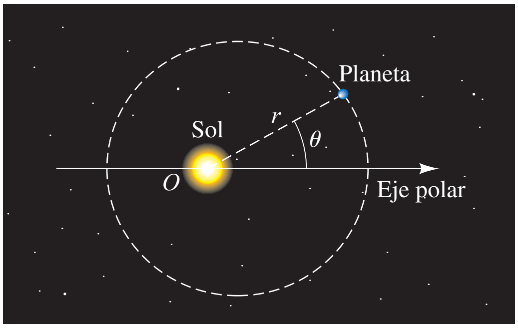
$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 - e \cos \theta},$$

donde *e* es la excentricidad y $2a$ es la longitud del eje mayor.

(b) El perihelio r_{per} y el afelio r_{af} se definen como las distancias mínima y máxima, respectivamente, de un planeta desde el Sol. Demuestre que

$$r_{per} = a(1 - e) \quad \text{y} \quad r_{af} = a(1 + e).$$

EJERCICIO 37



38 Primera ley de Kepler Consulte el ejercicio 37. El planeta Plutón se desplaza en una órbita elíptica de excentricidad 0.249. Si el perihelio es 29.62 UA, encuentre una ecuación polar para la órbita y calcule el afelio.

Ejer. 39–42: Se pueden usar ecuaciones polares para describir el movimiento de cometas. Estas trayectorias se pueden graficar usando la ecuación polar

$$r = \frac{r_{per}(1 + e)}{1 - e\cos\theta},$$

donde e es la excentricidad de la cónica y r_{per} es la distancia del perihelio medida en UA.

(a) Para cada cometa, determine si su trayectoria es elíptica, parabólica o hiperbólica.

(b) La órbita de Saturno tiene $r_{per} = 9.006$ y $e = 0.056$. Grafique el movimiento del cometa y la órbita de Saturno en la pantalla especificado.

39 Cometa Halley's $r_{per} = 0.5871$, $e = 0.9673$, $[-36, 36, 3]$ por $[-24, 24, 3]$

40 Cometa Encke's $r_{per} = 0.3317$, $e = 0.8499$, $[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

41 Cometa 1959 III $r_{per} = 1.251$,$e = 1.003$, $[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

42 Cometa 1973.99 $r_{per} = 0.142$,$e = 1.000$, $[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

43 Órbita de la Tierra Lo más que se acerca la Tierra al Sol es alrededor de 91,405,950 millas y lo más que se aleja del mismo es unas 94,505,420 millas. Con respecto a las fórmulas del ejercicio 37, encuentre fórmulas para a y e en términos de r_{per} y r_{af}.

CAPÍTULO 11 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–16: Encuentre los vértices y focos de la cónica y trace su gráfica.

1 $y^2 = 64x$

2 $y = 8x^2 + 32x + 33$

3 $9y^2 = 144 - 16x^2$

4 $9y^2 = 144 + 16x^2$

5 $x^2 - y^2 - 4 = 0$

6 $25x^2 + 36y^2 = 1$

7 $25y = 100 - x^2$

8 $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$

9 $x^2 - 9y^2 + 8x + 90y - 210 = 0$

10 $x = 2y^2 + 8y + 3$

11 $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

12 $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 88 = 0$

13 $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

14 $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$

15 $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$

16 $y^2 - 2x^2 + 6y + 8x - 3 = 0$

Ejer. 17–18: Encuentre la ecuación estándar de una parábola con un eje vertical que satisfaga las condiciones dadas.

17 Puntos de intersección con eje x: -10 y -4, con el eje y: 80

18 Puntos de intersección con eje x: -11 y 3, que pase por (2, 39)

Ejer. 19–28: Encuentre una ecuación para la cónica que satisfaga las condiciones dadas.

19 Hipérbola con vértices $V(0, \pm 7)$ y puntos extremos de eje conjugado $(\pm 3, 0)$

20 Parábola con foco $F(-4, 0)$ y directriz $x = 4$

21 Parábola con foco $F(0, -10)$ y directriz $y = 10$

22 Parábola, con vértice en el origen, simétrica con el eje x y que pase por el punto $(5, -1)$

23 Elipse con vértices $V(0, \pm 10)$ y focos $F(0, \pm 5)$

24 Hipérbola, con focos $F(\pm 10, 0)$ y vértices $V(\pm 5, 0)$

25 Hipérbola con vértices $V(0, \pm 6)$ y asíntotas $y = \pm 9x$

26 Elipse con focos $F(\pm 2, 0)$ y pasa por el punto $(2, \sqrt{2})$

27 Elipse con excentricidad $\frac{2}{3}$ y puntos extremos de eje menor $(\pm 5, 0)$

28 Elipse, con excentricidad $\frac{3}{4}$ y focos $F(\pm 12, 0)$

Ejer. 29–34: Determine la ecuación para la sección de la cónica.

29 Mitad derecha de $(x - 2)^2 = 4(y + 3)$

30 Mitad inferior de $(y + 3)^2 = \frac{1}{4}(x - 5)$

31 Mitad izquierda de $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

32 Mitad superior de $x^2 + 4y^2 = 16$

33 Rama derecha de $9x^2 - 4y^2 = 64$

34 Rama inferior de $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{100} = 1$

35 **(a)** Determine A para que el punto $(2, -3)$ esté sobre la cónica $Ax^2 + 2y^2 = 4$.

(b) ¿La cónica es una elipse o una hipérbola?

36 Si un cuadrado con lados paralelos a los ejes de coordenadas está inscrito en la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, exprese el área A del cuadrado en términos de a y b.

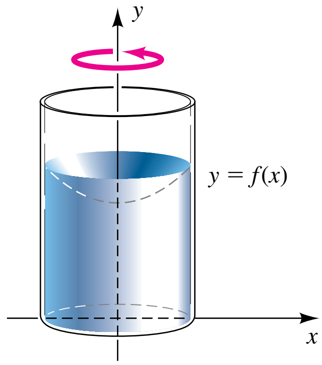
37 Encuentre la ecuación estándar de la circunferencia que tiene centro en el foco de la parábola $y = \frac{1}{8}x^2$ y pasa por el origen.

38 **Longitud focal y velocidad angular** Un recipiente cilíndrico, parcialmente lleno de mercurio, se hace girar alrededor de su eje de modo que la rapidez angular de cada sección transversal sea ω radianes/segundo. De acuerdo con la física, la función f, cuya gráfica genera la superficie interior del mercurio (vea la figura), está dada por

$$f(x) = \frac{1}{64}\omega^2 x^2 + k,$$

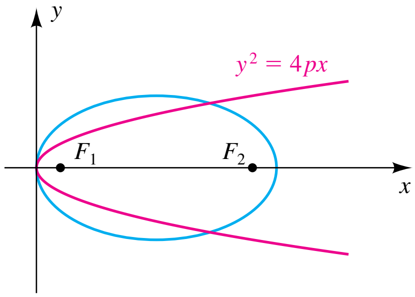
donde k es una constante. Determine la rapidez angular ω que resultará en una longitud focal de 2 pies.

EJERCICIO 38



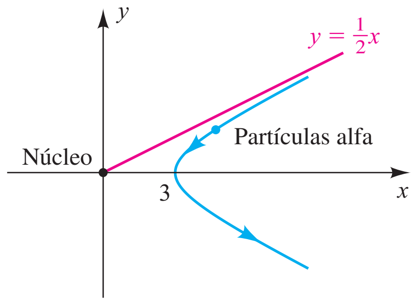
39 Una elipse tiene un vértice en el origen y focos $F_1(p, 0)$ y $F_2(p + 2c, 0)$, como se ve en la figura. Si el foco en F_1 es fijo y (x, y) está sobre la elipse, demuestre que y^2 se aproxima a $c \to \infty$. cuando $c \to \infty$, (Así, cuando $c \to \infty$, la elipse toma la forma de una parábola.)

EJERCICIO 39



40 **Partículas alfa** En 1911, el físico Ernest Rutherford (1871-1937) descubrió que si se disparan partículas alfa hacia el núcleo de un átomo, finalmente son rechazadas del núcleo a lo largo de trayectorias hiperbólicas. La figura ilustra la trayectoria de una partícula que arranca hacia el origen a lo largo de la recta $y = \frac{1}{2}x$ y llega a estar a no más de 3 unidades del núcleo. Encuentre una ecuación de la trayectoria.

EJERCICIO 40



Ejer. 41–45: Encuentre una ecuación con x y y cuya gráfica contenga los puntos en la curva C. Trace la gráfica de C e indique la orientación.

41 $x = 3 + 4t, \quad y = t - 1; \quad -2 \le t \le 2$

42 $x = \sqrt{-t}, \quad y = t^2 - 4; \quad t \le 0$

43 $x = \cos^2 t - 2,\quad y = \operatorname{sen} t + 1;\quad 0 \le t \le 2\pi$

44 $x = \sqrt{t},\quad y = 2^{-t};\quad t \ge 0$

45 $x = \dfrac{1}{t} + 1,\quad y = \dfrac{2}{t} - t;\quad 0 < t \le 4$

46 Las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 están dadas paramétricamente para t en $\mathbb{R}$. Trace sus gráficas y explique sus similitudes y diferencias

C_1: $x = t$, $\quad y = \sqrt{16 - t^2}$
C_2: $x = -\sqrt{16 - t}$, $\quad y = -\sqrt{t}$
C_3: $x = 4 \cos t$, $\quad y = 4 \operatorname{sen} t$
C_4: $x = e^t$, $\quad y = -\sqrt{16 - e^{2t}}$

47 Consulte las ecuaciones en (1) del ejemplo 6 de la sección 11.4. Encuentre el alcance y máxima altitud para $s = 1024$, $\alpha = 30°$ y $h = 5120$.

48 Mencione dos puntos de coordenadas polares que representen el mismo punto que $(2, \pi/4)$.

49 Cambie $(5, 7\pi/4)$ a coordenadas rectangulares.

50 Cambie $\left(2\sqrt{3}, -2\right)$ a coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \le \theta \le 2\pi$.

Ejer. 51–54: Encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación con *x* y *y*.

51 $y^2 = 4x$

52 $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$

53 $2x - 3y = 8$

54 $x^2 + y^2 = 2xy$

Ejer. 55–60: Encuentre una ecuación con *x* y *y* que tenga la misma gráfica que la ecuación polar.

55 $r^2 = \tan \theta$

56 $r = 2 \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta$

57 $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

58 $\theta = \sqrt{3}$

59 $r = 5 \sec \theta + 3r \sec \theta$

60 $r^2 \operatorname{sen} \theta = 6 \csc \theta + r \cot \theta$

Ejer. 61–72: Trace la gráfica de la ecuación polar.

61 $r = -4 \operatorname{sen} \theta$

62 $r = 8 \sec \theta$

63 $r = 3 \operatorname{sen} 5\theta$

64 $r = 6 - 3 \cos \theta$

65 $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$

66 $r = 2 + 4 \cos \theta$

67 $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$

68 $2r = \theta$

69 $r = \dfrac{8}{1 - 3 \operatorname{sen} \theta}$

70 $r = 6 - r \cos \theta$

71 $r = \dfrac{6}{3 + 2 \cos \theta}$

72 $r = \dfrac{-6 \csc \theta}{1 - 2 \csc \theta}$

CAPÍTULO 11 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 En una parábola, el segmento de recta que pasa por el foco, perpendicular al eje e intersecado por la parábola, recibe el nombre de *cuerda focal* o *lado recto*. La longitud de la cuerda focal se conoce como *ancho focal*. Encuentre una fórmula para el ancho focal w en términos de la longitud focal $|p|$.

2 En la gráfica de una hipérbola con centro en el origen O, trace una circunferencia con centro en el origen y radio $r = d(O, F)$, donde F denota un foco de la hipérbola. ¿Qué relación se observa?

3 Un punto $P(x, y)$ está sobre una elipse si y sólo si

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a.$$

Si $b^2 = a^2 - c^2$, deduzca la ecuación general de una elipse; es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4 Un punto $P(x, y)$ está sobre una hipérbola si y sólo si

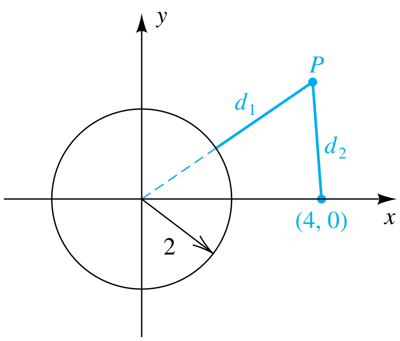
$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Si $c^2 = a^2 + b^2$, deduzca la ecuación general de una hipérbola; es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

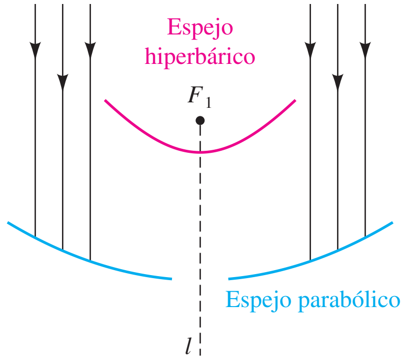
5 Un punto $P(x, y)$ está a la misma distancia de (4, 0) que de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, como se ve en la figura. Demuestre que el conjunto de todos esos puntos forma una rama de una hipérbola y trace su gráfica.

EJERCICIO 5



6 **Diseño de un telescopio** Consulte el ejercicio 78 de la sección 11.3. Suponga que la rama superior de la hipérbola (mostrada) tiene ecuación $y = \frac{a}{b}\sqrt{x^2 + b^2}$ y una ecuación de la parábola es $y = dx^2$. Encuentre d en términos de a y b.

EJERCICIO 6



7 **Maximizar el alcance de un proyectil** Al igual que en el ejemplo 6 de la sección 11.4, suponga que un proyectil se ha de disparar a una rapidez de 1024 pies/s desde una altura de 2304 pies. Calcule el ángulo que maximice el alcance.

8 **Generalizaciones para la trayectoria de un proyectil** Si $h = 0$, las ecuaciones en (1) del ejemplo 6 de la sección 11.4 se convierte en

$$x(t) = (s \cos \alpha)t, \quad y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (s \operatorname{sen} \alpha)t; \quad t \geq 0.$$

Demuestre que cada uno de los enunciados es verdadero.

(a) El proyectil cae al suelo cuando
$$t = \frac{2s \operatorname{sen} \alpha}{g}.$$

(b) El alcance r del proyectil es
$$r = \frac{s^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}.$$

(c) El ángulo que maximiza el alcance r es 45°.

(d) La trayectoria del proyectil en coordenadas rectangulares es
$$y = -\frac{g}{2s^2 \cos^2 \alpha}x^2 + (\tan \alpha)x.$$

(e) El tiempo en el que se alcanza la máxima altura es
$$t = \frac{s \operatorname{sen} \alpha}{g}.$$

(f) La máxima altura alcanzada es
$$y = \frac{s^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}.$$

9 **Investigación de una figura de Lissajous** Encuentre una ecuación con x y y para la curva del ejemplo 7 en la sección 11.4 dada por

$$x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

10 Trace las gráficas de las ecuaciones $r = f(\theta) = 2 + 4 \cos \theta$, $r = f(\theta - \alpha)$ y $r = f(\theta + \alpha)$ para $\alpha = \pi/4$. Intente con tantos valores de α como sea necesario para generalizar resultados respecto a las gráficas de $r = r(\theta - \alpha)$ y $r = f(\theta + \alpha)$, donde $\alpha > 0$.

11 **Rosas generalizadas** Examine la gráfica de $r = \operatorname{sen} n\theta$ para valores impares y pares de n. Deduzca una expresión para el *ángulo de hoja* (el número de grados entre valores consecutivos de polo). ¿Qué otras generalizaciones observa? ¿Cómo cambian las gráficas si sen se sustituye con cos?

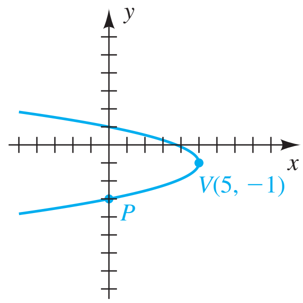
12 La figura 17 de la sección 11.5 muestra las circunferencias $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 4 \cos \theta$. Encuentre soluciones para (r, θ) de este sistema de ecuaciones. Ahora encuentre ecuaciones con x y y que tengan las mismas gráficas que las ecuaciones polares. Encuentre soluciones (x, y) con este sistema, conviértalas a soluciones (r, θ) y explique por qué su respuesta al primer sistema no deja ver la solución en el polo.

CAPÍTULO 11 EXAMEN DE CAPÍTULO

1 Trace la gráfica de la parábola $(x + 3)^2 = -6(y - 2)$. Señale sus vértices, focos y directriz.

2 Determine la ecuación para la parábola mostrada en la figura.

EJERCICIO 2



3 Determine la ecuación para la parábola que tiene vértice $V(-2, 1)$ y el eje x es su directriz.

4 Determine la ecuación para la mitad inferior de la parábola $(y - 4)^2 = x + 2$.

5 Determine la ecuación para la parábola que tiene un eje horizontal y pasa por los puntos $P(4,1)$, $Q(5, 2)$ y $R(8, -1)$.

6 La luz de búsqueda de un reflector tiene la forma de un paraboloide con la fuente luminosa en el origen. Si el reflector tiene 40 pulgadas de ancho y 7 de profundidad, ¿dónde está localizado el foco?

7 Trace la gráfica de la elipse $\frac{(x - 1)^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. Señale sus vértices, focos y puntos extremos de su eje menor.

8 Determine la ecuación para la elipse que tiene su centro en el origen, vértices $V(\pm 9, 0)$ y foco $F(\pm 3, 0)$.

9 Una elipse tiene vértices $V(\pm 7, 0)$ y eje menor con longitud 8. Determine su excentricidad.

10 Determine la ecuación para el conjunto de puntos en un plano xy tales que la suma de las distancias desde $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ es $k = 20$.

11 Determine la ecuación para la mitad izquierda de la elipse $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$.

12 Un arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco mide 40 pies de ancho y la parte más alta del arco es de 12 pies por encima de la calzada horizontal. Aproxime la altura, con un lugar decimal, del arco a 8 pies desde el centro de la base.

13 Trace la gráfica de la hipérbola $9y^2 - 4x^2 = 36$. Señale sus vértices, foco y asíntotas.

14 Dado que una hipérbola tiene vértices $V(\pm 4, 0)$ y foco $F(\pm 9, 0)$, determine las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola.

15 Determine la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, foco $F(\pm 7, 0)$ y eje conjugado de longitud 6.

16 Determine la ecuación para la rama izquierda de la hipérbola $\dfrac{x^2}{121} - \dfrac{y^2}{49} = 1$.

17 Determine la ecuación con x y y cuya gráfica contiene los puntos de la curva de C, donde C tiene la parametrización $x = 2\cos t + 3$, $y = 5 \operatorname{sen} t$; $0 \le t \le 2\pi$. Describa la gráfica de C, incluida su orientación.

18 Determine la ecuación con x y y cuya gráfica contiene los puntos de la curva de C, donde C tiene la parametrización $x = 9t^2 + 3$, $y = 3t + 5$; t en $\mathbb{R}$. Describa la gráfica de C, incluida su orientación.

19 Escriba una parametrización para la rama inferior de $y^2 - x^2 = 4$.

20 Describa la gráfica (y orientación para incrementar los valores de t) de una curva C que tiene la parametrización $x = 4 + 3 \operatorname{sen} t$, $y = -1 + 3\cos t$; $0 \le t \le \pi/2$.

21 Suponga que se lanza un proyectil a una rapidez de 544 pies/s con un ángulo de 30° con respecto a la horizontal desde una altura de 960 pies. Determine el alcance del proyectil.

22 Cambie las coordenadas rectangulares $(2\sqrt{3}, -2)$ a coordenadas polares con $r < 0$ y $0 \le \theta \le 2\pi$.

23 Determine una ecuación polar que tenga la misma gráfica que $x^2 - y^2 = 7$.

24 Determine una ecuación con x y y que tenga la misma gráfica que $r - 4 \operatorname{sen} \theta = 0$.

25 Trace la gráfica de $r = \sqrt{3} - 2\cos\theta$.

26 Trace la gráfica de $r = 5 \operatorname{sen} 2\theta$.

27 Determine la excentricidad de $r = \dfrac{8}{4 - 6\cos\theta}$. Clasifique la cónica, trace su gráfica y señale los vértices.

28 Determine una ecuación con x y y para $r = \dfrac{8}{4 - 6\cos\theta}$.

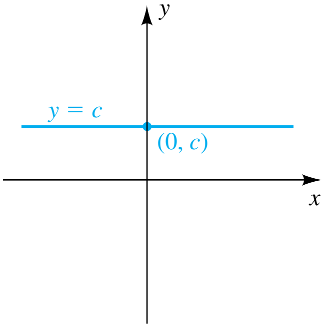
29 Determine la ecuación polar de la cónica con foco en el polo que tiene excentricidad $\frac{1}{2}$ y directriz $r = 4\sec\theta$.

Apéndices

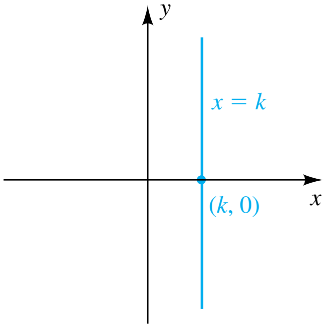
APÉNDICE I

Gráficas comunes y sus ecuaciones

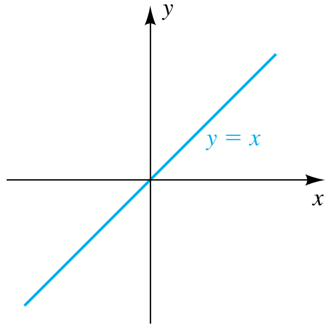
(Las gráficas de cónicas aparecen al final de este texto.)



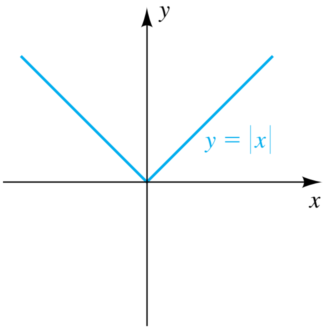
Recta horizontal; función constante



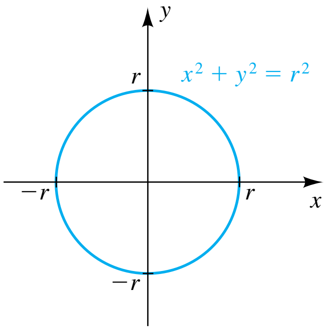
Recta vertical



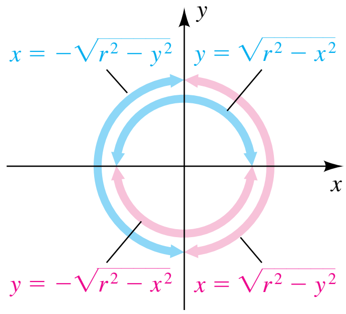
Función identidad



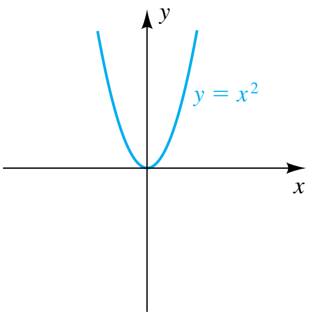
Función valor absoluto



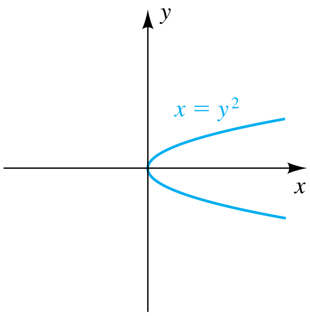
Circunferencia con centro (0, 0)
y radio r



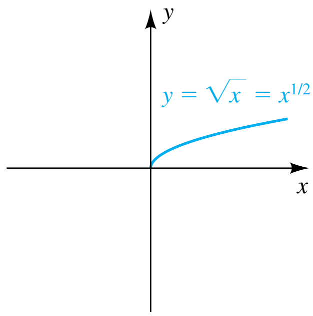
Semicircunferencias



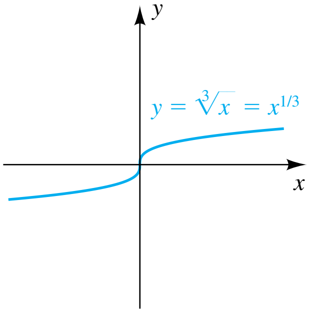
Parábola con eje vertical;
función cuadrática



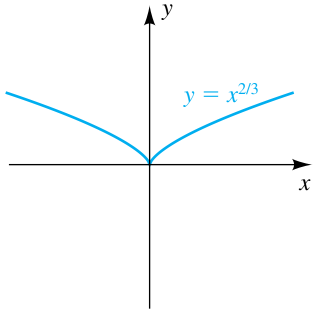
Parábola con eje horizontal



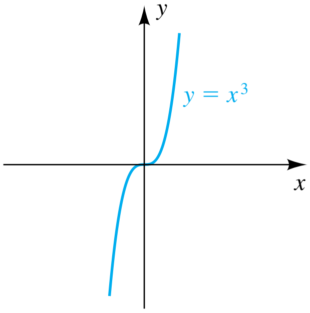
Función raíz cuadrada



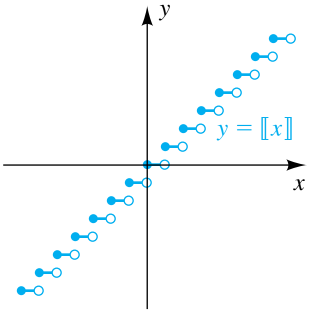
Función raíz cúbica



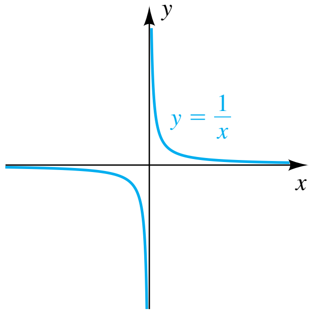
Una gráfica con una cúspide en el origen



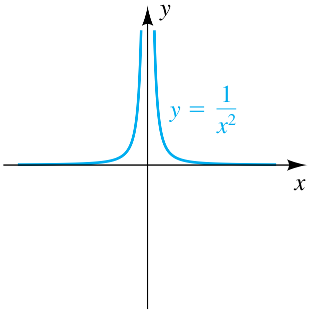
Función cúbica



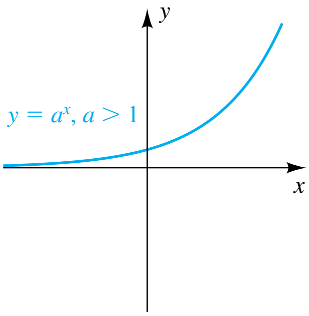
Función entero máximo



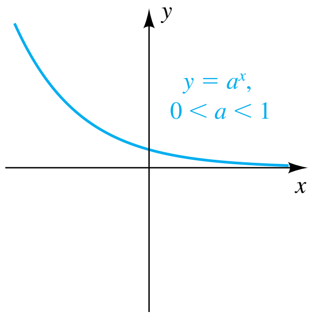
Función recíproca



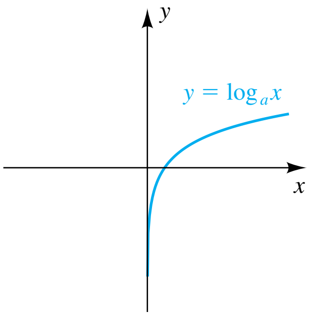
Una función racional



Función de crecimiento exponencial (incluye función exponencial natural)



Función de decaimiento exponencial



Función logarítmica (incluye funciones logarítmicas comunes y naturales)

APÉNDICE II

Un resumen de transformaciones de gráficas

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en negro en cada figura. El dominio de f es $[-1, 3]$ y el rango de f es $[-4, 3]$.

$$y = g(x) = f(x) + 3$$

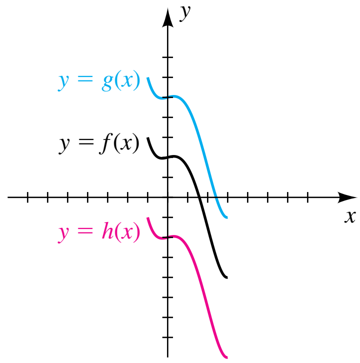
La gráfica de f está desplazada verticalmente hacia arriba 3 unidades.

Dominio de g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[-1, 6]$

$$y = h(x) = f(x) - 4$$

La gráfica de f está desplazada verticalmente hacia abajo 4 unidades.

Dominio de h: $[-1, 3]$ Rango de h: $[-8, -1]$



$$y = g(x) = f(x - 3)$$

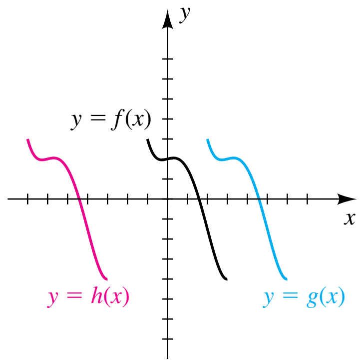
La gráfica de f está desplazada horizontalmente a la derecha 3 unidades.

Dominio de g: $[2, 6]$ Rango de g: $[-4, 3]$

$$y = h(x) = f(x + 6)$$

La gráfica de f está desplazada horizontalmente a la izquierda 6 unidades.

Dominio de h: $[-7, -3]$ Rango de h: $[-4, 3]$



$$y = g(x) = 2f(x) \quad [2 > 1]$$

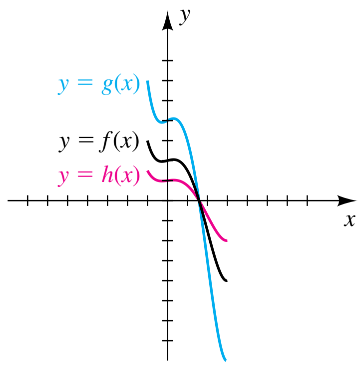
La gráfica de f está extendida verticalmente por un factor de 2.

Dominio de g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[-8, 6]$

$$y = h(x) = \frac{1}{2}f(x) \quad \left[\frac{1}{2} < 1\right]$$

La gráfica de f está comprimida verticalmente por un factor de 2.

Dominio de h: $[-1, 3]$ Rango de h: $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$



$$y = g(x) = f(2x) \quad [2 > 1]$$

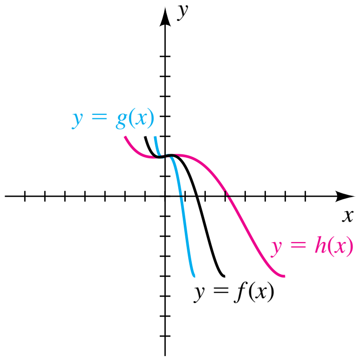
La gráfica de *f* está comprimida horizontalmente por un factor de 2.

Dominio de g: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ Rango de g: $[-4, 3]$

$$y = h(x) = f\left(\tfrac{1}{2}x\right) \quad \left[\tfrac{1}{2} < 1\right]$$

La gráfica de *f* está extendida horizontalmente por un factor de 2.

Dominio de h: $[-2, 6]$ Rango de h: $[-4, 3]$



$$y = g(x) = -f(x)$$

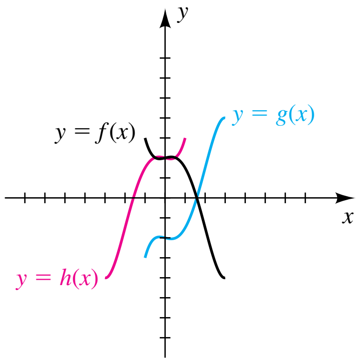
La gráfica de *f* está reflejada pasando por el eje x.

Dominio de g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[-3, 4]$

$$y = h(x) = f(-x)$$

La gráfica de *f* está reflejada pasando por el eje y.

Dominio de h: $[-3, 1]$ Rango de h: $[-4, 3]$



$$y = g(x) = |f(x)|$$

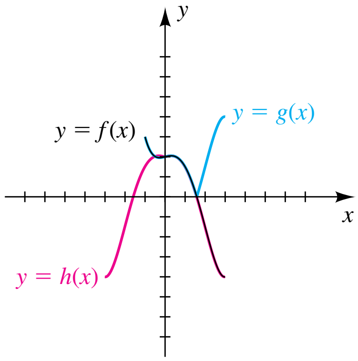
Refleja los puntos en *f* con valores y negativos pasando por el eje x.

Dominio de g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[0, 4]$

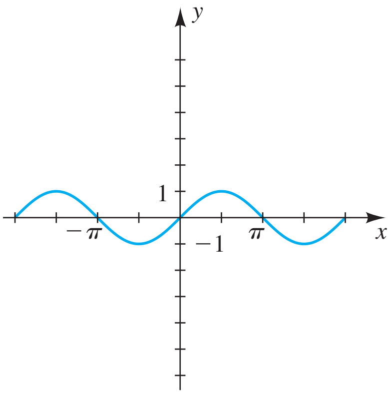
$$y = h(x) = f(|x|)$$

Refleja los puntos en *f* con valores x positivos pasando por el eje y.

Dominio de h: $[-3, 3]$ Rango de h: $[-4, 3]$ a lo sumo. En este caso, la imagen es un subconjunto de $[-4, 3]$.



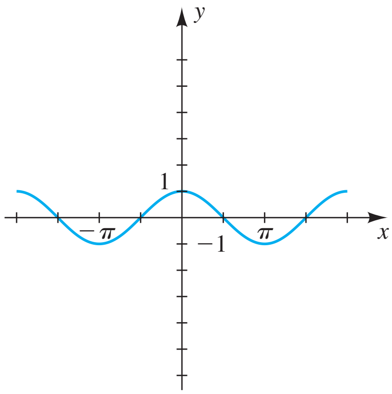
Gráficas de funciones trigonométricas y sus inversas



$y = \operatorname{sen} x$

Dominio: $\mathbb{R}$

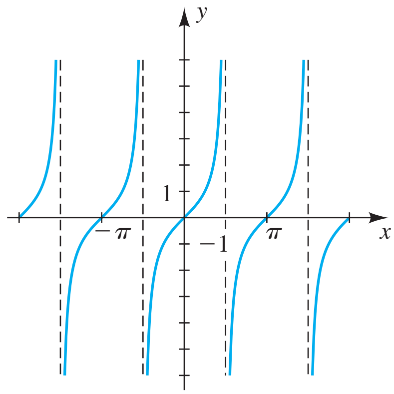
Rango: $[-1, 1]$



$y = \cos x$

Dominio: $\mathbb{R}$

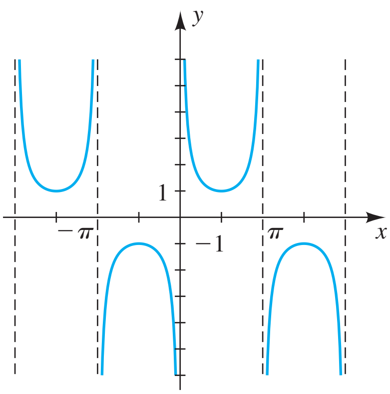
Rango: $[-1, 1]$



$y = \tan x$

Dominio: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

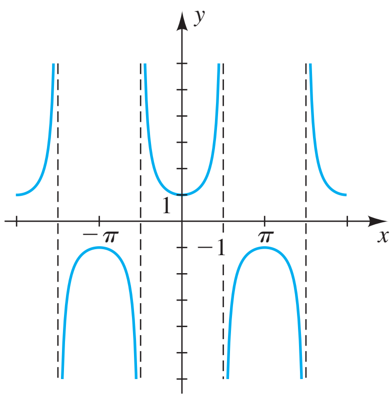
Rango: $\mathbb{R}$



$y = \csc x$

Dominio: $x \neq \pi n$

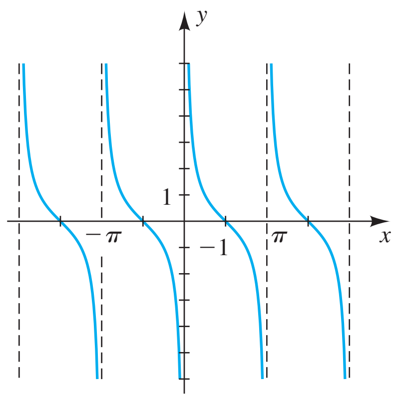
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



$y = \sec x$

Dominio: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

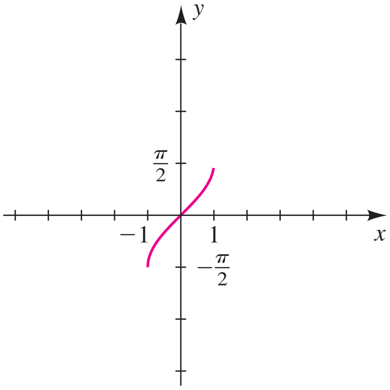
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



$y = \cot x$

Dominio: $x \neq \pi n$

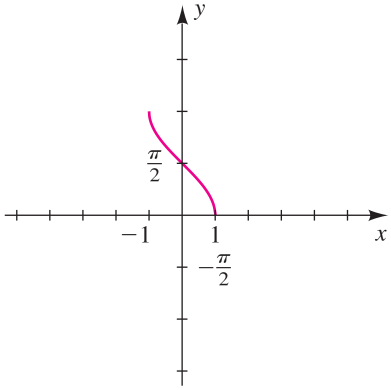
Rango: $\mathbb{R}$



$y = \text{sen}^{-1} x$

Dominio: $[-1, 1]$

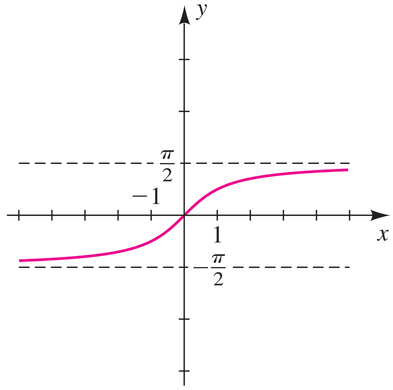
Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$y = \cos^{-1} x$

Dominio: $[-1, 1]$

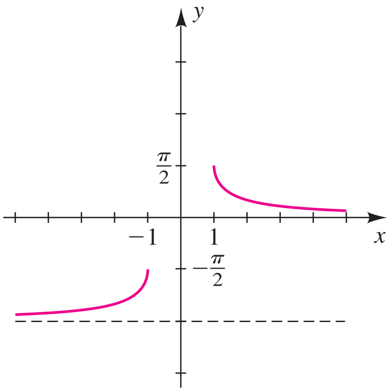
Rango: $[0, \pi]$



$y = \tan^{-1} x$

Dominio: $\mathbb{R}$

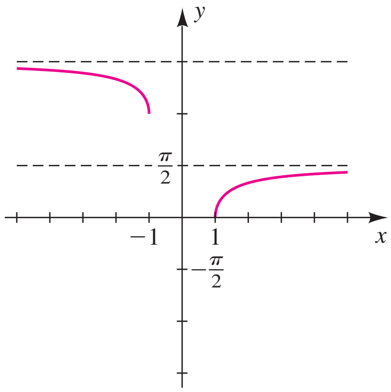
Rango: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$y = \csc^{-1} x$

Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

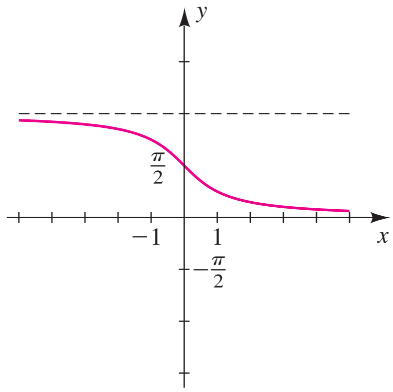
Rango: $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$



$y = \sec^{-1} x$

Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Rango: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$



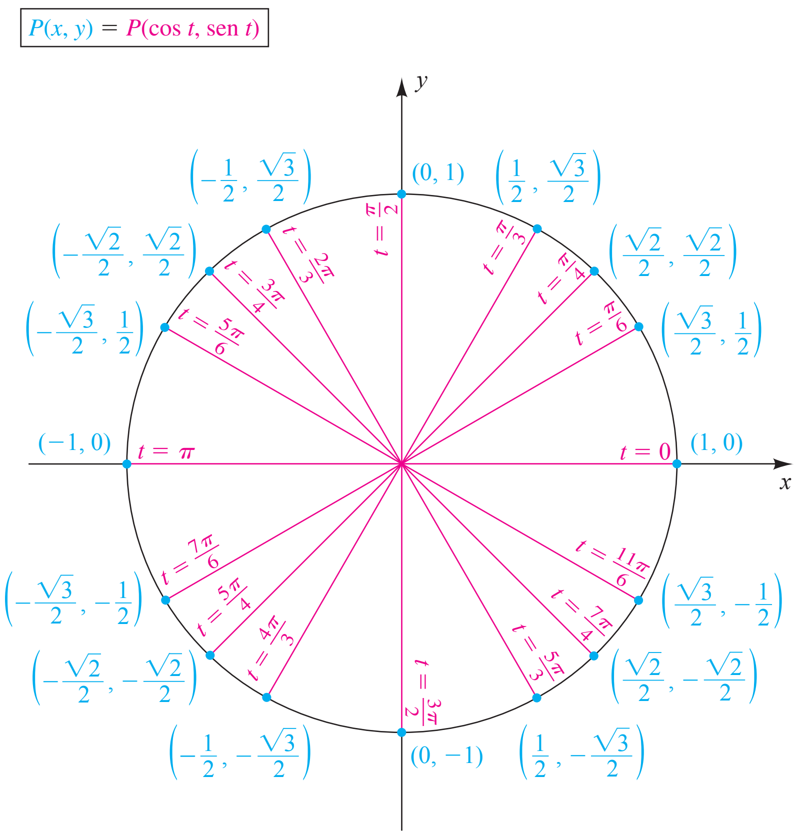
$y = \cot^{-1} x$

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $(0, \pi)$

APÉNDICE IV

Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales en una circunferencia unitaria



Para hallar los valores de las otras funciones trigonométricas, use las definiciones siguientes:

$$\tan t = \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \text{ (si } y \neq 0)$$

$$\sec t = \frac{1}{x} \text{ (si } x \neq 0) \qquad \csc t = \frac{1}{y} \text{ (si } y \neq 0)$$

Respuestas a ejercicios seleccionados

En la librería de su universidad está a la venta un *Manual de soluciones para el estudiante* para acompañar a este libro. La guía contiene soluciones detalladas a aproximadamente la mitad de los ejercicios, así como estrategias para resolver otros ejercicios del texto.

CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1

1 **(a)** Negativo **(b)** Positivo **(c)** Negativo **(d)** Positivo
3 **(a)** $<$ **(b)** $>$ **(c)** $=$
5 **(a)** $>$ **(b)** $>$ **(c)** $>$
7 **(a)** $x < 0$ **(b)** $y \geq 0$ **(c)** $q \leq \pi$ **(d)** $2 < d < 4$ **(e)** $t \geq 5$ **(f)** $-z \leq 3$ **(g)** $\dfrac{p}{q} \leq 7$ **(h)** $\dfrac{1}{w} \geq 9$ **(i)** $|x| > 7$
9 **(a)** 7 **(b)** 3 **(c)** 11
11 **(a)** -15 **(b)** -3 **(c)** 11
13 **(a)** $4 - \pi$ **(b)** $4 - \pi$ **(c)** $1.5 - \sqrt{2}$
15 **(a)** 4 **(b)** 12 **(c)** 12 **(d)** 8
17 **(a)** 10 **(b)** 9 **(c)** 9 **(d)** 19
19 $|7 - x| < 2$ **21** $|-3 - x| \geq 8$
23 $|x - 4| \leq 3$ **25** $-x - 3$ **27** $2 - x$
29 $b - a$ **31** $x^2 + 4$ **33** $\neq$ **35** $=$
37 $\neq$ **39** $=$ **41** **(a)** 8.1736 **(b)** 14.1428
43 **(a)** 6.557×10^{-1} **(b)** 6.708×10^{1}
45 Construya un triángulo rectángulo con lados de longitudes $\sqrt{2}$ y 1. La hipotenusa tendrá longitud $\sqrt{3}$. A continuación, construya un triángulo rectángulo con lados de longitudes $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$. La hipotenusa tendrá longitud $\sqrt{5}$.
47 El rectángulo grande tiene área $a(b + c)$. La suma de las áreas de los dos rectángulos pequeños es $ab + ac$.
49 **(a)** 4.27×10^{5} **(b)** 9.3×10^{-8} **(c)** 8.1×10^{8}
51 **(a)** 830 000 **(b)** 0.000 000 000 002 9 **(c)** 564 000 000
53 1.7×10^{-24} **55** 5.87×10^{12}
57 1.678×10^{-24} g **59** 4.1472×10^{6} marcos
61 **(a)** 201.6 lb **(b)** 32.256 tons

EJERCICIOS 1.2

1 $\dfrac{16}{81}$ **3** $\dfrac{9}{8}$ **5** $\dfrac{-47}{3}$ **7** $\dfrac{243}{1}$ **9** $\dfrac{1}{25}$
11 $8x^9$ **13** $\dfrac{6}{x}$ **15** $-2a^{14}$ **17** $\dfrac{9}{2}$
19 $\dfrac{12u^{11}}{v^2}$ **21** $\dfrac{4}{xy}$ **23** $\dfrac{9y^6}{x^8}$ **25** $\dfrac{81}{64}y^6$
27 $\dfrac{s^6}{4r^8}$ **29** $\dfrac{20y}{x^3}$ **31** $9x^{10}y^{14}$ **33** $-10a^2$
35 $24x^{3/2}$ **37** $\dfrac{1}{9a^4}$ **39** $\dfrac{8}{x^{1/2}}$ **41** $4x^2y^4$
43 $\dfrac{4}{x^3y^2}$ **45** 1 **47** $(x^4 + y)^{1/4}$ **49** $(a + b)^{2/3}$
51 $(x^2 + y^2)^{1/2}$ **53** **(a)** $4x\sqrt{x}$ **(b)** $8x\sqrt{x}$
55 **(a)** $8 - \sqrt[3]{y}$ **(b)** $\sqrt[3]{8 - y}$ **5** 9
59 $-2\sqrt[5]{2}$ **61** $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ **63** $\dfrac{3y^3}{x^2}$ **65** $\dfrac{2a^2}{b}$
67 $\dfrac{1}{2y^2}\sqrt{6xy}$ **69** $\dfrac{xy}{3}\sqrt[3]{6y}$ **71** $\dfrac{x}{3}\sqrt[4]{15x^2y^3}$
73 $\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{20x^4y^2}$ **75** $\dfrac{5x^5}{y^2}$ **77** $\dfrac{2x}{y^2}\sqrt[5]{x^2y^4}$
79 $-3tv^2$ **81** $|x^3|y^2$ **83** $x^2|y - 3|^3$
85 $\neq$; $(a^r)^2 = a^{2r} \neq a^{(r^2)}$
87 $\neq$; $(ab)^{xy} = a^{xy}b^{xy} \neq a^x b^y$
89 $=$; $\sqrt[n]{\dfrac{1}{c}} = \left(\dfrac{1}{c}\right)^{1/n} = \dfrac{1^{1/n}}{c^{1/n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{c}}$
91 **(a)** 1.5518 **(b)** 13.3905
93 **(a)** 2.0351 **(b)** 4.0717 **95** \$232 825.78
97 2.82 m **99** El levantador de 120 kg
101

Estatura	Peso	Estatura	Peso
64	137	72	168
65	141	73	172
66	145	74	176
67	148	75	180
68	152	76	184
69	156	77	188
70	160	78	192
71	164	79	196

EJERCICIOS 1.3

1 $12x^3 - 13x + 1$ **3** $x^3 - 2x^2 + 5$
5 $6x^2 + x - 35$ **7** $15x^2 + 22xy + 8y^2$
9 $6u^2 - 13u - 12$ **11** $6x^3 + 37x^2 + 30x - 25$
13 $3t^4 + 5t^3 - 15t^2 + 9t - 10$
15 $2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 10x - 10$
17 $4y^2 - 3x$ **19** $3v^2 - 2u^2 + uv^2$ **21** $4x^2 - 49y^2$
23 $x^4 - 25y^2$ **25** $x^4 + 5x^2 - 36$
27 $9x^2 + 12xy + 4y^2$ **29** $x^4 - 10x^2y^2 + 25y^4$
31 $x^4 - 8x^2 + 16$ **33** $x - y$ **35** $x - 8y$
37 $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
39 $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
41 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
43 $y^4 - 2y^3 + 5y^2 - 4y + 4$

45 $s(r + 4t)$ 47 $3a^2b(b - 2)$ 49 $3x^2y^2(y - 3x)$
51 $5x^3y^2(3y^3 - 5x + 2x^3y^2)$ 53 $(8x + 7)(x - 3)$
55 Irreductible 57 $(3x - 4)(2x + 5)$
59 $(3x - 5)(4x - 3)$ 61 $(6x - 5)^2$
63 $(5z + 3)^2$ 65 $(5x + 2y)(9x + 4y)$
67 $(8r + 5t)(8r - 5t)$ 69 $(z^2 + 8w)(z^2 - 8w)$
71 $x^2(x + 2)(x - 2)$ 73 Irreductible
75 $3(5x + 4y)(5x - 4y)$
77 $(4x + 3)(16x^2 - 12x + 9)$
79 $(2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4)$
81 $(7x + y^3)(49x^2 - 7xy^3 + y^6)$
83 $(5 - 3x)(25 + 15x + 9x^2)$
85 $(2x + y)(a - 3b)$ 87 $3(x + 3)(x - 3)(x + 1)$
89 $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)$
91 $(a^2 + b^2)(a - b)$
93 $(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$
95 $(x + 2 + 3y)(x + 2 - 3y)$
97 $(y + 4 + x)(y + 4 - x)$
99 $(y + 2)(y^2 - 2y + 4)(y - 1)(y^2 + y + 1)$
101 $(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
103 El área de I es $(x - y)x$, el área de II es $(x - y)y$, y
$$A = x^2 - y^2 = (x - y)x + (x - y)y = (x - y)(x + y).$$
105 (a) 1525.7; 1454.7
(b) A medida que las personas envejecen, requieren menos calorías. Los coeficientes de w y h son positivos porque las personas grandes requieren más calorías.

EJERCICIOS 1.4

1 $\frac{22}{75}$ 3 $\frac{7}{120}$ 5 $\frac{x + 3}{x - 4}$ 7 $\frac{y + 5}{y^2 + 5y + 25}$
9 $\frac{4 - r}{r^2}$ 11 $\frac{x}{x - 1}$ 13 $\frac{a}{(a^2 + 4)(5a + 2)}$
15 $\frac{-3}{x + 2}$ 17 $\frac{12s - 7}{(3s + 1)^2}$ 19 $\frac{5x^2 + 2}{x^3}$
21 $\frac{4(2t + 5)}{t + 2}$ 23 $\frac{2(2x + 3)}{3x - 4}$ 25 $\frac{2x - 1}{x}$
27 $\frac{p^2 + 2p + 4}{p - 3}$ 29 $\frac{11u^2 + 18u + 5}{u(3u + 1)}$
31 $-\frac{x + 5}{(x + 2)^2}$ 33 $a + b$ 35 $\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$
37 $x + y$ 39 $\frac{2x^2 + 7x + 15}{x^2 + 10x + 7}$
41 $-\frac{5}{(x - 1)(a - 1)}$ 43 $2x + h - 3$
45 $-\frac{3x^2 + 3xh + h^2}{x^3(x + h)^3}$ 47 $\frac{-12}{(3x + 3h - 1)(3x - 1)}$
49 $\frac{t + 10\sqrt{t} + 25}{t - 25}$ 51 $(9x + 4y)(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})$
53 $\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b}$ 55 $\frac{1}{(a + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$
57 $\frac{2}{\sqrt{2(x + h) + 1} + \sqrt{2x + 1}}$
59 $\frac{-1}{\sqrt{1 - x - h} + \sqrt{1 - x}}$ 61 $3x^{4/3} - x^{1/3} + 7x^{-2/3}$
63 $x^{-1} + 4x^{-3} + 4x^{-5}$ 65 $\frac{1 + x^5}{x^3}$ 67 $\frac{1 - x^2}{x^{1/2}}$
69 $(3x + 2)^3(36x^2 - 37x + 6)$
71 $\frac{(2x + 1)^2(8x^2 + x - 24)}{(x^2 - 4)^{1/2}}$ 73 $\frac{(3x + 1)^5(39x - 89)}{(2x - 5)^{1/2}}$
75 $\frac{27x^2 - 24x + 2}{(6x + 1)^4}$ 77 $\frac{4x(1 - x^2)}{(x^2 + 2)^4}$
79 $\frac{x^2 + 12}{(x^2 + 4)^{4/3}}$ 81 $\frac{6(3 - 2x)}{(4x^2 + 9)^{3/2}}$

83

x	Y_1	Y_2
1	−0.6923	−0.6923
2	−26.12	−26.12
3	8.0392	8.0392
4	5.8794	5.8794
5	5.3268	5.3268

Podría ser igual

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS DE REPASO

1 (a) $-\frac{5}{12}$ (b) $\frac{39}{20}$ (c) $-\frac{37}{56}$ (d) $\frac{5}{8}$
2 (a) $<$ (b) $>$ (c) $>$
3 (a) $x < 0$ (b) $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ (c) $|x| \geq 4$
4 (a) 4 (b) −1 (c) $\frac{1}{6}$
5 (a) 5 (b) 5 (c) 7
6 (a) $|-2 - x| \geq 7$ (b) $|x - 4| < 4$
7 $-x - 3$ 8 $-(x - 2)(x - 3)$
9 (a) No (b) No (c) Sí
10 (a) 9.37×10^{10} (b) 4.02×10^{-6}
11 (a) 68 000 000 (b) 0.000 73
12 (a) 286.7639 (b) 2.868×10^2 13 $\frac{-71}{9}$
14 $\frac{1}{8}$ 15 $18a^5b^5$ 16 $\frac{3y}{r^2}$ 17 $\frac{xy^5}{9}$ 18 $\frac{b^3}{a^8}$
19 $-\frac{p^8}{2q}$ 20 $c^{1/3}$ 21 $\frac{x^3z}{y^{10}}$ 22 $\frac{16x^2}{z^4y^6}$ 23 $\frac{b^6}{a^2}$
24 $\frac{27u^2v^{27}}{16w^{20}}$ 25 $s + r$ 26 $u + v$ 27 s
28 $\frac{y - x^2}{x^2y}$ 29 $\frac{x^8}{y^2}$ 30 $3xyz\sqrt[3]{x^2z}$ 31 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$
32 $\frac{ab}{c}\sqrt{bc}$ 33 $2x^2y\sqrt[3]{x}$ 34 $2ab\sqrt{ac}$
35 $\frac{1 - \sqrt{t}}{t}$ 36 c^2d^4 37 $\frac{2x}{y^3}$ 38 $a + 2b$
39 $\frac{1}{2\pi}\sqrt[3]{4\pi}$ 40 $\frac{1}{3y}\sqrt[3]{3x^2y^2}$ 41 $\frac{1 - 2\sqrt{x} + x}{1 - x}$
42 $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a - 2}}{2}$ 43 $(9x + y)(3\sqrt{x} - \sqrt{y})$

44 $\dfrac{x + 6\sqrt{x} + 9}{9 - x}$ **45** $x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$
46 $3z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 4z + 1$ **47** $-x^2 + 20x - 3$
48 $8x^3 + 14x^2 - 43x + 21$
49 $3y^5 - 2y^4 - 8y^3 + 10y^2 - 3y - 12$
50 $15x^3 - 53x^2 - 102x - 40$ **51** $a^4 - b^4$
52 $3p^2q - 2q^2 + \dfrac{5}{3}p$ **53** $12a^2 + ab - 35b^2$
54 $16r^4 - 24r^2s + 9s^2$ **55** $169a^4 - 25b^2$
56 $a^6 - 2a^5 + a^4$ **57** $9y^2 + 6xy + x^2$
58 $c^6 - 3c^4d^2 + 3c^2d^4 - d^6$
59 $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
60 $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$
61 $81x^4 - 72x^2y^2 + 16y^4$
62 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$
63 $10w(6x + 5)$ **64** $3r^2s^3(r + 2s)(r - 2s)$
65 $(14x + 5)(2x - 1)$ **66** $(4a^2 + 3b^2)^2$
67 $(y - 4z)(2w + 3x)$ **68** $(2c^2 + 3)(c - 6)$
69 $8(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$
70 $u^3v(v - u)(v^2 + uv + u^2)$
71 $(p^4 + q^4)(p^2 + q^2)(p + q)(p - q)$ **72** $x^2(x - 6)^2$
73 $(w^2 + 1)(w^4 - w^2 + 1)$ **74** $5(x + 4)$
75 Irreductible **76** $(x - 7 + 7y)(x - 7 - 7y)$
77 $(x - 2)(x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)$
78 $4x^2(x^2 + 3x + 5)$ **79** $\dfrac{3x - 5}{2x + 1}$
80 $\dfrac{r^2 + rt + t^2}{r + t}$ **81** $\dfrac{3x + 2}{x(x - 2)}$
82 $\dfrac{81}{(4x - 5)(10x + 1)}$ **83** $\dfrac{5x^2 - 6x - 20}{x(x + 2)^2}$
84 $\dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ **85** $\dfrac{-2x^2 - x - 3}{x(x + 1)(x + 3)}$ **86** $\dfrac{ab}{a + b}$
87 $x + 5$ **88** $\dfrac{1}{x + 3}$
89 $(x^2 + 1)^{1/2}(x + 5)^3(7x^2 + 15x + 4)$
90 $\dfrac{2(5x^2 + x + 4)}{(6x + 1)^{2/3}(4 - x^2)^2}$ **91** $x^{3/2} + 10x^{1/2} + 25x^{-1/2}$
92 $\dfrac{x^4 + 1}{x}$ **93** 2.75×10^{13} células
94 Entre 2.94×10^9 y 3.78×10^9 pulsaciones
95 0.58 m^2 **96** 0.13 dinas-cm

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 0.1%
2 Ya sea $a = 0$ o $b = 0$
3 Sume y reste $10x$; $x + 5 \pm \sqrt{10x}$ son los factores.
4 La primera expresión se puede evaluar en $x = 1$.
5 Se acercan a la relación entre coeficientes principales cuando x crece.
7 Si x es la edad y y es la estatura, demuestre que el valor final es $100x + y$.
8 $V_{\text{sal}} = \frac{1}{3}V_{\text{ent}}$ **9** **(a)** 109–45 **(b)** 1.88

EXAMEN DE CAPÍTULO

1 Positivo **2** $\dfrac{x}{y} \le 5$ **3** $x^2 + 3$ **4** 492 seg
5 $\dfrac{x^2yz}{9}$ **6** $\sqrt[12]{x}$ **7** $\dfrac{xy}{\sqrt[3]{3xy^2}}$
8 $x^3 - x^2 - x + 10$ **9** $32x^6$ **10** $(2x - 3)(x + 5)$
11 $3x(x + 3)(x - 3)$ **12** $(4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)$
13 $\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25}\right)$
14 $(2x - 3y)(x + 2)$ **15** $(x^{31} - 1)(x^{62} + x^{31} + 1)$
16 $\dfrac{3x + 11}{x}$ **17** $x - y$ **18** $2x + h + 7$
19 $6h\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)$ **20** $(x + 2)^2(x - 3)^3(7x - 1)$
21 $\dfrac{2x\left(-3 - x^2\right)}{\left(x^2 - 3\right)^3}$

CAPÍTULO 2

EJERCICIOS 2.1

1 $\dfrac{5}{3}$ **3** 1 **5** $\dfrac{26}{7}$ **7** $\dfrac{35}{17}$ **9** $\dfrac{23}{18}$
11 $-\dfrac{4}{45}$ **13** $\dfrac{49}{4}$ **15** 4 **17** $-\dfrac{24}{29}$ **19** $\dfrac{7}{10}$
21 $-\dfrac{3}{61}$ **23** $\dfrac{29}{4}$ **25** $\dfrac{31}{18}$ **27** No hay solución
29 Todos los números reales excepto $\dfrac{1}{2}$ **31** $\dfrac{5}{9}$ **33** $-\dfrac{2}{3}$
35 No hay solución **37** 0
39 Todos los números reales excepto ± 2
41 No hay solución **43** No hay solución
45
$(4x - 3)^2 - 16x^2 = (16x^2 - 24x + 9) - 16x^2 = 9 - 24x$
47 $\dfrac{x^2 - 16}{x + 4} = \dfrac{(x + 4)(x - 4)}{x + 4} = x - 4$
49 $\dfrac{5x^2 + 8}{x} = \dfrac{5x^2}{x} + \dfrac{8}{x} = \dfrac{8}{x} + 5x$ **51** $-\dfrac{19}{3}$
53 **(a)** Si **(b)** No, 5 no es una solución de la primera ecuación.
55 Escoja cualquier a y b tales que $b = -\dfrac{5}{3}a$.
57 $x + 1 = x + 2$ **59** $K = \dfrac{D - L}{E + T}$
61 $Q = \dfrac{1}{N - 1}$ **63** $P = \dfrac{I}{rt}$ **65** $h = \dfrac{2A}{b}$
67 $m = \dfrac{Fd^2}{gM}$ **69** $w = \dfrac{P - 2l}{2}$ **71** $b_1 = \dfrac{2A - hb_2}{h}$
73 $q = \dfrac{p(1 - S)}{S(1 - p)}$ **75** $q = \dfrac{fp}{p - f}$ **77** (1)

EJERCICIOS 2.2

1 88 **3** \$840 **5** **(a)** 150 **(b)** 21
7 120 meses (o 10 años) **9** No es posible
11 200 niños
13 $\dfrac{14}{3}$ de onza de 30% de solución de glucosa y $\dfrac{7}{3}$ de onza de agua

15 194.6 g de plata inglesa y 5.4 g de cobre
17 (a) Después de 64 s (b) 96 m y 128 m, respectivamente
19 6 mi/hr 21 (a) $\frac{5}{9}$ mi/hr (b) $2\frac{2}{9}$ mi
23 1237.5 ft
25 (a) 4050 ft² (b) 2592 ft² (c) 3600 ft²
27 $\frac{19}{2} - \frac{3\pi}{8} \approx 8.32$ ft 29 55 ft 31 36 min
33 36 min 35 27
37 (a) 40.96°F (b) 6909 ft 39 37°F

EJERCICIOS 2.3

1 $-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ 3 $-\frac{6}{5}, \frac{1}{3}$ 5 $-\frac{9}{2}, \frac{3}{4}$
7 $-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}$ 9 $-\frac{5}{2}$ 11 $-\frac{2}{3}$ 13 $-\frac{34}{5}$
15 (a) No, -4 no es una solución de $x = 4$. (b) Sí
17 ± 15 19 $\pm\frac{3}{5}$ 21 $3 \pm \sqrt{17}$
23 $-7 \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$
25 (a) $\frac{81}{4}$ (b) 36 (c) ± 12 (d) ± 7
27 $-3 \pm \sqrt{13}$ 29 $\frac{3}{2} \pm \sqrt{5}$ 31 $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$
33 $-3 \pm \sqrt{6}$ 35 $\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{41}$
37 $\frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{22}$ 39 $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{15}$ 41 $\frac{9}{2}$
43 No hay soluciones reales
45 $(x + 6)(x - 5)$ 47 $(2x - 3)(6x + 1)$
49 (a) $x = \dfrac{y \pm \sqrt{2y^2 - 1}}{2}$
(b) $y = -2x \pm \sqrt{8x^2 + 1}$
51 $v = \sqrt{\dfrac{2K}{m}}$ 53 $r = \dfrac{-\pi h + \sqrt{\pi^2h^2 + 2\pi A}}{2\pi}$
55 $r = r_0\sqrt{1 - (V/V_{\text{máx}})}$ 57 $\sqrt{150/\pi} \approx 6.9$ cm
59 (a) Después de 1 s y después de 3 s (b) Después de 4 s
61 (a) 4320 m (b) 96.86°C 63 2 ft
65 12 ft por 12 ft
67 $3 + \frac{1}{2}\sqrt{14} \approx 4.9$ millas o $3 - \frac{1}{2}\sqrt{14} \approx 1.1$ millas
69 (a) $d = 100\sqrt{20t^2 + 4t + 1}$ (b) 3:30 P.M.
71 14 in. por 27 in. 73 7 mi/hr 75 300 pares
77 2 ft 79 15.89 s
81 (a) 0; –4,500,000 (b) 2.13×10^{-7}
83 (a) (2) (b) 47.65°F

EJERCICIOS 2.4

1 $2 + 4i$ 3 $12 - 5i$ 5 $41 - 11i$
7 $29 + 22i$ 9 $21 - 20i$ 11 $-24 - 7i$
13 25 15 (a) $-i$ (b) 1 17 (a) i (b) -1
19 $\frac{3}{10} - \frac{3}{5}i$ 21 $\frac{1}{2} - i$ 23 $\frac{34}{53} + \frac{40}{53}i$
25 $\frac{2}{7} + \frac{4}{7}i$ 27 $-142 - 65i$ 29 $-2 - 14i$
31 $-\frac{19}{13} + \frac{30}{13}i$ 33 $\frac{21}{2}i$ 35 $x = 4, y = -1$
37 $x = 3, y = -4$ 39 $3 \pm 2i$ 41 $-6 \pm i$
43 $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{55}\,i$ 45 $-\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{47}\,i$
47 $-4, 2 \pm 2\sqrt{3}\,i$ 49 $\frac{5}{2}, -\frac{25}{26} \pm \frac{15}{26}\sqrt{3}\,i$
51 $\pm 5, \pm 5i$ 53 $\pm 2i, \pm\frac{3}{2}i$
55 $0, -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}\,i$
57
$$\begin{aligned}\overline{z + w} &= \overline{(a + bi) + (c + di)}\\ &= \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i\\ &= (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}\end{aligned}$$
59
$$\begin{aligned}\overline{z \cdot w} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)}\\ &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}\\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i\\ &= ac - adi - bd - bci\\ &= a(c - di) - bi(c - di)\\ &= (a - bi) \cdot (c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}\end{aligned}$$
61 Si $\bar{z} = z$, entonces $a - bi = a + bi$ y por tanto $-bi = bi$, o $2bi = 0$. Así, $b = 0$ y $z = a$ es real. A la inversa, si z es real, entonces $b = 0$ y por tanto $\bar{z} = \overline{a + 0i} = a - 0i = a + 0i = z$.

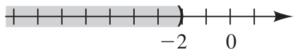
EJERCICIOS 2.5

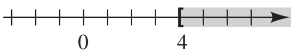
1 $-15, 7$ 3 $-\frac{2}{3}, 2$ 5 No hay solución
7 $\pm\frac{2}{3}, 2$ 9 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}, -\frac{5}{2}, 0$ 11 0, 25
13 $-\frac{57}{5}$ 15 13 17 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{62}$ 19 6
21 6 23 5, 7 25 No hay solución 27 -1
29 $-\frac{5}{4}$ 31 3 33 0, 4 35 $\pm 3, \pm 5$
37 $\pm\frac{1}{10}\sqrt{70 \pm 10\sqrt{19}}$ 39 $\pm 2, \pm 3$
41 $\frac{8}{27}, -8$ 43 $\frac{16}{9}$ 45 $-\frac{8}{27}, \frac{1}{125}$
47 $-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$ 49 0, 4096
51 (a) 8 (b) ± 8 (c) No hay soluciones reales (d) 625
(e) No hay soluciones reales
53 $l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2}$ 55 $h = \dfrac{1}{\pi r}\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}$
57 $h \approx 97\%$ de L 59 9.16 ft/s 61 \$4.00
63 $2\sqrt[3]{\dfrac{432}{\pi}} \approx 10.3$ cm 65 53.4%
67 Hay dos posibles rutas, correspondientes a $x \approx 0.6743$ millas y $x \approx 2.2887$ millas.

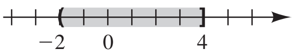
69 **(a)** (2) **(b)** 860 min **71** $3.7 \times 3.7 \times 1.8$

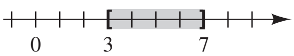
EJERCICIOS 2.6

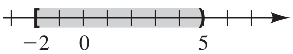
1 **(a)** $-2 < 2$ **(b)** $-9 < -5$ **(c)** $-\frac{7}{3} < -1$
(d) $1 < \frac{7}{3}$

3 $(-\infty, -2)$ 

5 $[4, \infty)$ 

7 $(-2, 4]$ 

9 $[3, 7]$ 

11 $[-2, 5)$ 

13 $-5 < x \le 4$ **15** $-8 \le x \le -1$ **17** $x \ge 4$
19 $x < -7$ **21** $\left(\frac{14}{3}, \infty\right)$ **23** $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]$
25 $(12, \infty)$ **27** $[108, \infty)$ **29** $(1, 6)$
31 $[12, 22)$ **33** $\left(-\frac{26}{3}, \frac{16}{3}\right]$ **35** $(6, 12]$
37 $\left(-\infty, \frac{8}{53}\right]$ **39** $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$ **41** $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$
43 $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$ **45** Todos los números reales excepto 1
47 $(-8, 8)$ **49** $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$
51 $(-3.01, -2.99)$ **53** $(-\infty, -2.1] \cup [-1.9, \infty)$
55 $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **57** $\left[\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right]$
59 $(-\infty, \infty)$ **61** $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$
63 No hay solución **65** $(-\infty, \infty)$
67 $\left(-\infty, -\frac{8}{3}\right] \cup [4, \infty)$
69 $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{13}{4}, \infty\right)$ **71** $(-4, 4)$
73 $(-2, 1) \cup (3, 6)$
75 **(a)** $-8, -2$ **(b)** $-8 < x < -2$
(c) $(-\infty, -8) \cup (-2, \infty)$
77 $|w - 141| \le 2$ **79** $5 < |T_1 - T_2| < 10$
81 $86 \le F \le 104$ **83** $R \ge 11$ **85** $4 \le p < 6$
87 $6\frac{2}{3}$ años **89** **(a)** 5 ft 8 in. **(b)** $65.52 \le h \le 66.48$

EJERCICIOS 2.7

1 **(a)** Todos los números reales **(b)** No hay solución
3 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ **5** $[-2, 1] \cup [4, \infty)$ **7** $(-2, 3)$
9 $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$ **11** $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup [1, \infty)$
13 $(3, 5)$ **15** $(-4, 4)$ **17** $\left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$
19 $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{9}{16}, \infty\right)$ **21** $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
23 $\{-2\} \cup [2, \infty)$ **25** $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup \{0\}$
27 $(-2, 0) \cup (0, 1]$ **29** $(-2, 2] \cup (5, \infty)$
31 $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ **33** $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$
35 $(-\infty, -1) \cup \left(2, \frac{7}{2}\right]$ **37** $\left(-1, \frac{2}{3}\right) \cup [6, \infty)$
39 $\left(1, \frac{5}{3}\right) \cup [2, 5]$ **41** $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
43 $[0, 2] \cup [3, 5]$ **45** $\frac{1}{2}$ s **47** $0 \le v < 30$
49 $0 < S < 4000$ **51** altura $> 25\,600$ km
53 $70.5 \le V \le 81.4$ **55** $(-3, -2) \cup (2, 4)$

CAPÍTULO 2 EJERCICIOS DE REPASO

1 $-\frac{5}{6}$ **2** 4 **3** -32 **4** No hay solución
5 Toda $x > 0$ **6** $-5, \frac{3}{2}$ **7** $-\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{10}$
8 $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{29}$ **9** $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$
10 $\pm\frac{5}{2}, \pm\sqrt{3}$ **11** $-27, 125$
12 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{11}, -\frac{2}{5}$ **13** $\frac{1}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{14}\,i$
14 $-\frac{1}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{71}\,i$ **15** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}\,i, \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\,i$
16 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{6 \pm 2\sqrt{5}}$ **17** $-\frac{3}{2}, 2$ **18** $-4, 3$
19 $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}$ **20** 8 **21** 2 **22** $-3, 1$ **23** 5
24 ± 8 **25** $2 \pm \sqrt{3}$ **26** $-5 \pm \sqrt{11}\,i$ **27** 5
28 $\left(\frac{2}{5}, \infty\right)$ **29** $\left(-\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)$ **30** $\left[\frac{13}{23}, \infty\right)$
31 $\left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$ **32** $\left(-7, \frac{7}{2}\right)$
33 $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ **34** $[0, 6]$
35 $\left(-\infty, \frac{11}{3}\right] \cup [7, \infty)$ **36** $(2, 4) \cup (8, 10)$
37 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$ **38** $[-3, 6]$
39 $(-\infty, -2) \cup \{0\} \cup [3, \infty)$
40 $(-3, -1) \cup (-1, 2]$
41 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, 9)$ **42** $(-\infty, -5) \cup [-2, 5)$
43 $(1, \infty)$ **44** $(0, 1) \cup (2, 3)$
45 $C = \dfrac{2}{P + N - 1}$ **46** $D = \dfrac{CB^3}{(A + E)^3}$
47 $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$ **48** $R = \sqrt[4]{\dfrac{8FVL}{\pi P}}$

49 $h = R \pm \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - c^2}$

50 $r = \frac{-\pi hR + \sqrt{12\pi hV - 3\pi^2h^2R^2}}{2\pi h}$ 51 $9 + 2i$

52 $-28 + 6i$ 53 $-39 + 80i$ 54 $\frac{9}{85} + \frac{2}{85}i$

55 $-\frac{9}{53} - \frac{48}{53}i$ 56 $-2 - 6i$ 57 258

58 \$79.37 59 56 60 $R_2 = \frac{10}{3}$ ohms

61 11.055% 62 \$168 000 63 $\frac{6}{11}$ hr

64 60.3 g 65 6 onzas de verduras y 4 onzas de carne

66 315.8 g de alcohol etílico y 84.2 g de agua

67 80 galones de solución al 20% y 40 galones de solución al 50%

68 260 kg

69 75 mi 70 2 71 64 mi/hr

72 $\frac{640}{11} \approx 58.2$ mi/hr 73 50 min 74 5 mi/hr

75 1 hr 40 min 76 165 mi

77 $10 - 5\sqrt{3} \approx 1.34$ mi

78 $3\sqrt{5} - 6 \approx 0.71$ micrón

79 **(a)** $d = \sqrt{2900t^2 - 200t + 4}$

(b) $t = \frac{5 + 2\sqrt{19\,603}}{145} \approx 1.97$, o aproximadamente 11:58 a.m.

80 Hay dos arreglos: 40 ft × 25 ft y 50 ft × 20 ft.

81 **(a)** $2\sqrt{2}$ ft **(b)** 2 ft 82 12 ft por 48 ft

83 10 ft por 4 ft 84 Después de $7\frac{2}{3}$ años

85 $4 \le p \le 8$

86 Más de \$100 000 87 $T > 279.57$ K

88 $\frac{\pi}{5}\sqrt{10} \le T \le \frac{2\pi}{7}\sqrt{5}$

89 $v < \frac{626.4}{\sqrt{6472}} \approx 7.786$ km/s 90 $20 \le w \le 25$

91 36 a 38 árboles/acre 92 \$990 a \$1040 93 (3)

CAPÍTULO 2 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 No 2 $\frac{-b}{2a}$

3 **(a)** $\frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i$ **(b)** Sí

(c) a y b no pueden ser 0 ambas

5 $a > 0, D \le 0$: $x \in \mathbb{R}$;
$a > 0, D > 0$: $(-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$;
$a < 0, D < 0$: $\{\,\}$;
$a < 0, D = 0$: $x = \frac{-b}{2a}$;
$a < 0, D > 0$: $[x_1, x_2]$

6 **(a)** 11 006 ft

(b) $h = \frac{1}{6}(2497D - 497G - 64\,000)$

8 $1/10^{1000}$; $cx - 2/c$ debe ser positivo

9 1 galón ≈ 0.13368 ft³; 586.85 ft²

EXAMEN DE CAPÍTULO 2

1 $x = -\frac{22}{5}$ 2 $B = \frac{5A}{2A - 3}$ 3 \$2000

4 $x = \frac{-\sqrt{15y}}{3}$ 5 $x = y - z \pm 3$

6 después de 9 y 11 segundos 7 $a = 0, b = -1$

8 $4, -2 \pm 2\sqrt{3}i$ 9 $x = \pm\frac{1}{B}\sqrt{A^2 - B^2r^2}$

10 $0, -2, 5, \pm 8$ 11 7.7% 12 440 meses

13 $\left[-\frac{13}{2}, \frac{19}{2}\right]$ 14 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [1, \infty)$

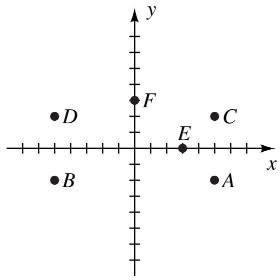
15 $\{-1\} \cup (4, 7) \cup (7, \infty)$ 16 $(-1, 3)$

17 $5 \le$ ancho ≤ 9

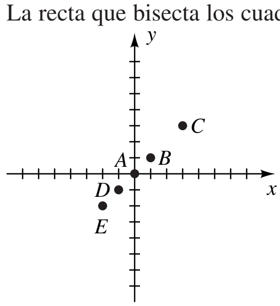
CAPÍTULO 3

EJERCICIOS 3.1

1



3 La recta que bisecta los cuadrantes I y III



5 $A(3, 3)$, $B(-3, 3)$, $C(-3, -3)$, $D(3, -3)$, $E(1, 0)$, $F(0, 3)$

7 **(a)** La recta paralela al eje y que intersecta al eje x en $(-2, 0)$

(b) La recta paralela al eje x que intersecta al eje y en $(0, 5)$

(c) Todos los puntos a la derecha del eje y y sobre éste

(d) Todos los puntos de los cuadrantes I y III

(e) Todos los puntos abajo del eje x

(f) Todos los puntos sobre el eje y

9 **(a)** $\sqrt{29}$ **(b)** $\left(5, -\frac{1}{2}\right)$

11 **(a)** $\sqrt{41}$ **(b)** $\left(-\frac{9}{2}, -2\right)$

13 **(a)** 4 **(b)** $(5, -3)$

15 $d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$; área = 20

17 $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A)$ y $d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$

19 $(13, -28)$ **21** $d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{58}$

23 $5x + 2y = 3$

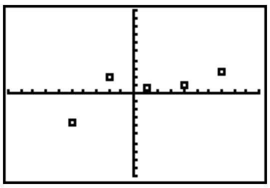
25 $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$; una circunferencia de radio 5 con centro en el origen

27 $(0, 3 + \sqrt{11}), (0, 3 - \sqrt{11})$ **29** $(-2, -1)$

31 $a < \frac{2}{5}$ o $a > 4$

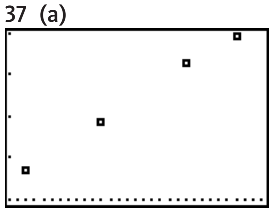
33 Sea M el punto medio de la hipotenusa. Demuestre que $d(A, M) = d(B, M) = d(O, M) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

35



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

37 **(a)**



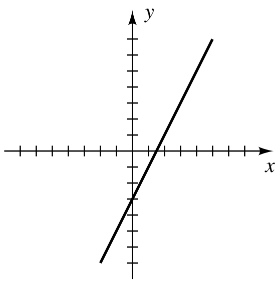
$[1982, 2012]$ por $[80 \times 10^3, 120 \times 10^3, 10 \times 10^3]$

(b) El número es creciente.

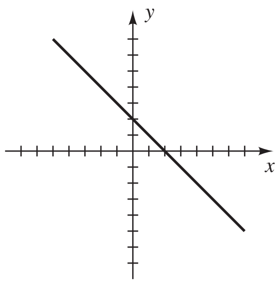
EJERCICIOS 3.2

Ejer. 1–20: intersección(es) con el eje x se muestra(n), seguida(s) por intersección(es) con el eje y.

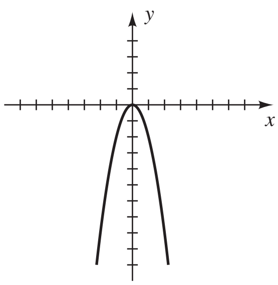
1 1.5; -3



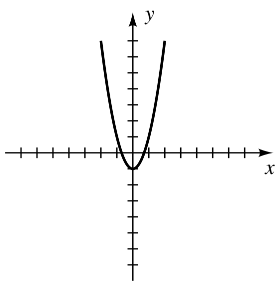
3 2; 2



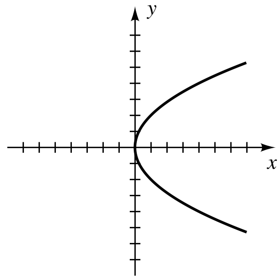
5 0; 0



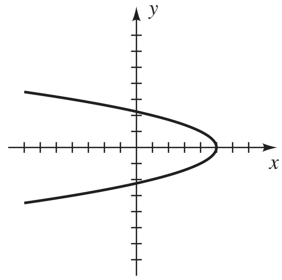
7 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$; -1



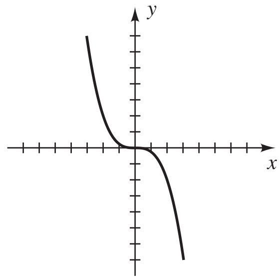
9 0; 0



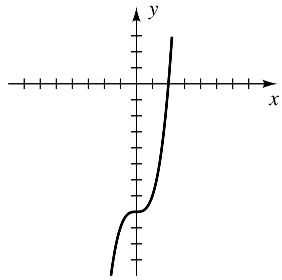
11 5; $\pm\sqrt{5}$



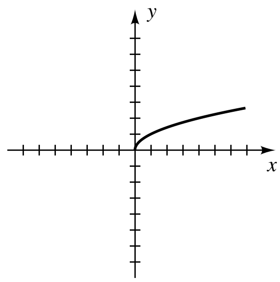
13 0; 0



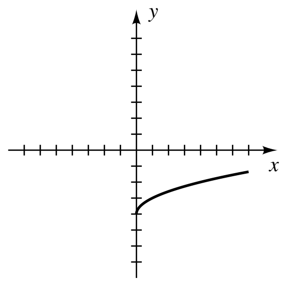
15 2; -8



17 0; 0



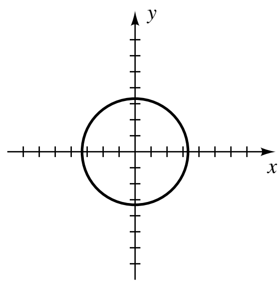
19 16; -4



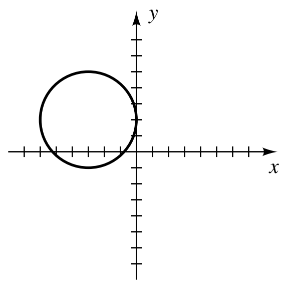
21 **(a)** 5, 7 **(b)** 9, 11 **(c)** 13

23 **(a)** 2 **(b)** 1 **(c)** 4 **(d)** ∞ **(e)** $-\infty$

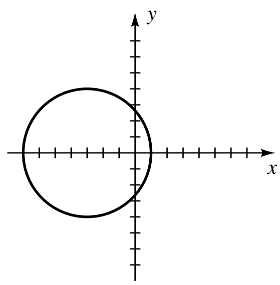
25



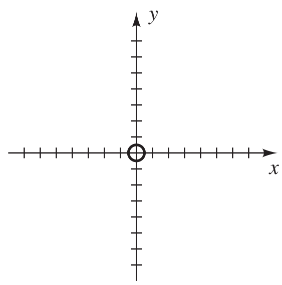
27



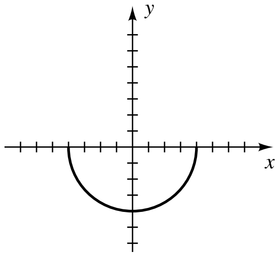
29



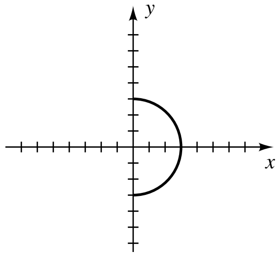
31



33



35



37 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ **39** $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = 5$

41 $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 74$

43 $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 9$

45 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

47 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 34$ **49** $C(2, -3)$; $r = 7$

51 $C(0, -2)$; $r = \sqrt{11}$ **53** $C(3, -1)$; $r = \frac{1}{2}\sqrt{70}$

55 $C(-2, 1)$; $r = 0$ (un punto)

57 No es una circunferencia, porque r^2 no puede ser igual a -4

59 $y = \sqrt{25 - x^2}$; $y = -\sqrt{25 - x^2}$; $x = \sqrt{25 - y^2}$; $x = -\sqrt{25 - y^2}$

61 $y = -1 + \sqrt{49 - (x - 2)^2}$; $y = -1 - \sqrt{49 - (x - 2)^2}$; $x = 2 + \sqrt{49 - (y + 1)^2}$; $x = 2 - \sqrt{49 - (y + 1)^2}$

63 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$ **65** $y = -\sqrt{4^2 - x^2}$

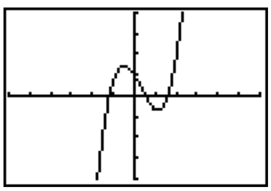
67 **(a)** Dentro **(b)** Sobre **(c)** Fuera

69 **(a)** 2 **(b)** $3 \pm \sqrt{5}$

71 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ **73** $\sqrt{5}$

75 $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$ **77** $(-1, 0) \cup (0, 1)$ **79** (2)

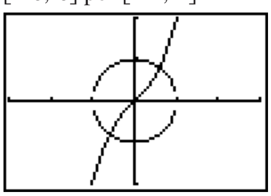
81



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$-1.2, 0.5, 1.6$

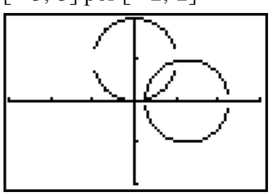
83



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

$(0.6, 0.8), (-0.6, -0.8)$

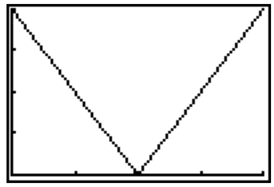
85



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

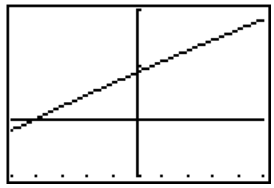
$(0.999, 0.968)$, $(0.251, 0.032)$

87



$[0, 4]$ por $[0, 4]$

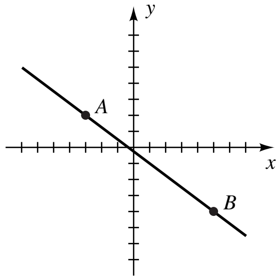
89 **(a)** 1126 ft/s **(b)** -42°C



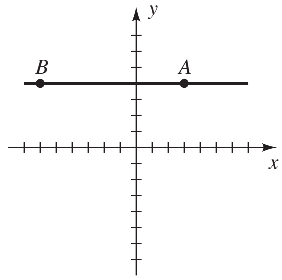
$[-50, 50, 10]$ por $[900, 1200, 100]$

EJERCICIOS 3.3

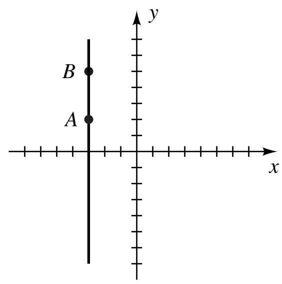
1 $m = -\frac{3}{4}$



3 $m = 0$



5 m no está definida

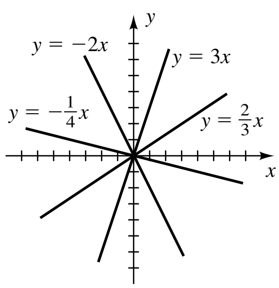


7 Las pendientes de lados opuestos son iguales.

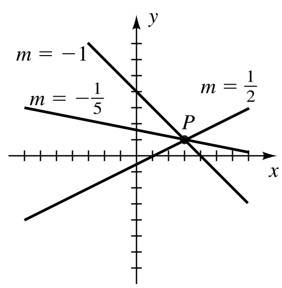
9 Las pendientes de lados opuestos son iguales, y las pendientes de dos lados adyacentes son recíprocos negativos.

11 $(-12, 0)$

13

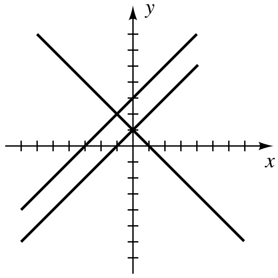


15

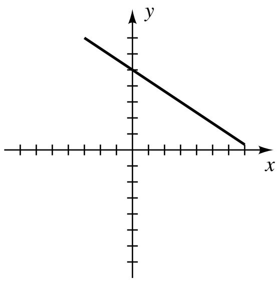


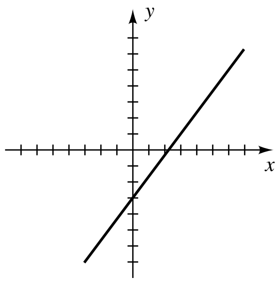
17 $y + 3 = \pm\frac{5}{4}(x - 2)$

19

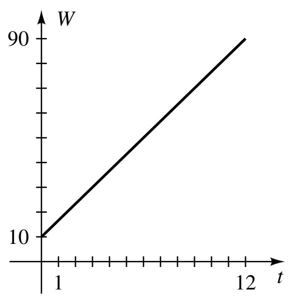


21 **(a)** $x = 3$ **(b)** $y = -1$ **23** $4x + y = 17$
25 $x + 3y = 7$ **27** $11x + 7y = 9$
29 $5x - 2y = 17$ **31** $5x + 2y = 29$
33 $y = \frac{3}{4}x - 3$ **35** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$
37 $5x - 7y = -15$ **39** $y = -x$
41 $m = -\frac{2}{3}, b = 5$ **43** $m = \frac{4}{3}, b = -3$



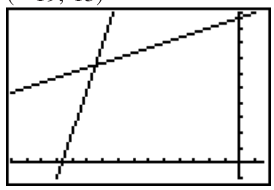


45 **(a)** $y = 3$ **(b)** $y = -\frac{1}{2}x$ **(c)** $y = -\frac{3}{2}x + 1$
(d) $y + 2 = -(x - 3)$
47 $\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} = 1$ **49** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$
51 Aproximadamente 23 semanas
53 **(a)** 25.2 tons **(b)** De hasta 3.4 tons
55 **(a)** $y = \frac{5}{14}x$ **(b)** 58
57 **(a)** $W = \frac{20}{3}t + 10$ **(b)** 50 lb **(c)** 9 años
(d)

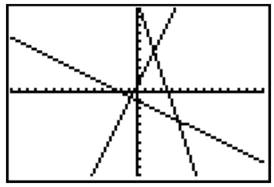


59 $H = -\frac{8}{3}T + \frac{7520}{3}$
61 **(a)** $T = 0.032t + 13.5$ **(b)** 16.86°C
63 **(a)** $E = 0.55R + 3600$ **(b)** $P = 0.45R - 3600$
(c) \$8000
65 **(a)** Sí: la criatura en $x = 3$ **(b)** No
67 34.95 mi/hr **69** $a = 0.321$; $b = -0.9425$

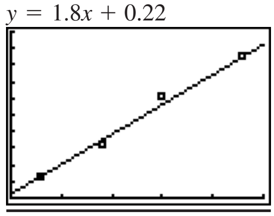
71 $(-19, 13)$



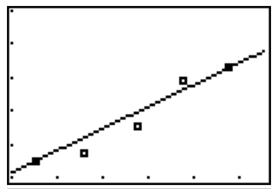
[−30, 3, 2] por [−2, 20, 2]
73 $(-0.8, -0.6)$, $(4.8, -3.4)$, $(2, 5)$; triángulo rectángulo isósceles



[−15, 15] por [−10, 10]
75 $y = 1.8x + 0.22$



[0, 5] por [0, 10]
77 **(b)** $D = 0.033Y - 47.545$



[1900, 2010, 20] por [15, 20]
(c) 17.96 m
(d) El récord de distancia se incrementa aproximadamente 0.033 m/año.

EJERCICIOS 3.4

1 $-6, -4, -24$ **3** $10, 20, 36$
5 **(a)** $5a - 2$ **(b)** $-5a - 2$ **(c)** $-5a + 2$
(d) $5a + 5h - 2$ **(e)** $5a + 5h - 4$ **(f)** 5
7 **(a)** $-a^2 + 3$ **(b)** $-a^2 + 3$ **(c)** $a^2 - 3$
(d) $-a^2 - 2ah - h^2 + 3$ **(e)** $-a^2 - h^2 + 6$
(f) $-2a - h$
9 **(a)** $a^2 - a + 3$ **(b)** $a^2 + a + 3$ **(c)** $-a^2 + a - 3$
(d) $a^2 + 2ah + h^2 - a - h + 3$
(e) $a^2 + h^2 - a - h + 6$ **(f)** $2a + h - 1$
11 **(a)** $\frac{4}{a^2}$ **(b)** $\frac{1}{4a^2}$ **(c)** $4a$ **(d)** $2a$
13 **(a)** $\frac{2a}{a^2 + 1}$ **(b)** $\frac{a^2 + 1}{2a}$ **(c)** $\frac{2\sqrt{a}}{a + 1}$
(d) $\frac{\sqrt{2a^3 + 2a}}{a^2 + 1}$
15 La gráfica es de una función porque pasa la prueba de la recta vertical.

17 $D = [-4, 1] \cup [2, 4)$; $R = [-3, 3)$

19 **(a)** $[-3, 4]$ **(b)** $[-2, 2]$ **(c)** 0 **(d)** $-1, \frac{1}{2}, 2$

(e) $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 4]$

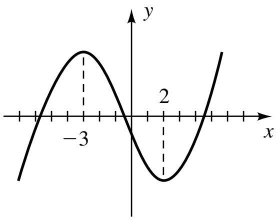
21 $\left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$ **23** $[-4, 4]$

25 Todos los números reales excepto -3, 0, y 3

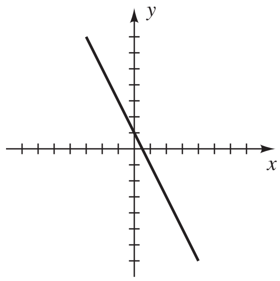
27 $\left[\frac{5}{2}, 4\right) \cup (4, \infty)$ **29** $(2, \infty)$ **31** $[-3, 3]$

33 **(a)** $D = [-5, -3) \cup (-1, 1] \cup (2, 4]$; $R = \{-3\} \cup [-1, 4]$
(b) Creciente en $[-4, -3) \cup [3, 4]$; decreciente en $[-5, -4] \cup (2, 3]$; constante en $(-1, 1]$

35

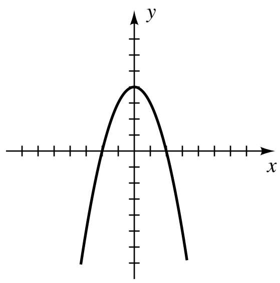


37 **(a)**



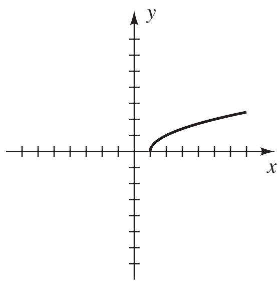
(b) $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$
(c) Decreciente en $(-\infty, \infty)$

39 **(a)**



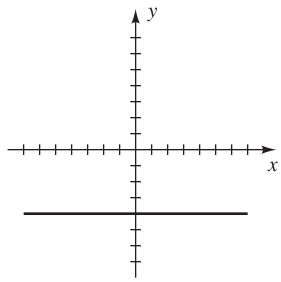
(b) $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 4]$
(c) Creciente en $(-\infty, 0]$, decreciente en $[0, \infty)$

41 **(a)**



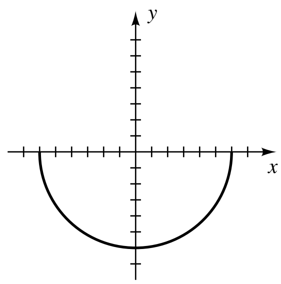
(b) $D = [1, \infty)$, $R = [0, \infty)$
(c) Creciente en $[1, \infty)$

43 **(a)**



(b) $D = (-\infty, \infty)$, $R = \{-4\}$
(c) Constante en $(-\infty, \infty)$

45 **(a)**



(b) $D = [-6, 6]$, $R = [-6, 0]$
(c) Decreciente en $[-6, 0]$, creciente en $[0, 6]$

47 $h - 2$

49 $2x + h$ **51** $\frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{a-3}}$

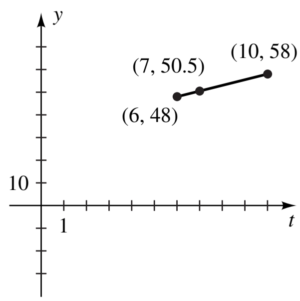
53 $f(x) = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ **55** Sí **57** No **59** Sí

61 No **63** No **65** $V(x) = 4x(15 - x)(10 - x)$

67 **(a)** $y(x) = \frac{500}{x}$ **(b)** $C(x) = 300x + \frac{100\,000}{x} - 600$

69 $S(h) = 6h - 50$

71 **(a)** $y(t) = 2.5t + 33$
(b)



Aumento anual en altura

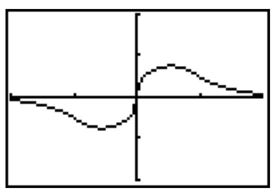
(c) 58 in.

73 $d(t) = 2\sqrt{t^2 + 2500}$

75 **(a)** $y(h) = \sqrt{h^2 + 2hr}$ **(b)** 1280.6 mi

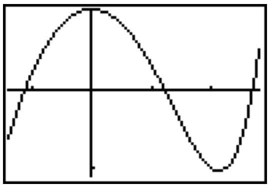
77 $d(x) = \sqrt{90\,400 + x^2}$

79 **(a)**



$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

(b) $[-0.75, 0.75]$
(c) Decreciente en $[-2, -0.55]$ y en $[0.55, 2]$, creciente en $[-0.55, 0.55]$

81 **(a)** 

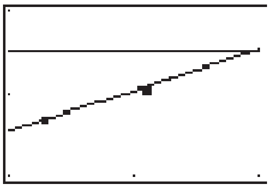
[−0.7, 1.4, 0.5] por [−1.1, 1]

(b) [−1.03, 1] **(c)** Creciente en [−0.7, 0] y en [1.06, 1.4], decreciente en [0, 1.06]

83 **(a)** 8 **(b)** ±8 **(c)** No hay soluciones reales **(d)** 625 **(e)** No hay soluciones reales

85 **(a)** 5985 **(b)** A lo sumo 95

87 **(a)** $f(x) = \frac{3485}{7}x - \frac{6\,827\,508}{7}$



[1990, 2010, 10] por [10 000, 30 000, 10 000]

(b) Promedio de aumento anual en el precio pagado por un auto nuevo

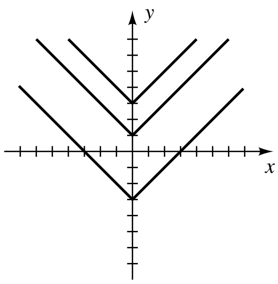
(c) 2009

EJERCICIOS 3.5

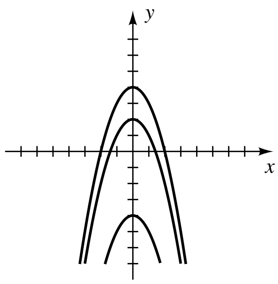
1 $f(-2) = 7$, $g(-2) = 6$

3 Impar **5** Par **7** Ninguno **9** Par **11** Impar

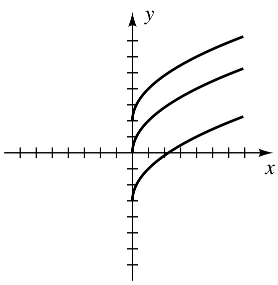
13



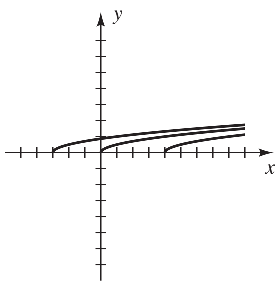
15



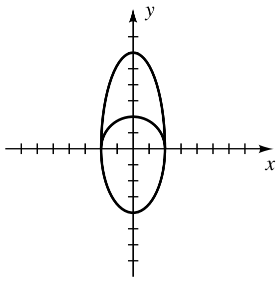
17



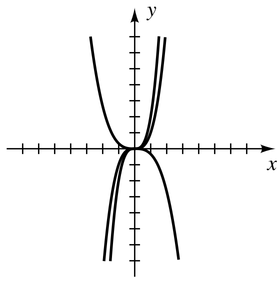
19



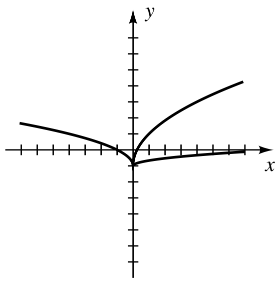
21



23



25



27 (−2, 4) **29** (7, −3) **31** (8, 2)

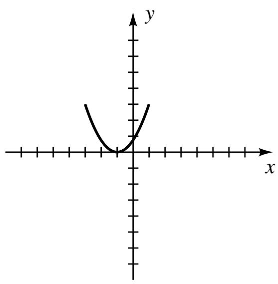
33 La gráfica de *f* está desplazada 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba.

35 La gráfica de *f* está reflejada alrededor del eje *y* y desplazada 4 unidades hacia abajo.

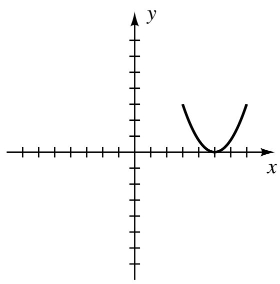
37 La gráfica de *f* está comprimida verticalmente en un factor de 2 y reflejada alrededor del eje *x*.

39 La gráfica de *f* está estirada horizontalmente en un factor de 3, estirada verticalmente en un factor de 2 y reflejada alrededor del eje *x*.

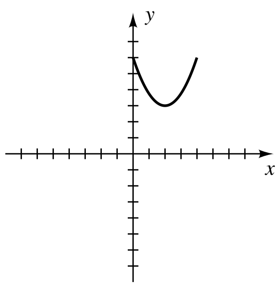
41 **(a)**



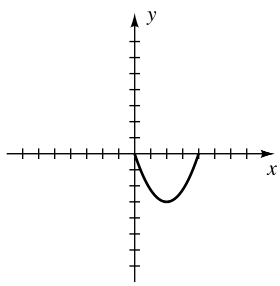
(b)



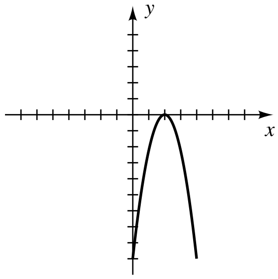
(c)



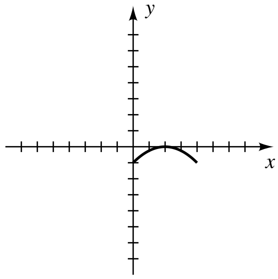
(d)



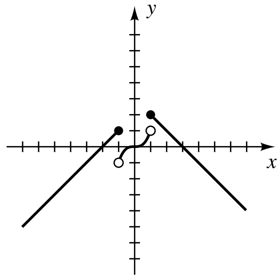
(e)



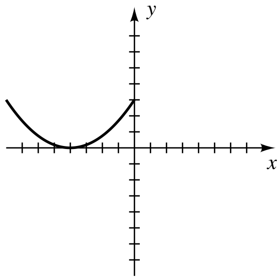
(f)



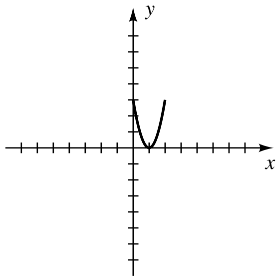
51



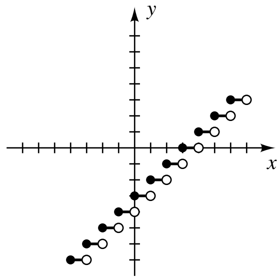
(g)



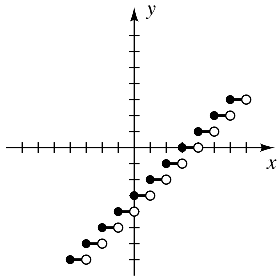
(h)



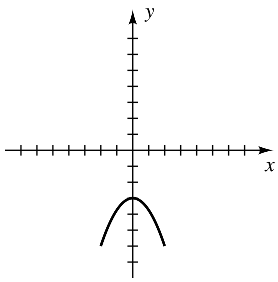
53 (a)



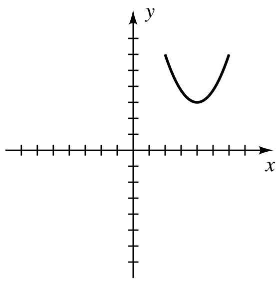
(b)



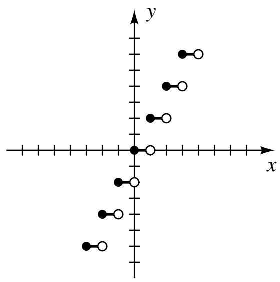
(i)



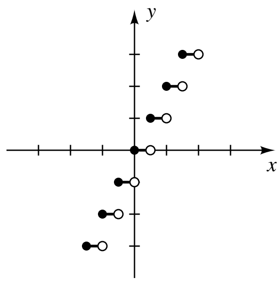
(j)



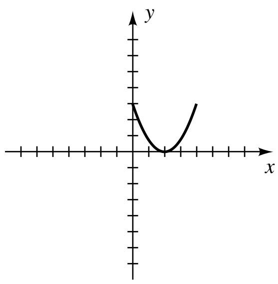
(c)



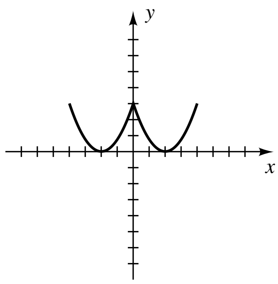
(d)



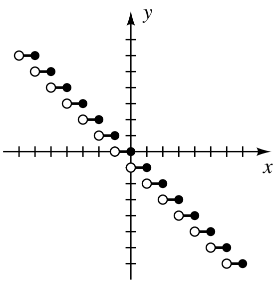
(k)



(l)



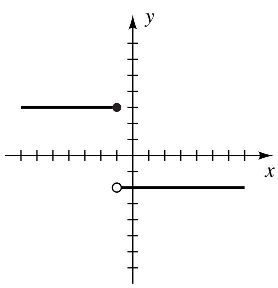
(e)



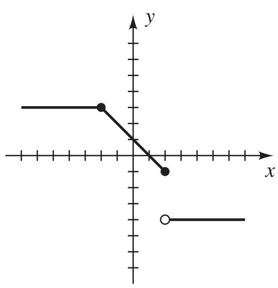
43 **(a)** $y = f(x + 9) + 1$ **(b)** $y = -f(x)$
(c) $y = -f(x + 7) - 1$

45 **(a)** $y = f(x + 4)$ **(b)** $y = f(x) + 1$ **(c)** $y = f(-x)$

47



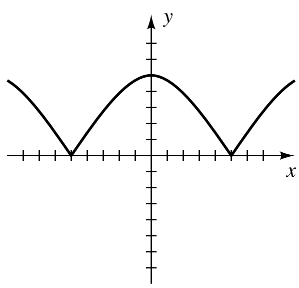
49



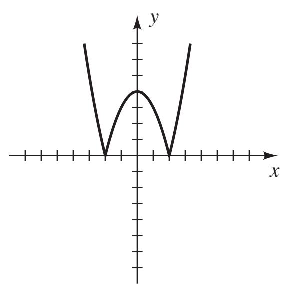
55 **(a)** 0 **(b)** 2 **(c)** 1 **(d)** 4 **(e)** $-\infty$

57 Si $x > 0$, dos puntos diferentes en la gráfica tienen coordenada x en x.

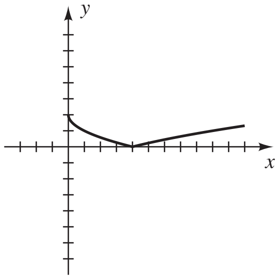
59



61



63



65 **(a)** $D = [-2, 6]$, $R = [-16, 8]$
(b) $D = [-4, 12]$, $R = [-4, 8]$
(c) $D = [1, 9]$, $R = [-3, 9]$
(d) $D = [-4, 4]$, $R = [-7, 5]$
(e) $D = [-6, 2]$, $R = [-4, 8]$
(f) $D = [-2, 6]$, $R = [-8, 4]$
(g) $D = [-6, 6]$, $R = [-4, 8]$
(h) $D = [-2, 6]$, $R = [0, 8]$

67 $T(x) = \begin{cases} 0.15x & \text{si } 0 \le x \le 20\,000 \\ 0.20x - 1000 & \text{si } x > 20\,000 \end{cases}$

69 $R(x) = \begin{cases} 1.20x & \text{si } 0 \le x \le 10\,000 \\ 1.50x - 3000 & \text{si } 10\,000 < x \le 15\,000 \\ 1.80x - 7500 & \text{si } x > 15\,000 \end{cases}$

71 $(-3.12, 22)$

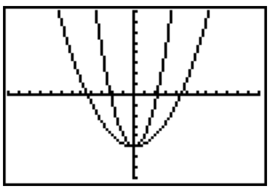
73 $(-\infty, -3) \cup (-3, 1.87) \cup (4.13, \infty)$

75



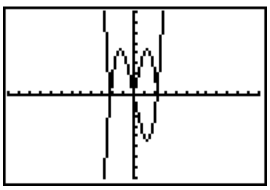
$[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

77



$[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

79



$[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

81 **(a)** \$300, \$360

(b) $C_1(x) = \begin{cases} 180 & \text{si } 0 \le x \le 200 \\ 180 + 0.40(x - 200) & \text{si } x > 200 \end{cases}$

$C_2(x) = 235 + 0.25x$ para $x \ge 0$

(c)

x	Y_1	Y_2
100	180	260
200	180	285
300	220	310
400	260	335
500	300	360
600	340	385
700	380	410
800	420	435
900	460	460
1000	500	485
1100	540	510
1200	580	535

(d) I si $x \in [0, 900)$, II si $x > 900$

EJERCICIOS 3.6

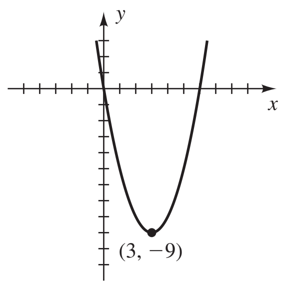
1 $y = a(x + 3)^2 + 1$ **3** $y = ax^2 - 2$

5 $f(x) = -(x + 2)^2 - 1$ **7** $f(x) = 2(x - 4)^2 + 3$

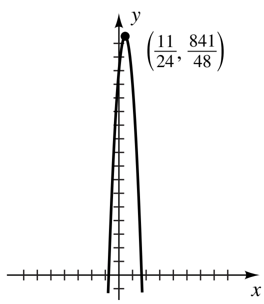
9 $f(x) = -3(x + 1)^2 - 2$

11 $f(x) = -\frac{3}{4}(x - 6)^2 - 7$

13 **(a)** 0, 6
(b) Mín: $f(3) = -9$
(c)



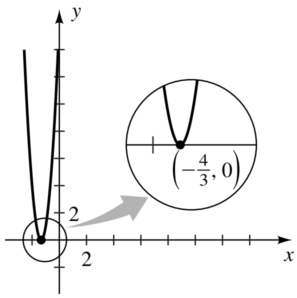
15 **(a)** $-\frac{3}{4}, \frac{5}{3}$
(b) Máx: $f\left(\frac{11}{24}\right) = \frac{841}{48}$
(c)



17 **(a)** $-\frac{4}{3}$

(b) Mín: $f\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$

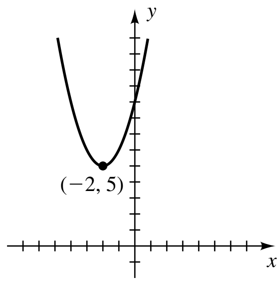
(c)



19 **(a)** Ninguno

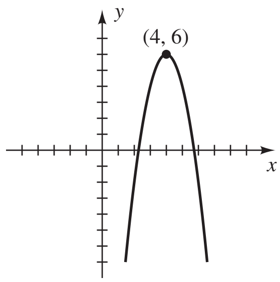
(b) Mín: $f(-2) = 5$

(c)



21 **(a)** $4 \pm \sqrt{3} \approx 5.73, 2.27$ **(b)** Máx: $f(4) = 6$

(c)



23 $y = \frac{1}{8}(x - 4)^2 - 1$ **25** $y = -\frac{5}{16}(x + 2)^2 + 5$

27 $y = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 4)$

29 $y = 3(x - 0)^2 - 2$ **31** $y = -\frac{1}{9}(x - 3)^2 + 1$

33 $y = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 4$ **35** 6.125 **37** 24.72 km

39 10.5 lb **41** **(a)** 424 ft **(b)** 100 ft **43** 20 y 20

45 **(a)** $y(x) = 250 - \frac{3}{4}x$ **(b)** $A(x) = x\left(250 - \frac{3}{4}x\right)$

(c) $166\frac{2}{3}$ ft por 125 ft

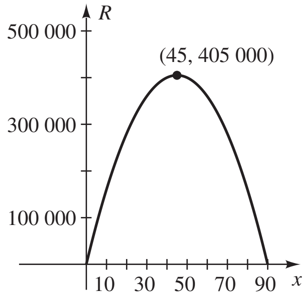
47 $y = -\frac{4}{27}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + 3$

49 **(a)** $y = \frac{1}{500}x^2 + 10$ **(b)** 282 ft **51** 2 ft

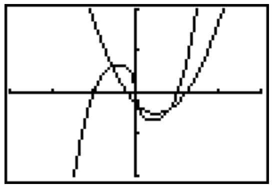
53 500 pares

55 **(a)** $R(x) = 200x(90 - x)$

(b) \$45



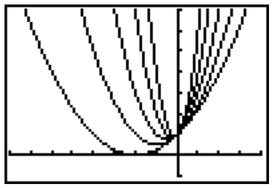
57



$(-0.57, 0.64)$,
$(0.02, -0.27)$,
$(0.81, -0.41)$

$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

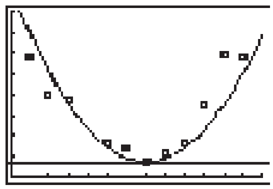
59



Resultan valores más pequeños de a en una parábola más ancha; mayores valores de a resultan en una parábola más angosta.

$[-8, 4]$ por $[-1, 7]$

61 **(b)** $f(x) = 0.17(x - 7)^2 + 0.77$

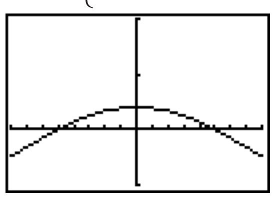


$[0, 13]$ por $[0, 8]$

(c) 2.3 in.

63 **(a)** $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{25}x + 80 & \text{si } -800 \leq x < -500 \\ -\frac{1}{6250}x^2 + 40 & \text{si } -500 \leq x \leq 500 \\ -\frac{4}{25}x + 80 & \text{si } 500 < x \leq 800 \end{cases}$

(b)



$[-800, 800, 100]$ por $[-100, 200, 100]$

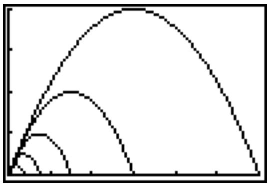
65 **(a)** $f(x) = -\frac{4}{225}x^2 + \frac{8}{3}x$

(b)



$[0, 180, 50]$ por $[0, 120, 50]$

(c)



$[0, 600, 50]$ por $[0, 400, 50]$

El valor de k afecta la altura y la distancia recorrida en un factor de $\frac{1}{k}$.

EJERCICIOS 3.7

1 **(a)** 15 **(b)** -3 **(c)** 54 **(d)** $\frac{2}{3}$

3 **(a)** $3x^2 + 1$; $3 - x^2$; $2x^4 + 3x^2 - 2$; $\frac{x^2 + 2}{2x^2 - 1}$

(b) $\mathbb{R}$ **(c)** Todos los números reales excepto $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

5 **(a)** $2\sqrt{x + 5}$; 0; $x + 5$; 1 **(b)** $[-5, \infty)$ **(c)** $(-5, \infty)$

7 **(a)** $\frac{3x^2 + 6x}{(x - 4)(x + 5)}$; $\frac{x^2 + 14x}{(x - 4)(x + 5)}$; $\frac{2x^2}{(x - 4)(x + 5)}$; $\frac{2(x + 5)}{x - 4}$

(b) Todos los números reales excepto -5 y 4

(c) Todos los números reales excepto -5, 0, y 4

9 **(a)** $-2x^2 - 1$ **(b)** $-4x^2 + 4x - 1$ **(c)** $4x - 3$

(d) $-x^4$

11 **(a)** $6x + 3$ **(b)** $6x - 11$ **(c)** -9 **(d)** 7

13 **(a)** $75x^2 + 4$ **(b)** $15x^2 + 20$ **(c)** 304 **(d)** 155

15 **(a)** $8x^2 - 2x - 5$ **(b)** $4x^2 + 6x - 9$ **(c)** 31

(d) 45

17 **(a)** $8x^3 - 20x$ **(b)** $128x^3 - 20x$ **(c)** -24

(d) 3396

19 **(a)** 7 **(b)** -7 **(c)** 7 **(d)** -7

21 **(a)** $x + 2 - 3\sqrt{x + 2}$; $[-2, \infty)$

(b) $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$; $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

23 **(a)** $3x - 4$; $[0, \infty)$

(b) $\sqrt{3x^2 - 12}$; $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

25 **(a)** $\sqrt{\sqrt{x + 5} - 2}$; $[-1, \infty)$

(b) $\sqrt{\sqrt{x - 2} + 5}$; $[2, \infty)$

27 **(a)** $\sqrt{3 - \sqrt{x^2 - 16}}$; $[-5, -4] \cup [4, 5]$

(b) $\sqrt{-x - 13}$; $(-\infty, -13]$

29 **(a)** x; $\mathbb{R}$ **(b)** x; $\mathbb{R}$

31 **(a)** $\frac{1}{x^6}$; todos los números reales diferentes de cero

(b) $\frac{1}{x^6}$; todos los números reales diferentes de cero

33 **(a)** $\frac{1}{5 - x}$; todos los números reales excepto 4 y 5

(b) $\frac{-2x + 5}{-3x + 7}$; todos los números reales excepto 2 y $\frac{7}{3}$

35 $-3 \pm \sqrt{2}$

37 **(a)** 5 **(b)** 6 **(c)** 6 **(d)** 5 **(e)** No es posible

39 $20\sqrt{x^2 + 1}$ **41** Impar **43** 40.16

45 $A(t) = 25\pi t^2$ **47** $r(t) = 9\sqrt[3]{t}$

49 $h(t) = 5\sqrt{t^2 + 8t}$

51 $d(t) = \sqrt{90{,}400 + (500 + 150t)^2}$

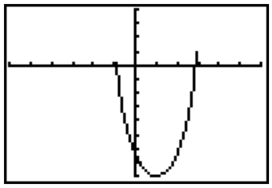
Ejer. 53–60: Las respuestas no son únicas.

53 $u = x^2 + 5x$, $y = u^{1/3}$ **55** $u = x - 3$, $y = u^{-6}$

57 $u = x^4 - 2x^2 + 5$, $y = u^5$

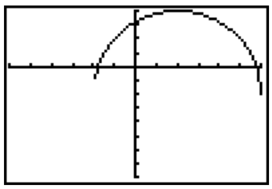
59 $u = \sqrt{x + 4}$, $y = \frac{u - 2}{u + 2}$ **61** 5×10^{-13}

63 **(a)** $Y_1 = x$, grafique $Y_3 = -2Y_2$



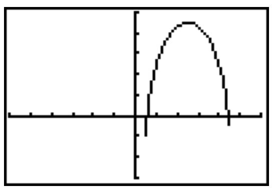
$[-12, 12, 2]$ por $[-16, 8, 2]$

(b) $Y_1 = 0.5x$, grafique Y_2



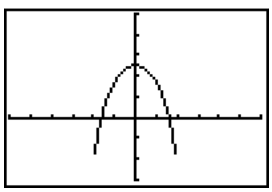
$[-12, 12, 2]$ por $[-16, 8, 2]$

(c) $Y_1 = x - 3$, grafique $Y_3 = Y_2 + 1$



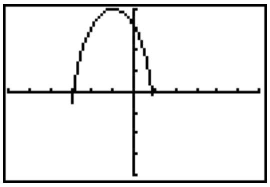
$[-12, 12, 2]$ por $[-6, 10, 2]$

(d) $Y_1 = x + 2$, grafique $Y_3 = Y_2 - 3$



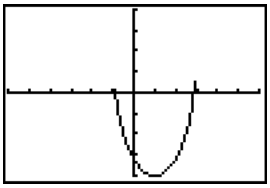
$[-12, 12, 2]$ por $[-6, 10, 2]$

(e) $Y_1 = -x$, grafique Y_2



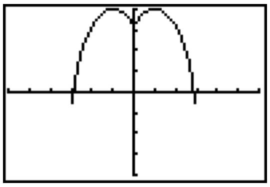
$[-12, 12, 2]$ por $[-8, 8, 2]$

(f) $Y_1 = x$, grafique $Y_3 = -Y_2$



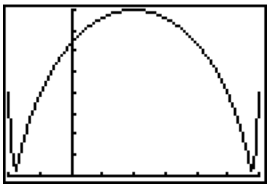
$[-12, 12, 2]$ por $[-8, 8, 2]$

(g) $Y_1 = \text{abs } x$, grafique Y_2



$[-12, 12, 2]$ por $[-8, 8, 2]$

(h) $Y_1 = x$, grafique $Y_3 = \text{abs } Y_2$



$[-2, 6]$ por $[0, 8]$

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS DE REPASO

1 Los puntos en los cuadrantes II y IV

2 $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(B, C)^2$; área $= 10$

3 **(a)** $\sqrt{265}$ **(b)** $\left(-\frac{13}{2}, 1\right)$ **(c)** $(-11, -23)$

4 $(0, 3), (0, 13)$ **5** $-2 < a < 1$

6 $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 162$

7 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 169$

8 $x = -2 - \sqrt{7 - y^2}$ **9** $-\frac{13}{17}$

10 La pendiente de AD y BC es $\frac{2}{3}$.

11 **(a)** $18x + 6y = 7$ **(b)** $2x - 6y = 3$

12 $y = -\frac{8}{3}x + 5$ **13** $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 81$

14 $x + y = -3$ **15** $4x - y = 19$

16 $2x - 3y = 5$ **17** $C(0, 6)$; $r = \sqrt{5}$

18 $C(-3, 2)$; $r = \frac{1}{2}\sqrt{11}$

19 **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(c)** 0 **(d)** $-\frac{x}{\sqrt{3 - x}}$

(e) $-\frac{x}{\sqrt{x + 3}}$ **(f)** $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}$ **(g)** $\frac{x^2}{x + 3}$

20 Positivo **21** Negativo

22 **(a)** $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$; $[0, \infty)$

(b) Todos los números reales excepto -4; $(0, \infty)$

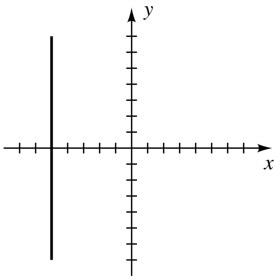
23 $-2a - h + 1$ **24** $-\frac{1}{(a + h + 4)(a + 4)}$

25 $f(x) = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$

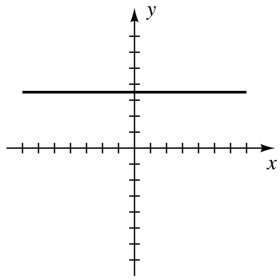
26 **(a)** Impar **(b)** Ninguno **(c)** Par

Ejer. 27–40: intersección(es) con el eje x se muestran, seguidas por intersección(es) con el eje y.

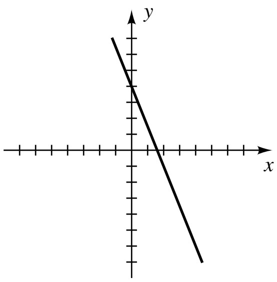
27 -5; ninguno



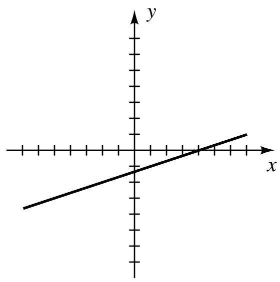
28 Ninguno; 3.5



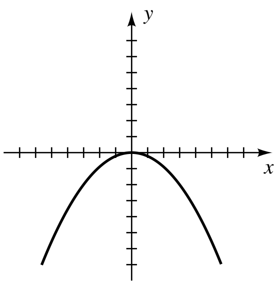
29 1.6; 4



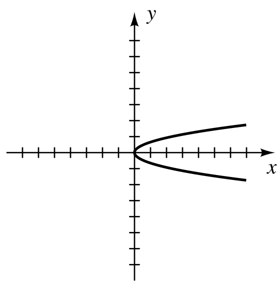
30 4; $-\frac{4}{3}$



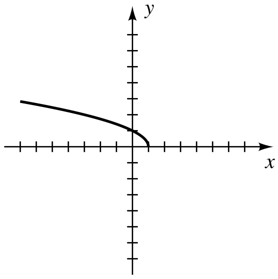
31 0; 0



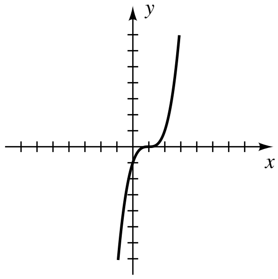
32 0; 0



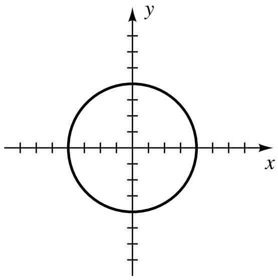
33 1; 1



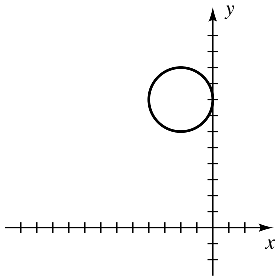
34 1; -1



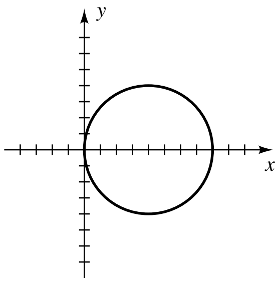
35 ± 4; ± 4



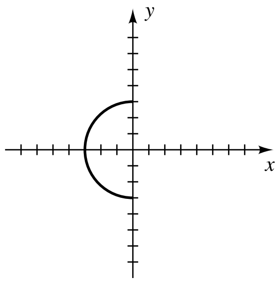
36 Ninguna; 8



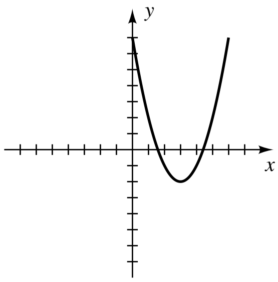
37 0, 8; 0



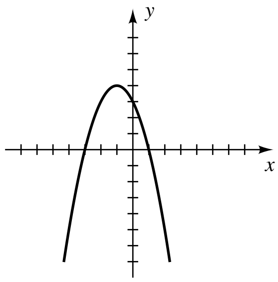
38 -3; ± 3



39 $3 \pm \sqrt{2}$; 7



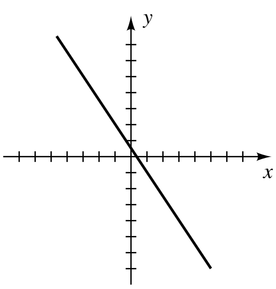
40 $-3, 1$; 3



41 $\left(\sqrt{8}, \sqrt{8}\right)$

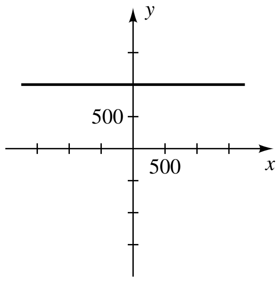
42 La gráfica de $y = -f(x - 2)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la derecha 2 unidades y reflejada alrededor del eje x.

43 **(a)**



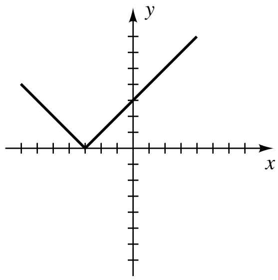
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = \mathbb{R}$
(c) Decreciente en $(-\infty, \infty)$

44 **(a)**



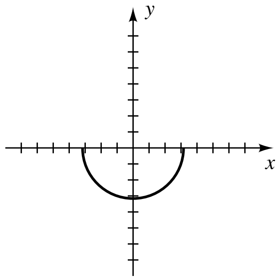
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = \{1000\}$
(c) Constante en $(-\infty, \infty)$

45 **(a)**



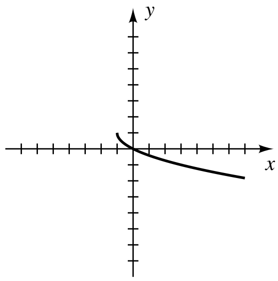
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = [0, \infty)$
(c) Decreciente en $(-\infty, -3]$, creciente en $[-3, \infty)$

46 **(a)**



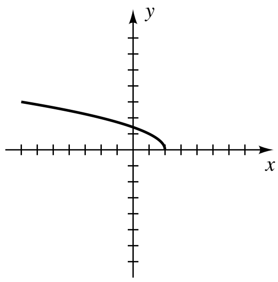
(b) $D = \left(-\sqrt{10}, \sqrt{10}\right)$; $R = \left(-\sqrt{10}, 0\right)$
(c) Decreciente en $\left[-\sqrt{10}, 0\right]$, creciente en $\left[0, \sqrt{10}\right]$

47 **(a)**



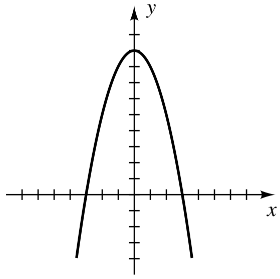
(b) $D = [-1, \infty)$; $R = (-\infty, 1]$
(c) Decreciente en $[-1, \infty)$

48 **(a)**



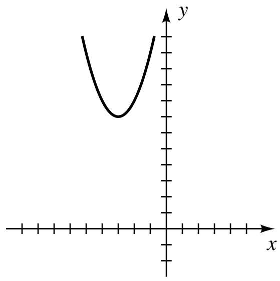
(b) $D = (-\infty, 2]$; $R = [0, \infty)$
(c) Decreciente en $(-\infty, 2]$

49 **(a)**



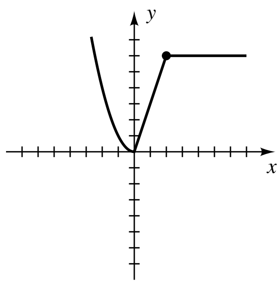
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = (-\infty, 9]$
(c) Creciente en $(-\infty, 0]$, decreciente en $[0, \infty)$

50 **(a)**



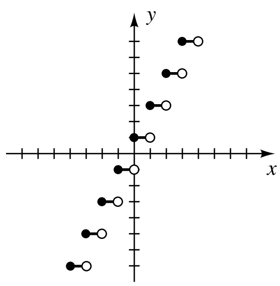
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = [7, \infty)$
(c) Decreciente en $(-\infty, -3]$, creciente en $[-3, \infty)$

51 **(a)**



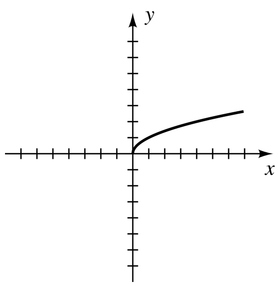
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = [0, \infty)$
(c) Decreciente en $(-\infty, 0]$, creciente en $[0, 2]$, constante en $[2, \infty)$

52 **(a)**

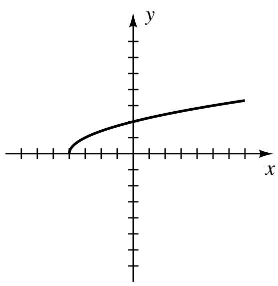


(b) $D = \mathbb{R}$; $R = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$
(c) Constante en $[n, n + 1)$, donde n es cualquier entero

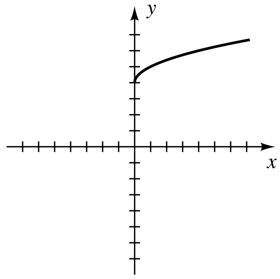
53 **(a)**



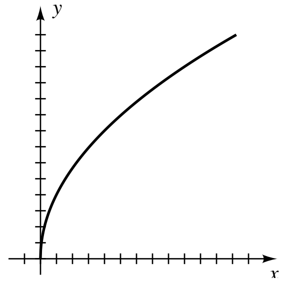
(b)



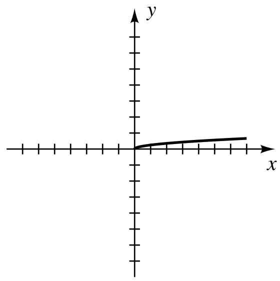
(c)



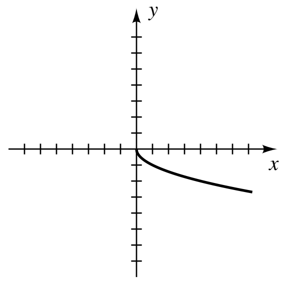
(d)



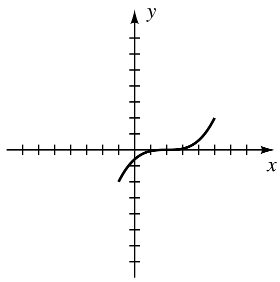
(e)



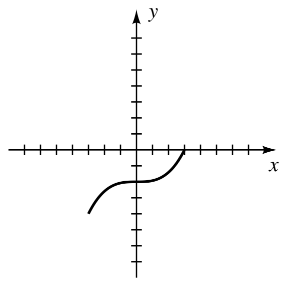
(f)



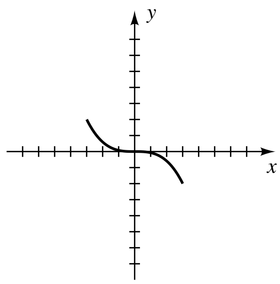
54 **(a)**



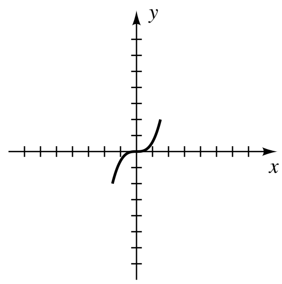
(b)



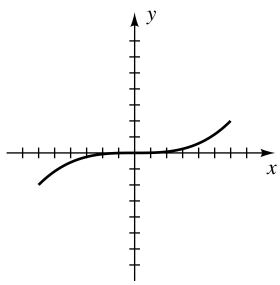
(c)



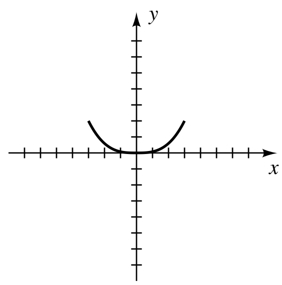
(d)



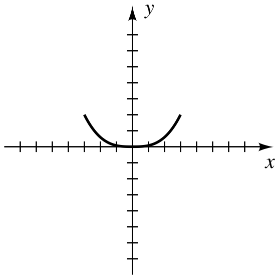
(e)



(f)



(g)



55 $2x - 5y = 10$ **56** $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

57 $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 4$ **58** $y = -|x - 2| - 1$

59 Mín: $f(4) = -2$ **60** Máx: $f(-3) = 6$

61 Máx: $f(-4) = 20$ **62** Mín: $f(4) = -108$

63 $f(x) = -2(x - 3)^2 + 4$ **64** $y = -\frac{3}{4}(x - 3)^2 - 2$

65 **(a)** $[0, 3]$ **(b)** $(0, 3]$ **66** **(a)** -3 **(b)** $\sqrt{11}$

67 **(a)** $18x^2 + 9x - 1$ **(b)** $6x^2 - 15x + 5$

68 **(a)** $\sqrt{\frac{3 + 2x^2}{x^2}}$ **(b)** $\frac{1}{3x + 2}$

69 **(a)** $\sqrt{28 - x}$; $[3, 28]$
(b) $\sqrt{\sqrt{25 - x^2} - 3}$; $[-4, 4]$

70 **(a)** $\frac{1}{x + 3}$; todos los números reales excepto -3 y 0
(b) $\frac{6x + 4}{x}$; todos los números reales excepto $-\frac{2}{3}$ y 0

71 $u = x^2 - 5x$, $y = \sqrt[3]{u}$

72 Entre 36.1 ft y 60.1 ft

73 **(a)** 253.42 ft **(b)** 2028

74 **(a)** $V = 6000t + 179\,000$ **(b)** $2\frac{1}{3}$

75 **(a)** $F = \frac{9}{5}C + 32$ **(b)** 1.8°F

76 **(a)** $C_1(x) = \frac{3}{20}x$ **(b)** $C_2(x) = \frac{3}{22}x + 120$ **(c)** 8800

77 **(a)** $y(x) = \frac{3}{2}x$ **(b)** $C(x) = 180x$

78 $d(t) = \sqrt{10^2 + (20 + 22t)^2}$

79 **(a)** $y(x) = -\frac{4}{5}x + 20$ **(b)** $V(x) = 4x\left(-\frac{4}{5}x + 20\right)$

80 $C(r) = \frac{3\pi(r^3 + 16)}{10r}$

81 **(a)** $V = 10t$
(b) $V = 200h^2$ para $0 \le h \le 6$;
$V = 7200 + 3200(h - 6)$ para $6 < h \le 9$
(c) $h = \sqrt{\frac{t}{20}}$ para $0 \le t \le 720$; $h = 6 + \frac{t - 720}{320}$ para $720 < t \le 1680$

82 **(a)** $r = \frac{1}{2}x$ **(b)** $y = \frac{5}{4\pi} - \frac{1}{48}x^3$

83 **(a)** $y(h) = \frac{bh}{a - b}$ **(b)** $V(h) = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$
(c) $\frac{200}{7\pi} \approx 9.1$ ft

84 $B(x) = \begin{cases} 0.00361x & \text{si } 0 \le x \le 5000 \\ 0.00417x - 2.8 & \text{si } x > 5000 \end{cases}$

85 $y = -\frac{1}{4.475^2}(x - 4.475)^2 + 1$

86 **(a)** $y = 12 - x$ **(b)** $A = x(12 - x)$

87 $\frac{18}{13}$ hr después de la 1:00 p.m., o hacia las 2:23 p.m.

88 El radio del semicírculo es $\frac{1}{8\pi}$ mi; la longitud del rectángulo es $\frac{1}{8}$ mi.

89 **(a)** 1 s **(b)** 4 ft
(c) En la Luna, 6 s y 24 ft

90 **(a)** (87.5, 17.5) **(b)** 30.625 unidades

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

2 **(a)** $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ **(b)** $g(x) = -\frac{1}{2}x - 3$
(c) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 7$ **(d)** $g(x) = -\frac{1}{2}x$

4 $2ax + ah + b$

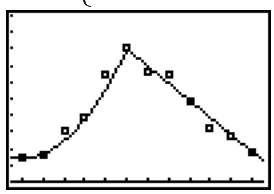
5 m_{PQ}; la pendiente de la recta tangente en P

6 $R(x_3, y_3) = \left(\left(1 - \frac{m}{n}\right)x_1 + \frac{m}{n}x_2, \left(1 - \frac{m}{n}\right)y_1 + \frac{m}{n}y_2\right)$

7 $h = -ad^2$ **8** $f(x) = 40 - 20[\![-x/15]\!]$

9 $x = \frac{0.4996 + \sqrt{(-0.4996)^2 - 4(0.0833)(3.5491 - D)}}{2(0.0833)}$

10 **(b)** $f(x) = \begin{cases} 0.132(x - 1)^2 + 0.7 & \text{si } 1 \le x \le 6 \\ -0.517x + 7.102 & \text{si } 6 < x \le 12 \end{cases}$
(c)



[0.5, 12.5, 0.5] por [0, 5]

EXAMEN DE CAPÍTULO 3

1 $x = 37$, $y = -16$ **2** $a < 0$ o $a > 6$

3 $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 41$

4 y-intersección: 10; x-intersección: 8

5 $y = -\frac{4}{5}x$ **6** $y = -\frac{7}{2}x + 14$

7 $T(x) = 0.88x + 9.9$ **8** $(-\infty, -2) \cup (-2, 0]$

9 $2a + h + 5$; $2a + h - 7$

10 $S(V) = V + 8\sqrt{V/2}$, o $V + 4\sqrt{2V}$ **11** (6, 3)

12 $C(x) = \begin{cases} 1.20x & \text{si } 0 \le x \le 1000 \\ 1.80x - 600 & \text{si } x > 1000 \end{cases}$

13 $y = a(x + 2)^2 + 1$; $a > 0$ **14** -27

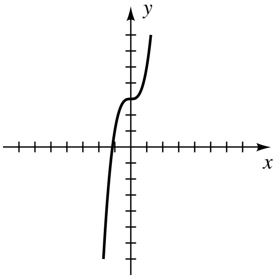
15 $-\frac{81}{8}$ **16** 250; 100 **17** $[3, \infty)$

18 $C(y(t)) = 25t^2 - 10t + 10$; \$9000

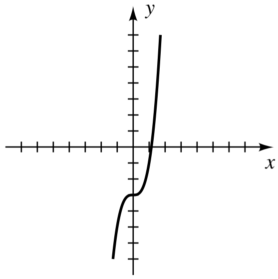
CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1

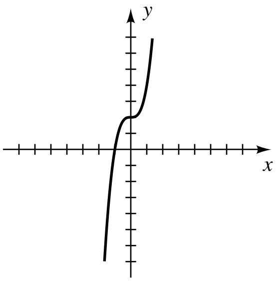
1 **(a)**



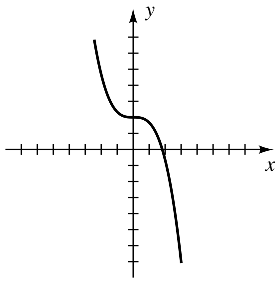
(b)



3 **(a)**



(b)



5 $f(3) = -2 < 0,\ f(4) = 10 > 0$

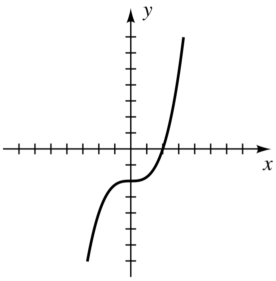
7 $f(2) = 5 > 0,\ f(3) = -5 < 0$

9 $f(-2) = -33 < 0,\ f(-1) = 2 > 0$

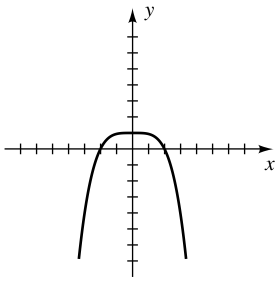
11 **(a)** C **(b)** D **(c)** B **(d)** A

13 **(a)** Sí $x \to \infty, f(x) \to \infty$. Sí $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$.
(b) Sí $x \to \infty, f(x) \to -\infty$. Sí $x \to -\infty, f(x) \to \infty$.
(c) Sí $x \to \pm\infty, f(x) \to \infty$.
(d) Sí $x \to \pm\infty, f(x) \to -\infty$.

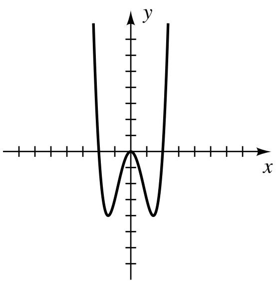
15 $f(x) > 0$ si $x > 2$, $f(x) < 0$ si $x < 2$



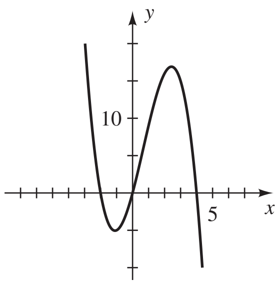
17 $f(x) > 0$ si $|x| < 2$, $f(x) < 0$ si $|x| > 2$



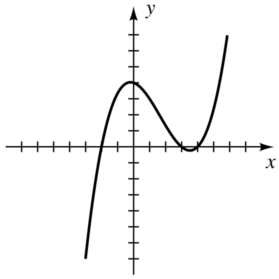
19 $f(x) > 0$ si $|x| > 2$, $f(x) < 0$ si $0 < |x| < 2$



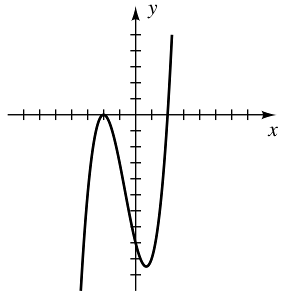
21 $f(x) > 0$ si $x < -2$ o $0 < x < 4$, $f(x) < 0$ si $-2 < x < 0$ o $x > 4$



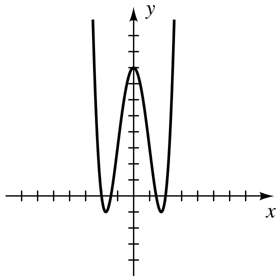
23 $f(x) > 0$ si $-2 < x < 3$ o $x > 4$, $f(x) < 0$ si $x < -2$ o $3 < x < 4$



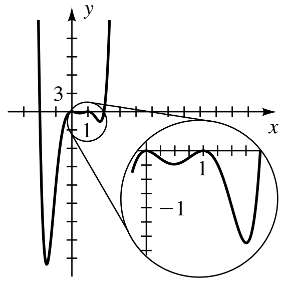
25 $f(x) > 0$ si $x > 2$, $f(x) < 0$ si $x < -2$ o $|x| < 2$



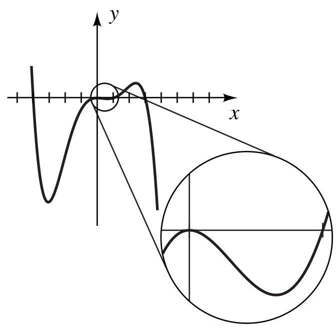
27 $f(x) > 0$ si $|x| > 2$ o $|x| < \sqrt{2}$, $f(x) < 0$ si $\sqrt{2} < |x| < 2$



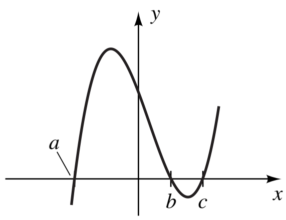
29 $f(x) > 0$ si $|x| > 2$, $f(x) < 0$ si $|x| < 2$, $x \neq 0, x \neq 1$



31



33 **(a)**

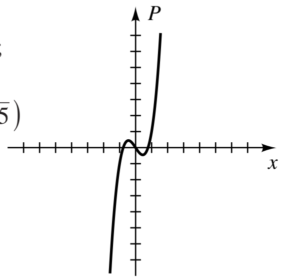


(b) $-abc$ **(c)** $(-\infty, a) \cup (b, c)$ **(d)** $[a, b] \cup [c, \infty)$

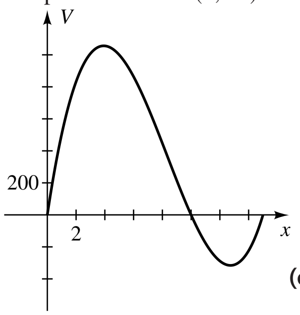
35 Si n es par, entonces $(-x)^n = x^n$ y por tanto $f(-x) = f(x)$. Así, f es una función par.

37 $-\dfrac{4}{3}$ **39** ± 4

41 $P(x) > 0$ en $\left(-\frac{1}{5}\sqrt{15}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{5}\sqrt{15}, \infty\right)$; $P(x) < 0$ en $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\sqrt{15}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{5}\sqrt{15}\right)$

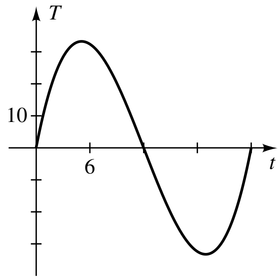


43 **(b)** $V(x) > 0$ en $(0, 10)$ y $(15, \infty)$; los valores permisibles para x están en $(0, 10)$.



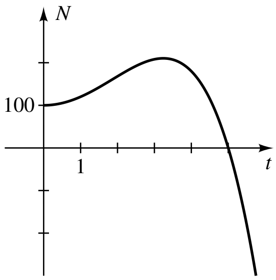
45 **(a)** $T > 0$ para $0 < t < 12$; $T < 0$ para $12 < t < 24$

(b)



(c) $T(6) = 32.4 > 32$, $T(7) = 29.75 < 32$

47 **(a)** $N(t) > 0$ para $0 < t < 5$ **(b)** La población se extingue después de 5 años.

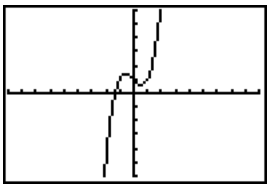


49 **(a)**

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$k(x)$
−60	25 920 000	25 902 001	25 937 999	26 135 880
−40	5 120 000	5 112 001	5 127 999	5 183 920
−20	320 000	318 001	321 999	327 960
20	320 000	318 001	321 999	312 040
40	5 120 000	5 112 001	5 127 999	5 056 080
60	25 920 000	25 902 001	25 937 999	25 704 120

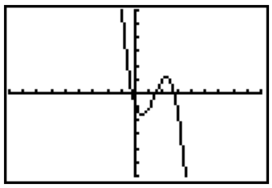
(b) Se hacen semejantes. **(c)** $2x^4$

51 **(a)** **(1)**



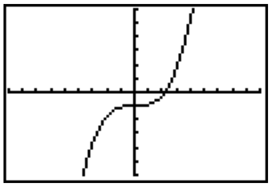
$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

(2)



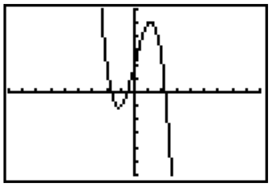
$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

(3)



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

(4)



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

(b) **(1)** Cuando x se aproxima a ∞, $f(x)$ se aproxima a ∞; cuando x se aproxima a $-\infty$, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$.

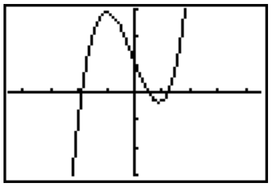
(2) Cuando x se aproxima a ∞, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$; cuando x se aproxima a $-\infty$, $f(x)$ se aproxima a ∞.

(3) Cuando x se aproxima a ∞, $f(x)$ se aproxima a ∞; cuando x se aproxima a $-\infty$, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$.

(4) Cuando x se aproxima a ∞, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$; cuando x se aproxima a $-\infty$, $f(x)$ se aproxima a ∞.

(c) Para la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a > 0$, $f(x)$ se aproxima a ∞ cuando x se aproxima a ∞ y $f(x)$ se aproxima a $-\infty$ cuando x se aproxima a $-\infty$. Con $a < 0$, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$ cuando x se aproxima a ∞ y $f(x)$ se aproxima a ∞ cuando x se aproxima a $-\infty$.

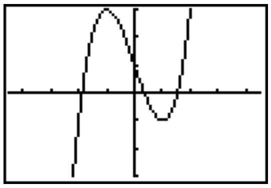
53



$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

$-1.89, 0.49, 1.20$

55



$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

$-1.88, 0.35, 1.53$

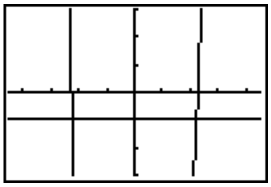
57



$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

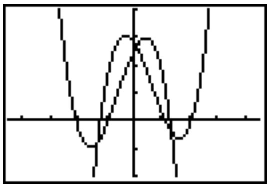
$(0.56, \infty)$

59



$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

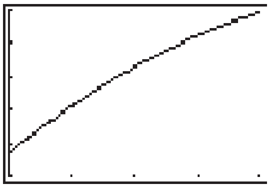
$(-\infty, -2.24) \cup (2.24, \infty)$

61 

$[-4.5, 4.5]$ por $[-2, 4]$

$(-1.29, -0.77)$, $(0.085, 2.66)$, $(1.36, -0.42)$

63 **(a)** Ha aumentado.



$[1970, 2010, 10]$ by $[20, 45, 5]$

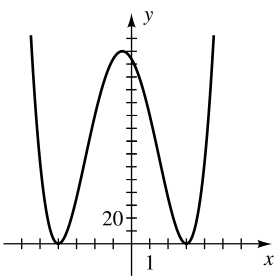
(b) $y = 0.59x + 23.5$; lineal

EJERCICIOS 4.2

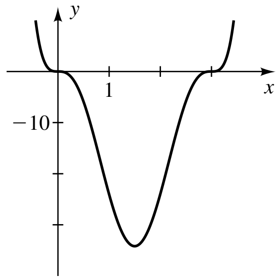
1 $2x^2 - x + 3$; $4x - 3$ **3** $\frac{3}{2}x$; $\frac{1}{2}x - 4$
5 0; $7x + 2$ **7** 5; 29 **9** 16 **11** 7
13 $f(-3) = 0$ **15** $f(-2) = 0$ **17** $f(3) = 0$
19 $x^3 - 3x^2 - 10x$ **21** $x^3 - x^2 - 9x + 9$
23 $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$ **25** $2x^2 + x + 6$; 7
27 $x^2 - 3x + 1$; -8
29 $3x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x + 36$; -65
31 $4x^3 + 2x^2 - 4x - 2$; 0 **33** 73
35 -0.0824 **37** $\frac{4}{3}$ **39** $8 + 7\sqrt{3}$ **41** $f(-2) = 0$
43 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ **45** $3, 5$ **47** $f(c) > 0$ **49** -14
51 Si $f(x) = x^n - y^n$ y n es par, entonces $f(-y) = 0$.
53 **(a)** $V = \pi x^2(6 - x)$
(b) $\left(\frac{1}{2}(5 + \sqrt{45}), \frac{1}{2}(7 - \sqrt{45})\right)$
55 **(a)** $A = 8x - 2x^3$ **(b)** $\sqrt{13} - 1 \approx 2.61$
57 -9.55
59 $-0.75, 1.96$

EJERCICIOS 4.3

1 $-4x^3 + 16x^2 - 4x - 24$ **3** $3x^3 + 3x^2 - 36x$
5 $-2x^3 + 6x^2 - 8x + 24$
7 $3x^3 + 3x$
9 $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 24x + 144$

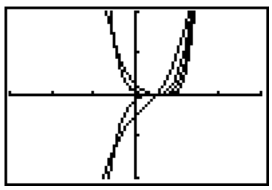


11 $3x^6 - 27x^5 + 81x^4 - 81x^3$



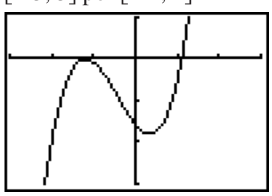
13 $f(x) = \frac{7}{9}(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 3)$
15 $f(x) = -1(x - 1)^2(x - 3)$
17 $-\frac{2}{3}$ (multiplicidad 1); 0 (multiplicidad 2); $\frac{5}{2}$ (multiplicidad 3)
19 $-\frac{3}{2}$ (multiplicidad 2); 0 (multiplicidad 3)
21 $\pm\sqrt{3}$ (cada una de multiplicidad 3)
23 -4 (multiplicidad 3); -3 (multiplicidad 2); 3 (multiplicidad 5)
25 $\pm 4i$, ± 3 (cada uno de multiplicidad 1)
27 $f(x) = (x + 3)^2(x + 2)(x - 1)$
29 $f(x) = (x + 2)^3(x - 1)$
31 $f(x) = (x - 1)^5(x + 1)$

Ejer. 33–40: Los tipos de posibles soluciones se citan en orden positivo, negativo y complejos no reales.
33 3, 0, 0 o 1, 0, 2 **35** 0, 1, 2
37 2, 2, 0; 2, 0, 2; 0, 2, 2; 0, 0, 4
39 2, 3, 0; 2, 1, 2; 0, 3, 2; 0, 1, 4
41 Superior, 5; inferior, -2 **43** Superior, 2; inferior, -2
45 Superior, 3; inferior, -3
47 $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2(x - 1)(x - 2)^3$
49 **(a)** $f(x) = a(x + 3)^3(x + 1)(x - 2)^2$ **(b)** 108
51 $f(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1.5)^2(x - 3)$
53 No **55** Sí: $1.5(x - 2)(x - 5.2)(x - 10.1)$
57 $f(t) = \frac{5}{3528}t(t - 5)(t - 19)(t - 24)$

59 

$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

Cuando aumenta la multiplicidad, la gráfica se hace más horizontal en $(0.5, 0)$.

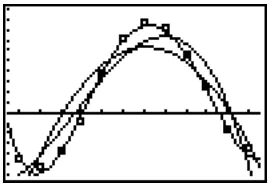
61 

$[-3, 3]$ por $[-3, 1]$

-1.2 (multiplicidad 2); 1.1 (multiplicidad 1)

63 2023 (cuando $t \approx 43.2$)

65 **(a)** **(3)**



$[0.5, 12.5]$ por $[-30, 50, 5]$

(b) $4 \leq x \leq 5$ y $10 \leq x \leq 11$ **(c)** 4.02, 10.53

67 7.64 cm **69** 12 cm

EJERCICIOS 4.4

1 $x^2 - 6x + 13$ **3** $(x - 2)(x^2 + 4x + 29)$

5 $x(x + 1)(x^2 - 6x + 10)$

7 $(x^2 - 8x + 25)(x^2 + 4x + 5)$

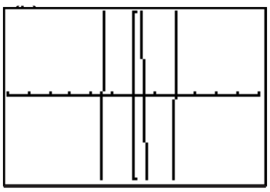
9 $x(x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)$

Ejer. 11–16: Demuestre que ninguna de las posibles raíces racionales citadas satisfacen la ecuación.

11 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ **13** $\pm 1, \pm\frac{1}{5}, \pm 5$

15 $\pm 1, \pm 2$

17 **(a)** $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 2, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 6$



$[-6, 6]$ por $[-1, 1]$

(c) $\frac{1}{2}, 2, -\frac{3}{2}$

19 $-2, -1, 4$ **21** $-3, 2, \frac{5}{2}$

23 $-7, \pm\sqrt{2}, 4$ **25** 1 (multiplicidad 2), $-\frac{1}{2}$, 3

27 $-3, -\frac{2}{3}$, 0 (multiplicidad 2), $\frac{1}{2}$

29 $-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{7}\,i$

31 $f(x) = (3x + 2)(2x - 1)(x - 1)^2(x - 2)$

33 $f(x) = 2(x + 0.9)(x - 1.1)(x - 12.5)$

35 No. Si i es una raíz, entonces $-i$ también es una raíz. Por tanto, el polinomio tendría factores $x - 1$, $x + 1$, $x - i$, $x + i$ y entonces sería de grado mayor a 3.

37 Como n es impar y los ceros complejos no reales se presentan en pares conjugados para polinomios con coeficientes reales, debe haber al menos un cero real.

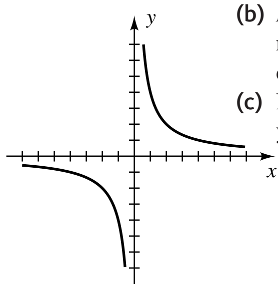
39 **(a)** Las dos cajas corresponden a $x = 5$ y $x = 5(2 - \sqrt{2})$.
(b) La caja correspondiente a $x = 5$

41 **(c)** En pies: 5, 12, y 13 **43** **(b)** 4 ft

45 Ninguno **47** $-1.2, 0.8, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **49** 10 200 m

EJERCICIOS 4.5

1 **(a)**



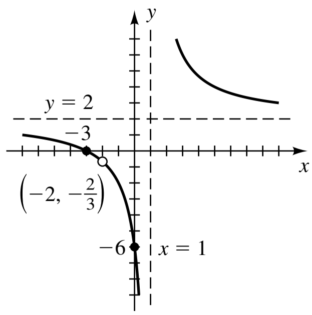
(b) D = todos los números reales diferentes de cero; $R = D$
(c) Decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$

3 **(a)** -2 **(b)** -2 **(c)** ∞ **(d)** $-\infty$ **(e)** 0

5 **(a)** Cuando $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 0$.
(b) Cuando $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 2$.

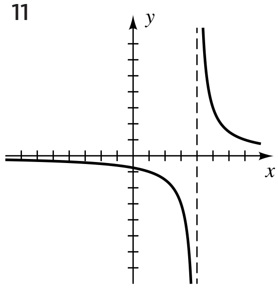
7 Asíntota vertical: $x = 3$; asíntota horizontal: $y = -2$; hueco: $\left(6, -\frac{22}{3}\right)$

9

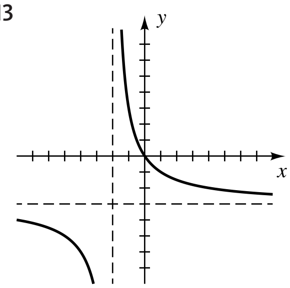


$$f(x) = \frac{2(x + 3)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)}$$

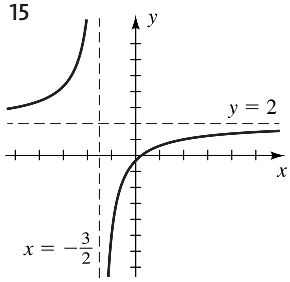
11



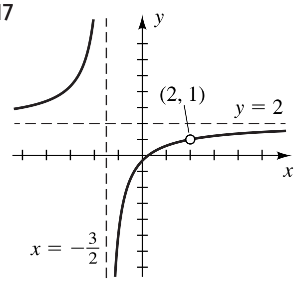
13



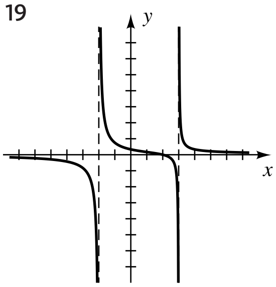
15



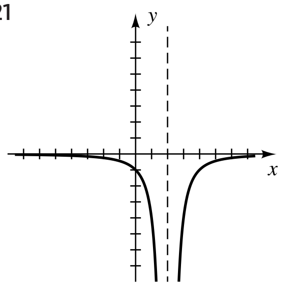
17



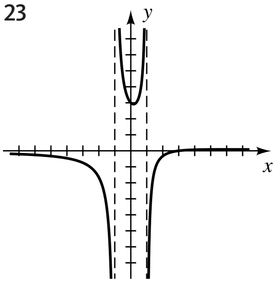
19



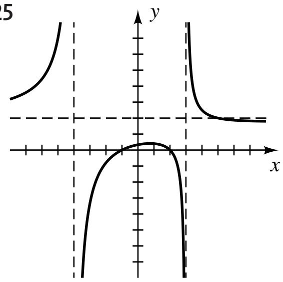
21



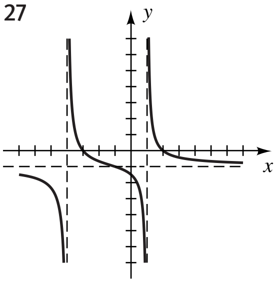
23



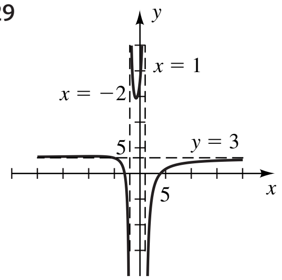
25



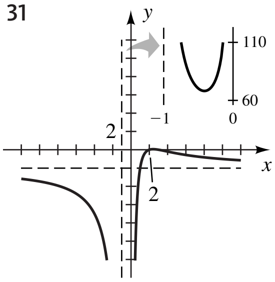
27



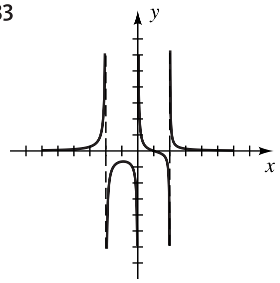
29



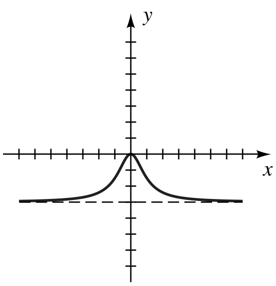
31



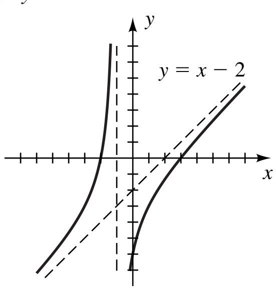
33



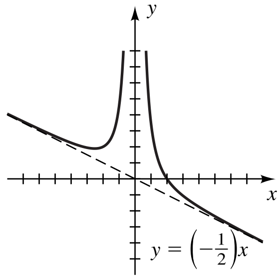
35



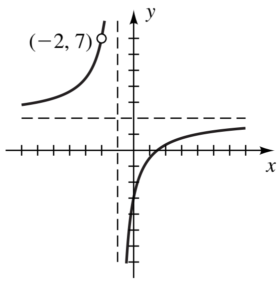
37 $y = x - 2$

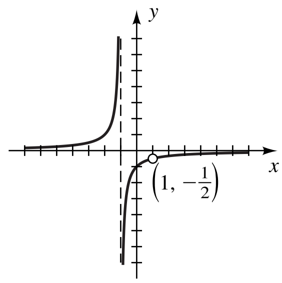


39 $y = -\dfrac{1}{2}x$ **41** $y = x^2 + 1$

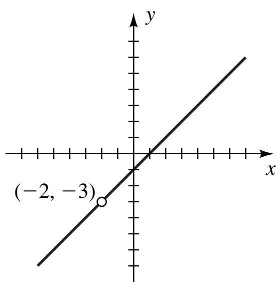


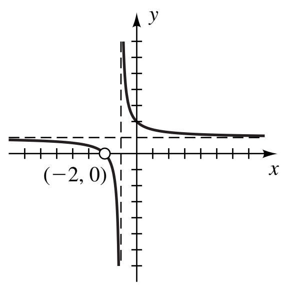
43 $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ para $x \neq -2$ **45** $f(x) = \dfrac{-1}{x + 1}$ para $x \neq 1$





47 $f(x) = x - 1$ para $x \neq -2$ **49** $f(x) = \dfrac{x + 2}{x + 1}$ para $x \neq -2$





51 $f(x) = \dfrac{2 - x}{x - 5}$ **53** $f(x) = \dfrac{6x^2 - 6x - 12}{x^3 - 7x + 6}$

55 **(a)** $h = \dfrac{16}{(r + 0.5)^2} - 1$ **(b)** $V(r) = \pi r^2 h$

(c) Excluir $r \leq 0$ y $r \geq 3.5$.

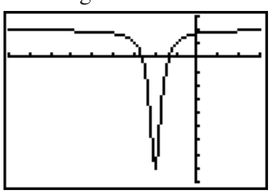
57 **(a)** $V(t) = 50 + 5t$, $A(t) = 0.5t$ **(b)** $\dfrac{t}{10t + 100}$

(c) Cuando $t \to \infty$, $c(t) \to 0.1$ lb de sal por galón.

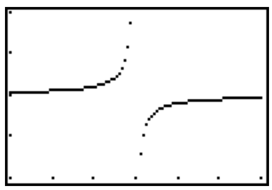
59 **(a)** $0 < S < 4000$ **(b)** 4500 **(c)** 2000

(d) Un aumento de 125% en S produce un aumento de sólo 12.5% en R.

61 Ninguno **63** $x = 0.999$



[−9, 3] por [−9, 3]



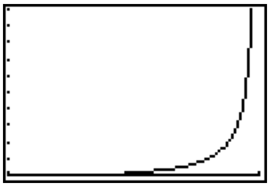
[0.7, 1.3, 0.1] por [0.8, 1.2, 0.1]

65 **(a)** La gráfica de g es la recta horizontal $y = 1$ con huecos en $x = 0, \pm1, \pm2, \pm3$.
(b) La gráfica de h es la gráfica de p con huecos en $x = 0$ $\pm1, \pm2, \pm3$.

67 **(a)** $y = \dfrac{132 - 48x}{x - 4}$ **(b)**

X	Y1
2.8	2
3	12
3.2	27
3.4	52
3.6	102
3.8	252
4	ERROR

X=2.8

(c)

[2, 4] por [0, 1000, 100]

(d) $x = 4$
(e) Cualquiera que sea el número de horas crédito adicionales obtenidas en 4.0, un promedio de puntos de 4.0 no es asequible.

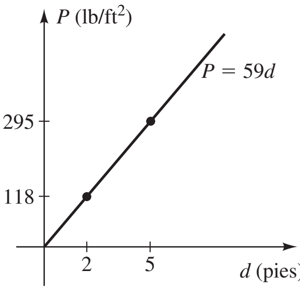
EJERCICIOS 4.6

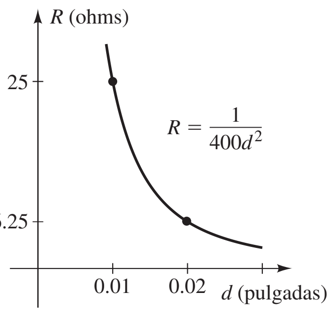
1 $u = kv;\ k = \dfrac{2}{5}$ **3** $V = kr^3,\ k = \dfrac{4}{3}\pi$

5 $r = k\dfrac{s}{t};\ k = -14$ **7** $y = k\dfrac{x^2}{z^3};\ k = 27$

9 $z = kx^2y^3;\ k = -\dfrac{2}{49}$ **11** $z = k\dfrac{xy}{\sqrt[3]{w}};\ k = 2$

13 $q = \dfrac{k}{x + y};\ k = 1.68$ **15** $y = k\dfrac{\sqrt{x}}{z^3};\ k = \dfrac{40}{3}$

17 **(a)** $P = kd$ **(b)** 59 **(c)** 295 lb/ft^2
(d)


19 **(a)** $R = k\dfrac{l}{d^2}$ **(b)** $\dfrac{1}{40\,000}$
(c)


(d) $\dfrac{50}{9}$ pulgadas

21 **(a)** $P = k\sqrt{l}$ **(b)** $\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ **(c)** $\dfrac{3}{4}\sqrt{10}$ s

23 **(a)** $T = kd^{3/2}$ **(b)** $\dfrac{365}{(93)^{3/2}}$ **(c)** 223.2 días

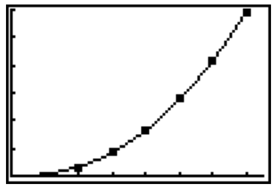
25 **(a)** $V = k\sqrt{L}$ **(b)** $\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$ **(c)** 63 mi/hr

27 **(a)** $W = kh^3$ **(b)** $\dfrac{25}{27}$ **(c)** 154 lb

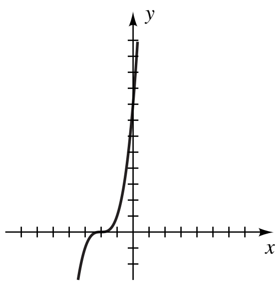
29 **(a)** $F = kPr^4$ **(b)** Alrededor de 2.05 más duro

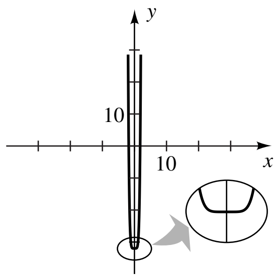
31 Aumenta 250% **33** d se multiplica por 9.

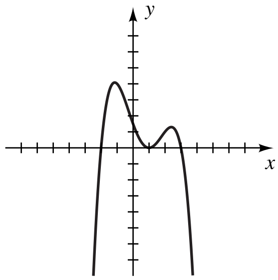
35 $y = 1.2x$ **37** $y = -\dfrac{10.1}{x^2}$

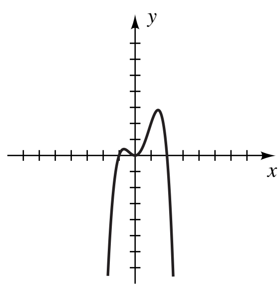
39 **(a)** $k \approx 0.034$ **(b)**

[0, 75, 10] por [0, 600, 100]

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS DE REPASO

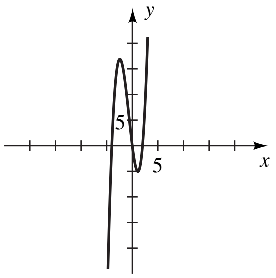
1 $f(x) > 0$ si $x > -2$, $f(x) < 0$ si $x < -2$


2 $f(x) > 0$ si $x < -\sqrt[6]{32}$ o $x > \sqrt[6]{32}$, $f(x) < 0$ si $-\sqrt[6]{32} < x < \sqrt[6]{32}$


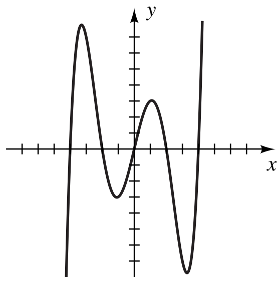
3 $f(x) > 0$ si $-2 < x < 1$ o $1 < x < 3$, $f(x) < 0$ si $x < -2$ o $x > 3$


4 $f(x) > 0$ si $-1 < x < 0$ o $0 < x < 2$, $f(x) < 0$ si $x < -1$ o $x > 2$


5 $f(x) > 0$ si $-4 < x < 0$ o $x > 2$, $f(x) < 0$ si $x < -4$ o $0 < x < 2$



6 $f(x) > 0$ si $-4 < x < -2$, $0 < x < 2$, o $x > 4$, $f(x) < 0$ si $x < -4$, $-2 < x < 0$, o $2 < x < 4$



7 $f(0) = -9 < 100$ y $f(10) = 561 > 100$. Por el teorema de valor intermedio para funciones con polinomios, f toma todo valor entre -9 y 561. Por tanto, hay al menos un número real a en $[0, 10]$ tal que $f(a) = 100$.

8 Sea $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1$. $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -4 < 0$. Por el teorema de valor intermedio para funciones con polinomios, t toma todo valor entre -4 y 1. Por tanto, hay al menos un número real a en $[0, 1]$ tal que $f(a) = 0$.

9 $3x^2 + 2$; $-21x^2 + 5x - 9$ **10** $4x - 1$; $2x - 1$

11 -32 **12** $f(3) = 0$

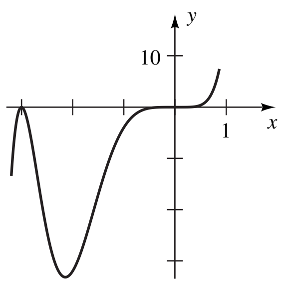
13 $6x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 52x + 104$; -200

14 $2x^2 + 11x + 31$; 94

15 $\frac{2}{41}(x^2 + 6x + 34)(x + 1)$

16 $\frac{1}{4}x(x^2 - 2x + 2)(x - 3)$

17 $x^7 + 6x^6 + 9x^5$



18 $(x - 2)^3(x + 3)(x - 1)$

19 1 (multiplicidad 5); -3 (multiplicidad 1)

20 0, $\pm i$ (todos tienen multiplicidad 2)

21 **(a)** Ya sea 3 positivo y 1 negativo o 1 positivo, 1 negativo, y 2 complejos no reales
(b) Límite superior, 3; límite inferior, -1

22 **(a)** Ya sea 2 positivo y 3 negativo; 2 positivo, 1 negativo, y 2 complejos no reales; 3 negativo y 2 complejos no reales; o 1 negativo y 4 complejos no reales
(b) Cota superior, 2; cota inferior, -3

23 Como sólo hay potencias pares, $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 1 \geq 1$ para todo número real x.

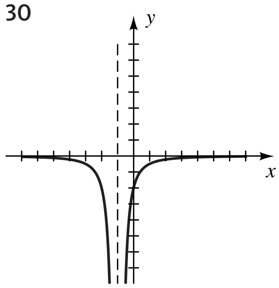
24 $-3, -2, -2 \pm i$ **25** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$ **26** $-3, 2, \pm 1$

27 $f(x) = -\frac{1}{6}(x + 2)^3(x - 1)^2(x - 3)$

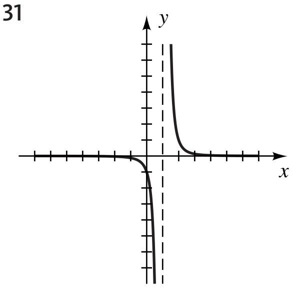
28 $f(x) = \frac{1}{16}(x + 3)^2x^2(x - 3)^2$

29 Asíntota vertical: $x = 5$; asíntota horizontal: $y = \frac{4}{3}$; punto de intersección con el eje x: 1; con el y: $\frac{4}{15}$; hueco: $\left(-2, \frac{4}{7}\right)$

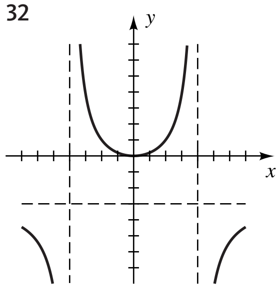
30



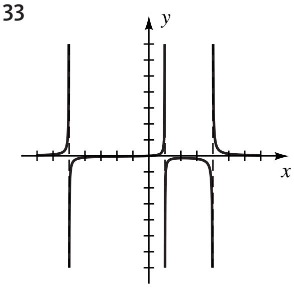
31



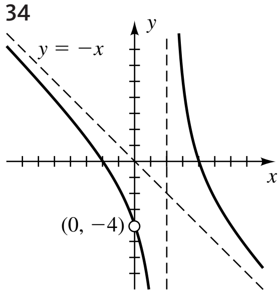
32



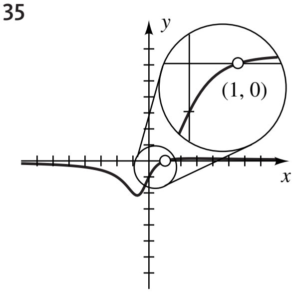
33



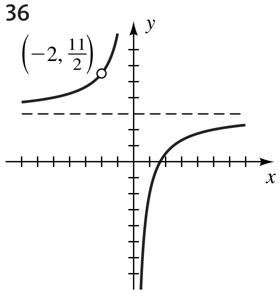
34



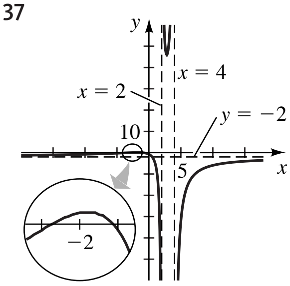
35



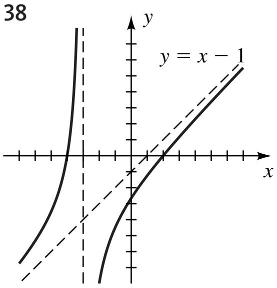
36



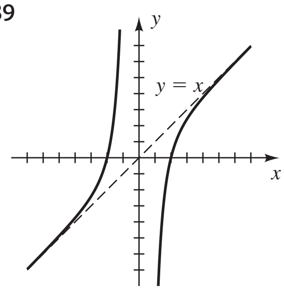
37



38

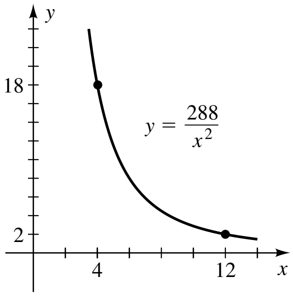


39



40 $f(x) = \dfrac{3(x-5)(x-2)}{2(x+3)(x-2)}$ o $f(x) = \dfrac{3x^2 - 21x + 30}{2x^2 + 2x - 12}$

41 27 **42**



43 **(a)** $\dfrac{1}{15{,}000}$

(b) $y \approx 0.9754 < 1$ si $x = 6.1$, y $y \approx 1.0006 > 1$ si $x = 6.2$

44 **(a)** $V = \dfrac{1}{4\pi}x(l^2 - x^2)$

(b) Si $x > 0$, $V > 0$ cuando $0 < x < l$.

45 $t = 4$ (10:00 a.m.) y $t = 16 - 4\sqrt{6} \approx 6.2020$ (12:12 p.m.)

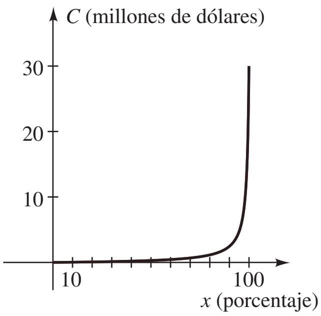
46 $\sqrt{5} < t < 4$

47 **(a)** $R = k$

(b) k es la máxima rapidez a la que el hígado puede eliminar alcohol del torrente sanguíneo.

48 **(a)** $C(100) = \$30$ millones y $C(90) \approx \$2.5$ millones

(b)



49 375 **50** 10,125 watts

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

2 Sí **4** No **5** $n + 1$ **7** $f(x) = \dfrac{(x^2+1)(x-1)}{(x^2+1)(x-2)}$

8 **(a)** No

(b) Sí, cuando $x = \dfrac{cd - af}{ae - bd}$, siempre que el denominador no sea cero

9 **(a)** \$1476

(b) No válido para valores de alta confianza

10 El segundo entero

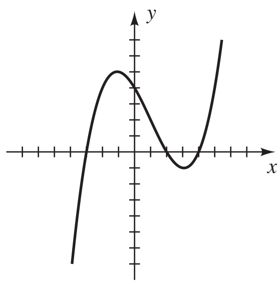
11 **(a)** $R(I) = \dfrac{P + SI}{I}$ **(b)** R se aproxima a S.

(c) Cuando aumenta el ingreso, los contribuyentes pagan más impuestos, pero las cantidades fijas de impuestos desempeñan un papel menor para determinar su tasa total de impuestos.

12 **(a)** 121.1 **(b)** 47 **(c)** 36 yardas

EXAMEN DE CAPÍTULO 4

1



intersección-$y = 4$

2 $f(x) = x^3(x-1)^2(x-2)$

3 $f(0) = -1 < 0$ y $f(2) = 13 > 0$, así que existe un número c tal que $0 < c < 2$ y $f(c) = 0$.

4 $(a, b) \cup (b, c)$

5 Después de 7 años

6 Las gráficas de f y g pueden verse casi idénticas.

7 $f(2) = 0$ **8** $a = b/6$ **9** $-2, 3$

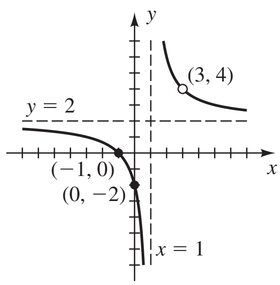
10 $f(x) = 3(x-3)(x+1)^2$ **11** 9

12 Sí; $f(x) = x(x-1)(x-i)$

13 5 es factor de 6545 y 2 es factor de 702.

14 $-1, \dfrac{6}{5}, \dfrac{5}{2}$ **15** $(2, 3)$ **16** $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{5}{4}\right)$

17



18 $f(x) = \dfrac{-3(x-4)(x+1)}{(x-2)(x+1)}$ **19** 4

CAPÍTULO 5

EJERCICIOS 5.1

1 **(a)** 4 **(b)** No es posible

3 **(a)** Sí **(b)** No **(c)** No es función

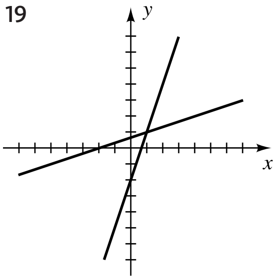
5 Sí **7** No **9** Sí **11** No **13** No

15 Sí

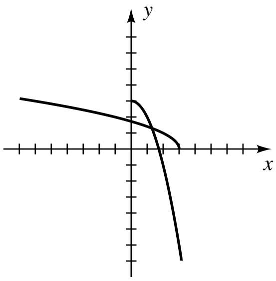
17 **(a)** -1 **(b)** -2 **(c)** -2 **(d)** $-\infty$ **(e)** ∞

Ejer. 19–22: Demuestre que $f(g(x)) = x = g(f(x))$.

19



21



23 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

25 $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$; $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$

27 $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$ **29** $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+3}{2x}$

31 $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+2}{2x-3}$ **33** $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{2-x}{3}}$

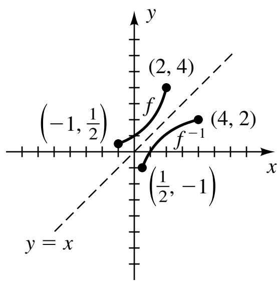
35 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+5}{2}}$ **37** $f^{-1}(x) = 3 - x^2,\ x \geq 0$

39 $f^{-1}(x) = (x-1)^3$ **41** $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x} + 6}$

43 $f^{-1}(x) = x$ **45** $f^{-1}(x) = -\sqrt{9-x^2},\ -3 \leq x \leq 0$

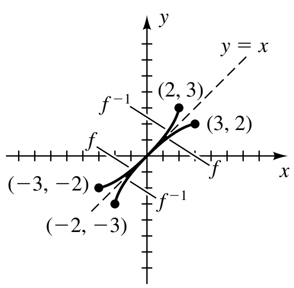
47 $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+9}$ **49** **(a)** 3 **(b)** -1 **(c)** 5

51 **(a)**



(b) $D = [-1, 2]$; $R = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$
(c) $D_1 = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$; $R_1 = [-1, 2]$

53 **(a)**



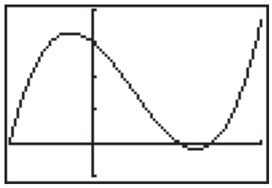
(b) $D = [-3, 3]$; $R = [-2, 2]$
(c) $D_1 = [-2, 2]$; $R_1 = [-3, 3]$

55 **(a)** Como f es biunívoca, existe una inversas; $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$
(b) No; no es biunívoca

57 **(c)** La gráfica de f es simétrica alrededor de la recta $y = x$. Así, $f(x) = f^{-1}(x)$.

59 Sí

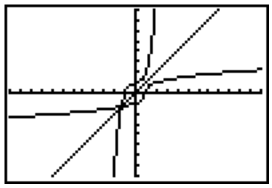
61



$[-1, 2]$ por $[-1, 4]$

(a) $[-0.27, 1.22]$
(b) $[-0.20, 3.31]$; $[-0.27, 1.22]$

63



$[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

$f^{-1}(x) = x^3 + 1$

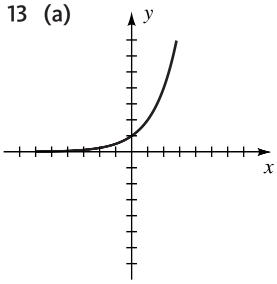
65 **(a)** 805 ft^3/min
(b) $V^{-1}(x) = \dfrac{1}{35}x$. Dada una circulación de aire de x pies cúbicos por minuto, $V^{-1}(x)$ calcula el número máximo de personas que deben estar en el restaurante al mismo tiempo.
(c) 67

EJERCICIOS 5.2

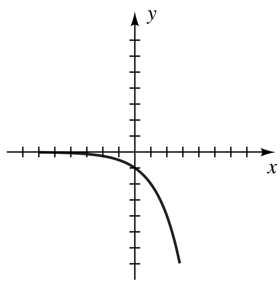
1 5 **3** $-1, 3$ **5** $-\dfrac{4}{99}$ **7** $\dfrac{18}{5}$ **9** 3

11 **(a)** ∞ **(b)** c

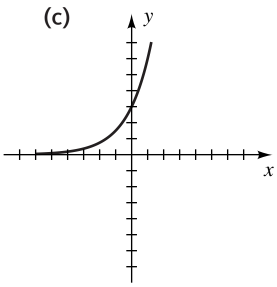
13 **(a)**



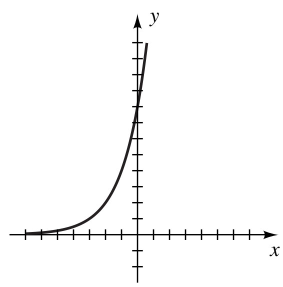
(b)



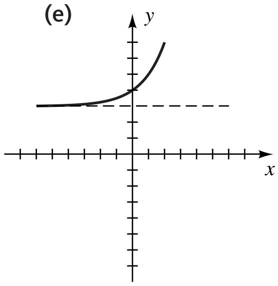
(c)



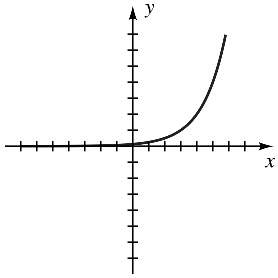
(d)



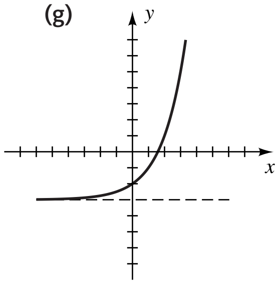
(e)



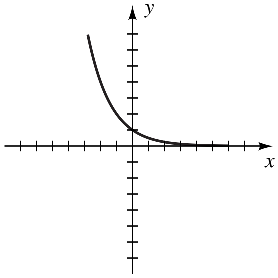
(f)



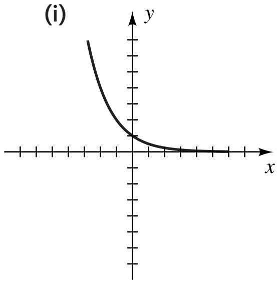
(g)



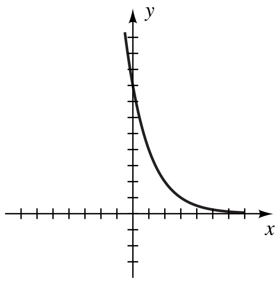
(h)



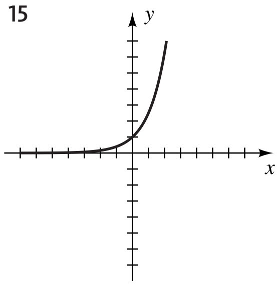
(i)



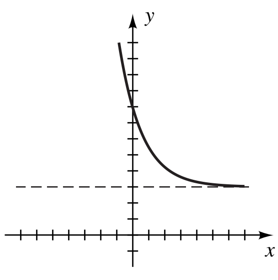
(j)



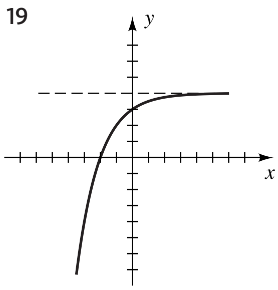
15



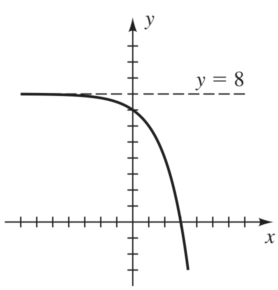
17



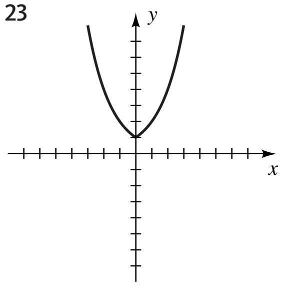
19



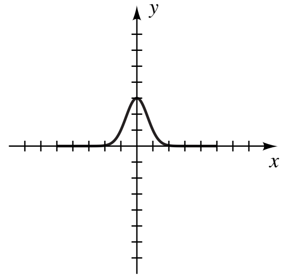
21



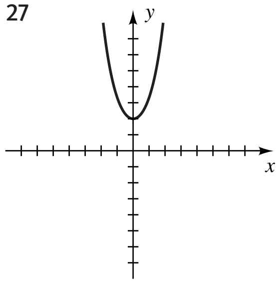
23



25



27



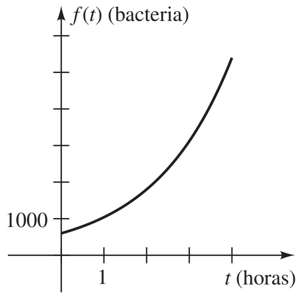
29 $f(x) = 2\left(\frac{5}{2}\right)^x$ **31** $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3$

33 $f(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **35** $f(x) = 180(1.5)^{-x} + 32$

37 **(a)** 59 **(b)** 10%

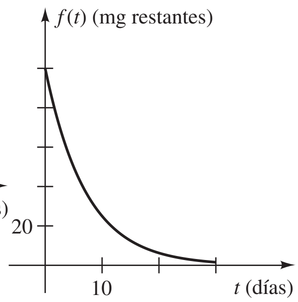
39 **(a)** 1039; 3118; 5400

(b)



41 **(a)** 50 mg; 25 mg; $\frac{25}{2}\sqrt{2} \approx 17.7$ mg

(b)



43 $-\dfrac{1}{1600}$

45 **(a)** \$1005.83 **(b)** \$1035.51 **(c)** \$1072.29 **(d)** \$4038.74

47 **(a)** \$19 500 **(b)** \$11 975 **(c)** \$7354

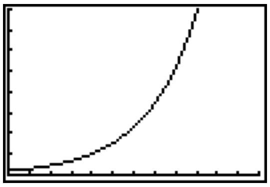
49 \$231 089 639 204.11

51 **(a)** Examine el patrón formado por el valor y en el año n. **(b)** Resuelva $s = (1 - a)^T y_0$ para a.

53 **(a)** \$1834.41 **(b)** \$410,387.60

55 \$15 495.62

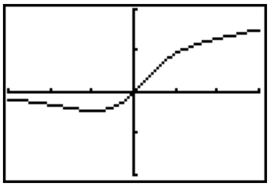
57 **(a)** 180.1206 **(b)** 7.3639

59 

[0, 60, 5] por [0, 40, 5]

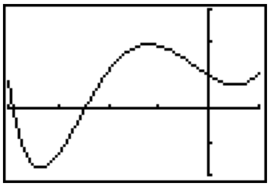
(a) 26.13 **(b)** 8.50

61 −1.02, 2.14, 3.62

63 

[−3, 3] por [−2, 2]

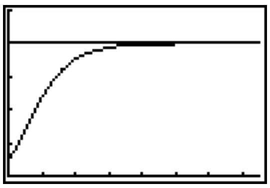
(a) No es biunívoca
(b) 0

65 

[−4, 1] por [−2, 3]

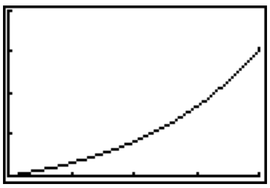
(a) Creciente: [−3.37, −1.19] ∪ [0.52, 1]; decreciente: [−4, −3.37] ∪ [−1.19, 0.52]
(b) [−1.79, 1.94]

67 6.58 años

69 

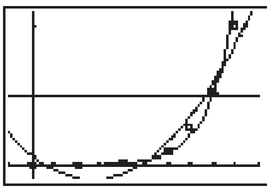
[0, 7.5] por [0, 5]

El número máximo de ventas se aproxima a *k*.

71 

[0, 40, 10] por [0, 200 000, 50 000]

Aproximadamente después de 32.8 años.

73 **(a)** 

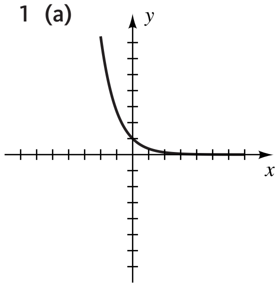
[−10, 100, 10] por [−200, 2200, 1000]

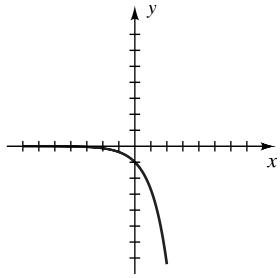
(b) Función exponencial *f* **(c)** 1989

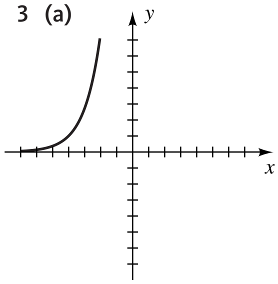
75 $y = 0.04(1.0481)^t$; 74¢

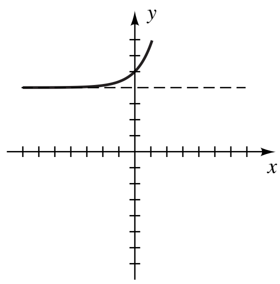
77 **(a)** \$746 648.43; \$1 192,971 **(b)** 12.44%
(c) exponencial; polinominal

EJERCICIOS 5.3

1 **(a)** 

(b) 

3 **(a)** 

(b) 

5 \$1300.18 7 \$54 226.53 9 7% 11 3, 4

13 $1/e$ 15 −1 17 $-\frac{3}{4}, 0$ 19 $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

21 27.43 g 23 348.8 millones

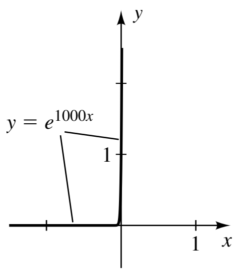
25 **(a)** 25% **(b)** 13.2 horas 27 13.5% 29 41

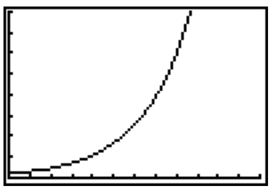
31 **(a)** 10.46 in. **(b)** 7.44 in.

33 75.77 cm; 15.98 cm/año

35 \$18.54 por hora 37 **(a)** 7.19% **(b)** 7.25%

39 **(a)** 5.09% **(b)** 5.13%

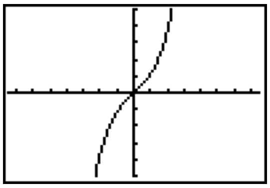
41 

43 

[0, 60, 5] por [0, 40, 5]

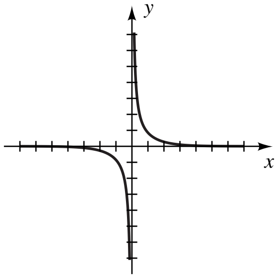
(a) 29.96 **(b)** 8.15

45 **(a)**

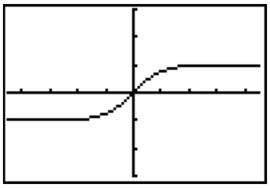


$[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$

(b)

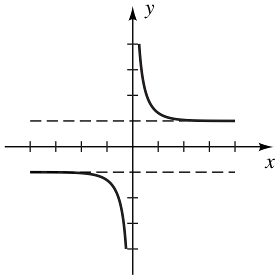


47 **(a)**

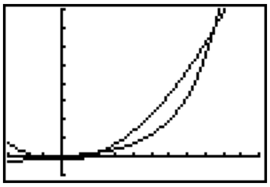


$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

(b)



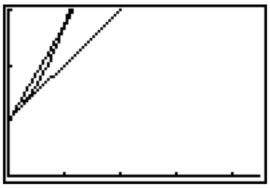
49



$[-3, 11]$ por $[-10, 80, 10]$

$-1.04, 2.11, 8.51$

51



$[0, 4.5]$ por $[0, 3]$

$f(x)$ está más cerca de e^x si $x \approx 0$; $g(x)$ está más cerca de e^x si $x \approx 1$.

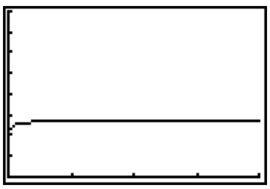
53



$[-2, 2.5]$ por $[-1, 2]$

$0.11, 0.79, 1.13$

55

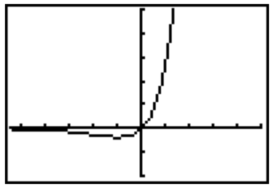


$[0, 200, 50]$ por $[0, 8]$

$y \approx 2.71 \approx e$

57 0.567

59

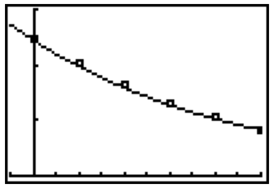


$[-5.5, 5]$ por $[-2, 5]$

Creciente en $[-1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -1]$

61 **(a)** Cuando h aumenta, C disminuye.
(b) Cuando y aumenta, C disminuye.

63 **(a)** $f(x) = 1.225e^{-0.0001085x}$



$[-1000, 10\,000, 1000]$ por $[0, 1.5, 0.5]$

(b) 0.885, 0.461

EJERCICIOS 5.4

1 **(a)** $\log_4 64 = 3$ **(b)** $\log_4 \dfrac{1}{64} = -3$
(c) $\log_t s = r$ **(d)** $\log_3 (4 - t) = x$
(e) $\log_5 \dfrac{a + b}{a} = 7t$ **(f)** $\log_{0.7} (5.3) = t$

3 **(a)** $2^5 = 32$ **(b)** $3^{-5} = \dfrac{1}{243}$ **(c)** $t^p = r$
(d) $3^5 = (x + 2)$ **(e)** $2^{3x+4} = m$ **(f)** $b^{3/2} = 512$

5 $t = 3 \log_a \dfrac{5}{2}$ **7** $t = \log_a\left(\dfrac{H - K}{C}\right)$

9 $t = \dfrac{1}{C} \log_a \left(\dfrac{A - D}{B}\right)$

11 **(a)** $\log 100\,000 = 5$ **(b)** $\log 0.001 = -3$
(c) $\log (y - 3) = x$ **(d)** $\ln p = 7$
(e) $\ln (3 - x) = 2t$

13 **(a)** $10^{50} = x$ **(b)** $10^{20t} = x$ **(c)** $e^{0.1} = x$
(d) $e^{4+3x} = w$ **(e)** $e^{1/6} = z - 2$

15 **(a)** 0 **(b)** 1 **(c)** No es posible **(d)** 2 **(e)** 8
(f) 3 **(g)** -2

17 **(a)** 3 **(b)** 5 **(c)** 2 **(d)** -4 **(e)** 30

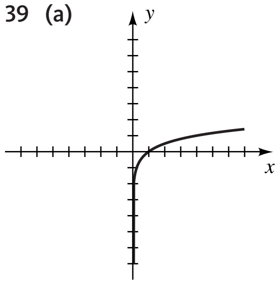
19 **(a)** 2 **(b)** -3 **(c)** $3e^2$

21 -1 **23** No hay solución **25** $-1, -2$ **27** 13

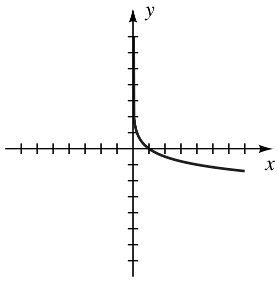
29 $\dfrac{1}{27}$ **31** $\pm\dfrac{1}{e}$ **33** 3 **35** 3

37 **(a)** 0 **(b)** 1 **(c)** ∞ **(d)** $-\infty$

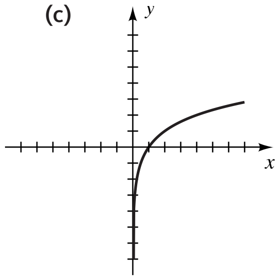
39 **(a)**



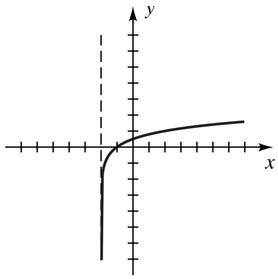
(b)



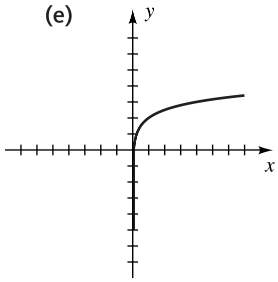
(c)



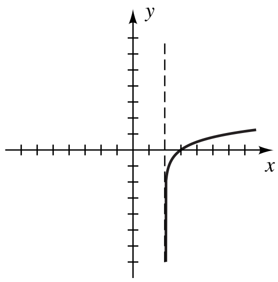
(d)



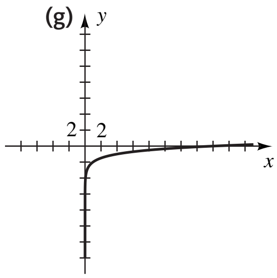
(e)



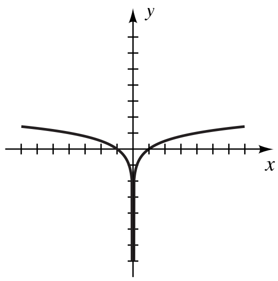
(f)



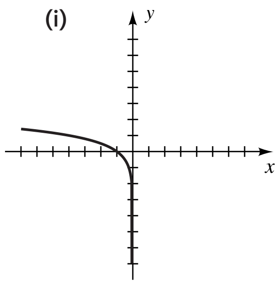
(g)



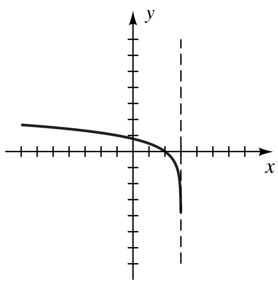
(h)



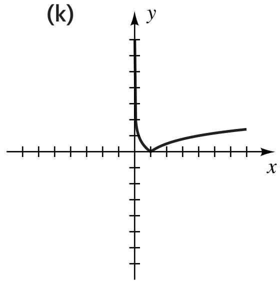
(i)



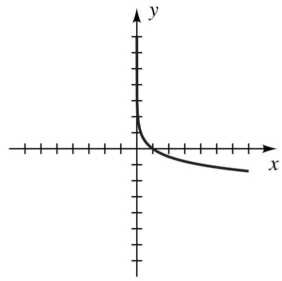
(j)



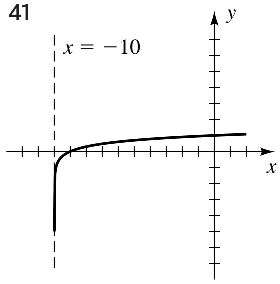
(k)



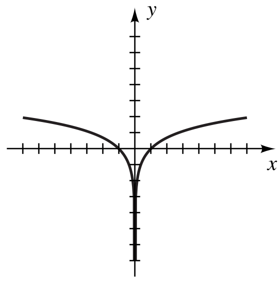
(l)



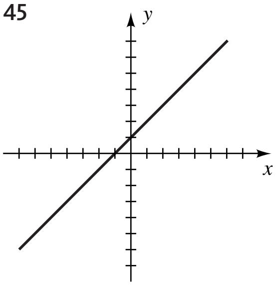
41



43



45



47 $f(x) = \log_3 x$

49 $f(x) = -F(x)$ **51** $f(x) = F(x - 2)$

53 $f(x) = F(x) + 1$

55 **(a)** 4240 **(b)** 8.85 **(c)** 0.0251 **(d)** 9.97
(e) 1.05 **(f)** 0.202

57 $f(x) = 1000e^{x \ln 1.05}$; 4.88% **59** $f(x) = 20e^{x \ln 0.97}$; −3.05%

61 $t = -1600 \log_2 \left(\dfrac{q}{q_0}\right)$ **63** $t = -\dfrac{L}{R} \ln \left(\dfrac{I}{20}\right)$

65 **(a)** 2 **(b)** 4 **(c)** 5

67 **(a)** 10 **(b)** 30 **(c)** 40 **69** En el año 2047

71 **(a)** $W = 2.4e^{1.84h}$ **(b)** 37.92 kg

73 **(a)** 10 007 ft **(b)** 18 004 ft

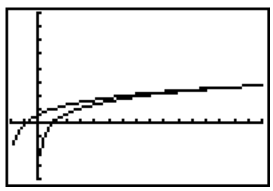
75 **(a)** 305.9 kg **(b)** (1) 20 años (2) 19.8 años

77 10.1 mi **79** $2^{1/8} \approx 1.09$

81 **(a)** Los peatones tienen promedio más alto de rapidez de caminar en grandes ciudades.
(b) 570 000

83 **(a)** 8.4877 **(b)** −0.0601

85 1.763 **87** (0, 14.90]



[−2, 16] por [−4, 8]

89 **(a)** 30% **(b)** 3.85

EJERCICIOS 5.5

1 **(a)** $\log_4 x + \log_4 z$ **(b)** $\log_4 y - \log_4 x$
(c) $\frac{1}{3}\log_4 z$

3 $3\log_a x + \log_a w - 2\log_a y - 4\log_a z$

5 $\frac{1}{3}\log z - \log x - \frac{1}{2}\log y$

7 $\frac{7}{4}\ln x - \frac{5}{4}\ln y - \frac{1}{4}\ln z$

9 **(a)** $\log_3(5xy)$ **(b)** $\log_3\frac{2z}{x}$ **(c)** $\log_3\sqrt[5]{y}$

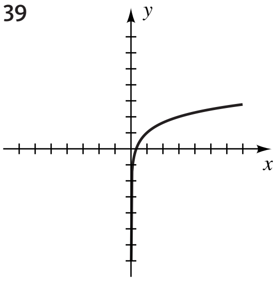
11 $\log_a\frac{x^2}{\sqrt[3]{x-2}\,(2x+3)^5}$ **13** $\log\frac{y^{13/3}}{x^2}$

15 $\ln x^3$ **17** $\frac{11}{2}$ **19** $5\sqrt{5}$ **21** No hay solución

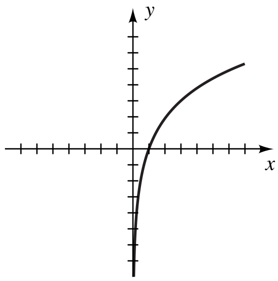
23 -7 **25** 1 **27** -2 **29** -2 **31** $\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$

33 $\frac{250}{49}$ **35** $-1+\sqrt{1+e}$ **37** $3+\sqrt{10}$

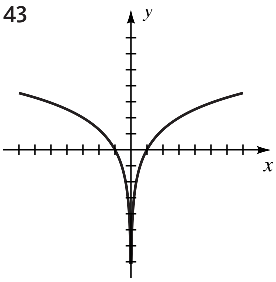
39



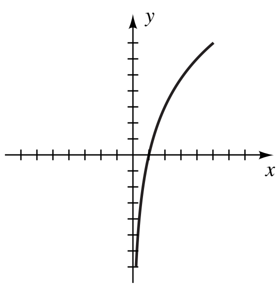
41



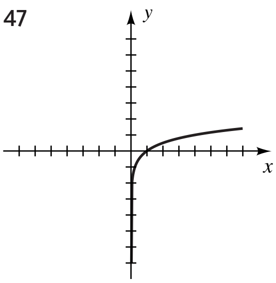
43



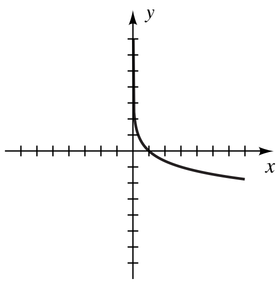
45



47

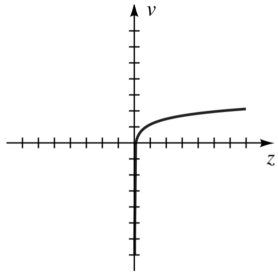


49



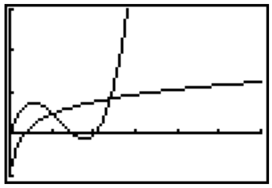
51 $f(x) = \log_2 x^2$ **53** $f(x) = \log_2(8x)$ **55** Sobre $+7$

57 $y = \frac{b}{x^k}$ **59**



61 **(a)** 0 **(b)** $R(2x) = R(x) + a\log 2$ **63** 0.29 cm

65

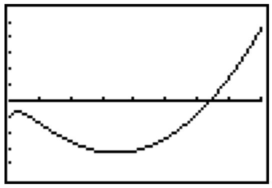


$(0, 1.02] \cup [2.40, \infty)$

$[0, 6]$ por $[-1, 3]$

67 1.41, 6.59

69



(a) Creciente en $[0.2, 0.63]$ y $[6.87, 16]$; decreciente en $[0.63, 6.87]$
(b) 4.61; -3.31

$[0.2, 16, 2]$ por $[-4.77, 5.77]$

71 6.94 **73** 115 m

EJERCICIOS 5.6

1 $\frac{\log 3}{\log 5} \approx 0.68$ **3** $4 - \frac{\log 5}{\log 3} \approx 2.54$ **5** 1.5440

7 -0.0480 **9** 2 **11** -3 **13** No hay solución

15 $\frac{\log(2/81)}{\log 24} \approx -1.16$ **17** $\frac{\log(8/25)}{\log(4/5)} \approx 5.11$

19 5 **21** $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{101}{11}} \approx 2.02$ **23** 2, 5 **25** 1, 2

27 $\frac{\log\left(4+\sqrt{19}\right)}{\log 4} \approx 1.53$ **29** 1 o 100 **31** 10^{100}

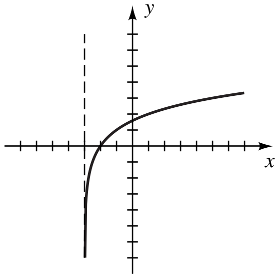
33 10 000 **35** ln 3 **37** 7

39 $x = \log\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right)$

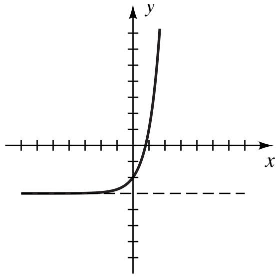
41 $x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ **43** $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

45 $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$

47 Intersección con eje $y = \log_2 3 \approx 1.5850$



49 Intersección con eje $x = \log_4 3 \approx 0.7925$

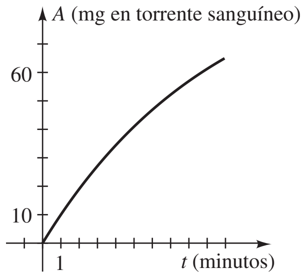


51 **(a)** 2.2 **(b)** 5 **(c)** 8.3

53 Básico si pH > 7, ácido si pH < 7

55 11.58 años $\approx$ 11 años 7 meses **57** 86.4 m

59 **(a)**



(b) 6.58 min

61 **(a)** $t = \dfrac{\log (F/F_0)}{\log (1 - m)}$

(b) Después de 13 863 generaciones

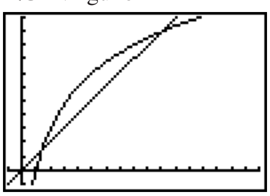
63 **(a)** 4.28 ft (b) 24.8 años **65** $\dfrac{\ln (25/6)}{\ln (200/35)} \approx 0.82$

67 La sospecha es correcta.

69 La sospecha es incorrecta.

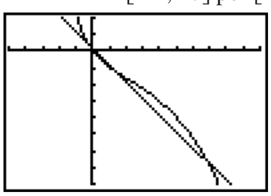
71 -0.5764 **73** Ninguno

75 1.37, 9.94



$[-1, 17]$ por $[-1, 11]$

77



$[-5, 10]$ por $[-8, 2]$

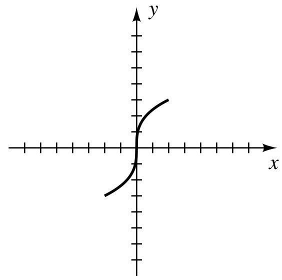
$(-\infty, -0.32) \cup (1.52, 6.84)$

79 (4)

CAPÍTULO 5 EJERCICIOS DE REPASO

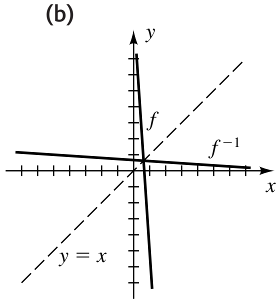
1 Sí

2



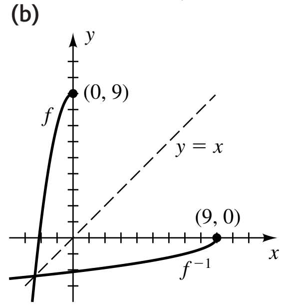
3 **(a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{10 - x}{15}$

(b)



4 **(a)** $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{9 - x}{2}}$

(b)

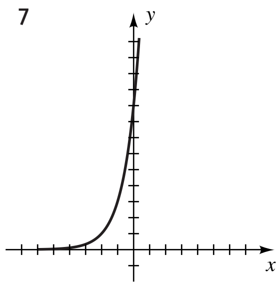


5 **(a)** 2 **(b)** 4 **(c)** 2 **(d)** 2 **(e)** $x > 2$

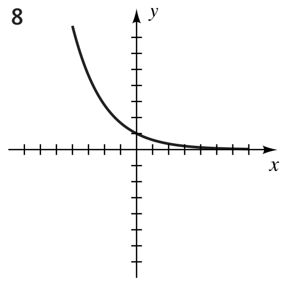
6 **(a)** 5 **(b)** 7 **(c)** 4

(d) No se da suficiente información.

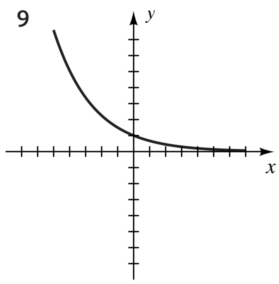
7



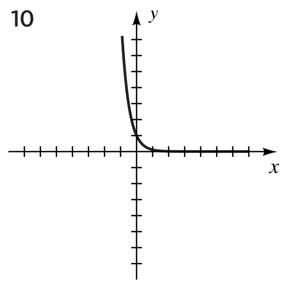
8



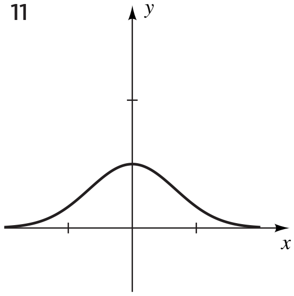
9



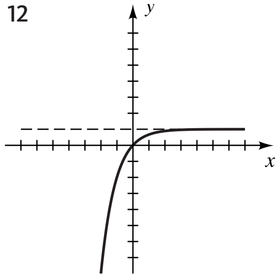
10



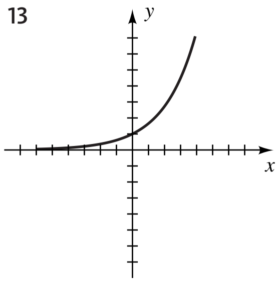
11



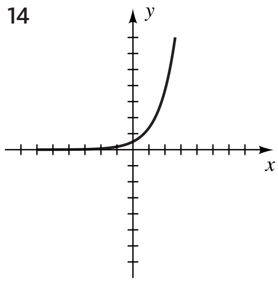
12



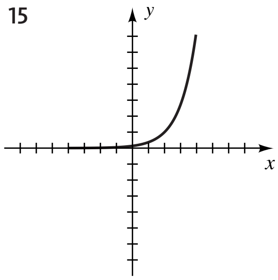
13



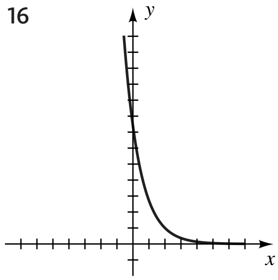
14



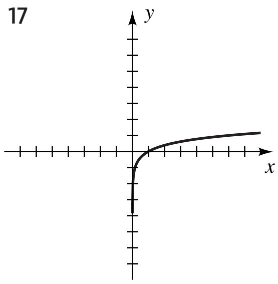
15



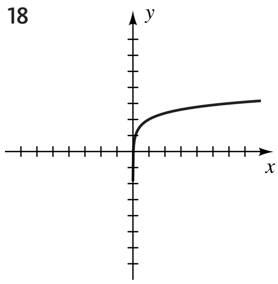
16



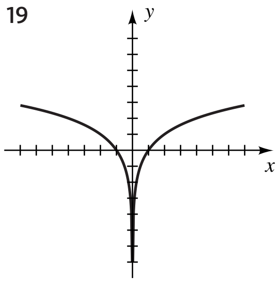
17



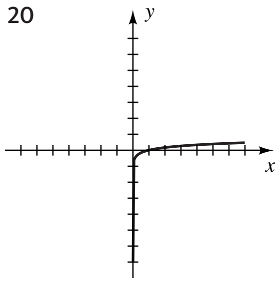
18



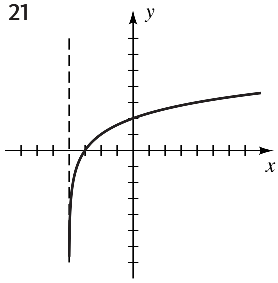
19



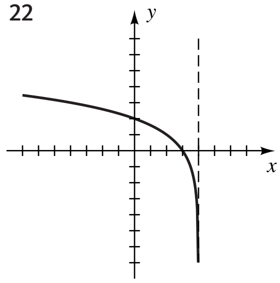
20



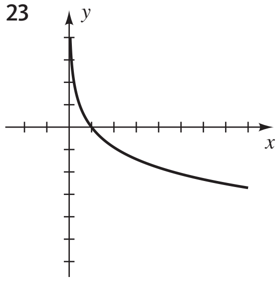
21



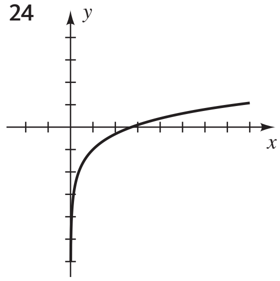
22



23



24



25 **(a)** -4 **(b)** 0 **(c)** 1 **(d)** 4 **(e)** 6 **(f)** 8 **(g)** $\frac{1}{2}$

26 **(a)** $\frac{1}{3}$ **(b)** 0 **(c)** 1 **(d)** 5 **(e)** 1 **(f)** 25 **(g)** $\frac{1}{3}$

27 0 **28** $-\frac{6}{5}$ **29** 9 **30** -2 **31** $\frac{33}{47}$ **32** 1

33 $-1 + \sqrt{3}$ **34** 103 **35** $5 - \frac{\log 6}{\log 2}$

36 $\pm\sqrt{\frac{\log 7}{\log 3}}$ **37** $\frac{\log (3/8)}{\log (32/9)}$ **38** 1 **39** $\frac{1}{4}, 1, 4$

40 No hay solución **41** $\sqrt{5}$ **42** 2 **43** $0, \pm 1$

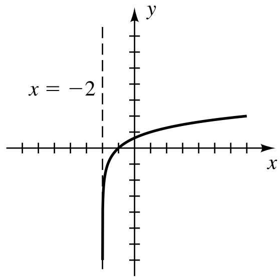
44 $\ln 2$ **45** **(a)** $-3, 2$ **(b)** 2

46 **(a)** 8 **(b)** ± 4

47 $4 \log x + \frac{2}{3} \log y - \frac{1}{3} \log z$

48 $-\log (xy^2)$ **49** $f(x) = 6\left(\frac{4}{3}\right)^x$

50



51 $x = \log \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}\right)$

52 Si $y < 0$, entonces $x = \log\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}\right)$.

Si $y > 0$, entonces $x = \log\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}\right)$.

53 **(a)** 1.89 **(b)** 78.3 **(c)** 0.472 **(d)** 1.72

54 **(a)** 0.924 **(b)** 0.00375 **(c)** 6.05 **(d)** -0.223

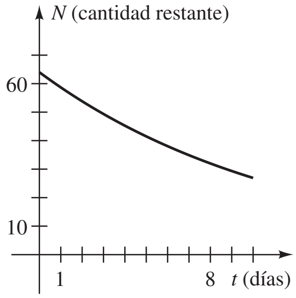
55 **(a)** $D = (-1, \infty)$, $R = \mathbb{R}$
(b) $y = 2^x - 1$, $D = \mathbb{R}$, $R = (-1, \infty)$

56 **(a)** $D = \mathbb{R}$, $R = (-2, \infty)$
(b) $y = 3 - \log_2(x + 2)$, $D = (-2, \infty)$, $R = \mathbb{R}$

57 **(a)** 2000
(b) $2000(3^{1/6}) \approx 2401$; $2000(3^{1/2}) = 3464$; 6000

58 $1032.90

59 **(a)**



(b) 8 días

60 $N = 1000\left(\frac{3}{5}\right)^{t/3}$

61 **(a)** Después de 19.3 años **(b)** 14.6 años **62** 3.16%

63 $t = (\ln 100)\frac{L}{R} \approx 4.6\frac{L}{R}$

64 **(a)** $I = I_0 10^{\alpha/10}$
(b) Examine $I(\alpha + 1)$, donde $I(\alpha)$ es la intensidad correspondiente a α decibeles.

65 $t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{a - L}{ab}\right)$ **66** $A = 10^{(R+5.1)/2.3} - 3000$

67 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{10^{(R+5.1)/2.3} - 3000}{10^{(R+7.5)/2.3} - 34\,000}$ **68** 26 615.9 mi²

69 $h = \frac{\ln(29/p)}{0.000034}$ **70** $v = a\ln\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$

71 **(a)** $n = 10^{7.7-0.9R}$ **(b)** 12 589; 1585; 200

72 **(a)** $E = 10^{11.4+1.5R}$ **(b)** 7.9×10^{24} ergs **73** 110 días

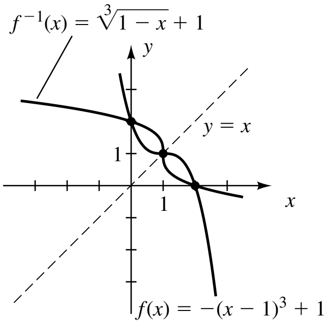
74 86.8 cm; 9.715 cm/año **75** $t = -\frac{L}{R}\ln\left(\frac{V - RI}{V}\right)$

76 **(a)** 26 749 años **(b)** 30% **77** 31.5 años

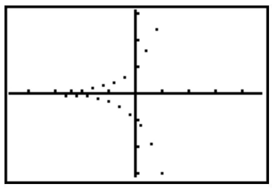
78 3196 años

CAPÍTULO 5 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 **(a)**



2



La base a debe ser positiva para que la función $f(x) = a^x$ sea definida para todos los valores de x.

3 **(a)** La gráfica se aplana.
(b) $y = \frac{101}{2}(e^{x/101} + e^{-x/101}) - 71$

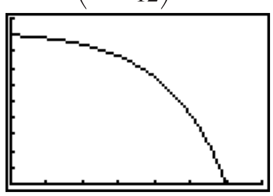
4 7.16 años

5 **(a)** *Sugerencia:* primero tome el logaritmo natural de ambos lados.
(b) 2.50 y 2.97
(c) Note que $f(e) = \frac{1}{e}$. Cualquier recta horizontal $y = k$, con $0 < k < \frac{1}{e}$, cruzará la gráfica en los puntos $\left(x_1, \frac{\ln x_1}{x_1}\right)$ y $\left(x_2, \frac{\ln x_2}{x_2}\right)$, donde $1 < x_1 < e$ y $x_2 > e$.

6 **(a)** La diferencia está en la capitalización.
(b) Más cerca de la gráfica de la segunda función
(c) 29 y 8.2; 29.61 y 8.18

7 *Sugerencia:* compruebe las restricciones para las leyes de los logaritmos.

8 **(a)** $U = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t} - \frac{12M[(1 + r/12)^{12t} - 1]}{r}$
(b)



[0, 35, 5] por [0, 100 000, 10 000]

(c) $84 076.50; 24.425 años

9 $(-0.999\,901\,1, 0.009\,990\,01)$, $(-0.0001, 0.01)$, $(100, 0.011\,051\,11)$, y $(36{,}102.844, 4.6928 \times 10^{13})$. Los valores de función exponencial (con base > 1) son mayores que los valores de función polinomial (con término principal positivo) para valores muy grandes de x.

10 (x, x) con $x \approx 0.442\,394\,43, 4.177\,077\,4$, y 5503.6647. Los valores de y para $y = x$ finalmente serán más grandes que los valores de y para $y = (\ln x)^n$.

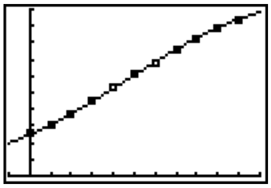
11 8.447177%; \$1 025 156.25

12 **(a)** 3.5 terremotos = 1 bomba, 425 bombas = erupción **(b)** 9.22; sí

13 15 de enero de 2010; alrededor de 7.6%

14 $y \approx 68.2(1.000353)^x$

15 **(a)**



$[-10, 110, 10]$ por $[0, 10^{10}, 10^9]$

(b) Logística

(c) $y \approx \dfrac{1.1542 \times 10^{10}}{1 + 3.6372e^{-0.0278x}}$; vea la gráfica del inciso (a).

(d) 1.1542×10^{10}

16 e^b, con $b = \dfrac{11 \ln 5 \cdot \ln 7}{\ln 35}$

17 $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{81 - x^2}}$. Las asíntotas verticales son $x = \pm 9$. Las asíntotas horizontales de f son $y = \pm 9$.

EXAMEN DE CAPÍTULO 5

1 $f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 4}{1 - x}$; $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

2 $f^{-1}(x) = -\sqrt{7 - x}$; $(-\infty, 7]$; $(-\infty, 0]$ **3** 16

4 Intersección con el eje x: 2; intersección con el eje y: $-\dfrac{5}{9}$

5 $f(x) = 280(2)^{-x} + 70$

6 $-\dfrac{1}{300}$ **7** **(a)** \$1796.32 **(b)** \$376 675.20

8 $y = 2(1.0551)^t$ **9** 495 303 **10** \$67 032.00

11 47% **12** 3 **13** $x > \dfrac{3}{2}$ **14** $t = E \log_a \dfrac{C + F}{D}$

15 Alrededor de 46.2 años **16** -2 **17** $1 + \sqrt{26}$

18 23.78 años **19** $\ln 2$, $\log_4 3$ **20** 10^{10}

21 2.3219 **22** 22.11 años

CAPÍTULO 6

EJERCICIOS 6.1

Ejer. 1–4: Las respuestas no son únicas.

1 **(a)** 480°, 840°, −240°, −600° **(b)** 495°, 855°, −225°, −585° **(c)** 330°, 690°, −390°, −750°

3 **(a)** 260°, 980°, −100°, −460°

(b) $\dfrac{17\pi}{6}, \dfrac{29\pi}{6}, -\dfrac{7\pi}{6}, -\dfrac{19\pi}{6}$

(c) $\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{15\pi}{4}, -\dfrac{9\pi}{4}, -\dfrac{17\pi}{4}$

5 **(a)** 77°22′36″ **(b)** 46.13°

7 **(a)** 54°43′33″ **(b)** 121.93°

9 **(a)** $\dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $-\dfrac{\pi}{3}$ **(c)** $\dfrac{5\pi}{4}$

11 **(a)** $\dfrac{5\pi}{2}$ **(b)** $\dfrac{2\pi}{5}$ **(c)** $\dfrac{5\pi}{9}$

13 **(a)** 120° **(b)** 330° **(c)** 135°

15 **(a)** −630° **(b)** 1260° **(c)** 20°

17 89°57′16″ **19** 360°57′48″ **21** 120.2667°

23 262.2586° **25** 63°10′8″ **27** 310°37′17″

29 2.5 cm

31 **(a)** $2\pi \approx 6.28$ cm **(b)** $8\pi \approx 25.13\ \text{cm}^2$

33 **(a)** 1.75; $\dfrac{315}{\pi} \approx 100.27°$ **(b)** $14\ \text{cm}^2$

35 **(a)** $\dfrac{20\pi}{9} \approx 6.98$ m **(b)** $\dfrac{80\pi}{9} \approx 27.93\ \text{m}^2$

37 $A = 32/\theta$

39 En millas: **(a)** 4189 **(b)** 3142 **(c)** 2094 **(d)** 698 **(e)** 70

41 $\dfrac{1}{8}$ radián $\approx 7°10′$ **43** 37.1%

45 7.29×10^{-5} rad/s

47 **(a)** 80π rad/min **(b)** $\dfrac{100\pi}{3} \approx 104.72$ ft/min

49 **(a)** 400π rad/min **(b)** 38π cm/s **(c)** 380 rpm **(d)** $S(r) = \dfrac{1140}{r}$; inversa

51 **(a)** $\dfrac{21\pi}{8} \approx 8.25$ ft **(b)** $\dfrac{2}{3}d$

53 Grande **55** 192.08 rev/min

EJERCICIOS 6.2

1 **(a)** B **(b)** D **(c)** A **(d)** C **(e)** E

Nota: las respuestas están en el orden *sen*, *cos*, *tan*, *cot*, *sec*, *csc* para cualquier ejercicio que requiera los valores de las seis funciones trigonométricas.

3 $\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{4}$

5 $\dfrac{2}{5}, \dfrac{\sqrt{21}}{5}, \dfrac{2}{\sqrt{21}}, \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \dfrac{5}{\sqrt{21}}, \dfrac{5}{2}$

7 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}, \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}, \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

9 $\dfrac{b}{c}, \dfrac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}, \dfrac{b}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \dfrac{\sqrt{c^2 - b^2}}{b}, \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \dfrac{c}{b}$

11 $x = 8$; $y = 4\sqrt{3}$ **13** $x = 7\sqrt{2}$; $y = 7$

15 $x = 4\sqrt{3}$; $y = 4$

17 $\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{3}$ **19** $\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{12}{5}, \dfrac{13}{12}, \dfrac{13}{5}$

21 $\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{5}, \frac{5}{\sqrt{11}}, \frac{6}{5}, \frac{6}{\sqrt{11}}$

23 $200\sqrt{3} \approx 346.4$ ft **25** 192 ft **27** 1.02 m

29 **(a)** 0.9563 **(b)** 0.4848 **(c)** 1.0353 **(d)** -1.2208

31 **(a)** 4.0572 **(b)** 1.0323 **(c)** -0.6335 **(d)** -3.1852

33 **(a)** 0.5 **(b)** -0.9880 **(c)** 0.9985 **(d)** -1

35 **(a)** -1 **(b)** -4 **37** **(a)** 5 **(b)** 5

39 $1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$ **41** $\frac{3+\tan\theta}{2-\tan\theta}$ **43** $\operatorname{sen}\theta$

45 $\cot\theta = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$ **47** $\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$

49 $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}$

Ejer. 51–74: se dan verificaciones típicas.

51 $\cos\theta\sec\theta = \cos\theta(1/\cos\theta) = 1$

53 $\operatorname{sen}\theta\sec\theta = \operatorname{sen}\theta(1/\cos\theta) = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$

55 $\frac{\csc\theta}{\sec\theta} = \frac{1/\operatorname{sen}\theta}{1/\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$

57 $(1+\cos 2\theta)(1-\cos 2\theta) = 1 - \cos^2 2\theta = \operatorname{sen}^2 2\theta$

59 $\cos^2\theta(\sec^2\theta - 1) = \cos^2\theta(\tan^2\theta)$

$$= \cos^2\theta \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \operatorname{sen}^2\theta$$

61 $\frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\csc(\theta/2)} + \frac{\cos(\theta/2)}{\sec(\theta/2)} = \frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{1/\operatorname{sen}(\theta/2)} + \frac{\cos(\theta/2)}{1/\cos(\theta/2)}$

$$= \operatorname{sen}^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2) = 1$$

63 $(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

$$= \frac{1}{\sec^2\theta}$$

65 $\sec\theta - \cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta = \tan\theta\operatorname{sen}\theta$$

67 $\frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 1 + \cot\theta$

69 $(\cot\theta + \csc\theta)(\tan\theta - \operatorname{sen}\theta)$

$= \cot\theta\tan\theta - \cot\theta\operatorname{sen}\theta + \csc\theta\tan\theta$
$\quad - \csc\theta\operatorname{sen}\theta$

$= \frac{1}{\tan\theta}\tan\theta - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta$

$= 1 - \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta} - 1 = -\cos\theta + \sec\theta$

$$= \sec\theta - \cos\theta$$

71 $\sec^2 3\theta\csc^2 3\theta = (1+\tan^2 3\theta)(1+\cot^2 3\theta)$

$$= 1 + \tan^2 3\theta + \cot^2 3\theta + 1$$
$$= \sec^2 3\theta + \csc^2 3\theta$$

73 $\log\csc\theta = \log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right) = \log 1 - \log\operatorname{sen}\theta$

$$= 0 - \log\operatorname{sen}\theta = -\log\operatorname{sen}\theta$$

75 $-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{5}{12}, -\frac{12}{5}, \frac{13}{12}, -\frac{13}{5}$

77 $-\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{29}}{2}, -\frac{\sqrt{29}}{5}$

79 $\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -3, -\frac{1}{3}, -\sqrt{10}, \frac{\sqrt{10}}{3}$

81 $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{3}$

83 $-\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}, \frac{7}{2}, \frac{2}{7}, -\frac{\sqrt{53}}{2}, -\frac{\sqrt{53}}{7}$

Nota: U significa *no definido.*

85 **(a)** 1, 0, U, 0, U, 1 **(b)** 0, 1, 0, U, 1, U
(c) -1, 0, U, 0, U, -1 **(d)** 0, -1, 0, U, -1, U

87 **(a)** IV **(b)** III **(c)** II **(d)** III

89 $\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{3}$

91 $-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{5}{12}, -\frac{12}{5}, \frac{13}{12}, -\frac{13}{5}$

93 $-\frac{\sqrt{8}}{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt{8}, \frac{1}{\sqrt{8}}, -3, -\frac{3}{\sqrt{8}}$

95 $\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}, \sqrt{15}, \frac{1}{\sqrt{15}}, 4, \frac{4}{\sqrt{15}}$

97 $-\tan\theta$ **99** $\sec\theta$ **101** $-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

EJERCICIOS 6.3

1 $\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}, -\frac{8}{15}, -\frac{15}{8}, -\frac{17}{15}, \frac{17}{8}$

3 $-\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, -\frac{7}{24}, -\frac{24}{7}, \frac{25}{24}, -\frac{25}{7}$

5 **(a)** $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **(b)** $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
(c) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **(d)** $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

7 **(a)** $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ **(b)** $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$
(c) $\left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ **(d)** $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

Nota: U significa *no definido.*

9 **(a)** (1, 0); 0, 1, 0, U, 1, U
(b) (-1, 0); 0, -1, 0, U, -1, U

11 **(a)** (0, -1); -1, 0, U, 0, U, -1
(b) (0, 1); 1, 0, U, 0, U, 1

13 **(a)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$
(b) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

15 **(a)** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

(b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

17 **(a)** -1 **(b)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(c)** 1

19 **(a)** 1 **(b)** $\sqrt{2}$ **(c)** 1

Ejer. 21-26: se dan verificaciones típicas.

21 $\operatorname{sen}(-x)\sec(-x) = (-\operatorname{sen} x)\sec x$

$= (-\operatorname{sen} x)(1/\cos x)$

$= -\tan x$

23 $\dfrac{\cot(-x)}{\csc(-x)} = \dfrac{-\cot x}{-\csc x} = \dfrac{\cos x/\operatorname{sen} x}{1/\operatorname{sen} x} = \cos x$

25 $\dfrac{1}{\cos(-x)} - \tan(-x)\operatorname{sen}(-x)$

$= \dfrac{1}{\cos x} - (-\tan x)(-\operatorname{sen} x)$

$= \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\operatorname{sen} x$

$= \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x$

27 **(a)** 0 **(b)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **29** **(a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(b)** 0

31 **(a)** 0 **(b)** $-\infty$ **33** **(a)** $\sqrt{3}$ **(b)** ∞

35 **(a)** ∞ **(b)** 1 **37** **(a)** $-\infty$ **(b)** $\sqrt{2}$

39 $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ **41** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$ **43** $0, 2\pi, 4\pi$

45 $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$ **47** $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **49** $0, \pi$

51 **(a)** $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(b) $-\frac{11\pi}{6} < x < -\frac{7\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

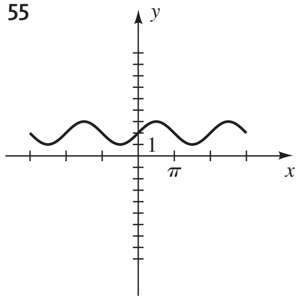
(c) $-2\pi \le x < -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$, y $\frac{5\pi}{6} < x \le 2\pi$

53 **(a)** $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

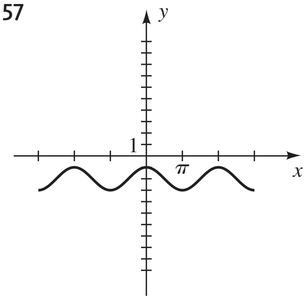
(b) $-2\pi \le x < -\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, y $\frac{4\pi}{3} < x \le 2\pi$

(c) $-\frac{4\pi}{3} < x < -\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$

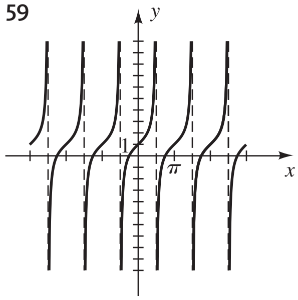
55



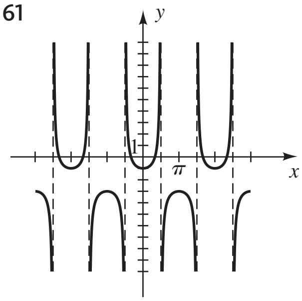
57



59



61



63 **(a)** $\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right], \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

(b) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

65 **(a)** La función tangente aumenta en todos los intervalos en los que esté definida. Entre -2π y 2π, estos intervalos son $\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

(b) La función tangente *nunca* es decreciente en ningún intervalo para el que esté definida.

69 **(a)** -0.8 **(b)** -0.9 **(c)** $0.5, 2.6$

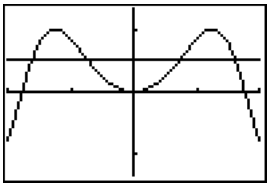
71 **(a)** -0.7 **(b)** 0.4 **(c)** $2.2, 4.1$

73 **(a)**

Hora	*T*	*H*	Hora	*T*	*H*
12 a.m.	60	60	12 p.m.	60	60
3 a.m.	52	74	3 p.m.	68	46
6 a.m.	48	80	6 p.m.	72	40
9 a.m.	52	74	9 p.m.	68	46

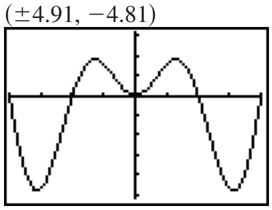
(b) Máx: 72°F a las 6:00 p.m., 80% a las 6:00 a.m.; mín: 48°F a las 6:00 a.m., 40% a las 6:00 p.m.

75 $\pm 0.72, \pm 1.62$



$[-2, 2]$ por $[-1.33, 1.33]$

77 $(\pm 2.03, 1.82)$; $(\pm 4.91, -4.81)$



$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-5.19, 3.19]$

79 0 **81** 1 **83** 1

EJERCICIOS 6.4

1 (a) $50°$ **(b)** $80°$ **(c)** $55°$ **(d)** $60°$

3 (a) $\frac{\pi}{4}$ **(b)** $\frac{\pi}{3}$ **(c)** $\frac{\pi}{6}$ **(d)** $\frac{\pi}{4}$

5 (a) $\pi - 3 \approx 8.1°$ **(b)** $\pi - 2 \approx 65.4°$
(c) $2\pi - 5.5 \approx 44.9°$ **(d)** $32\pi - 100 \approx 30.4°$

7 (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **9 (a)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\frac{1}{2}$

11 (a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(b)** $-\sqrt{3}$ **13 (a)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(b)** $\sqrt{3}$

15 (a) -2 **(b)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **17 (a)** $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ **(b)** 2

19 (a) 0.412 **(b)** 0.778 **21 (a)** 3.305 **(b)** 0.472

23 (a) 2.650 **(b)** 3.179 **25 (a)** $24.83°$ **(b)** $24°50'$

27 (a) $30.46°$ **(b)** $30°27'$

29 (a) $74.88°$ **(b)** $74°53'$

31 (a) $14.04°$ **(b)** $14°2'$

33 (a) $76.38°$ **(b)** $76°23'$

35 (a) $23.18°$ **(b)** $23°11'$

37 (a) 0.9899 **(b)** -0.1097 **(c)** -0.1425
(d) 0.7907 **(e)** -11.2493 **(f)** 1.3677

39 (a) $214.3°, 325.7°$ **(b)** $41.5°, 318.5°$
(c) $70.3°, 250.3°$ **(d)** $133.8°, 313.8°$
(e) $153.6°, 206.4°$ **(f)** $42.3°, 137.7°$

41 (a) 0.43, 2.71 **(b)** 1.69, 4.59 **(c)** 1.87, 5.01
(d) 0.36, 3.50 **(e)** 0.96, 5.32 **(f)** 3.35, 6.07

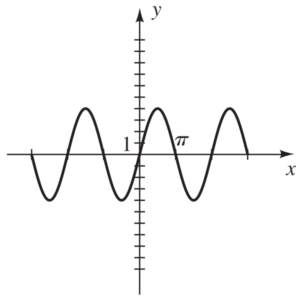
43 0.28 cm

45 (a) El máximo se presenta cuando el sol está subiendo en el oriente.
(b) $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 35\%$

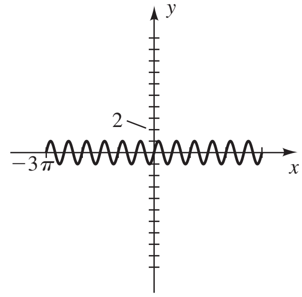
47 $(9, 9\sqrt{3})$

EJERCICIOS 6.5

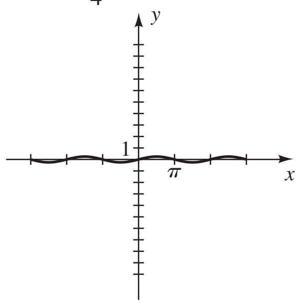
1 (a) $4, 2\pi$



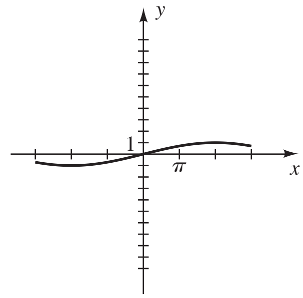
(b) $1, \frac{\pi}{2}$



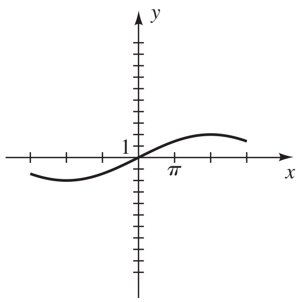
(c) $\frac{1}{4}, 2\pi$



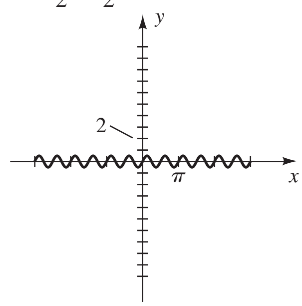
(d) $1, 8\pi$



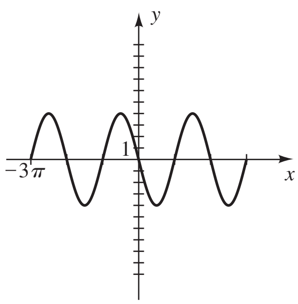
(e) $2, 8\pi$



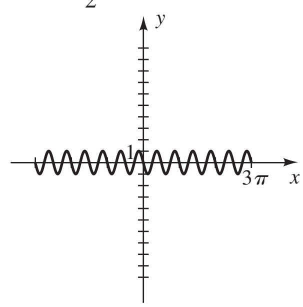
(f) $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}$



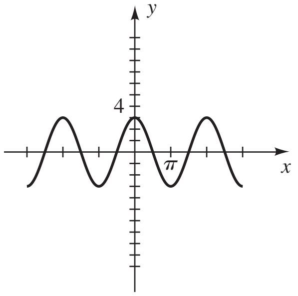
(g) $4, 2\pi$



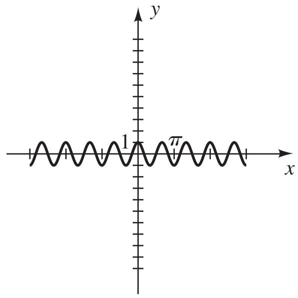
(h) $1, \frac{\pi}{2}$



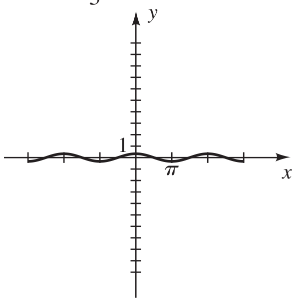
3 **(a)** $3, 2\pi$



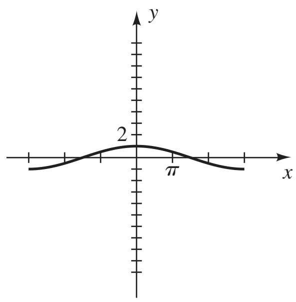
(b) $1, \frac{2\pi}{3}$



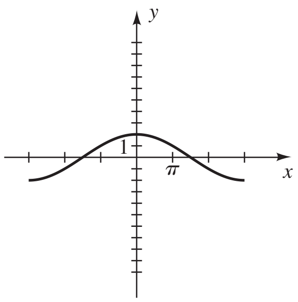
(c) $\frac{1}{3}, 2\pi$



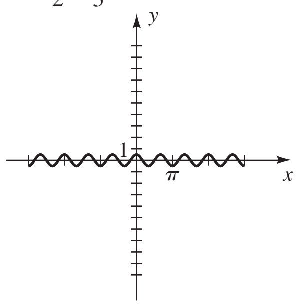
(d) $1, 6\pi$



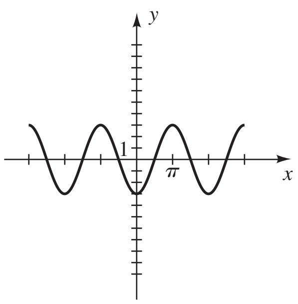
(e) $2, 6\pi$



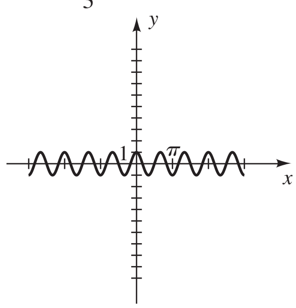
(f) $\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}$



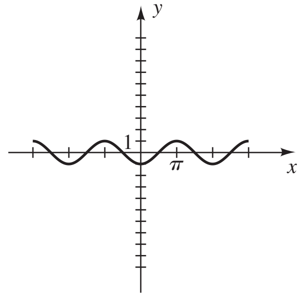
(g) $3, 2\pi$



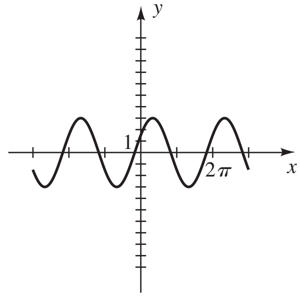
(h) $1, \frac{2\pi}{3}$



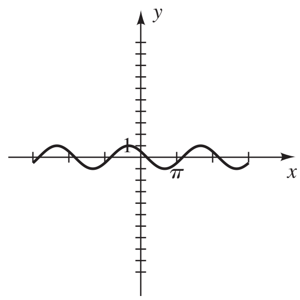
5 $1, 2\pi, \frac{\pi}{2}$



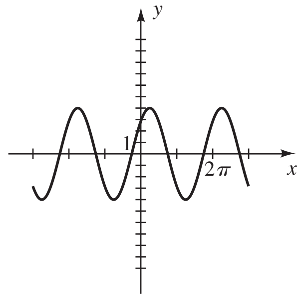
7 $3, 2\pi, -\frac{\pi}{6}$



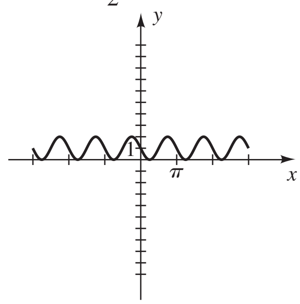
9 $1, 2\pi, -\frac{\pi}{3}$



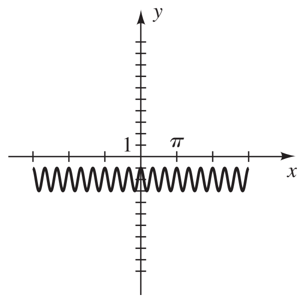
11 $4, 2\pi, \frac{\pi}{4}$



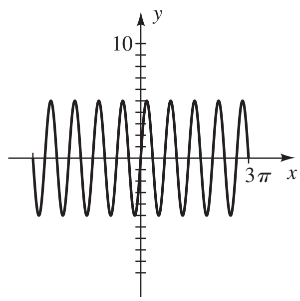
13 $1, \pi, \frac{\pi}{2}$



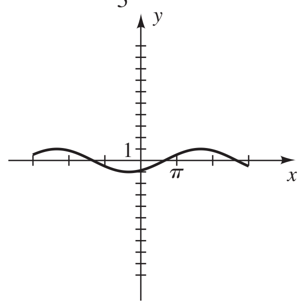
15 $1, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}$



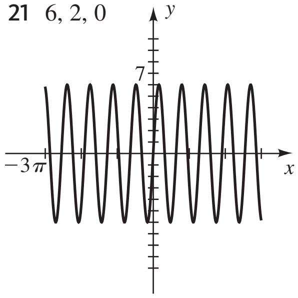
17 $5, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$



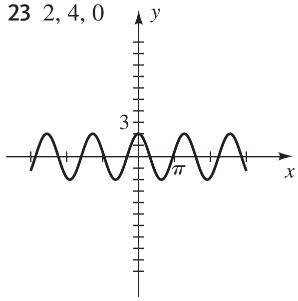
19 $1, 4\pi, \frac{2\pi}{3}$



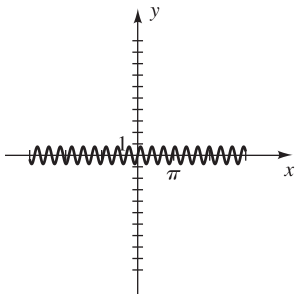
21 6, 2, 0



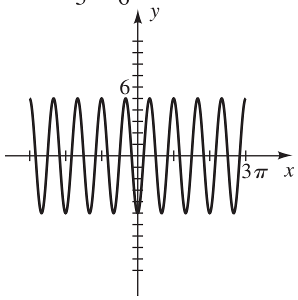
23 2, 4, 0



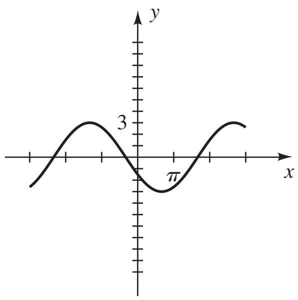
25 $\frac{3}{4}$, 1, 0



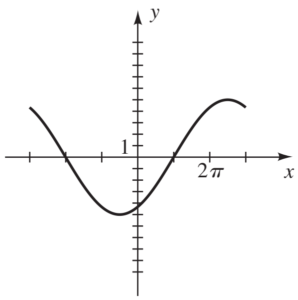
27 5, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$



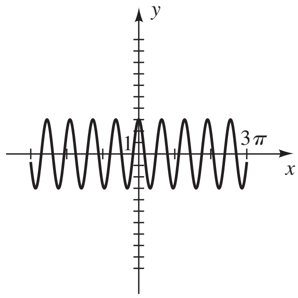
29 3, 4π, $\frac{2\pi}{3}$



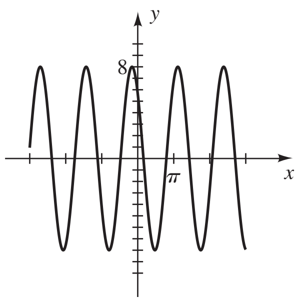
31 5, 6π, $-\frac{\pi}{2}$



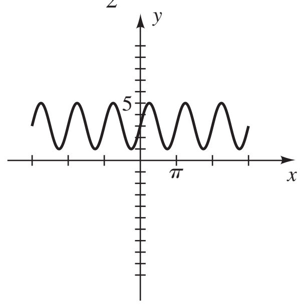
33 3, 2, −4



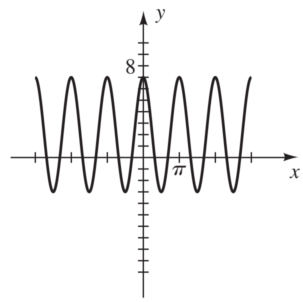
35 8, 4, $\frac{1}{2}$



37 2, π, $\frac{\pi}{2}$



39 5, π, $-\pi$

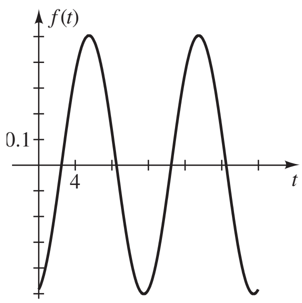


41 **(a)** 4, 2π, $-\pi$ **(b)** $y = 4 \text{ sen } (x + \pi)$

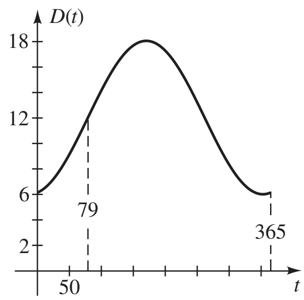
43 **(a)** 2, 4, −3 **(b)** $y = 2 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right)$

45 4π **47** $a = 8, b = 4\pi$

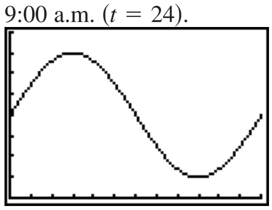
49



51



53 La temperatura es 20°F a las 9:00 a.m. ($t = 0$). Aumenta a alta de 35°F a las 3:00 p.m. ($t = 6$) y luego disminuye a 20°F a las 9:00 p.m. ($t = 12$). Continúa bajando hasta 5°F a las 3:00 a.m. ($t = 18$). Luego sube a 20°F a las 9:00 a.m. ($t = 24$).

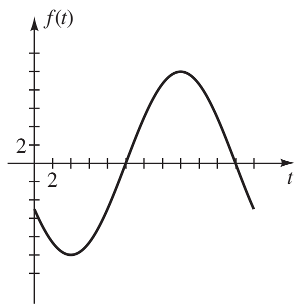


[0, 24, 2] por [0, 40, 5]

55 **(a)** $f(t) = 10 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 10)\right] + 0$, con $a = 10$,

$b = \frac{\pi}{12}, c = -\frac{5\pi}{6}, d = 0$

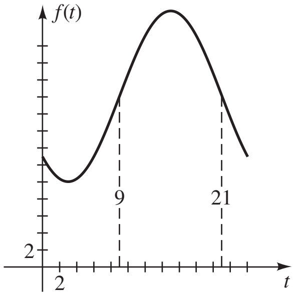
(b)



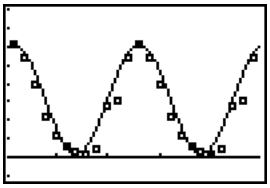
57 **(a)** $f(t) = 10 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 9)\right] + 20$, con $a = 10$,

$b = \frac{\pi}{12}$, $c = -\frac{3\pi}{4}$, $d = 20$

(b)



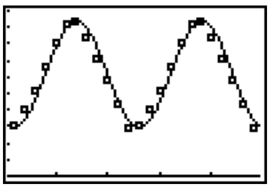
59 **(a)**



[0.5, 24.5, 5] por [−1, 8]

(b) $P(t) = 2.95 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3.15$

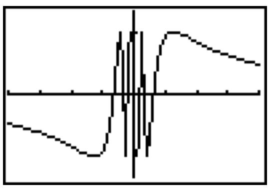
61 **(a)**



[0.5, 24.5, 5] por [0, 20, 2]

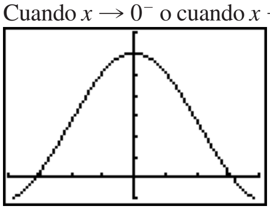
(b) $D(t) = 6.42 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{2\pi}{3}\right) + 12.3$

63 Cuando $x \to 0^-$ o cuando $x \to 0^+$, y oscila entre -1 y 1 y no se aproxima a un valor único.



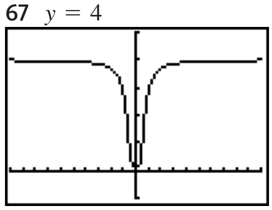
[−2, 2, 0.5] por [−1.33, 1.33, 0.5]

65 Cuando $x \to 0^-$ o cuando $x \to 0^+$, y parece aproximarse a 2.



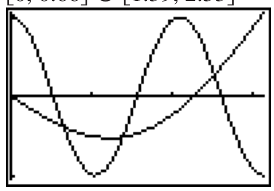
[−2, 2, 0.5] por [−0.33, 2.33, 0.33]

67 $y = 4$



[−20, 20, 2] por [−1, 5]

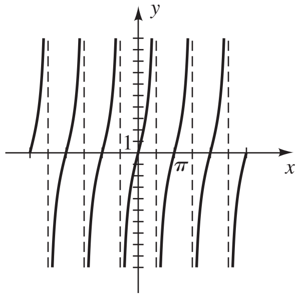
69 $[0, 0.66] \cup [1.39, 2.53]$



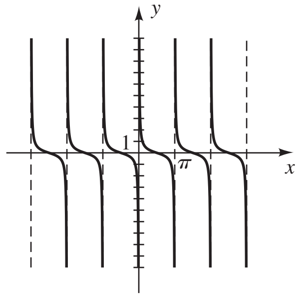
[0, π] por [−1.05, 1.05]

EJERCICIOS 6.6

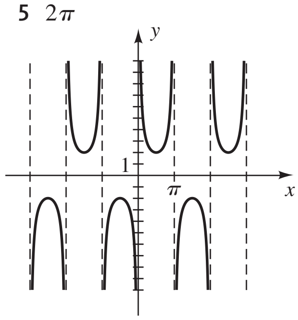
1 π



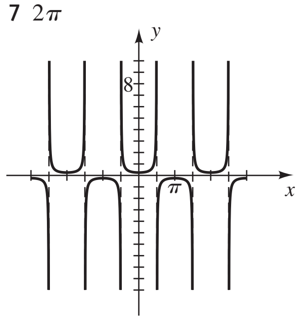
3 π



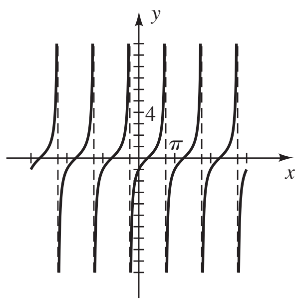
5 2π



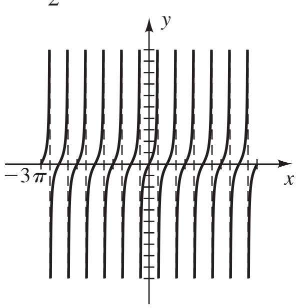
7 2π



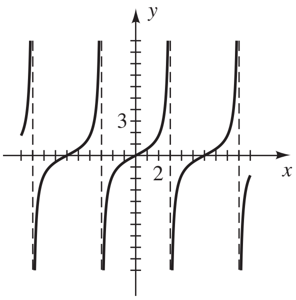
9 π



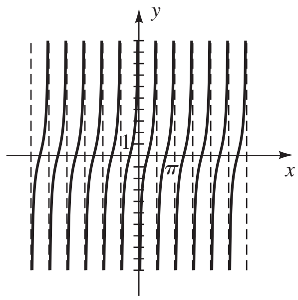
11 $\frac{\pi}{2}$



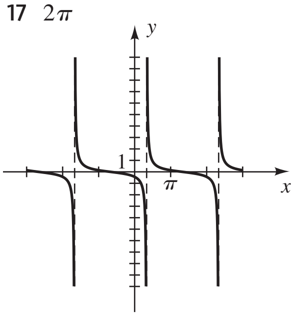
13 6



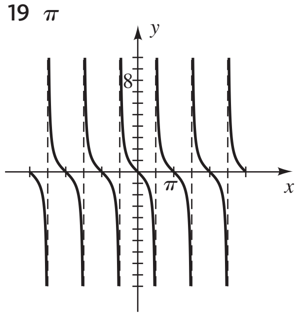
15 $\frac{\pi}{2}$



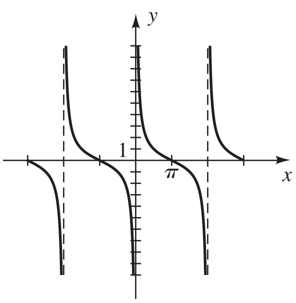
17 2π



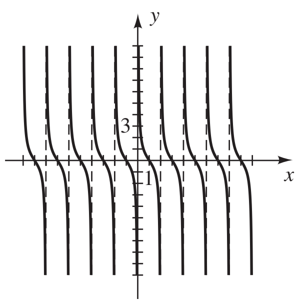
19 π



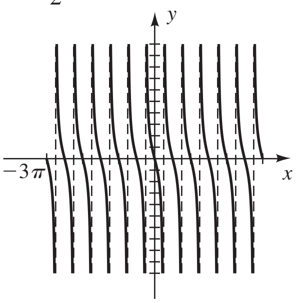
21 2π



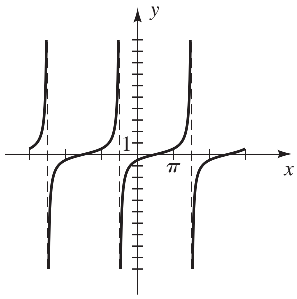
23 2



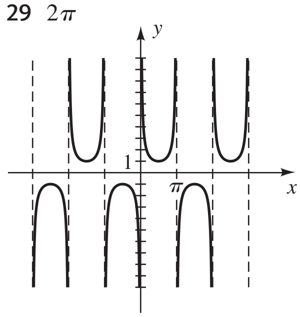
25 $\frac{\pi}{2}$



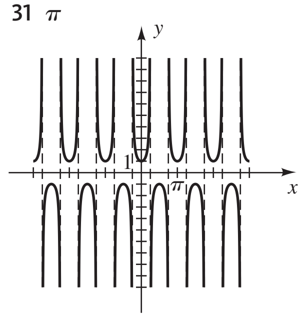
27 2π



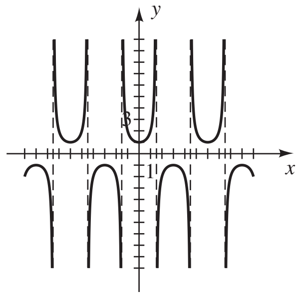
29 2π



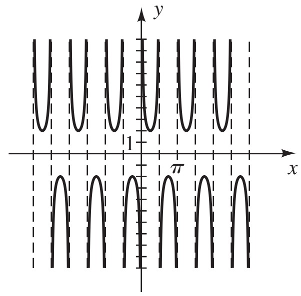
31 π



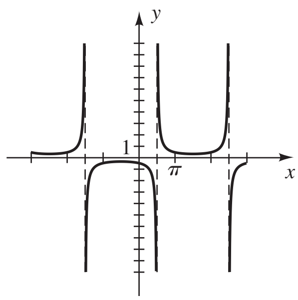
33 6



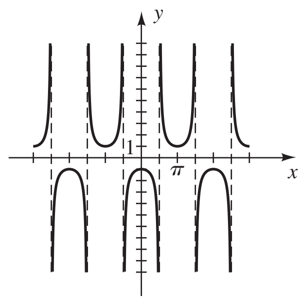
35 π



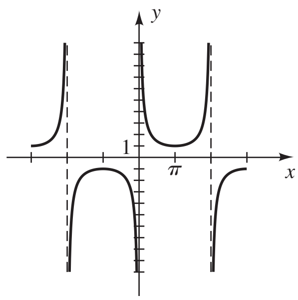
37 4π



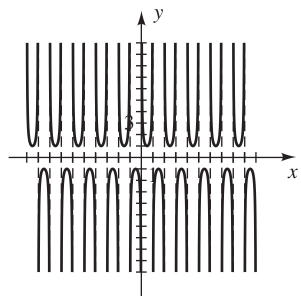
39 2π



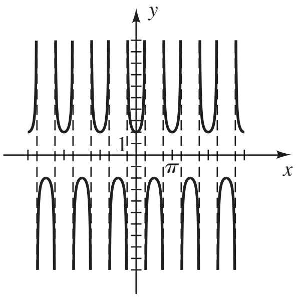
41 4π



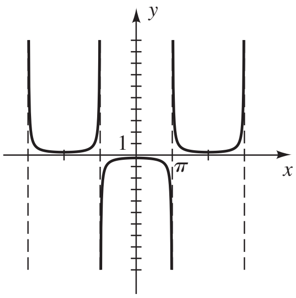
43 2



45 π



47 4π



49 $x = \dfrac{\pi}{2}, x = \pi$ (hay otras respuestas posibles)

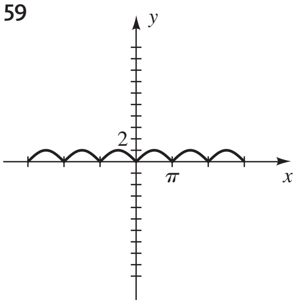
51 $\dfrac{3}{4}$ (hay otras respuestas posibles)

53 $(2\pi, 3)$ (hay otras respuestas posibles)

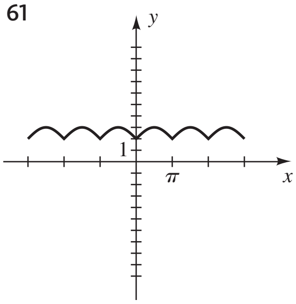
55 $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$

57 $y = -\cot\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

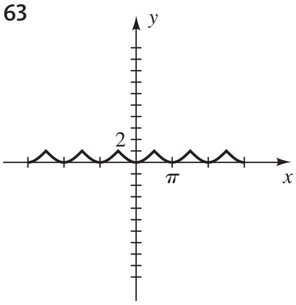
59



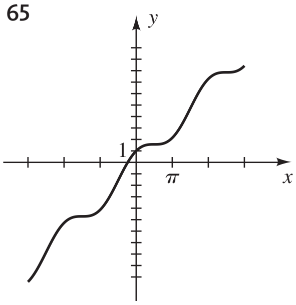
61



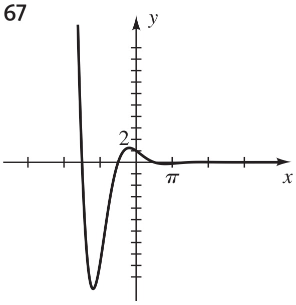
63



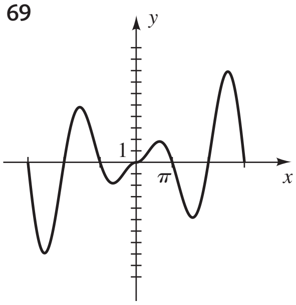
65



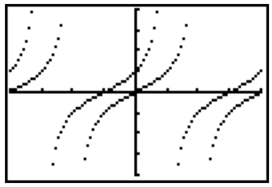
67



69

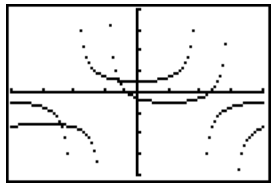


71



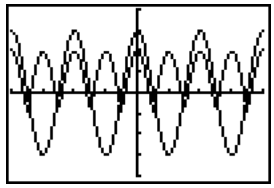
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$

73



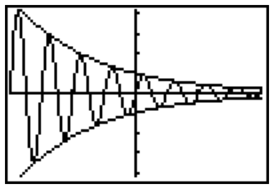
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$

75



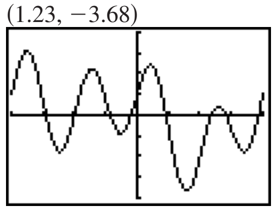
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$

77 $e^{-x/4}$



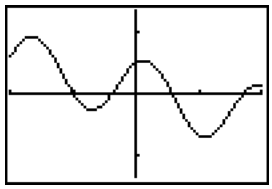
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4.19, 4.19]$

79 $(-2.76, 3.09)$; $(1.23, -3.68)$



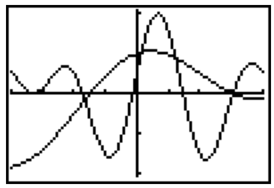
$[-\pi, \pi, \pi/4]$ por $[-4, 4]$

81 $[-0.70, 0.12]$



$[-2, 2]$ por $[-1.33, 1.33]$

83 $[-\pi, -1.31] \cup [0.11, 0.95] \cup [2.39, \pi]$



$[-\pi, \pi, \pi/4]$ por $[-2.09, 2.09]$

85 **(a)** I_0 **(b)** $0.044I_0$ **(c)** $0.603I_0$

87 **(a)** $A_0e^{-\alpha z}$ **(b)** $\dfrac{\alpha}{k}z_0$ **(c)** $\dfrac{\ln 2}{\alpha}$

EJERCICIOS 6.7

1 $\beta = 60°, a = \dfrac{20}{3}\sqrt{3}, c = \dfrac{40}{3}\sqrt{3}$

3 $\alpha = 45°, a = b = 15\sqrt{2}$

5 $\alpha = \beta = 45°, c = 5\sqrt{2}$

7 $\alpha = 60°, \beta = 30°, a = 15$

9 $\beta = 53°, a \approx 18, c \approx 30$

11 $\alpha = 18°9', a \approx 78.7, c \approx 252.6$

13 $\alpha \approx 29°, \beta \approx 61°, c \approx 51$

15 $\alpha \approx 69°, \beta \approx 21°, a \approx 5.4$ **17** $b = c\cos\alpha$

19 $a = b\cot\beta$ **21** $c = a\csc\alpha$

23 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

25 $250\sqrt{3} + 4 \approx 437$ ft **27** 28 800 ft **29** 160 m

31 9659 ft **33** **(a)** 58 ft **(b)** 27 ft **35** 51°20′

37 16.3° **39** 2063 ft **41** 1 459 379 ft^2

43 21.8° **45** 20.2 m **47** 29.7 km **49** 3944 mi

51 126 mi/hr

53 **(a)** 45%

(b) Cada satélite tiene un margen de señal de más de 120°.

55 $h = d \operatorname{sen} \alpha + c$ 57 $h = \dfrac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$

59 $h = d(\tan \beta - \tan \alpha)$

61 N70°E; N40°O; S15°O; S25°E

63 **(a)** 55 mi **(b)** S63°E 65 324 mi

67 Amplitud, 10 cm; periodo, $\frac{1}{3}$ s; frecuencia, 3 osc/s. El punto está en el origen en $t = 0$. Se mueve hacia arriba con rapidez decreciente, llegando al punto con coordenada 10 en $t = \frac{1}{12}$. Entonces invierte su dirección y se mueve hacia abajo, ganando rapidez hasta que llega al origen en $t = \frac{1}{6}$. Continúa hacia abajo con rapidez decreciente, llegando al punto con coordenada -10 en $t = \frac{1}{4}$. Entonces invierte su dirección y se mueve hacia arriba con rapidez creciente, regresando al origen en $t = \frac{1}{3}$.

69 Amplitud, 4 cm; periodo, $\frac{4}{3}$ s; frecuencia, $\frac{3}{4}$ oscilaciones/s. El movimiento es semejante al ejercicio 67; no obstante, el punto arranca 4 unidades arriba del origen y se mueve hacia abajo, llegando al originen en $t = \frac{1}{3}$ y el punto con coordenada -4 en $t = \frac{2}{3}$. Entonces invierte su dirección y se mueve hacia arriba, llegando al origen en $t = 1$ y a su punto inicial en $t = \frac{4}{3}$.

71 $d = 5 \cos \frac{2\pi}{3} t$

73 **(a)** $y = 25 \cos \frac{\pi}{15} t$

(b) 324 000 ft

CCAPÍTULO 6 EJERCICIOS DE REPASO

1 $\frac{11\pi}{6}, \frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$

2 810°, −120°, 315°, 900°, 36°

3 **(a)** 0.1 **(b)** 0.2 m^2

4 **(a)** $\frac{35\pi}{12}$ cm **(b)** $\frac{175\pi}{16}$ cm^2

5 $\frac{200\pi}{3}, 90\pi$ 6 $\frac{100\pi}{3}, \frac{105\pi}{4}$

7 $x = 6\sqrt{3}; y = 3\sqrt{3}$ 8 $x = \frac{7}{2}\sqrt{2}; y = \frac{7}{2}\sqrt{2}$

9 $\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$ 10 $\cot \theta = \sqrt{\csc^2 \theta - 1}$

Ejer. 11–20: Se dan verificaciones típicas.

11 $\operatorname{sen} \theta (\csc \theta - \operatorname{sen} \theta) = \operatorname{sen} \theta \csc \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta$

12 $$\cos \theta (\tan \theta + \cot \theta) = \cos \theta \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \cos \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \operatorname{sen} \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \csc \theta$$

13 $(\cos^2 \theta - 1)(\tan^2 \theta + 1) = (\cos^2 \theta - 1)(\sec^2 \theta) = \cos^2 \theta \sec^2 \theta - \sec^2 \theta = 1 - \sec^2 \theta$

14 $$\frac{\sec \theta - \cos \theta}{\tan \theta} = \frac{\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta}}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta}}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta}{\sec \theta}$$

15 $$\frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\tan^2 \theta} + \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} = \cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

16 $$\frac{\sec \theta + \csc \theta}{\sec \theta - \csc \theta} = \frac{\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}}{\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta}}{\frac{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta}} = \frac{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta}$$

17 $$\frac{\cot \theta - 1}{1 - \tan \theta} = \frac{\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} - 1}{1 - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta}}{\frac{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}} = \frac{(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) \cos \theta}{(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \cot \theta$$

18 $$\frac{1 + \sec \theta}{\tan \theta + \operatorname{sen} \theta} = \frac{1 + \frac{1}{\cos \theta}}{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta}}{\frac{\operatorname{sen} \theta (1 + \cos \theta)}{\cos \theta}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \csc \theta$$

19 $$\frac{\tan(-\theta) + \cot(-\theta)}{\tan \theta} = \frac{-\tan \theta - \cot \theta}{\tan \theta} = -\frac{\tan \theta}{\tan \theta} - \frac{\cot \theta}{\tan \theta} = -1 - \cot^2 \theta = -(1 + \cot^2 \theta) = -\csc^2 \theta$$

20 $-\dfrac{1}{\csc(-\theta)} - \dfrac{\cot(-\theta)}{\sec(-\theta)} = -\dfrac{1}{-\csc\theta} - \dfrac{-\cot\theta}{\sec\theta}$

$= \operatorname{sen}\theta + \dfrac{\cos\theta/\operatorname{sen}\theta}{1/\cos\theta}$

$= \operatorname{sen}\theta + \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$= \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$= \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$

21 $\dfrac{\sqrt{33}}{7}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{\sqrt{33}}{4}, \dfrac{4}{\sqrt{33}}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{7}{\sqrt{33}}$

22 **(a)** $-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{5}{4}$

(b) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}, -\dfrac{3}{\sqrt{13}}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{13}}{3}, \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

(c) -1, 0, U, 0, U, -1

23 **(a)** II **(b)** III **(c)** IV

24 **(a)** $-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{5}{4}$

(b) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}, -\dfrac{3}{\sqrt{13}}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{13}}{3}, \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

25 $(-1, 0)$; $(0, -1)$; $(0, 1)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $(1, 0)$; $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

26 $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$; $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$; $\left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$; $\left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

27 **(a)** $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{8}$ **(b)** 65°, 43°, 8°

28 **(a)** 1, 0, U, 0, U, 1

(b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

(c) 0, 1, 0, U, 1, U

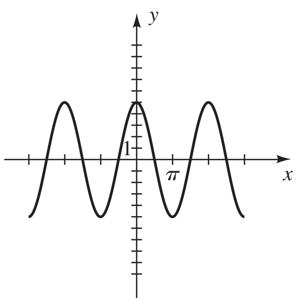
(d) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}, -2$

29 **(a)** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **(b)** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **(c)** $-\dfrac{1}{2}$ **(d)** -2

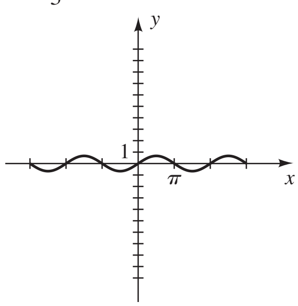
(e) -1 **(f)** $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

30 310.5° **31** 1.2206; 4.3622 **32** 52.44°; 307.56°

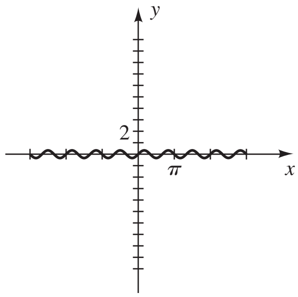
33 $5, 2\pi$



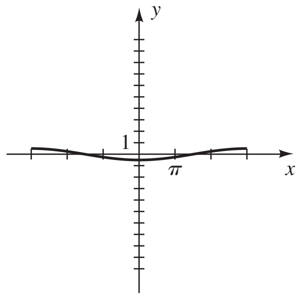
34 $\dfrac{2}{3}, 2\pi$



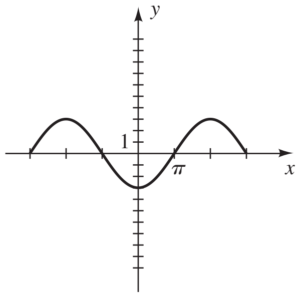
35 $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$



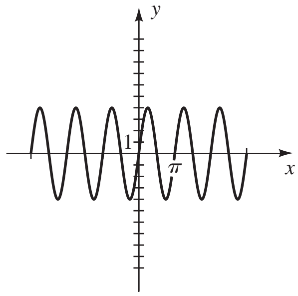
36 $\dfrac{1}{2}, 6\pi$



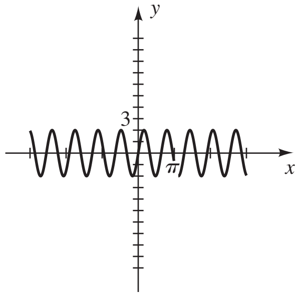
37 $3, 4\pi$



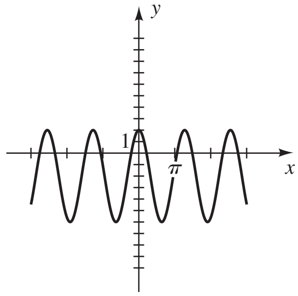
38 $4, \pi$



39 2, 2



40 4, 4



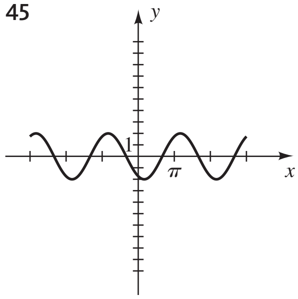
41 **(a)** 1.43, 2 **(b)** $y = 1.43 \operatorname{sen} \pi x$

42 **(a)** $3.27, 3\pi$ **(b)** $y = -3.27 \operatorname{sen} \dfrac{2}{3}x$

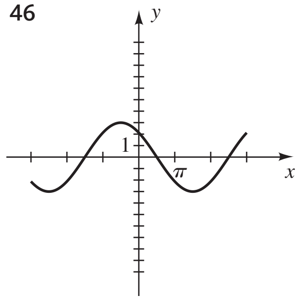
43 **(a)** $3, \dfrac{4\pi}{3}$ **(b)** $y = -3 \cos \dfrac{3}{2}x$

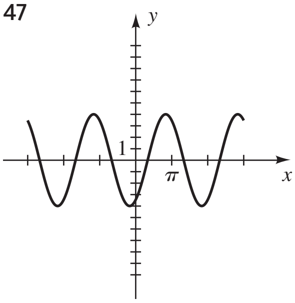
44 **(a)** 2, 4 **(b)** $y = 2 \cos \dfrac{\pi}{2}x$

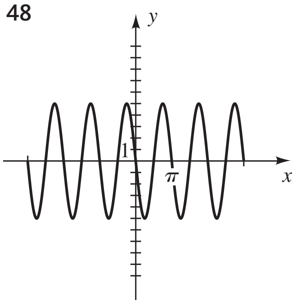
45

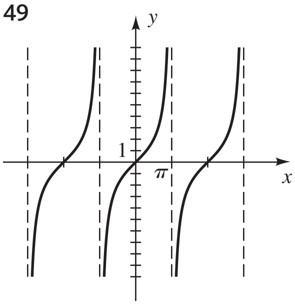


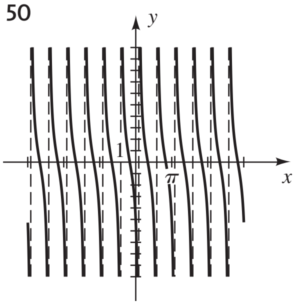
46

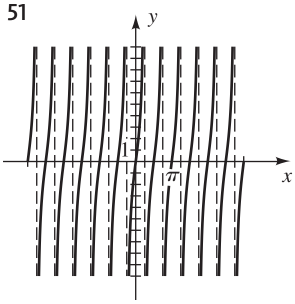


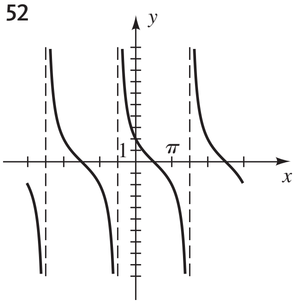
47


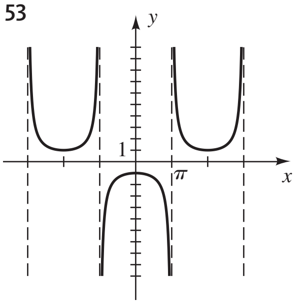
48


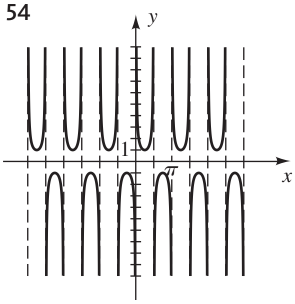
49


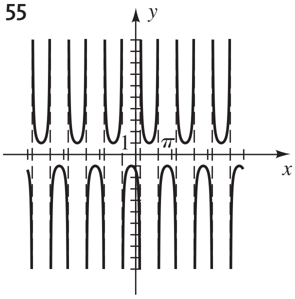
50


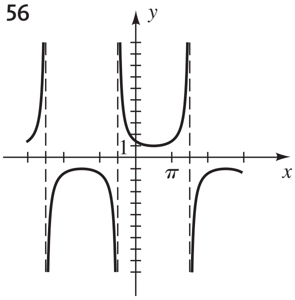
51


52


53


54


55


56


57 $\alpha = 30°, a \approx 23, c \approx 46$

58 $\beta = 35°20', a \approx 310, c \approx 380$

59 $\alpha \approx 68°, \beta \approx 22°, c \approx 67$

60 $\alpha \approx 13°, \beta \approx 77°, b = 40$

61 **(a)** $\dfrac{109\pi}{6}$ **(b)** 440.2 **62** 1048 ft

63 0.093 mi/s **64** 52°

65 Aproximadamente 67 900 000 millas

66 762.1 ft

67 **(a)** 6.76 ft **(b)** 0.61 ft

68 $\dfrac{6\pi}{5}$ radianes = 216° **69** 250 ft

70 **(a)** 231.0 ft **(b)** 434.5 **71** **(b)** 2 mi

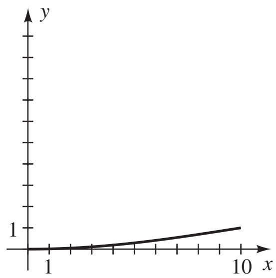
72 **(a)** $T = h + d(\cos\alpha \tan\theta - \operatorname{sen}\alpha)$ **(b)** 22.54 ft

73 **(a)** $\dfrac{25}{3}\sqrt{3} \approx 14.43$ ft-candelas **(b)** 37.47°

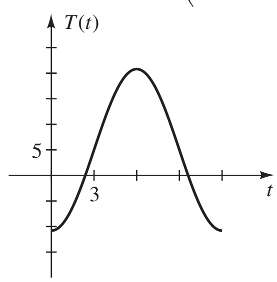
74 **(b)** 4.69 **75** **(a)** 74.05 in. **(b)** 24.75 in.

76 **(a)** $S = 4a^2 \operatorname{sen}\theta$ **(b)** $V = \dfrac{4}{3}a^3 \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$

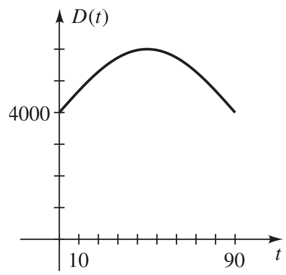
77 **(a)** $h = R\sec\dfrac{s}{R} - R$ **(b)** $h \approx 1650$ ft

78


79 $y = 98.6 + (0.3)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}t - \dfrac{11\pi}{12}\right)$

80 **(a)**


(b) 20.8°C el 1 de julio

81 **(a)**


(b) 45 días en el verano

82 **(a)** El corcho está en movimiento armónico simple.
(b) $1 \le t \le 2$

CAPÍTULO 6 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

3 Ninguno

5 Los valores de y_1, y_2 y y_3 están muy cerca uno del otro cerca de $x = 0$.

6 **(a)** $x \approx -0.4161,\ y \approx 0.9093$
(b) $x \approx -0.8838,\ y \approx -0.4678$

7 **(a)** $x \approx 1.8415,\ y \approx -0.5403$
(b) $x \approx -1.2624,\ y \approx 0.9650$

8 **(a)** $\dfrac{500\pi}{3}$ rad/s **(b)** $D(t) = 5\cos\left(\dfrac{500\pi}{3}t\right) + 18$
(c) 10 revoluciones

EXAMEN DE CAPÍTULO 6

1 22.92 centímetros **2** 18.03 pulgadas cuadradas

3 6 pies cuadrados **4** $128°55'$

5 **(a)** 2400π rad/min **(b)** 1400π ft/min

6 $\dfrac{5}{8}, \dfrac{\sqrt{39}}{8}, \dfrac{5}{\sqrt{39}}, \dfrac{\sqrt{39}}{5}, \dfrac{8}{\sqrt{39}}, \dfrac{8}{5}$

7 $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$

8 $\left(\dfrac{\csc\theta - 1}{\csc\theta}\right)\left(\dfrac{\csc\theta + 1}{\csc\theta}\right) = \dfrac{\csc^2\theta - 1}{\csc^2\theta} = 1 - \dfrac{1}{\csc^2\theta} = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta = \dfrac{1}{\sec^2\theta}$

9 $-\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}, -\dfrac{5}{12}, -\dfrac{12}{5}, \dfrac{13}{12}, -\dfrac{13}{5}$

10 $-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{3}$

11 $-\cos\theta$ **12** $\left(\dfrac{15}{17}, \dfrac{8}{17}\right)$

13 $\operatorname{sen}(-x)\sec^2(-x) = -\operatorname{sen} x \sec^2 x = -\operatorname{sen} x\dfrac{1}{\cos^2 x} = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\dfrac{1}{\cos x} = -\tan x \sec x$

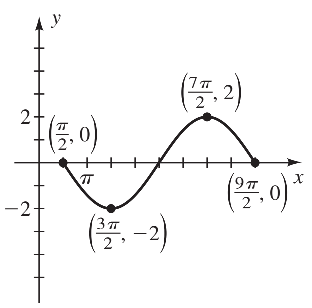
14 $\pi \le x < \dfrac{7\pi}{6}$ y $\dfrac{11\pi}{6} < x \le 2\pi$

15 $60 - 19\pi \approx 17.7°$ **16** $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

17 50.5°; 309.5° **18** 2.07; 5.21 **19** 75 ciclos

20 Cualquier punto de la forma $(a, 2)$, donde $a = \dfrac{\pi}{2} + 6\pi n$ y n es un entero

21



22 $y = 3\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}x + 2$ (hay otras respuestas posibles)

23 $x = \dfrac{1}{3}\left(7 - \dfrac{\pi}{2}\right)$ y $x = \dfrac{1}{3}\left(7 + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (hay otras respuestas posibles)

24 2π (hay otras respuestas posibles)

25 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 2\right)$ (hay otras respuestas posibles)

26 $(-\infty, -5] \cup [1, \infty)$ **27** $y = \left|\csc\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right|$

28 $\alpha = 45°,\ a = b = 10\sqrt{2}$

29 $\alpha = 16°46';\ a \approx 247.4,\ c \approx 857.5$ **30** $a = b\tan\alpha$

31 105.8 pulgadas **32** 74.1 metros

CAPÍTULO 7

EJERCICIOS 7.1

Ejer. 1–50: Se dan verificaciones típicas para los ejercicios 1, 5, 9,..., 49.

1 $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta = \cot\theta\cos\theta$

5 $\dfrac{\csc^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{\csc^2\theta}{\sec^2\theta} = \dfrac{1/\operatorname{sen}^2\theta}{1/\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \left(\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 = \cot^2\theta$

9 $\dfrac{1}{1-\cos\gamma} + \dfrac{1}{1+\cos\gamma} = \dfrac{1+\cos\gamma+1-\cos\gamma}{1-\cos^2\gamma} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}^2\gamma} = 2\csc^2\gamma$

13 $\csc^4 t - \cot^4 t = (\csc^2 t + \cot^2 t)(\csc^2 t - \cot^2 t) = (\csc^2 t + \cot^2 t)(1) = \csc^2 t + \cot^2 t$

17 $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec x + 1} = \dfrac{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}{\sec x + 1} = \sec x - 1 = \dfrac{1}{\cos x} - 1 = \dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

21 $\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r = (\operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r)(\operatorname{sen}^2 r + \cos^2 r) = (\operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r)(1) = \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$

25 $(\sec t + \tan t)^2 = \left(\dfrac{1}{\cos t} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 = \left(\dfrac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 = \dfrac{(1+\operatorname{sen} t)^2}{\cos^2 t} = \dfrac{(1+\operatorname{sen} t)^2}{1-\operatorname{sen}^2 t} = \dfrac{(1+\operatorname{sen} t)^2}{(1+\operatorname{sen} t)(1-\operatorname{sen} t)} = \dfrac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}$

29 $\dfrac{1+\csc\beta}{\cot\beta+\cos\beta} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}+\cos\beta} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\beta+1}{\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\cos\beta+\cos\beta\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta}}$

$$= \frac{\operatorname{sen}\beta + 1}{\cos\beta(1+\operatorname{sen}\beta)} = \frac{1}{\cos\beta} = \sec\beta$$

33 $\text{LD} = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$= \text{LI}$

37 $\dfrac{1}{\tan\beta + \cot\beta} = \dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} + \dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}} = \dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta}{\cos\beta\operatorname{sen}\beta}}$

$= \operatorname{sen}\beta\cos\beta$

41 $\text{LD} = \sec^4\phi - 4\tan^2\phi = (\sec^2\phi)^2 - 4\tan^2\phi$

$= (1 + \tan^2\phi)^2 - 4\tan^2\phi$

$= 1 + 2\tan^2\phi + \tan^4\phi - 4\tan^2\phi$

$= 1 - 2\tan^2\phi + \tan^4\phi$

$= (1 - \tan^2\phi)^2 = \text{LI}$

45 $\log 10^{\tan t} = \log_{10} 10^{\tan t} = \tan t$, porque $\log_a a^x = x$.

49 $\ln|\sec\theta + \tan\theta| = \ln\left|\dfrac{(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\sec\theta - \tan\theta}\right|$

$= \ln\left|\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\right|$

$= \ln\left|\dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}\right|$

$= \ln|1| - \ln|\sec\theta - \tan\theta|$

$= -\ln|\sec\theta - \tan\theta|$

Ejer. 51–62: Se dan un valor típico de t o θ y la no igualdad resultante.

51 $\pi, -1 \neq 1$ **53** $\frac{3\pi}{2}, 1 \neq -1$ **55** $\frac{\pi}{4}, 2 \neq 1$

57 $\pi, -1 \neq 1$ **59** $\frac{\pi}{4}, \cos\sqrt{2} \neq 1$

61 No es identidad **63** Identidad

65 $\tan^2\theta$ **67** $\frac{1}{a}\cot\theta\csc\theta$ **69** $\operatorname{sen}^4\theta$

71 $a\operatorname{sen}\theta\tan\theta$ **73** $a^2\operatorname{sen}^2\theta\tan^2\theta$ **75** $\operatorname{sen}\theta$

77 La gráfica de f parece ser la de $y = g(x) = -1$.

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x}{(1 - \sec^2 x)\cos^4 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)}{-\tan^2 x\cos^4 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{-(\operatorname{sen}^2 x/\cos^2 x)\cos^4 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{-\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = -1$$

79 La gráfica de f parece ser la de $y = g(x) = \cos x$.

$\sec x(\operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x) - \operatorname{sen} x$

$= \sec x\cos x(\operatorname{sen} x + \cos x) - \operatorname{sen} x$

$= (\operatorname{sen} x + \cos x) - \operatorname{sen} x = \cos x$

EJERCICIOS 7.2

Ejer. 1–42: n denota cualquier entero.

1 $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$ **3** $\frac{\pi}{3} + \pi n$

5 $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$

7 No hay solución, porque $\frac{\pi}{2} > 1$.

9 Toda θ excepto $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n$

11 $\frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{11\pi}{12} + \pi n$ **13** $\frac{\pi}{2} + 3\pi n$

15 $-\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$

17 $\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{7\pi}{12} + \pi n$ **19** $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$

21 $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$ **23** πn

25 $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$ **27** $\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{2\pi}{3} + \pi n$

29 $\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + \pi n$ **31** $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$

33 $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n$

35 $\frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{5\pi}{12} + \pi n$ **37** $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{3\pi}{4} + \pi n$

39 $e^{(\pi/2) + \pi n}$ **41** $2\pi n$ **43** $\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

45 $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **47** $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

49 $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ **51** $0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

53 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ **55** $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **57** No hay solución

59 $\frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ **61** $0, \frac{\pi}{2}$ **63** $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

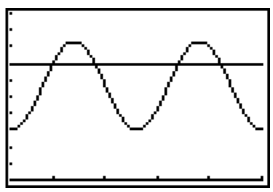
65 Toda α en $[0, 2\pi)$ excepto $0, \frac{\pi}{2}, \pi$, y $\frac{3\pi}{2}$

67 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **69** $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

71 15°30′, 164°30′ **73** 135°, 315°, 116°30′, 296°30′

75 41°50′, 138°10′, 194°30′, 345°30′ **77** 10

79 **(a)**

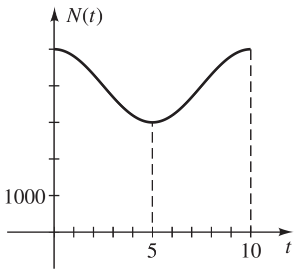


[1, 25, 5] por [0, 100, 10]

(b) Julio: 83°F; oct.: 56.5°F **(c)** Mayo a septiembre

81 $t \approx 3.50$ y $t \approx 8.50$ **83** **(a)** 3.29 **(b)** 4

85 **(a)**

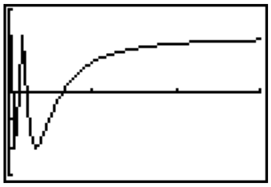


(b) $0 \leq t < \frac{5}{3}$ y $\frac{25}{3} < t \leq 10$

87 $A\left(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $B\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $C\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $D\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

89 $\frac{7}{360}$ **91** $[0, 1.27] \cup [5.02, 2\pi]$ **93** $(0.31, 3.45)$

95



$[0, 3]$ por $[-1.5, 1.5, 0.5]$
(a) 0.6366 **(b)** Se aproxima a $y = 1$
(c) Un número infinito de ceros

97 5.400 **99** 3.619 **101** $-1.48, 1.08$ **103** ± 1.00
105 $\pm 0.64, \pm 2.42$ **107** **(a)** $37.6°$ **(b)** $52.5°$

EJERCICIOS 7.3

1 **(a)** $\cos 74°40'$ **(b)** $\operatorname{sen} 16°48'$ **(c)** $\cot \frac{\pi}{3}$
(d) $\csc 72.72°$

3 **(a)** $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{8}$ **(b)** $\cos\left(\frac{2\pi - 1}{4}\right)$ **(c)** $\cot\left(\frac{\pi - 2}{2}\right)$
(d) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - 0.53\right)$

5 **(a)** $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

7 **(a)** $\sqrt{3} + 1$ **(b)** $-2 - \sqrt{3}$

9 **(a)** $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

11 $\cos 17°$ **13** $\operatorname{sen} 21°$ **15** $\operatorname{sen}(-5)$

17 $\frac{12\sqrt{3} - 5}{26}$ **19** $\frac{\sqrt{2} - 4}{6}$ **21** $\sqrt{3}$

23 **(a)** $\frac{77}{85}$ **(b)** $\frac{36}{85}$ **(c)** I

25 **(a)** $-\frac{24}{25}$ **(b)** $-\frac{24}{7}$ **(c)** IV

27 **(a)** $\frac{3\sqrt{21} - 8}{25} \approx 0.23$ **(b)** $\frac{4\sqrt{21} + 6}{25} \approx 0.97$
(c) I

29 $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = \operatorname{sen}\theta\cos\pi + \cos\theta\operatorname{sen}\pi$
$= \operatorname{sen}\theta(-1) + \cos\theta(0) = -\operatorname{sen}\theta$

31 $\operatorname{sen}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x\cos\frac{5\pi}{2} - \cos x\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}$
$= -\cos x$

33 $\cos(\theta - \pi) = \cos\theta\cos\pi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi = -\cos\theta$

35 $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x\cos\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen} x\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$
$= \operatorname{sen} x$

37 $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$
$= \dfrac{\operatorname{sen} x\cos\frac{\pi}{2} - \cos x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos x\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}$
$= \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\cot x$

39 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$
$= \cot(-\theta) = -\cot\theta$

41 $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\theta\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

43 $\tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan u + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan u\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$

45 $\cos(u + v) + \cos(u - v)$
$= (\cos u\cos v - \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v) +$
$(\cos u\cos v + \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v)$
$= 2\cos u\cos v$

47 $\operatorname{sen}(u + v)\cdot\operatorname{sen}(u - v)$
$= (\operatorname{sen} u\cos v + \cos u\operatorname{sen} v)\cdot$
$(\operatorname{sen} u\cos v - \cos u\operatorname{sen} v)$
$= \operatorname{sen}^2 u\cos^2 v - \cos^2 u\operatorname{sen}^2 v$
$= \operatorname{sen}^2 u(1 - \operatorname{sen}^2 v) - (1 - \operatorname{sen}^2 u)\operatorname{sen}^2 v$
$= \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 v - \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 v$
$= \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

49 $\dfrac{1}{\cot\alpha - \cot\beta} = \dfrac{1}{\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}}$
$= \dfrac{1}{\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta - \cos\beta\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}$
$= \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$

51 sen u cos v cos w + cos u sen v cos w + cos u cos v sen w − sen u sen v sen w

53 $\cot(u+v) = \dfrac{\cos(u+v)}{\operatorname{sen}(u+v)}$
$= \dfrac{(\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)(1/\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)}{(\operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v)(1/\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)}$
$= \dfrac{\cot u \cot v - 1}{\cot v + \cot u}$

55 $\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen}[u + (-v)]$
$= \operatorname{sen} u \cos(-v) + \cos u \operatorname{sen}(-v)$
$= \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

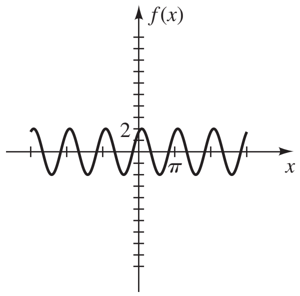
57 $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$
$= \dfrac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$
$= \dfrac{\cos x \cos h - \cos x}{h} - \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}$
$= \cos x \left(\dfrac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen} x \left(\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$

59 **(a)** Cada lado ≈ 0.0523 **(b)** $\alpha = 60°$
(c) $\alpha = 60°$, $\beta = 3°$

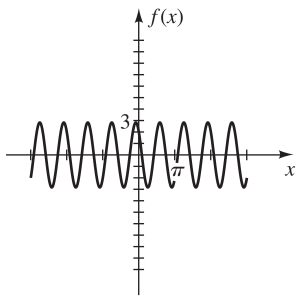
61 $0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$ **63** $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}$

65 $\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}$; $\dfrac{3\pi}{4}$ es extraña

67 **(a)** $f(x) = 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ **(b)** $2, \pi, \dfrac{\pi}{12}$
(c)



69 **(a)** $f(x) = 2\sqrt{2}\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $2\sqrt{2}, \dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{12}$
(c)



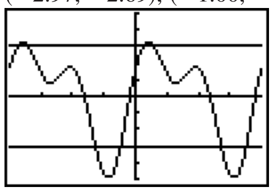
71 $y = 10\sqrt{41}\cos\left(60\pi t - \tan^{-1}\dfrac{5}{4}\right)$
$\approx 10\sqrt{41}\cos(60\pi t - 0.8961)$

73 **(a)** $y = \sqrt{13}\cos(t - C)$ con $\tan C = \dfrac{3}{2}$; $\sqrt{13}, 2\pi$
(b) $t = C + \dfrac{\pi}{2} + \pi n \approx 2.55 + \pi n$ para todo entero n no negativo

75 **(a)** $p(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{sen}(\omega t + \tau)$
$= A \operatorname{sen} \omega t + B(\operatorname{sen} \omega t \cos \tau + \cos \omega t \operatorname{sen} \tau)$
$= (B \operatorname{sen} \tau)\cos \omega t + (A + B\cos\tau)\operatorname{sen} \omega t$
$= a\cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t$
con $a = B \operatorname{sen} \tau$ y $b = A + B\cos\tau$
(b) $C^2 = (B \operatorname{sen} \tau)^2 + (A + B\cos\tau)^2$
$= B^2 \operatorname{sen}^2 \tau + A^2 + 2AB\cos\tau + B^2\cos^2\tau$
$= A^2 + B^2(\operatorname{sen}^2\tau + \cos^2\tau) + 2AB\cos\tau$
$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\tau$

77 **(a)** $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\tau \le A^2 + B^2 + 2AB$, porque $\cos\tau \le 1$ y $A > 0$, $B > 0$. Así, $C^2 \le (A+B)^2$, y por tanto $C \le A + B$.
(b) $0, 2\pi$ **(c)** $\cos\tau > -B/(2A)$

79 $(-2.97, -2.69)$, $(-1.00, -0.37)$, $(0.17, 0.46)$, $(2.14, 2.77)$



$[-3.14, 3.14, \pi/4]$ por $[-5, 5]$

EJERCICIOS 7.4

1 $\dfrac{24}{25}, -\dfrac{7}{25}, -\dfrac{24}{7}$ **3** $-\dfrac{120}{169}, \dfrac{119}{169}, -\dfrac{120}{119}$ **5** $\dfrac{3}{5}$

7 $\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}}, \dfrac{1}{3}$ **9** $\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{2}$

11 $-\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\sqrt{2} - 1$ **13** $-\dfrac{4}{5}$

15 **(a)** $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **(b)** $\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **(c)** $\sqrt{2} + 1$

17 $\operatorname{sen} 10\theta = \operatorname{sen}(2 \cdot 5\theta) = 2 \operatorname{sen} 5\theta \cos 5\theta$

19 $4 \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2 \cdot 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\operatorname{sen}\left(2 \cdot \dfrac{x}{2}\right)$
$= 2 \operatorname{sen} x$

21 $\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2} = \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2(1+\cos x)}$
$= \dfrac{1 - \cos^2 x}{2(1+\cos x)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2(1+\cos x)}$

23 $(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 = \operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t\cos t + \cos^2 t$
$= 1 + \operatorname{sen} 2t$

25 $\operatorname{sen} 3u = \operatorname{sen}(2u + u)$
$= \operatorname{sen} 2u \cos u + \cos 2u \operatorname{sen} u$
$= (2\operatorname{sen} u\cos u)\cos u + (1 - 2\operatorname{sen}^2 u)\operatorname{sen} u$
$= 2\operatorname{sen} u\cos^2 u + \operatorname{sen} u - 2\operatorname{sen}^3 u$
$= 2\operatorname{sen} u(1 - \operatorname{sen}^2 u) + \operatorname{sen} u - 2\operatorname{sen}^3 u$
$= 2\operatorname{sen} u - 2\operatorname{sen}^3 u + \operatorname{sen} u - 2\operatorname{sen}^3 u$
$= 3\operatorname{sen} u - 4\operatorname{sen}^3 u = \operatorname{sen} u(3 - 4\operatorname{sen}^2 u)$

27 $\cos 4\theta = \cos(2\cdot 2\theta) = 2\cos^2 2\theta - 1$
$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$
$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1$
$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

29 $\operatorname{sen}^4 t = (\operatorname{sen}^2 t)^2 = \left(\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right)^2$
$= \dfrac{1}{4}(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)$
$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\cos 2t + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+\cos 4t}{2}\right)$
$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\cos 2t + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}\cos 4t$
$= \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos 2t + \dfrac{1}{8}\cos 4t$

31 $\sec 2\theta = \dfrac{1}{\cos 2\theta} = \dfrac{1}{2\cos^2\theta - 1} = \dfrac{1}{2\left(\dfrac{1}{\sec^2\theta}\right) - 1}$
$= \dfrac{1}{\dfrac{2-\sec^2\theta}{\sec^2\theta}} = \dfrac{\sec^2\theta}{2-\sec^2\theta}$

33 $2\operatorname{sen}^2 2t + \cos 4t = 2\operatorname{sen}^2 2t + \cos(2\cdot 2t)$
$= 2\operatorname{sen}^2 2t + (1 - 2\operatorname{sen}^2 2t) = 1$

35 $\tan 3u = \tan(2u + u) = \dfrac{\tan 2u + \tan u}{1 - \tan 2u \tan u}$
$= \dfrac{\dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u} + \tan u}{1 - \dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u}\cdot \tan u}$
$= \dfrac{\dfrac{2\tan u + \tan u - \tan^3 u}{1-\tan^2 u}}{\dfrac{1-\tan^2 u - 2\tan^2 u}{1-\tan^2 u}}$
$= \dfrac{3\tan u - \tan^3 u}{1 - 3\tan^2 u} = \dfrac{\tan u(3-\tan^2 u)}{1-3\tan^2 u}$

37 $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta - \cot\theta$

39 $\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{8}\cos 2\theta$

41 $\dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos 4x + \dfrac{1}{8}\cos 8x$ **43** $0, \pi, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$

45 $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, \pi$ **47** $0, \pi$ **49** $0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

51 $0, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$

55 **(a)** 1.20, 5.09

(b) $P\left(\dfrac{2\pi}{3}, -1.5\right), Q(\pi, -1), R\left(\dfrac{4\pi}{3}, -1.5\right)$

57 **(a)** $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ **(b)** $0, \pi, 2\pi, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

59 **(b)** Sí, el punto B está a 25 millas de A.

61 **(a)** $V = \dfrac{5}{2}\operatorname{sen}\theta$ **(b)** 53.13° **63** **(b)** 12.43 mm

65 La gráfica de f parece ser la de $y = g(x) = \tan x$.
$\dfrac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x}{\cos 2x + \cos x + 1} = \dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen} x}{(2\cos^2 x - 1) + \cos x + 1}$
$= \dfrac{\operatorname{sen} x(2\cos x + 1)}{\cos x(2\cos x + 1)} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$

67 −3.55, 5.22

69 −2.03, −0.72, 0.58, 2.62 **71** −2.59

EJERCICIOS 7.5

1 $\dfrac{1}{2}\cos 6t - \dfrac{1}{2}\cos 8t$ **3** $\dfrac{1}{2}\cos 2u + \dfrac{1}{2}\cos 10u$

5 $\operatorname{sen} 8\theta + \operatorname{sen} 2\theta$ **7** $\dfrac{3}{2}\operatorname{sen} 3x + \dfrac{3}{2}\operatorname{sen} x$

9 $2\operatorname{sen} 3\theta\cos\theta$ **11** $-2\operatorname{sen} 4x\operatorname{sen} x$

13 $-2\cos 6t\operatorname{sen} 3t$ **15** $2\cos\dfrac{3}{2}x\cos\dfrac{1}{2}x$

17 $\dfrac{\operatorname{sen} 4t + \operatorname{sen} 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \dfrac{2\operatorname{sen} 5t\cos t}{2\operatorname{sen} 5t\operatorname{sen} t} = \cot t$

19 $\dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\cos u + \cos v} = \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)}{2\cos\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)}$
$= \tan\dfrac{1}{2}(u+v)$

21 $\dfrac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v} = \dfrac{2\cos\frac{1}{2}(u+v)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-v)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)}$
$= \cot\dfrac{1}{2}(u+v)\tan\dfrac{1}{2}(u-v)$
$= \dfrac{\tan\frac{1}{2}(u-v)}{\tan\frac{1}{2}(u+v)}$

23 $4\cos x\cos 2x\operatorname{sen} 3x = 2\cos 2x(2\operatorname{sen} 3x\cos x)$
$= 2\cos 2x(\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x)$
$= (2\cos 2x\operatorname{sen} 4x) + (2\cos 2x\operatorname{sen} 2x)$
$= [\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen}(-2x)] + (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 0)$
$= \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x$

25 $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}[(a+b)x] + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}[(a-b)x]$ **27** $\dfrac{\pi}{4}n$

29 $\dfrac{\pi}{2}n$ **31** $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n, \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n$

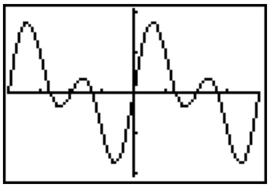
33 $\dfrac{\pi}{7} + \dfrac{2\pi}{7}n, \dfrac{2\pi}{3}n$ **35** $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$

37 $0, \pi, 2\pi, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

39 $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\pi n}{l}(x + kt) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\pi n}{l}(x - kt)$

41 **(a)** 0, ±1.05, ±1.57, ±2.09, ±3.14

(b) $0, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\pi$



$[-3.14, 3.14, \pi/4]$ por $[-2.09, 2.09]$

43 La gráfica de f parece ser la de $y = g(x) = \tan 2x$.

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \frac{\operatorname{sen} 2x + (\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x)}{\cos 2x + (\cos 3x + \cos x)}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen} 2x \cos x}{\cos 2x + 2\cos 2x \cos x}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} 2x(1 + 2\cos x)}{\cos 2x(1 + 2\cos x)}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$

EJERCICIOS 7.6

1 **(a)** $-\frac{\pi}{4}$ **(b)** $\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $-\frac{\pi}{3}$

3 **(a)** $\frac{\pi}{3}$ **(b)** $\frac{\pi}{4}$ **(c)** $\frac{\pi}{6}$

5 **(a)** No definido **(b)** No definido **(c)** $\frac{\pi}{4}$

7 **(a)** $-\frac{3}{10}$ **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** 14

9 **(a)** $\frac{\pi}{3}$ **(b)** $\frac{5\pi}{6}$ **(c)** $-\frac{\pi}{6}$

11 **(a)** $-\frac{\pi}{4}$ **(b)** $\frac{3\pi}{4}$ **(c)** $-\frac{\pi}{4}$

13 **(a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(c)** No definido

15 **(a)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{34}}{5}$ **(c)** $\frac{4}{\sqrt{15}}$

17 **(a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** 0 **(c)** $-\frac{77}{36}$

19 **(a)** $-\frac{336}{625}$ **(b)** $-\frac{161}{289}$ **(c)** $\frac{24}{7}$

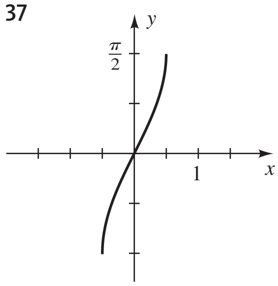
21 **(a)** $-\frac{1}{10}\sqrt{2}$ **(b)** $\frac{4}{17}\sqrt{17}$ **(c)** $\frac{1}{2}$

23 $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 25 $\frac{x}{3}$ 27 $\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}$

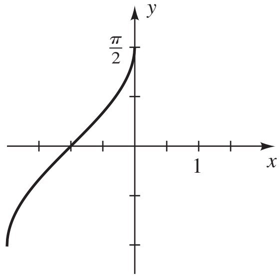
29 $2x\sqrt{1 - x^2}$ 31 $\frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{2 - x^2}$ 33 $\sqrt{\frac{1 + x}{2}}$

35 **(a)** $-\frac{\pi}{2}$ **(b)** 0 **(c)** $\frac{\pi}{2}$

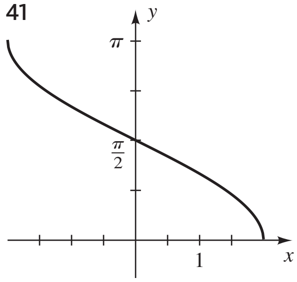
37



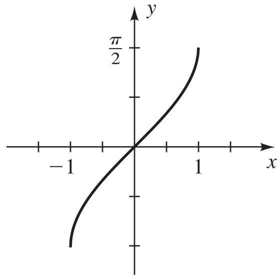
39



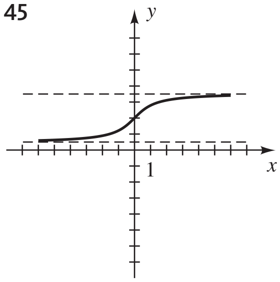
41



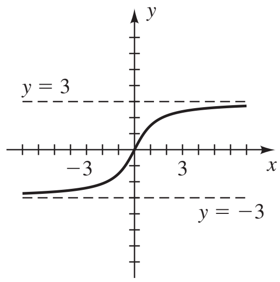
43



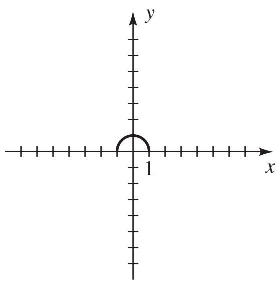
45



47



49



51 **(a)** $2 \le x \le 4$

(b) $-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$

(c) $x = \operatorname{sen} 2y + 3$

53 **(a)** $-\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ **(b)** $0 \le y \le 4\pi$

(c) $x = \frac{3}{2}\cos\frac{1}{4}y$

55 $x = \operatorname{sen}^{-1}(-y - 3)$ 57 $x = \cos^{-1}\left[\frac{1}{2}(15 - y)\right]$

59 $x = x_R$ o $x = \pi - x_R$, donde $x_R = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen} y\right)$

61 $\cos^{-1}\left(-1 + \sqrt{2}\right) \approx 1.1437$,
$2\pi - \cos^{-1}\left(-1 + \sqrt{2}\right) \approx 5.1395$

63 $\tan^{-1}\frac{1}{4}(-9+\sqrt{57}) \approx -0.3478$,

$\tan^{-1}\frac{1}{4}(-9-\sqrt{57}) \approx -1.3337$

65 $\cos^{-1}\frac{1}{5}\sqrt{15} \approx 0.6847$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\sqrt{15}\right) \approx 2.4569$,

$\cos^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.9553$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \approx 2.1863$

67 $\operatorname{sen}^{-1}\left(\pm\frac{1}{6}\sqrt{30}\right) \approx \pm 1.1503$

69 $\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 2.2143$, $\cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 1.2310$,

$2\pi - \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 4.0689$, $2\pi - \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 5.0522$

71 $\cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 0.8411$, $2\pi - \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 5.4421$,

$\frac{\pi}{3} \approx 1.0472$, $\frac{5\pi}{3} \approx 5.2360$

73 **(a)** 1.65 m **(b)** 0.92 m **(c)** 0.43 m **75** 3.07°

77 **(a)** $\alpha = \theta - \operatorname{sen}^{-1}\frac{d}{k}$ **(b)** 40°

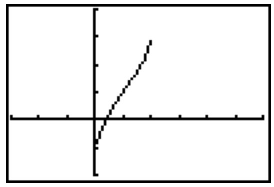
79 Sea $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x$ y $\beta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. Así, sen $\alpha = x$ y sen $\beta = x$. Como la función seno es biunívoca en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tenemos $\alpha = \beta$.

81 Sea $\alpha = \operatorname{arcsen}(-x)$ y $\beta = \operatorname{arcsen} x$ con $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$. Así, sen $\alpha = -x$ y sen $\beta = x$. En consecuencia, sen $\alpha = -$sen $\beta =$ sen $(-\beta)$. Como la función seno es biunívoca en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos $\alpha = -\beta$.

83 Sea $\alpha = \arctan x$ y $\beta = \arctan(1/x)$. Como $x > 0$, tenemos $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, y por tanto $0 < \alpha + \beta < \pi$. Así,

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x + (1/x)}{1 - x\cdot(1/x)} = \frac{x + (1/x)}{0}$. Como el denominador es 0, $\tan(\alpha+\beta)$ no está definido y por tanto $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

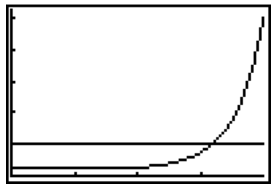
85 Dominio: [0, 2]; rango: $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$



$[-3, 6]$ por $[-2, 4]$

87 0.29

89 $\theta \approx 1.25 \approx 72°$



$[0, 1.57, \pi/8]$ por $[0, 1.05, 0.2]$

91 $\tan^{-1} 1 = 45°$ **93** $\tan^{-1}\frac{1}{2} \approx 26.6°$

CAPÍTULO 7 EJERCICIOS DE REPASO

1 $(\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = (\csc^2 x)(\operatorname{sen}^2 x) = 1$

2 $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\tan\theta = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

3 $\frac{(\sec^2\theta - 1)\cot\theta}{\tan\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \frac{(\tan^2\theta)\cot\theta}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$

$= \frac{\tan\theta}{\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\theta/\cos\theta}{1/\cos\theta}$

$= \operatorname{sen}\theta$

4 $(\tan x + \cot x)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2$

$= \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x\operatorname{sen} x}\right)^2$

$= \frac{1}{\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x} = \sec^2 x\csc^2 x$

5 $\frac{1}{1+\operatorname{sen} t}\cdot\frac{1-\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t} = \frac{1-\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}$

$= \frac{1-\operatorname{sen} t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos t}$

$= \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\cdot\sec t$

$= (\sec t - \tan t)\sec t$

6 $\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)/\cos\alpha\cos\beta}{(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)/\cos\alpha\cos\beta}$

$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

7 $\tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u} = \dfrac{2\cdot\dfrac{1}{\cot u}}{1-\dfrac{1}{\cot^2 u}} = \dfrac{\dfrac{2}{\cot u}}{\dfrac{\cot^2 u - 1}{\cot^2 u}}$

$= \dfrac{2\cot u}{\cot^2 u - 1} = \dfrac{2\cot u}{(\csc^2 u - 1) - 1} = \dfrac{2\cot u}{\csc^2 u - 2}$

8 $\cos^2\dfrac{v}{2} = \dfrac{1+\cos v}{2} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sec v}}{2} = \dfrac{\dfrac{\sec v + 1}{\sec v}}{2}$

$= \dfrac{1+\sec v}{2\sec v}$

9 $\dfrac{\tan^3\phi - \cot^3\phi}{\tan^2\phi + \csc^2\phi}$

$= \dfrac{(\tan\phi - \cot\phi)(\tan^2\phi + \tan\phi\cot\phi + \cot^2\phi)}{[\tan^2\phi + (1+\cot^2\phi)]}$

$= \tan\phi - \cot\phi$

10 $\text{LI} = \dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\csc u + \csc v} = \dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} u} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} v}} = \dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\dfrac{\operatorname{sen} v + \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}}$

$= \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\text{LD} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{-1 + \csc u \csc v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{-1 + \dfrac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}}$

$= \dfrac{1 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\dfrac{1 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}}$

$= \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

Como el lado izquierdo y el lado derecho son iguales a la misma expresión y los pasos son reversibles, la identidad se verifica.

11 $\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan^4 x}\right)^3\left(\dfrac{\csc^3 x}{\cot^6 x}\right)^2 = \left(\dfrac{\operatorname{sen}^6 x}{\tan^{12} x}\right)\left(\dfrac{\csc^6 x}{\cot^{12} x}\right) = \dfrac{(\operatorname{sen} x \csc x)^6}{(\tan x \cot x)^{12}}$

$= \dfrac{(1)^6}{(1)^{12}} = 1$

12 $\dfrac{\cos\gamma}{1-\tan\gamma} + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{1-\cot\gamma} = \dfrac{\cos\gamma}{\dfrac{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma}} + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\dfrac{\operatorname{sen}\gamma - \cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}}$

$= \dfrac{\cos^2\gamma}{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma} + \dfrac{\operatorname{sen}^2\gamma}{\operatorname{sen}\gamma - \cos\gamma}$

$= \dfrac{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma}{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma}$

$= \dfrac{(\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma)(\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma)}{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma}$

$= \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma$

13 $\dfrac{\cos(-t)}{\sec(-t) + \tan(-t)} = \dfrac{\cos t}{\sec t - \tan t} = \dfrac{\cos t}{\dfrac{1}{\cos t} - \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}$

$= \dfrac{\cos t}{\dfrac{1-\operatorname{sen} t}{\cos t}} = \dfrac{\cos^2 t}{1 - \operatorname{sen} t} = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2 t}{1-\operatorname{sen} t}$

$= \dfrac{(1-\operatorname{sen} t)(1+\operatorname{sen} t)}{1-\operatorname{sen} t} = 1 + \operatorname{sen} t$

14 $\dfrac{\cot(-t) + \csc(-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \dfrac{-\cot t - \csc t}{-\operatorname{sen} t} = \dfrac{\dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}}{\operatorname{sen} t}$

$= \dfrac{\cos t + 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \dfrac{\cos t + 1}{1 - \cos^2 t}$

$= \dfrac{\cos t + 1}{(1-\cos t)(1+\cos t)} = \dfrac{1}{1-\cos t}$

15 $\sqrt{\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}} = \sqrt{\dfrac{(1-\cos t)}{(1+\cos t)}\cdot\dfrac{(1-\cos t)}{(1-\cos t)}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\cos t)^2}{1-\cos^2 t}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\cos t)^2}{\operatorname{sen}^2 t}} = \dfrac{|1-\cos t|}{|\operatorname{sen} t|} = \dfrac{1-\cos t}{|\operatorname{sen} t|},$

porque $(1 - \cos t) \geq 0$.

16 $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}} = \sqrt{\dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)}{(1+\operatorname{sen}\theta)}\cdot\dfrac{(1+\operatorname{sen}\theta)}{(1+\operatorname{sen}\theta)}}$

$= \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{\cos^2\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}}$

$= \dfrac{|\cos\theta|}{|1+\operatorname{sen}\theta|} = \dfrac{|\cos\theta|}{1+\operatorname{sen}\theta},$

porque $(1 + \operatorname{sen}\theta) \geq 0$.

17 $\cos\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \cos x \cos\dfrac{5\pi}{2} + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{2} = \operatorname{sen} x$

18 $\tan\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x + \tan\dfrac{3\pi}{4}}{1 - \tan x \tan\dfrac{3\pi}{4}} = \dfrac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$

19 $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\beta = \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2\cdot 2\beta) = \dfrac{1}{4}(2\operatorname{sen} 2\beta\cos 2\beta)$

$= \dfrac{1}{2}(2\operatorname{sen}\beta\cos\beta)(\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta)$

$= \operatorname{sen}\beta\cos^3\beta - \cos\beta\operatorname{sen}^3\beta$

20 $\tan\dfrac{1}{2}\theta = \dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta - \cot\theta$

21 $\operatorname{sen} 8\theta = 2\operatorname{sen} 4\theta\cos 4\theta$

$= 2(2\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta)(1 - 2\operatorname{sen}^2 2\theta)$

$= 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)[1 - 2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2]$

$= 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)(1 - 8\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta)$

22 Sea $\alpha = \arctan x$ y $\beta = \arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$. Como $-1 < x < 1$, $-\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$. Así, $\tan\alpha = x$ y $\tan\beta = \dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha$. Como la función

tangente es biunívoca en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tenemos $\beta = 2\alpha$ o bien, lo que es equivalente, $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

23 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **24** $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **25** $0, \pi$

26 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **27** $0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

28 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **29** $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

30 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi$ **31** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

32 Toda x en $[0, 2\pi)$ excepto $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

33 $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **34** $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

35 $\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}, \frac{19}{4}, \frac{23}{4}$ **36** $0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

37 $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **38** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

39 $0, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

40 $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$ **41** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

42 $-2 - \sqrt{3}$ **43** $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ **44** $\frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$

45 $\frac{84}{85}$ **46** $-\frac{13}{85}$ **47** $-\frac{84}{13}$ **48** $-\frac{36}{77}$

49 $\frac{36}{85}$ **50** $-\frac{36}{85}$ **51** $\frac{77}{85}$ **52** $\frac{77}{85}$ **53** $\frac{240}{289}$

54 $-\frac{161}{289}$ **55** $\frac{24}{7}$ **56** $\frac{1}{10}\sqrt{10}$ **57** $\frac{1}{3}$ **58** $\frac{5}{34}\sqrt{34}$

59 **(a)** $\frac{1}{2}\cos 3t - \frac{1}{2}\cos 11t$

(b) $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{12}u + \frac{1}{2}\cos\frac{5}{12}u$

(c) $3 \operatorname{sen} 8x - 3 \operatorname{sen} 2x$ **(d)** $2 \operatorname{sen} 10\theta - 2 \operatorname{sen} 4\theta$

60 **(a)** $2 \operatorname{sen} 5u \cos 3u$ **(b)** $2 \operatorname{sen}\frac{11}{2}\theta \operatorname{sen}\frac{5}{2}\theta$

(c) $2\cos\frac{9}{40}t \operatorname{sen}\frac{1}{40}t$ **(d)** $6\cos 4x \cos 2x$

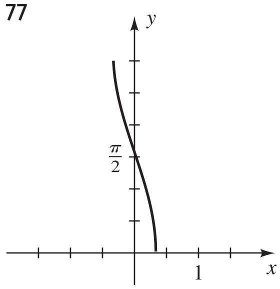
61 $\frac{\pi}{6}$ **62** $\frac{\pi}{4}$ **63** $\frac{\pi}{3}$ **64** π **65** $-\frac{\pi}{4}$

66 $\frac{3\pi}{4}$ **67** $\frac{1}{2}$ **68** 2 **69** No definido

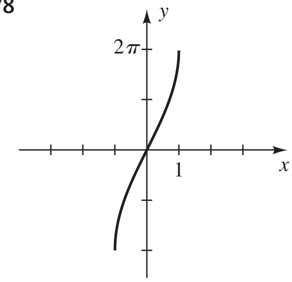
70 No definido **71** No definido **72** $\frac{\pi}{2}$

73 $\frac{240}{289}$ **74** $-\frac{7}{25}$ **75** $\frac{7}{25}$ **76** $\frac{1}{2}$

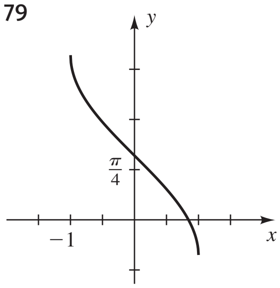
77



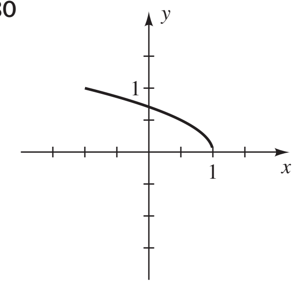
78



79



80



81
$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos[(\alpha + \beta) + \gamma]\\ &= \cos(\alpha + \beta)\cos\gamma - \operatorname{sen}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\gamma\\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\cos\gamma -\\ &\quad (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}\gamma\\ &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma -\\ &\quad \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\end{aligned}$$

82 **(b)** $t = 0, \pm\frac{\pi}{4b}$ **(c)** $\frac{2}{3}\sqrt{2}A$

83 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

84 **(a)** $x = 2d\tan\frac{1}{2}\theta$ **(b)** $d \le 1000$ ft

85 **(a)** $d = r\left(\sec\frac{1}{2}\theta - 1\right)$ **(b)** 43°

86 **(a)** 78.7° **(b)** 61.4°

CAPÍTULO 7 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 *Sugerencia:* Factorice $\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$ como la diferencia de cubos.

2 $\sqrt{a^2 - x^2}$
$$= \begin{cases} a\cos\theta & \text{si } 0 \le \theta \le \pi/2 \text{ or } 3\pi/2 \le \theta < 2\pi \\ -a\cos\theta & \text{si } \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$$

3 45; aproximadamente 6.164

4 El cociente de diferencias para la función seno parece ser la función coseno.

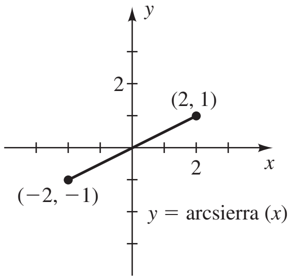
5 *Sugerencia:* Escriba la ecuación en la forma $\frac{\pi}{4} + \alpha = 4\theta$ y tome la tangente de ambos lados.

6 **(a)** La **función diente de sierra inversa,** denotada por sierra^{-1}, está definida por $y = \text{sierra}^{-1} x$ si y sólo si $x = \text{sierra } y$ para $-2 \le x \le 2$ y $-1 \le y \le 1$.

(b) 0.85; −0.4

(c) $\text{sierra}\,(\text{sierra}^{-1}\,x) = x$ si $-2 \le x \le 2$; $\text{sierra}^{-1}\,(\text{sierra}\,y) = y$ si $-1 \le y \le 1$

(d)



EXAMEN DE CAPÍTULO 7

1 $$\left(\frac{1}{\text{sen}\,x} - \frac{1}{\tan x}\right)^{-1} = (\csc x - \cot x)^{-1} = \frac{1}{\csc x - \cot x}$$
$$= \frac{1}{\csc x - \cot x} \cdot \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} = \frac{\csc x + \cot x}{\csc^2 x - \cot^2 x}$$
$$= \frac{\csc x + \cot x}{1} = \csc x + \cot x$$

2 $$\frac{\tan x}{1 + \sec x} + \frac{1 + \cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}}{1 + \dfrac{1}{\cos x}} + \frac{1 + \cos x}{\text{sen}\,x}$$
$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x + 1}{\cos x}} + \frac{1 + \cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{\text{sen}\,x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\text{sen}\,x}$$
$$= \frac{\text{sen}^2 x + (1 + \cos x)^2}{(1 + \cos x)\,\text{sen}\,x}$$
$$= \frac{\text{sen}^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{(1 + \cos x)\,\text{sen}\,x} = \frac{2 + 2\cos x}{(1 + \cos x)\,\text{sen}\,x}$$
$$= \frac{2(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)\,\text{sen}\,x} = \frac{2}{\text{sen}\,x} = 2\csc x$$

3 $x = \dfrac{3\pi}{4}, -1 \ne 1$ **4** $\dfrac{1}{a^3}\cot\theta\csc\theta$

5 $3 + 8n$ o $5 + 8n$, donde n es un entero

6 $\dfrac{1}{4}(2\pi n - 3)$, donde n es un entero

7 $-\dfrac{\pi}{3} + \pi n$ o πn, donde n es un entero

8 $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n, 2\pi n$ **9** $\dfrac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$

10 $\dfrac{1}{26}(5 - 12\sqrt{3})$ **11** $\dfrac{84}{13}$

12 $$\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{5\pi}{2} - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}$$
$$= (\cos x)(0) - (\text{sen}\,x)(1) = -\text{sen}\,x$$

13 1, 5, 9 **14** $-\dfrac{120}{169}, \dfrac{119}{169}, -\dfrac{120}{119}$

15 $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{2}$

16 $$\begin{aligned}\text{sen}\,3x &= \text{sen}(2x + x) = \text{sen}\,2x\cos x + \cos 2x\,\text{sen}\,x\\ &= (2\,\text{sen}\,x\cos x)\cos x + (2\cos^2 x - 1)\,\text{sen}\,x\\ &= \text{sen}\,x\,[2\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)]\\ &= \text{sen}\,x\,(4\cos^2 x - 1)\end{aligned}$$

17 $\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \pi$ **18** $2\cos 8x + 2\cos 6x$

19 $2\,\text{sen}\,4x\,\text{sen}\,3x$

20 $$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\text{sen}\,8x - \text{sen}\,4x} = \frac{2\cos\dfrac{8x + 4x}{2}\cos\dfrac{8x - 4x}{2}}{2\cos\dfrac{8x + 4x}{2}\,\text{sen}\,\dfrac{8x - 4x}{2}}$$
$$= \frac{\cos\dfrac{4x}{2}}{\text{sen}\,\dfrac{4x}{2}} = \frac{\cos 2x}{\text{sen}\,2x} = \cot 2x$$

21 $x = \dfrac{\pi}{4}n$ o $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}n$ **22** $-\dfrac{\pi}{6}$

23 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ **24** $-\dfrac{527}{625}$ **25** $2\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 - 1$

26 $\dfrac{\pi}{6}$ **27** $x = \dfrac{5}{2}\cos\dfrac{1}{3}y$

28 $\cos^{-1}(-2 + \sqrt{3}) \approx 1.84$, $2\pi - \cos^{-1}(-2 + \sqrt{3}) \approx 4.44$

CAPÍTULO 8

EJERCICIOS 8.1

1 $\beta = 63°, b \approx 26.8, c \approx 27.3$

3 $\gamma = 100°10', b \approx 55.1, c \approx 68.7$

5 $\beta = 76°30', a \approx 13.6, c \approx 17.8$

7 No existe triángulo.

9 $\alpha \approx 77°30', \beta \approx 49°10', b \approx 108$; $\alpha \approx 102°30', \beta \approx 24°10', b \approx 59$

11 $\alpha \approx 82.54°, \beta \approx 49.72°, b \approx 100.85$; $\alpha \approx 97.46°, \beta \approx 34.80°, b \approx 75.45$

13 $\beta \approx 41°30', \gamma \approx 91°10', c \approx 117.3$

15 $\alpha \approx 25.993°, \gamma \approx 32.383°, a \approx 0.146$ **17** 219 yd

19 **(a)** 1.6 mi **(b)** 0.6 mi **21** 2.7 mi **23** 628 m

25 3.7 millas de A y 5.4 millas de B **27** 350 ft

29 **(a)** 18.7 **(b)** 814 **31** (3949.9, 2994.2)

EJERCICIOS 8.2

1 **(a)** B **(b)** F **(c)** D **(d)** E **(e)** A **(f)** C

3 **(a)** α, ley de los senos **(b)** a, ley de los cosenos
(c) Cualquier ángulo, ley de los cosenos
(d) No se da suficiente información
(e) γ, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
(f) c, ley de los senos; o α, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

5 $a \approx 26, \beta \approx 41°, \gamma \approx 79°$

7 $b \approx 180, \alpha \approx 25°, \gamma \approx 5°$

9 $c \approx 2.75, \alpha \approx 21°10', \beta \approx 43°40'$

11 No existe triángulo.

13 $\alpha \approx 29°, \beta \approx 47°, \gamma \approx 104°$

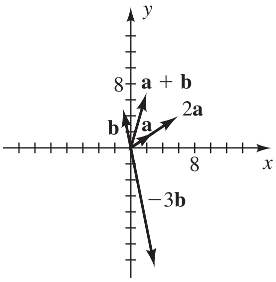
15 $\alpha \approx 12°30', \beta \approx 136°30', \gamma \approx 31°00'$

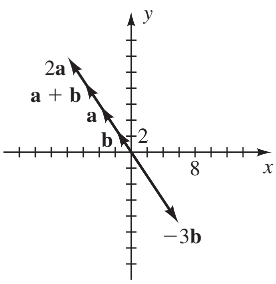
17 $\alpha = \beta \approx 89°00'$, $\gamma \approx 2°00'$ **19** 196 ft
21 24 mi **23** 39 mi **25** 2.3 mi **27** N55°31′E
29 63.7 ft de primera base a tercera; 66.8 ft de segunda base
31 37,039 ft ≈ 7 mi
33 *Sugerencia:* Use la fórmula sen $\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{2}}$.
35 **(a)** 72°, 108°, 36° **(b)** 0.62 **(c)** 0.59, 0.36

Ejer. 37–44: La respuesta es en unidades cuadradas.
37 260 **39** 11.21 **41** 13.1 **43** 517.0
45 40.0 acres **47** 123.4 ft^2

EJERCICIOS 8.3

1 $\langle -3, -4\rangle, \langle 7, -2\rangle, \langle -17, -17\rangle, \langle 33, -7\rangle, \sqrt{13}$
3 $\langle -7, -4\rangle, \langle -7, 8\rangle, \langle -28, -22\rangle, \langle -28, 38\rangle, \sqrt{53}$
5 $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, 19\mathbf{i} - 17\mathbf{j}, -11\mathbf{i} + 33\mathbf{j}, \sqrt{5}$
7 Los puntos terminales son (3, 2), (−1, 5), (2, 7), (6, 4), (3, −15).
9 Los puntos terminales son (−4, 6), (−2, 3), (−6, 9), (−8, 12), (6, −9).





11 $-\mathbf{b}$ **13** $\mathbf{f}$ **15** $-\frac{1}{2}\mathbf{e}$

17
$$\begin{aligned}\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2\rangle + (\langle b_1, b_2\rangle + \langle c_1, c_2\rangle)\\ &= \langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2\rangle\\ &= \langle a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2\rangle\\ &= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle + \langle c_1, c_2\rangle\\ &= (\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle) + \langle c_1, c_2\rangle\\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}\end{aligned}$$

19
$$\begin{aligned}\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) &= \langle a_1, a_2\rangle + (-\langle a_1, a_2\rangle)\\ &= \langle a_1, a_2\rangle + \langle -a_1, -a_2\rangle\\ &= \langle a_1 - a_1, a_2 - a_2\rangle\\ &= \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}\end{aligned}$$

21
$$\begin{aligned}(mn)\mathbf{a} &= (mn)\langle a_1, a_2\rangle\\ &= \langle (mn)a_1, (mn)a_2\rangle\\ &= \langle mna_1, mna_2\rangle\\ &= m\langle na_1, na_2\rangle \quad \text{o} \quad n\langle ma_1, ma_2\rangle\\ &= m(n\langle a_1, a_2\rangle) \quad \text{o} \quad n(m\langle a_1, a_2\rangle)\\ &= m(n\mathbf{a}) \quad \text{o} \quad n(m\mathbf{a})\end{aligned}$$

23 $0\mathbf{a} = 0\langle a_1, a_2\rangle = \langle 0a_1, 0a_2\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$.
Además, $m\mathbf{0} = m\langle 0, 0\rangle = \langle m0, m0\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$.

25
$$\begin{aligned}-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= -(\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle)\\ &= -(\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle)\\ &= \langle -(a_1 + b_1), -(a_2 + b_2)\rangle\\ &= \langle -a_1 - b_1, -a_2 - b_2\rangle\\ &= \langle -a_1, -a_2\rangle + \langle -b_1, -b_2\rangle\\ &= -\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}\end{aligned}$$

27
$$\begin{aligned}\|2\mathbf{v}\| &= \|2\langle a, b\rangle\| = \|\langle 2a, 2b\rangle\| = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}\\ &= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\|\langle a, b\rangle\|\\ &= 2\|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

29 $5; \dfrac{3\pi}{2}$ **31** $3\sqrt{2}; \dfrac{7\pi}{4}$ **33** $\sqrt{41}; \tan^{-1}\left(-\dfrac{5}{4}\right) + \pi$
35 $\sqrt{61}; \tan^{-1}\left(-\dfrac{5}{6}\right) + 2\pi$ **37** 102 lb **39** 7.2 lb
41 89 lb; S66°W **43** 5.8 lb; 129°
45 40.96; 28.68 **47** −6.18; 19.02
49 **(a)** $-\dfrac{8}{17}\mathbf{i} + \dfrac{15}{17}\mathbf{j}$ **(b)** $\dfrac{8}{17}\mathbf{i} - \dfrac{15}{17}\mathbf{j}$
51 **(a)** $\left\langle \dfrac{2}{\sqrt{29}}, -\dfrac{5}{\sqrt{29}}\right\rangle$ **(b)** $\left\langle -\dfrac{2}{\sqrt{29}}, \dfrac{5}{\sqrt{29}}\right\rangle$
53 **(a)** $\langle -16, 4\rangle$ **(b)** $\langle -4, 1\rangle$
55 $-\dfrac{24}{\sqrt{65}}\mathbf{i} + \dfrac{42}{\sqrt{65}}\mathbf{j}$
57 **(a)** $\mathbf{F} = \langle 7, 2\rangle$ **(b)** $\mathbf{G} = -\mathbf{F} = \langle -7, -2\rangle$
59 **(a)** $\mathbf{F} \approx \langle -5.86, 1.13\rangle$
(b) $\mathbf{G} = -\mathbf{F} \approx \langle 5.86, -1.13\rangle$
61 $\text{sen}^{-1}(0.4) \approx 23.6°$ **63** 56°; 232 mi/hr
65 420 mi/hr; 244° **67** N22°W
69 $\mathbf{v}_1 \approx 4.1\mathbf{i} - 7.10\mathbf{j}$; $\mathbf{v}_2 \approx 0.98\mathbf{i} - 3.67\mathbf{j}$
71 **(a)** (24.51, 20.57) **(b)** (−24.57, 18.10)
73 28.2 lb/persona

EJERCICIOS 8.4

1 **(a)** 24 **(b)** $\cos^{-1}\left(\dfrac{24}{\sqrt{29}\sqrt{45}}\right) \approx 48°22'$
3 **(a)** −14 **(b)** $\cos^{-1}\left(\dfrac{-14}{\sqrt{17}\sqrt{13}}\right) \approx 160°21'$
5 **(a)** 45 **(b)** $\cos^{-1}\left(\dfrac{45}{\sqrt{81}\sqrt{41}}\right) \approx 38°40'$
7 **(a)** −30 **(b)** $\cos^{-1}\left(\dfrac{-30}{\sqrt{90}\sqrt{10}}\right) = 180°$
9 $\langle 4, -1\rangle \cdot \langle 2, 8\rangle = 0$ **11** $(-4\mathbf{j}) \cdot (-7\mathbf{i}) = 0$
13 Opuesto **15** Igual **17** $\dfrac{6}{5}$ **19** $\pm\dfrac{3}{8}$
21 **(a)** −23 **(b)** −23 **23** −13
25 $17/\sqrt{26} \approx 3.33$ **27** 2.2 **29** 7
31 28 **33** 12
35
$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= \langle a_1, a_2\rangle \cdot \langle a_1, a_2\rangle = a_1^2 + a_2^2\\ &= \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 = \|\mathbf{a}\|^2\end{aligned}$$
37
$$\begin{aligned}(m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= (m\langle a_1, a_2\rangle) \cdot \langle b_1, b_2\rangle\\ &= \langle ma_1, ma_2\rangle \cdot \langle b_1, b_2\rangle\\ &= ma_1b_1 + ma_2b_2\\ &= m(a_1b_1 + a_2b_2) = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\end{aligned}$$
39
$$\begin{aligned}\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} &= \langle 0, 0\rangle \cdot \langle a_1, a_2\rangle = 0(a_1) + 0(a_2)\\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$
41 $1000\sqrt{3} \approx 1732$ ft-lb

43 **(a)** $\mathbf{v} = (93 \times 10^6)\mathbf{i} + (0.432 \times 10^6)\mathbf{j}$; $\mathbf{w} = (93 \times 10^6)\mathbf{i} - (0.432 \times 10^6)\mathbf{j}$
(b) $0.53°$

45 $\left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$ **47** 2.6 **49** 24.33

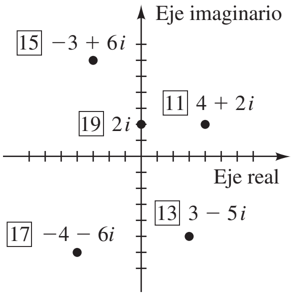
51 $16\sqrt{3} \approx 27.7$ caballos de fuerza

EJERCICIOS 8.5

1 5 **3** $\sqrt{85}$ **5** 0 **7** 8 **9** 1

Nota: El punto P es el punto correspondiente a la representación geométrica.

11 $P(4, 2)$ **13** $P(3, -5)$ **15** $P(-3, 6)$
17 $P(-4, -6)$ **19** $P(0, 2)$



21 $\sqrt{2} \text{ cis } \frac{7\pi}{4}$ **23** $8 \text{ cis } \frac{5\pi}{6}$ **25** $4 \text{ cis } \frac{\pi}{6}$

27 $4\sqrt{2} \text{ cis } \frac{5\pi}{4}$ **29** $20 \text{ cis } \frac{3\pi}{2}$ **31** $12 \text{ cis } 0$

33 $7 \text{ cis } \pi$ **35** $6 \text{ cis } \frac{\pi}{2}$ **37** $10 \text{ cis } \frac{4\pi}{3}$

39 $\sqrt{29} \text{ cis } \left(\tan^{-1} \frac{2}{5}\right)$

41 $\sqrt{10} \text{ cis } \left[\tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi\right]$

43 $\sqrt{34} \text{ cis } \left(\tan^{-1} \frac{3}{5} + \pi\right)$

45 $5 \text{ cis } \left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi\right]$

47 $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ **49** $-3 + 3\sqrt{3}i$ **51** -5
53 $5 + 3i$ **55** $2 - i$ **57** $-4 + 7i$
59 $-7 - 3i$ **61** $-2, i$

63 $10\sqrt{3} - 10i, -\frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5}i$ **65** $40, \frac{5}{2}$

67 $8 - 4i, \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$ **69** $-15 + 10i, -\frac{15}{13} - \frac{10}{13}i$

73 $17.21 + 24.57i$ **75** $11.01 + 9.24i$
77 $\sqrt{365}$ ohms **79** 70.43 volts

EJERCICIOS 8.6

1 $-972 - 972i$ **3** $-32i$ **5** -8

7 $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ **9** $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

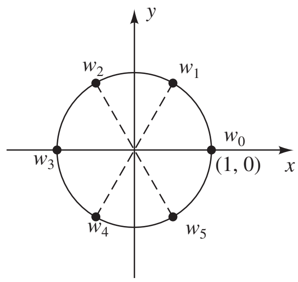
11 $-64\sqrt{3} - 64i$ **13** $\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$

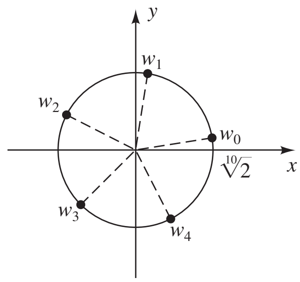
15 $\pm\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{18}}{2}i\right), \pm\left(\frac{\sqrt[4]{18}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i\right)$

17 $3i, \pm\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$

19 $\pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

21 $\sqrt[10]{2} \text{ cis } \theta$ con $\theta = 9°, 81°, 153°, 225°, 297°$





23 $\pm 2, \pm 2i$ **25** $\pm 2i, \sqrt{3} \pm i, -\sqrt{3} \pm i$
27 $2i, \pm\sqrt{3} - i$
29 $3 \text{ cis } \theta$ con $\theta = 0°, 72°, 144°, 216°, 288°$
31 $2 \text{ cis } \theta$ con $\theta = 15°, 105°, 195°, 285°$
33
$$\begin{aligned}[r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)]^n &= [r(e^{i\theta})]^n \\ &= r^n(e^{i\theta})^n \\ &= r^n e^{i(n\theta)} \\ &= r^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta)\end{aligned}$$

CAPÍTULO 8 EJERCICIOS DE REPASO

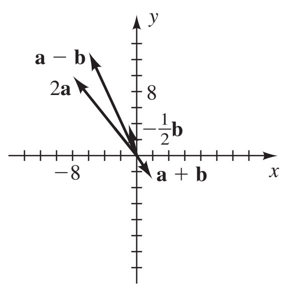
1 $a = \sqrt{43}, \beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{43}\sqrt{43}\right), \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5}{86}\sqrt{43}\right)$

2 $\alpha = 60°, \beta = 90°, b = 4; \alpha = 120°, \beta = 30°, b = 2$

3 $\gamma = 75°, a = 50\sqrt{6}, c = 50(1 + \sqrt{3})$

4 $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right), \beta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right), \gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

5 $\alpha = 38°, a \approx 8.0, c \approx 13$
6 $\gamma \approx 19°10', \beta \approx 137°20', b \approx 258$
7 $\alpha \approx 24°, \gamma \approx 41°, b \approx 10.1$
8 $\alpha \approx 42°, \beta \approx 87°, \gamma \approx 51°$ **9** 290 **10** 14.5
11 Los puntos terminales son $(-2, -3), (-6, 13), (-8, 10), (-1, 4)$.



12 **(a)** $12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}$ **(b)** $-8\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$ **(c)** $\sqrt{40} \approx 6.32$
(d) $\sqrt{29} - \sqrt{17} \approx 1.26$

13 $\langle 14 \cos 40°, -14 \operatorname{sen} 40° \rangle$ **14** 109 lb; S78°E
15 $-10\mathbf{i} - 14\mathbf{j}$
16 $\left\langle -\frac{12}{\sqrt{58}}, \frac{28}{\sqrt{58}} \right\rangle$
17 Circunferencia con centro (a_1, a_2) y radio c
18 Los vectores **a**, **b**, y **a** − **b** forman un triángulo con el vector **a** − **b** opuesto al ángulo θ. La conclusión es una aplicación directa de la ley de los cosenos con lados $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.
19 183°; 70 mi/hr
20 **(a)** 10 **(b)** $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{13}\sqrt{17}}\right) \approx 47°44'$ **(c)** $\frac{10}{\sqrt{13}}$
21 **(a)** 134 **(b)** $\cos^{-1}\left(\frac{134}{\sqrt{40}\sqrt{13}}\right) \approx 32°28'$ **(c)** $\frac{11}{\sqrt{10}}$
22 56
23 $10\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ **24** $4 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$ **25** $17 \operatorname{cis} \pi$
26 $12 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$ **27** $10 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$
28 $\sqrt{41} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \frac{5}{4}\right)$
29 $\sqrt{29} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right) + \pi\right]$
30 $17 \operatorname{cis} \left[\tan^{-1}\left(-\frac{15}{8}\right) + 2\pi\right]$
31 $10\sqrt{3} - 10i$ **32** $12 + 5i$ **33** $-12 - 12\sqrt{3}i, -\frac{3}{2}$
34 $-4\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}$ **35** $-512i$ **36** i
37 $-972 + 972i$ **38** $-2^{19} - 2^{19}\sqrt{3}i$
39 $-3, \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}i$
40 **(a)** 2^{24} **(b)** $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \theta$ con $\theta = 100°, 220°, 340°$
41 $2 \operatorname{cis} \theta$ con $\theta = 54°, 126°, 198°, 270°, 342°$
42 47.6° **43** 197.4 yd **44** 235.8 mi
45 53 000 000 mi
46 **(a)** 449 ft **(b)** 434 ft
47 **(a)** 33 mi, 41 mi **(b)** 30 mi **48** 204
49 1 hora y 16 minutos **50** **(c)** 158°
51 **(a)** 47° **(b)** 20
52 **(a)** 72° **(b)** 181.6 ft² **(c)** 37.6 ft

CAPÍTULO 8 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

4 **(b)** *Sugerencia:* ley de los cosenos
5 **(a)** $(\|\mathbf{b}\| \cos \alpha + \|\mathbf{a}\| \cos \beta)\mathbf{i} + (\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \alpha - \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen} \beta)\mathbf{j}$
6 **(a)** 1 **(b)** $\pi i; \frac{\pi}{2}i$ **(c)** $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; e^{-\pi/2} \approx 0.2079$
7 El enunciado es verdadero.

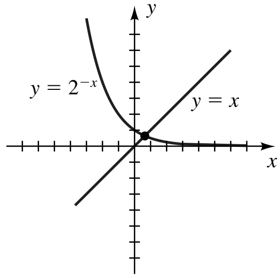
EXAMEN DE CAPÍTULO 8

1 **(a)** 2 **(b)** 0 **(c)** 1 **2** 2.15 mi **3** 5.39 mi
4 Cualquier ángulo, ley de los cosenos **5** 337 ft **6** 75.5°
7 390 ft² **8** $\sqrt{85}$ **9** 25 lb
10 $\frac{21}{\sqrt{73}}\mathbf{i} - \frac{56}{\sqrt{73}}\mathbf{j}$ **11** 463 mi/hr; 242°
12 57.53° **13** $\pm\frac{5}{6}$ **14** −172 **15** $\frac{47}{\sqrt{73}} \approx 5.5$
16 3564 ft-lb **17** 13
18 $\sqrt{13} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi\right]$ **19** $7\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$
20 $28\sqrt{3} - 28i, -\frac{4}{7}\sqrt{3} + \frac{4}{7}i$
21 $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **22** $4i, \pm 2\sqrt{3} - 2i$
23 $\sqrt[5]{7} \operatorname{cis} \theta$ con $\theta = 18°, 90°, 162°, 234°, 306°$

CAPÍTULO 9

EJERCICIOS 9.1

1 (3, 5), (−1, −3) **3** (1, 0), (−3, 2)
5 $(0, 0), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{128}\right)$ **7** (3, −2) **9** No hay solución
11 (−4, −2), (2, 4) **13** (−4, 3), (5, 0) **15** (−2, 2)
17 $\left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{86}, \frac{1}{5} + \frac{3}{10}\sqrt{86}\right)$, $\left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{86}, \frac{1}{5} - \frac{3}{10}\sqrt{86}\right)$ **19** No hay solución
21 (0, 1), (4, −3) **23** (−6, −1), (−1, 4)
25 $(\pm 2, 5), (\pm\sqrt{5}, 4)$
27 $(\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3})$ **29** No hay solución
31 $(2\sqrt{2}, \pm 2), (-2\sqrt{2}, \pm 2)$ **33** (3, −1, 2)
35 (1, −1, 2), (−1, 3, −2)
37 **(a)** $b = 4$; tangente
(b) $b < 4$; intersecta dos veces
(c) $b > 4$; no hay intersección
39 Sí; hay una solución entre 0 y 1.



41 $\frac{1}{4}$; tangente **43** $f(x) = 2(3)^x + 1$ **45** 12 y 4
47 12 in. × 8 in.
49 **(a)** $a = 120\,000, b = 40\,000$ **(b)** 77 143

51 (0, 0), (0, 100), (50, 0); la cuarta solución $(-100, 150)$ no es significativa.

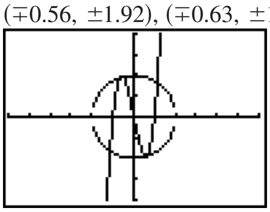
53 Sí; 1 ft × 1 ft × 2 ft o $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\text{ ft} \times \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\text{ ft} \times \dfrac{8}{(\sqrt{13}-1)^2}\text{ ft}$
$\approx 1.30\text{ ft} \times 1.30\text{ ft} \times 1.18\text{ ft}$

55 Los puntos están en la parábola **(a)** $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ y **(b)** $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

57 **(a)** $(31.25, -50)$
(b) $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{11}, -\frac{1}{2}\right) \approx (-4.975, -0.5)$

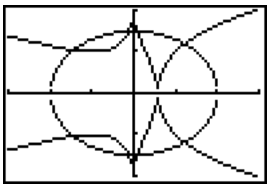
59 $(\mp 0.82, \pm 1.82)$; $\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

61 $(\mp 0.56, \pm 1.92)$, $(\mp 0.63, \pm 1.90)$, $(\pm 1.14, \pm 1.65)$



[−6, 6] por [−4, 4]

63 $(-1.44, \pm 1.04)$, $(-0.12, \pm 1.50)$, $(0.10, \pm 1.50)$, $(1.22, \pm 1.19)$



[−3, 3] por [−2, 2]

65 $a \approx 1.2012$, $b \approx 0.4004$ **67** $a \approx 2.8019$, $b \approx 0.9002$

EJERCICIOS 9.2

1 $(4, -2)$ **3** $(-75, 90)$ **5** $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ **7** $\left(\frac{76}{53}, \frac{28}{53}\right)$

9 $\left(\frac{51}{13}, \frac{96}{13}\right)$ **11** $\left(\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}\sqrt{6}\right)$ **13** $\left(\frac{220}{13}, \frac{137}{13}\right)$

15 No hay solución

17 Todos los pares ordenados (m, n) tales que $3m - 4n = 2$

19 $(0, 0)$ **21** $\left(-\frac{22}{7}, -\frac{11}{5}\right)$ **23** $(2, -1)$

25 $(0, 2)$ **27** 313 estudiantes, 137 no estudiantes

29 $x = \frac{30}{\pi} - 4 \approx 5.55$ cm, $y = 12 - \frac{30}{\pi} \approx 2.45$ cm

31 $l = 10$ ft, $w = \frac{20}{\pi}$ ft **33** 2400 adultos, 3600 gatitos

35 40 g de aleación al 35%, 60 g de aleación al 60%

37 540 mi/hr, 60 mi/hr **39** $v_0 = 10$, $a = 3$

41 20 sofás, 30 divanes

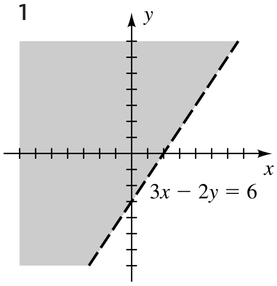
43 **(a)** $\left(c, \frac{4}{5}c\right)$ para una $c > 0$ arbitraria
(b) \$28 por hora

45 1928; 15.5°C **47** LP: 4 hr; SLP: 2 hr

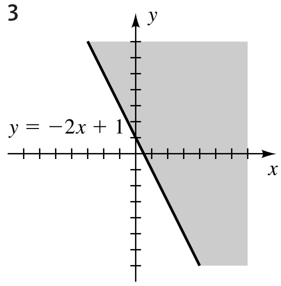
49 $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{6}e^{6x}$ **51** $a = \cos x - \sec x$, $b = \operatorname{sen} x$

EJERCICIOS 9.3

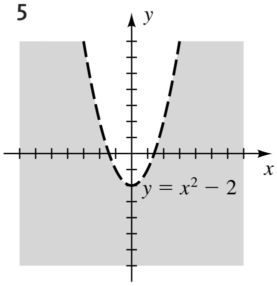
1



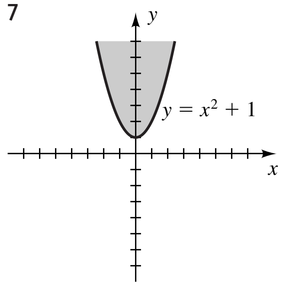
3



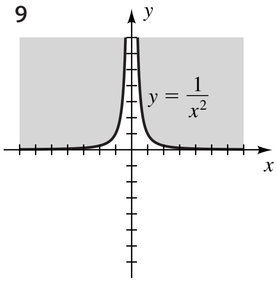
5



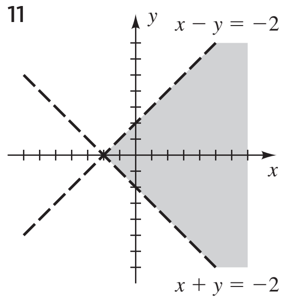
7



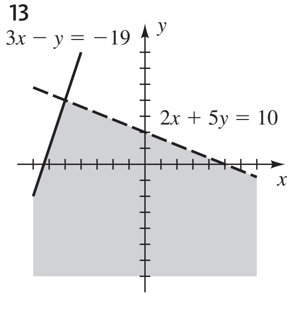
9



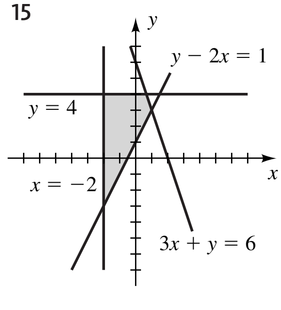
11



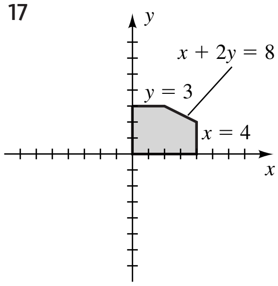
13



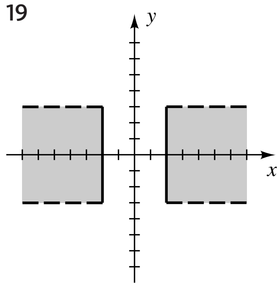
15



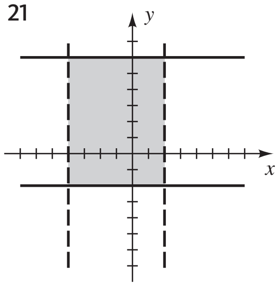
17



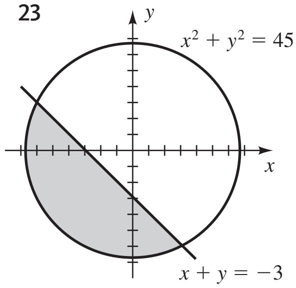
19



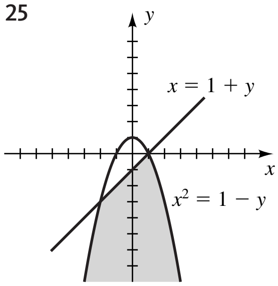
21



23



25



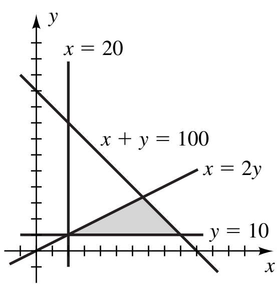
27 $0 \leq x < 3,\ y < -x + 4,\ y \geq x - 4$

29 $x^2 + y^2 \leq 9,\ y > -2x + 4$

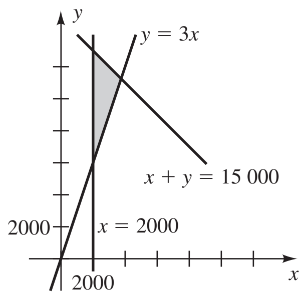
31 $y < x,\ y \leq -x + 4,\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 8$

33 $y > \frac{1}{8}x + \frac{1}{2},\ y \leq x + 4,\ y \leq -\frac{3}{4}x + 4$

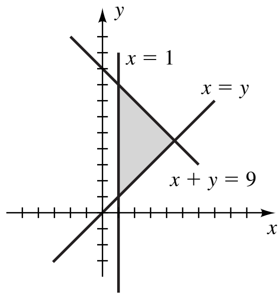
35 Si x y y denotan los números de conjuntos de la marca A y la marca B, respectivamente, entonces un sistema es $x \geq 20,\ y \geq 10,\ x \geq 2y,\ x + y \leq 100$.



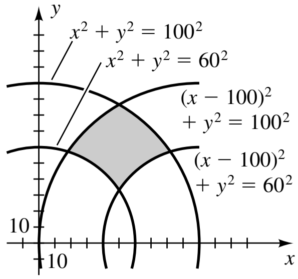
37 Si x y y denotan las cantidades puestas en la inversión de alto riesgo y bajo riesgo, respectivamente, entonces un sistema es $x \geq 2000,\ y \geq 3x,\ x + y \leq 15\,000$.



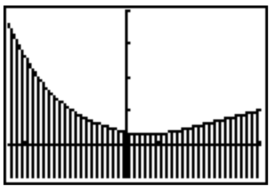
39 $x + y \leq 9,\ y \geq x,\ x \geq 1$



41 Si la planta se coloca en (x, y), entonces un sistema es $60^2 \leq x^2 + y^2 \leq 100^2,\ 60^2 \leq (x - 100)^2 + y^2 \leq 100^2,\ y \geq 0$.

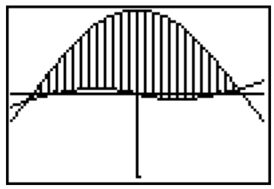


43



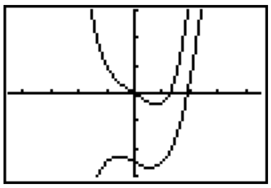
$[-3.5, 4]$ por $[-1, 4]$

45



$[-1.5, 1.5]$ por $[-1, 1]$

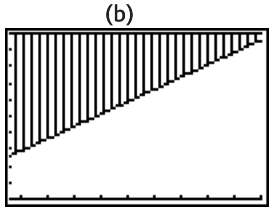
47 No hay solución.



$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

49 **(a)** Sí

(b)



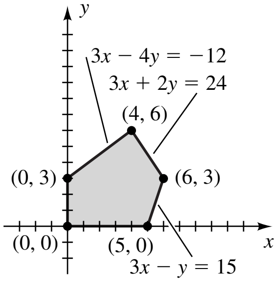
$[33, 80, 5]$ por $[0, 50, 5]$

(c) Región arriba de la recta

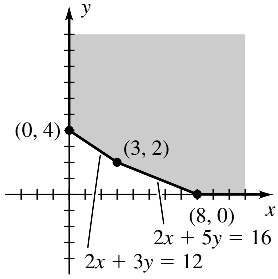
EJERCICIOS 9.4

1 Máximo de 27 en (6, 2); mínimo de 9 en (0, 2)

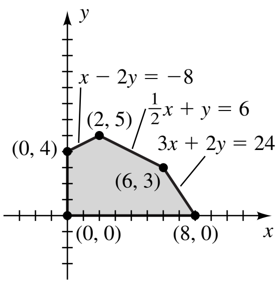
3 Máximo de 21 en (6, 3)



5 Mínimo de 21 en (3, 2)



7 C tiene el máximo valor de 24 para cualquier punto sobre el segmento de recta de (2, 5) a (6, 3).



9 (8, 0)
11 Cualquier punto entre (2, 7) y (6, 3), incluso
13 Un ejemplo es $P = 500x + 600y$.
15 50 de tamaño estándar y 30 de tamaño grande
17 3.5 lb de S y 1 lb de T
19 Enviar 25 de W_1 a A y 0 de W_1 a B. Enviar 10 de W_2 a A y 60 de W_2 a B.
21 Nada de alfalfa y 80 acres de maíz
23 Costo mínimo: 16 onzas X, 4 onzas Y, 0 onzas Z; costo máximo: 0 onzas X, 8 onzas Y, 12 onzas Z
25 2 camionetas y 4 autobuses
27 3000 truchas y 2000 lobinas
29 60 unidades pequeñas y 20 unidades de lujo

EJERCICIOS 9.5

1 $(2, 3, -1)$ **3** $(-2, 4, 5)$ **5** No hay solución

7 $\left(\frac{2}{3}, \frac{31}{21}, \frac{1}{21}\right)$ **9** $(0, 0, 0)$

Ejer. 11–18: Hay otras formas para las respuestas; c es cualquier número real.

11 $(2c, -c, c)$ **13** $(0, -c, c)$

15 $(33c - 54, -8c + 13, c)$

17 $\left(\frac{7}{10}c + \frac{1}{2}, \frac{19}{10}c - \frac{3}{2}, c\right)$ **19** $\left(\frac{1}{11}, \frac{31}{11}, \frac{3}{11}\right)$

21 $(-2, -3)$ **23** No hay solución

25 17 de 10%, 11 de 30%, 22 de 50%
27 4 horas para A, 2 horas para B, 5 horas para C
29 380 lb de G_1, 60 lb de G_2, 160 lb de G_3
31 **(a)** $I_1 = 0, I_2 = 2, I_3 = 2$ **(b)** $I_1 = \frac{3}{4}, I_2 = 3, I_3 = \frac{9}{4}$

33 $\frac{3}{8}$ de lb café de Colombia, $\frac{1}{8}$ de lb café de Costa Rica, $\frac{1}{2}$ de café de Kenia
35 **(a)** A: $x_1 + x_4 = 75$, B: $x_1 + x_2 = 150$, C: $x_2 + x_3 = 225$, D: $x_3 + x_4 = 150$
(b) $x_1 = 25, x_2 = 125, x_4 = 50$
(c) $x_3 = 150 - x_4 \leq 150$; $x_3 = 225 - x_2 = 225 - (150 - x_1) = 75 + x_1 \geq 75$
37 2134 **39** $y = 3x^2 - x + 5$
41 $x^2 + y^2 - x + 3y - 6 = 0$
43 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 6$
45 $a = -\frac{4}{9}, b = \frac{11}{9}, c = \frac{17}{18}, d = \frac{23}{18}$

EJERCICIOS 9.6

1 $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 & -3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -5 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 3 & -15 \\ -18 & 0 \end{bmatrix}$

5 $[11 \;\; -3 \;\; -3], [-3 \;\; -3 \;\; 7], [8 \;\; -6 \;\; 4], [-21 \;\; 0 \;\; 15]$

7 No es posible, no es posible, $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -8 \\ -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ -6 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ **11** $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 20 & -16 \end{bmatrix}$

13 -18 **15** $\begin{bmatrix} 16 & 38 \\ 11 & -34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 38 \\ 23 & -22 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -18 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ -51 & 26 & 10 \end{bmatrix}$

21 $\begin{bmatrix} -3 & 10 & 2 \\ -11 & 19 & 11 \\ 18 & 16 & 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 38 & 9 & -10 \\ 3 & 24 & 3 & 6 \\ -2 & 20 & 5 & -8 \\ 12 & 6 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

25 $[15], \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -12 & 28 & 8 \\ 15 & -35 & -10 \end{bmatrix}$

27 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, no es posible **29** $\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$

31 $\begin{bmatrix} 18 & 0 & -2 \\ -40 & 10 & -10 \end{bmatrix}$ **41** $\begin{bmatrix} 135 & -109 & 91 \\ -39 & 92 & -33 \\ 45 & 3 & 95 \end{bmatrix}$

43 $\begin{bmatrix} 76 & -38 & 102 \\ -5 & 61 & -13 \\ 41 & 0 & 19 \end{bmatrix}$

45 **(a)** $A = \begin{bmatrix} 400 & 550 & 500 \\ 400 & 450 & 500 \\ 300 & 500 & 600 \\ 250 & 200 & 300 \\ 100 & 100 & 200 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \$8.99 \\ \$10.99 \\ \$12.99 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \$16\,135.50 \\ \$15\,036.50 \\ \$15\,986.00 \\ \$\ \ 8342.50 \\ \$\ \ 4596.00 \end{bmatrix}$

(c) Los $4596.00 representan la cantidad que la tienda recibiría si se vendieran todas las toallas amarillas.

EJERCICIOS 9.7

1 Demostrar que $AB = I_2$ y $BA = I_2$.

3 $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **5** No existe

7 $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **9** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **13** No existe **15** No existe

17 $ab \neq 0;\ \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$

21 **(a)** $\left(\frac{13}{10}, -\frac{1}{10}\right)$ **(b)** $\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$

23 **(a)** $\left(-\frac{25}{3}, -\frac{34}{3}, \frac{7}{3}\right)$ **(b)** $\left(\frac{16}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

25 $\begin{bmatrix} 0.111 & 0.259 & -0.630 \\ -0.037 & 0.025 & 0.321 \\ 0.074 & -0.049 & 0.358 \end{bmatrix}$

27 $\begin{bmatrix} -0.223 & 0.129 & 0.065 & 0.378 \\ -1.178 & 0.095 & 0.559 & 0.292 \\ -0.372 & 0.002 & 0.141 & 0.374 \\ 0.160 & -0.042 & 0.072 & -0.210 \end{bmatrix}$

29 **(a)** $\begin{bmatrix} 4.0 & 7.1 \\ 2.2 & -4.9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.2 \\ 2.9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0.1391 & 0.2016 \\ 0.0625 & -0.1136 \end{bmatrix}$ **(c)** $x \approx 1.4472, y \approx 0.0579$

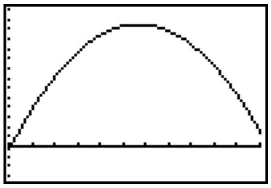
31 **(a)** $\begin{bmatrix} 3.1 & 6.7 & -8.7 \\ 4.1 & -5.1 & 0.2 \\ 0.6 & 1.1 & -7.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.1 \\ 3.9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0.1474 & 0.1572 & -0.1691 \\ 0.1197 & -0.0696 & -0.1426 \\ 0.0297 & 0.0024 & -0.1700 \end{bmatrix}$

(c) $x \approx -0.1081, y \approx -0.5227, z \approx -0.6135$

33 **(a)** $a \approx -1.9630, b \approx 26.2963, c \approx -25.7407$

(b)



[1, 12] por [−15, 70, 5]

(c) Junio: 61°F; octubre: 41°F

EJERCICIOS 9.8

1 $M_{11} = 0 = A_{11};\ M_{12} = 5;\ A_{12} = -5;$
$M_{21} = -1;\ A_{21} = 1;\ M_{22} = 7 = A_{22}$

3 $M_{11} = -14 = A_{11};\ M_{12} = 10;\ A_{12} = -10;$
$M_{13} = 15 = A_{13};\ M_{21} = 7;\ A_{21} = -7;$
$M_{22} = -5 = A_{22};\ M_{23} = 34;\ A_{23} = -34;$
$M_{31} = 11 = A_{31};\ M_{32} = 4;\ A_{32} = -4;$
$M_{33} = 6 = A_{33}$

5 5 **7** −83 **9** 2 **11** 0 **13** −125 **15** 48

17 −216 **19** $abcd$ **21** e^{5x} **23** −1

35 **(a)** $x^2 - 3x - 4$ **(b)** −1, 4

37 **(a)** $x^2 - 8x - 5$ **(b)** $4 \pm \sqrt{21}$

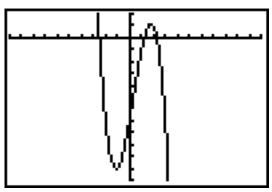
39 **(a)** $-x^3 - 2x^2 + x + 2$ **(b)** −2, −1, 1

41 **(a)** $-x^3 + 4x^2 + 4x - 16$ **(b)** −2, 2, 4

43 $-31i - 20j + 7k$ **45** $-6i - 8j + 18k$

47 −255 **49** −359 284

51 **(a)** $-x^3 + x^2 + 6x - 7$ **(b)** −2.51, 1.22, 2.29



[−10, 11] por [−12, 2]

EJERCICIOS 9.9

1 $R_2 \leftrightarrow R_3$ **3** $C_2 \leftrightarrow C_3$ o $R_1 \leftrightarrow R_3$

5 $-R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

7 2 es un factor común de R_1 y R_3.

9 R_1 y R_3 son idénticas.

11 −1 es un factor común de R_2.

13 Todo número en C_2 es 0. **15** $2C_1 + C_3 \rightarrow C_3$
17 55 **19** -10 **21** -142 **23** -183 **25** 44
27 359 **37** $(4, -2)$ **39** $(8, 0)$
41 $|D| = 0$, de modo que la regla de Cramer no se puede usar.
43 $(2, 3, -1)$ **45** $(-2, 4, 5)$
47 $x = \dfrac{cgi - dfi + bfj}{cei - afi + bfh}$

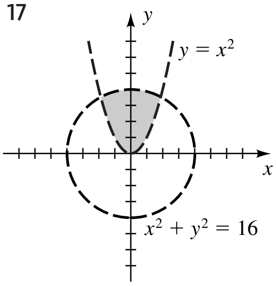
EJERCICIOS 9.10

1 $\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{5}{x+3}$ **3** $\dfrac{5}{x-6} - \dfrac{4}{x+2}$
5 $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{x-3}$ **7** $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x-5} - \dfrac{1}{x+1}$
9 $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{5}{(x-1)^2}$ **11** $-\dfrac{7}{x} + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{40}{3x-5}$
13 $\dfrac{24/25}{x+2} + \dfrac{2/5}{(x+2)^2} - \dfrac{23/25}{2x-1}$
15 $\dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{(x+1)^3}$ **17** $-\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3x+4}{x^2+1}$
19 $\dfrac{4}{x} + \dfrac{5x-3}{x^2+2}$ **21** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2x-3}{x^2+3}$
23 $\dfrac{4x-1}{x^2+1} + \dfrac{3}{(x^2+1)^2}$ **25** $2x + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3x}{x^2+1}$
27 $3 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{8}{x-4}$ **29** $2x + 3 + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{2x+1}$

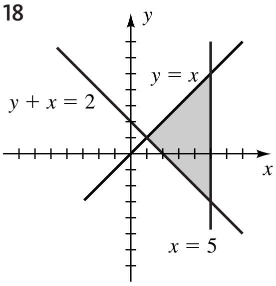
CAPÍTULO 9 EJERCICIOS DE REPASO

1 $\left(\dfrac{19}{23}, -\dfrac{18}{23}\right)$ **2** No hay solución **3** $(-3, 5), (1, -3)$
4 $(4, -3), (3, -4)$ **5** $(2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}), (-2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2})$
6 $(-1, \pm 1, -1), \left(0, \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{6}, -\dfrac{1}{2}\right)$ **7** $\left(\dfrac{14}{17}, \dfrac{14}{27}\right)$
8 $\left(\log_2 \dfrac{25}{7}, \log_3 \dfrac{15}{7}\right)$ **9** $\left(\dfrac{6}{11}, -\dfrac{7}{11}, 1\right)$
10 $\left(-\dfrac{6}{29}, \dfrac{2}{29}, -\dfrac{17}{29}\right)$
11 $(-2c, -3c, c)$ para cualquier número real c
12 $(0, 0, 0)$
13 $\left(5c - 1, -\dfrac{19}{2}c + \dfrac{5}{2}, c\right)$ para cualquier número real c
14 $(5, -4)$ **15** $\left(-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$ **16** $(3, -1, -2, 4)$

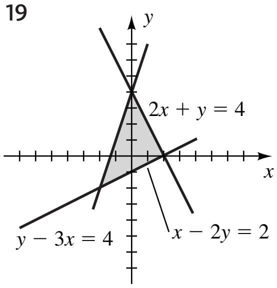
17



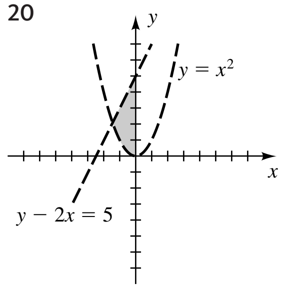
18



19



20



21 $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 25 \\ |x| > 3 \\ |y| \leq 6 \end{cases}$ **22** $\begin{cases} x < y^2 \\ y \leq x + 1 \end{cases}$

23 $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 4 & -11 & 5 \end{bmatrix}$ **24** $\begin{bmatrix} 26 \\ -6 \end{bmatrix}$ **25** $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 16 & 22 & 1 \\ 12 & 11 & 9 \end{bmatrix}$

26 $\begin{bmatrix} 0 & -37 \\ 15 & -6 \end{bmatrix}$ **27** $\begin{bmatrix} -12 & 4 & -11 \\ 6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$

28 $\begin{bmatrix} a & 3a \\ 2a & 4a \end{bmatrix}$ **29** $\begin{bmatrix} a & 3a \\ 2b & 4b \end{bmatrix}$ **30** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

31 $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 19 \end{bmatrix}$ **32** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **33** $-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

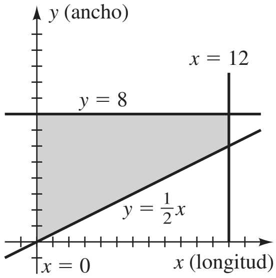
34 $\dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -14 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ **35** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

36 $\dfrac{1}{37}\begin{bmatrix} -4 & -20 & 15 \\ 3 & 15 & -2 \\ 9 & 8 & -6 \end{bmatrix}$ **37** $(2, -5)$ **38** $(-1, 3, 2)$

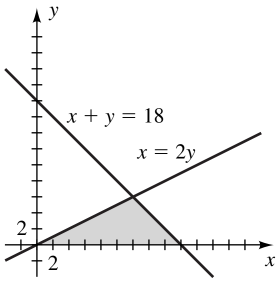
39 $(-4, 3)$ **40** $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right), (4, 16)$ **41** 9
42 48 **43** -86 **44** -84 **45** 0 **46** 120
47 -76 **48** -50 **49** $-1 \pm 2\sqrt{3}$ **50** $4, \pm\sqrt{7}$
51 2 es un factor común de R_1, 2 es un factor común de C_2, y 3 es un factor común de C_3.
52 Intercambiar R_1 con R_2 y luego R_2 con R_3 para obtener el determinante de la derecha. El efecto es multiplicar por -1 dos veces.
53 $a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$ **55** $\left(\dfrac{76}{53}, \dfrac{28}{53}\right)$ **56** $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{31}{21}, \dfrac{1}{21}\right)$
57 $\dfrac{8}{x-1} - \dfrac{3}{x+5} - \dfrac{1}{x+3}$ **58** $2 + \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{(x+1)^2}$
59 $-\dfrac{2}{x+5} + \dfrac{3x-1}{x^2+4}$ **60** $\dfrac{4}{x^2+2} + \dfrac{x-2}{x^2+5}$
61 $40\sqrt{5}$ ft $\times$ $20\sqrt{5}$ ft **62** $y = \pm 2\sqrt{2}x + 3$
63 Radio interior = 90 pies, radio exterior = 100 pies
64 Impuesto = \$750 000; bono = \$125 000
65 2 mi/hr; 5 mi/hr
66 25 lbs de cacahuates y 30 lbs de pasas
67 1325 mi/hr; 63 mi/hr
68 En ft^3/hr: A, 30; B, 20; C, 50

69 Del oeste 95, del este 55

70 Si x y y denotan la longitud y el ancho, respectivamente, entonces un sistema es $x \leq 12$, $y \leq 8$, $y \geq \frac{1}{2}x$.



71 $x + y \leq 18$, $x \geq 2y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$



72 80 podadoras y 30 cortadoras

73 Alto riesgo \$250 000; bajo riesgo \$500 000; bonos \$0

CAPÍTULO 9 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 **(a)** $b = 1.99$, $x = 204$, $y = -100$; $b = 1.999$, $x = 2004$, $y = -1000$

(b) $x = \dfrac{4b - 10}{b - 2}$, $y = \dfrac{1}{b - 2}$

(c) Se acerca a (4, 0).

2 **(a)** $D = [12\,000 \quad 9000 \quad 14\,000]$;

$$E = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 & 0.00 \\ 0.00 & 0.80 & 0.20 \\ 0.05 & 0.00 & 0.95 \end{bmatrix}$$

(b) Los elementos de $F = [11\,500 \quad 8400 \quad 15\,100]$ representan las poblaciones en las islas A, B y C, respectivamente, después de un año.

(c) La población se estabiliza con 10 000 aves en A, 5000 aves en B y 20,000 aves en C.

(d) Cualquiera que sea la distribución inicial de población de las 35 000 aves, las poblaciones tienden hacia la distribución descrita en la parte (c).

3 *Sugerencia:* Asignar un tamaño a A y examinar la definición de una inversa.

4 AD: 35%, DS: $33\frac{1}{3}$%, SP: $31\frac{2}{3}$%

5 $a = -15$, $b = 10$, $c = 24$; la raíz cuarta es -4

6 $y = 0.058\overline{3}x^3 - 0.11\overline{6}x^2 - 1.1x + 4.2$

8 **(a)** No es posible

(b) $x^2 + y^2 - 1.8x - 4.2y + 0.8 = 0$

(c) $f(x) = -\dfrac{5}{12}x^2 + \dfrac{7}{12}x + 4$

(d) $f(x) = ax^3 + \left(-2a - \dfrac{5}{12}\right)x^2 + \left(-3a + \dfrac{7}{12}\right)x + 4$, donde a es cualquier número real diferente de cero

(e) No hay solución

EXAMEN DE CAPÍTULO

1 $(-3, -2), (2, 3)$ **2** $(\pm 7, -3), (\pm 7, 3)$

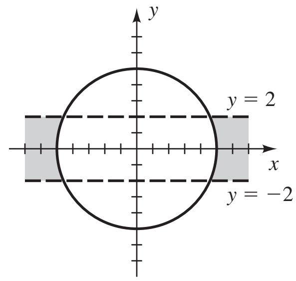
3 12 y 4 **4** $(\pm\sqrt{6}, 2)$ **5** $\left(\dfrac{104}{47}, -\dfrac{1}{47}\right)$

6 No hay solución

7 Todos los pares ordenados (x, y) tales que $3x - y = -5$

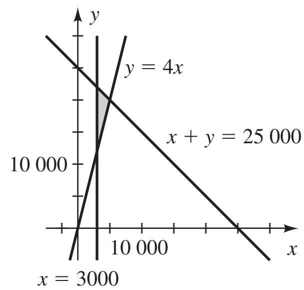
8 30 sofás, 45 reclinables

9

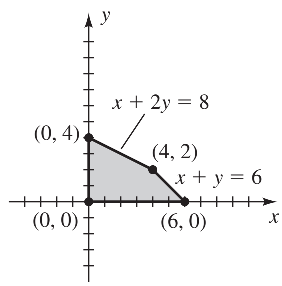


10 $\begin{cases} y > x + 2 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$

11 $x \geq 3000$, $y \geq 4x$, $x + y \leq 25\,000$



12 Máximo de 12 en (6, 0)



13 3 camionetas, 5 autobuses **14** $(4, -3, 7)$

15 $(3c, -2c, c)$

16 $\frac{1}{4}$, 2, y 18 onzas **17** $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 7$

18 $\begin{bmatrix} -6 & -14 & -1 \\ -10 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ **19** $\begin{bmatrix} -17 & 27 \\ -44 & -7 \end{bmatrix}$ **20** -19

21 Una posibilidad es

$$C = AB = \begin{bmatrix} 23 & 7 \\ 35 & 12 \\ 40 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 80 & 30 \\ 90 & 75 & 20 \end{bmatrix} =$$

$\begin{bmatrix} 2930 & 2365 & 830 \\ 4580 & 3700 & 1290 \\ 5710 & 4625 & 1580 \end{bmatrix}$, donde los números en la diagonal principal representan el valor total de los juegos de hierros, madera y combinados, \$2930, \$3700 y \$1580, respectivamente y los demás valores no tienen sentido.

22 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

24 No; un renglón de ceros significa $|A| = 0$ y por lo tanto A es no invertible.

25 23 **26** 6 **27** 134 **28** $-3, 5$

29 R_1 y R_3 son idénticos. **30** -177 **31** $(3, -4)$

32 $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{4}{x+1}$ **33** $\dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x+3}$

34 $\dfrac{2x-5}{x^2+1} + \dfrac{3}{(x^2+1)^2}$

CAPÍTULO 10

EJERCICIOS 10.1

1 $9, 6, 3, 0; -12$ **3** $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{7}{10}, \dfrac{10}{17}; \dfrac{22}{65}$

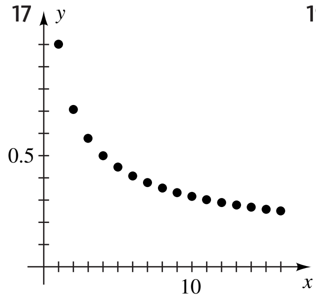
5 9, 9, 9, 9; 9

7 1.9, 2.01, 1.999, 2.0001; 2.000 000 01

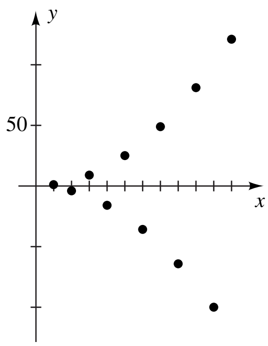
9 $4, -\dfrac{9}{4}, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{11}{8}; -\dfrac{15}{16}$ **11** 2, 0, 2, 0; 0

13 $\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{11}, \dfrac{8}{9}; \dfrac{128}{33}$ **15** 1, 2, 3, 4; 8

17



19



21 $2, 1, -2, -11, -38$ **23** $-3, 3^2, 3^4, 3^8, 3^{16}$

25 5, 5, 10, 30, 120 **27** $2, 2, 4, 4^3, 4^{12}$

29 7, 20, 61 **31** $-8, 16, -128$

33 $\dfrac{7}{2}, \dfrac{15}{2}, 12, 17$

35 $-1, -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

37 -5 **39** 10 **41** 25 **43** $-\dfrac{17}{15}$ **45** 61

47 10 000 **49** $\dfrac{319}{3}$ **51** $\dfrac{7}{2}k^2$

53
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (-b_1 - b_2 - \cdots - b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\end{aligned}$$

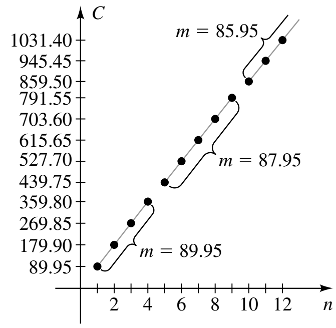
55 Cuando k crece, los términos se aproximan a 1.

57 0.4, 0.7, 1, 1.6, 2.8

59 **(a)** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
(b) 1, 2, 1.5, $1.\overline{6}$, 1.6, 1.625, 1.6153846, 1.6190476, 1.6176471, 1.6181818

61 **(a)** $a_n = 0.8a_{n-1}$ **(b)** El cuarto día

63 $C(n) = \begin{cases} 89.95n & \text{si } 1 \le n \le 4 \\ 87.95n & \text{si } 5 \le n \le 9 \\ 85.95n & \text{si } n \ge 10 \end{cases}$

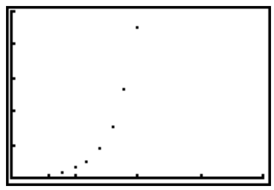


65 2.236068 **67** 2.4493

69 **(a)** $f(1) = -1 < 0, f(2) \approx 0.30 > 0$ **(b)** 1.76

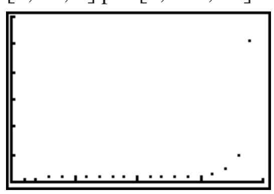
71 a_n se aproxima a e **73** a_n se aproxima a 1

75 10



[0, 20, 5] por [0, 125, 25]

77 19



[0, 20, 5] por [0, 300, 50]

79 **(a)** Disminuye de 250 insectos a 0
(b) Se estabiliza en 333 insectos
(c) Se estabiliza en 636 insectos

EJERCICIOS 10.2

1 Demuestre que $a_{k+1} - a_k = 4$. **3** $4n - 2$; 18; 38
5 $-3n + 19$; 4; -11 **7** $3.3 - 0.3n$; 1.8; 0.3
9 $3.1n - 10.1$; 5.4; 20.9
11 $-10x + 15 + n(2x - 3)$; 0; $10x - 15$
13 $\ln 3^n$; $\ln 3^5$; $\ln 3^{10}$ **15** -8 **17** -8.5
19 -9.8 **21** $\frac{551}{17}$ **23** 3015 **25** -105 **27** 30
29 25 **31** 530 **33** $\frac{423}{2}$ **35** $934j + 838\,265$
37 $\sum_{n=1}^{5} (7n - 3)$ o $\sum_{n=0}^{4} (4 + 7n)$
39 $\sum_{n=1}^{67} (7n - 3)$ o $\sum_{n=0}^{66} (4 + 7n)$
41 $\sum_{n=1}^{6} \frac{3n}{4n + 3}$ o $\sum_{n=0}^{5} \frac{3 + 3n}{7 + 4n}$
43 $\sum_{n=1}^{1528} (11n - 3) = 12\,845\,132$ **45** 28 **47** 24
49 12 o 18 **51** $\frac{10}{3}, \frac{14}{3}, 6, \frac{22}{3}, \frac{26}{3}$ **53** 25, -2, -29
55 **(a)** 60 **(b)** 12,780 **57** 255 **59** 154π ft
61 \$1200 **63** $16n^2$
65 Demuestre que el $(n + 1)$-ésimo término es 1 más que el n-ésimo término.
67 **(a)** $\frac{8}{36}, \frac{7}{36}, \frac{6}{36}, \ldots, \frac{1}{36}$ **(b)** $d = -\frac{1}{36}$; 1
(c) \$722.22

EJERCICIOS 10.3

1 Demuestre que $\frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{1}{4}$.
3 $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{4-n}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}$
5 $300(-0.1)^{n-1}$; 0.03; -0.00003 **7** 5^n; 3125; 390 625
9 $4(-1.5)^{n-1}$; 20.25; -68.34375
11 $(-1)^{n-1}x^{2n-2}$; x^8; $-x^{14}$ **13** $2^{(n-1)x+1}$; 2^{4x+1}; 2^{7x+1}
15 2 **17** $\pm\sqrt{3}$ **19** $\frac{243}{8}$ **21** $\frac{4}{27}$ **23** 36
25 $-\frac{1}{16}$ **27** $\frac{1533}{16}$ **29** 1093 **31** 88 572
33 $-\frac{341}{1024}$ **35** $8188 + 55j$ **37** $\sum_{n=1}^{7} 2^n$
39 $\sum_{n=1}^{4} (-1)^{n+1} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ **41** $\frac{2}{3}$ **43** $\frac{50}{33}$
45 Como $|r| = \sqrt{2} > 1$, la suma no existe.
47 1024 **49** $\frac{x}{3 - x}$ **51** $\frac{23}{99}$ **53** $\frac{2393}{990}$
55 $\frac{5141}{999}$ **57** $\frac{16\,123}{9999}$ **59** 24
61 4, 20, 100, 500 **63** $\frac{25}{256}\% \approx 0.1\%$
65 **(a)** $N(t) = 10{,}000(1.2)^t$ **(b)** 61 917 **67** 300 ft
69 \$3,000,000 **71** **(b)** 375 mg
73 **(a)** $a_{k+1} = \frac{1}{4}\sqrt{10}\,a_k$
(b) $a_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^{n-1} a_1$, $A_n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} A_1$,
$P_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^{n-1} P_1$ **(c)** $\frac{16a_1}{4 - \sqrt{10}}$
75 **(a)** $a_k = 3^{k-1}$ **(b)** 4 782 969
(c) $b_k = \frac{3^{k-1}}{4^k} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ **(d)** $\frac{729}{16{,}384} \approx 4.45\%$
77 \$38 929.00 **79** \$7396.67
81 **(a)** $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \frac{54}{625}, \frac{162}{3125}$
(b) $r = \frac{3}{5}$; $\frac{2882}{3125} = 0.92224$ **(c)** \$16 000

EJERCICIOS 10.4

Ejer. 1–34: Se da una prueba típica para los ejercicios 1, 5, 11, 15, 19, 23, 27, y 31.

1 (1) P_1 es verdadera, porque $2(1) = 1(1 + 1) = 2$.
(2) Suponga que P_k es verdadera:
$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$. Por tanto,
$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) &= k(k + 1) + 2(k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2) \\ &= (k + 1)(k + 1 + 1). \end{aligned}$$
Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

5 (1) P_1 es verdadera, porque:
$$5(1) - 3 = \frac{1}{2}(1)[5(1) - 1] = 2.$$
(2) Suponga que P_k es verdadera:
$$2 + 7 + 12 + \cdots + (5k - 3) = \frac{1}{2}k(5k - 1).$$
Por tanto,
$$\begin{aligned} 2 + 7 + 12 + \cdots + (5k - 3) + 5(k + 1) - 3 &= \frac{1}{2}k(5k - 1) + 5(k + 1) - 3 \\ &= \frac{5}{2}k^2 + \frac{9}{2}k + 2 \\ &= \frac{1}{2}(5k^2 + 9k + 4) \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)(5k + 4) \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)[5(k + 1) - 1]. \end{aligned}$$
Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

11 (1) P_1 es verdadera, porque:
$$(1)^1 = \frac{1(1 + 1)[2(1) + 1]}{6} = 1.$$
(2) Suponga que P_k es verdadera:
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}.$$
Por tanto,
$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k + 1)^2 &= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 \\ &= (k + 1)\left[\frac{k(2k + 1)}{6} + \frac{6(k + 1)}{6}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

15 (1) P_1 es verdadera, porque $3^1 = \frac{3}{2}(3^1 - 1) = 3$.

(2) Suponga que P_k es verdadera:

$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k = \frac{3}{2}(3^k - 1)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} &= \frac{3}{2}(3^k - 1) + 3^{k+1} \\ &= \frac{3}{2}\cdot 3^k - \frac{3}{2} + 3\cdot 3^k \\ &= \frac{9}{2}\cdot 3^k - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}(3\cdot 3^k - 1) \\ &= \frac{3}{2}(3^{k+1} - 1). \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

19 (1) P_1 es verdadera, porque $1 < \frac{1}{8}[2(1) + 1]^2 = \frac{9}{8}$.

(2) Suponga que P_k es verdadera:

$1 + 2 + 3 + \cdots + k < \frac{1}{8}(2k+1)^2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &< \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) \\ &= \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{9}{8} \\ &= \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9) \\ &= \frac{1}{8}(2k+3)^2 \\ &= \frac{1}{8}[2(k+1) + 1]^2. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

23 (1) Para $n = 1$, $5^n - 1 = 4$ y 4 es un factor de 4.

(2) Suponga que 4 es un factor de $5^k - 1$. El $(k+1)$avo término es

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5\cdot 5^k - 1 \\ &= 5\cdot 5^k - 5 + 4 \\ &= 5(5^k - 1) + 4. \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción, 4 es un factor de $5^k - 1$ y 4 es un factor de 4, de modo que 4 es un factor del $(k+1)$-ésimo término. Entonces, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

27 (1) Para $n = 1$, $a - b$ es un factor de $a^1 - b^1$.

(2) Suponga que $a - b$ es un factor de $a^k - b^k$. Siguiendo la sugerencia para el $(k+1)$-ésimo término,

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^k\cdot a - b\cdot a^k + b\cdot a^k - b^k\cdot b \\ &= a^k(a-b) + (a^k - b^k)b. \end{aligned}$$

Como $(a - b)$ es un factor de $a^k(a - b)$ y como por la hipótesis de inducción $a - b$ es un factor de $(a^k - b^k)$, se deduce que $a - b$ es un factor del $(k+1)$-ésimo término. Entonces, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

31 (1) P_8 es verdadera, porque $5 + \log_2 8 \leq 8$.

(2) Suponga que P_k es verdadera: $5 + \log_2 k \leq k$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 5 + \log_2 (k+1) &< 5 + \log_2 (k+k) \\ &= 5 + \log_2 2k \\ &= 5 + \log_2 2 + \log_2 k \\ &= (5 + \log_2 k) + 1 \\ &\leq k + 1. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

35 $\frac{n^2 + 5n}{2}$ **37** $\frac{n^3 + 6n^2 + 20n}{3}$ **39** $n^4 + 2n^3 + 2n^2$

41 **(a)** $a + b + c = 1$, $8a + 4b + 2c = 5$, $27a + 9b + 3c = 14$; $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$

(b) El método empleado en el inciso (a) demuestra que la fórmula es verdadera sólo para $n = 1, 2, 3$.

43 (1) Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta + 1\pi) &= \operatorname{sen}\theta\cos\pi + \cos\theta\operatorname{sen}\pi \\ &= -\operatorname{sen}\theta = (-1)^1\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

(2) Suponga que P_k es verdadero:

$\operatorname{sen}(\theta + k\pi) = (-1)^k\operatorname{sen}\theta$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}[\theta + (k+1)\pi] \\ &= \operatorname{sen}[(\theta + k\pi) + \pi] \\ &= \operatorname{sen}(\theta + k\pi)\cos\pi + \cos(\theta + k\pi)\operatorname{sen}\pi \\ &= [(-1)^k\operatorname{sen}\theta]\cdot(-1) + \cos(\theta + k\pi)\cdot(0) \\ &= (-1)^{k+1}\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

45 (1) Para $n = 1$,

$[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^1 = r^1[\cos(1\theta) + i\operatorname{sen}(1\theta)]$.

(2) Suponga que P_k es verdadero:

$[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^k = r^k(\cos k\theta + i\operatorname{sen}k\theta)$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} &[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^{k+1} \\ &= [r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^k[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)] \\ &= r^k[\cos k\theta + i\operatorname{sen}k\theta][r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)] \\ &= r^{k+1}[(\cos k\theta\cos\theta - \operatorname{sen}k\theta\operatorname{sen}\theta) + \\ &\qquad i(\operatorname{sen}k\theta\cos\theta + \cos k\theta\operatorname{sen}\theta)] \\ &= r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\operatorname{sen}(k+1)\theta]. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

EJERCICIOS 10.5

1 720 **3** 720 **5** 336 **7** 1 **9** 21

11 2 598 960 **13** $n(n - 1)$ **15** $(2n + 2)(2n + 1)$

17 $(n + 1)^2$ **19** $64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$

21 $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

23 $x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7$

25 $81t^4 - 540t^3s + 1350t^2s^2 - 1500ts^3 + 625s^4$

27 $\frac{1}{243}x^5 + \frac{5}{81}x^4y^2 + \frac{10}{27}x^3y^4 + \frac{10}{9}x^2y^6 + \frac{5}{3}xy^8 + y^{10}$

29 $x^{-12} + 18x^{-9} + 135x^{-6} + 540x^{-3} + 1215 + 1458x^3 + 729x^6$

31 $x^{5/2} - 5x^{3/2} + 10x^{1/2} - 10x^{-1/2} + 5x^{-3/2} - x^{-5/2}$

33 $x^{24} - 16x^{19}$

35 $3^{25}c^{10} + 25 \cdot 3^{24}c^{52/5} + 300 \cdot 3^{23}c^{54/5}$

37 $-1680 \cdot 3^{13}z^{11} + 60 \cdot 3^{14}z^{13} - 3^{15}z^{15}$ **39** $\dfrac{189}{1024}c^8$

41 $\dfrac{114\,688}{9}u^2v^6$ **43** $70x^2y^2$ **45** $448y^3x^{10}$

47 $-216y^9x^2$ **49** $-\dfrac{135}{16}$ **51** 4.8, 6.19

53 $4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3$

55 $\dbinom{n}{1} = \dfrac{n!}{(n-1)!\,1!} = n$ y

$$\dbinom{n}{n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!\,(n-1)!} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$$

EJERCICIOS 10.6

1 17 **3** 60 480 **5** 120 **7** 720 **9** 311 875 200

11 1 **13** $n!$ **15** **(a)** 60 **(b)** 125 **17** 64

19 $P(8, 3) = 336$ **21** 24

23 **(a)** 2 340 000 **(b)** 2 160 000

25 **(a)** 151 200 **(b)** 5760 **27** 1024

29 $P(8, 8) = 40\,320$ **31** $P(6, 3) = 120$

33 **(a)** 27 600 **(b)** 35 152 **35** 9 000 000 000

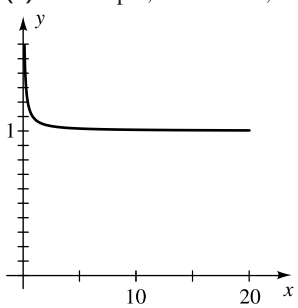
37 $P(4, 4) = 24$ **39** 456 horas **41** $3! \cdot 2^3 = 48$

43 $(2^{16} - 1) \cdot 17$

45 **(a)** 900

(b) Si n es par, $9 \cdot 10^{(n/2)-1}$; si n es impar, $9 \cdot 10^{(n-1)/2}$.

47



(a) $y = 1$

(b) $n! \approx \dfrac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$

EJERCICIOS 10.7

1 17 **3** 84 **5** 1 **7** 6 **9** 2 598 960

11 1 **13** n **15** $\dfrac{12!}{5!\,3!\,2!\,2!} = 166\,320$

17 $\dfrac{10!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 151\,200$ **19** $C(10, 5) = 252$

21 $C(8, 2) = 28$ **23** $(5! \cdot 4! \cdot 8!) \cdot 3! = 696\,729\,600$

25 $3 \cdot C(10, 2) \cdot C(8, 2) \cdot C(4, 2) \cdot C(6, 2) \cdot 3 \cdot 4 = 4\,082\,400$

27 $C(12, 3) \cdot C(8, 2) = 6160$ **29** $C(8, 3) = 56$

31 **(a)** $C(49, 6) = 13\,983\,816$ **(b)** $C(24, 6) = 134\,596$

33 $C(n, 2) = 45$ y por tanto $n = 10$ **35** $C(6, 3) = 20$

37 Al hallar $C(31, 3) = 4495$

39 **(a)** $C(1000, 30) \approx 2.43 \times 10^{57}$

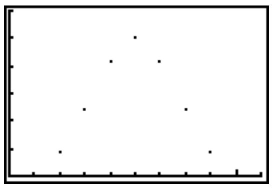
(b) $P(1000, 30) \approx 6.44 \times 10^{89}$

41 $C(4, 3) \cdot C(48, 2) = 4512$

43 **(a)** 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512

(b) $S_n = 2^{n-1}$

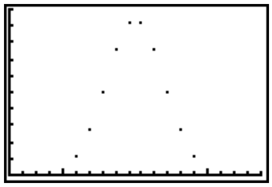
45 **(a)**



[0, 10] por [0, 300, 50]

(b) 252; 5

47 **(a)**



$[0, 19]$ por $[0, 10^5, 10^4]$

(b) 92 378; 9, 10

49 La suma de dos números adyacentes es igual al número por debajo y entre ellos.

EJERCICIOS 10.8

1 **(a)** $\dfrac{4}{52}$; 1 a 12 **(b)** $\dfrac{8}{52}$; 2 a 11 **(c)** $\dfrac{12}{52}$; 3 a 10

3 **(a)** $\dfrac{1}{6}$; 1 a 5 **(b)** $\dfrac{1}{6}$; 1 a 5 **(c)** $\dfrac{2}{6}$; 1 a 2

5 **(a)** $\dfrac{5}{15}$; 1 a 2 **(b)** $\dfrac{6}{15}$; 2 a 3 **(c)** $\dfrac{9}{15}$; 3 a 2

7 **(a)** $\dfrac{2}{36}$; 1 a 17 **(b)** $\dfrac{5}{36}$; 5 a 31 **(c)** $\dfrac{7}{36}$; 7 a 29

9 $\dfrac{6}{216}$ **11** $\dfrac{3}{8}$ **13** 5 a 2; 2 a 5 **15** 5 a 9; $\dfrac{9}{14}$

17 1.93 a 1 **19** $\dfrac{48 \cdot 13}{C(52, 5)} \approx 0.00024$

21 $\dfrac{C(13, 4) \cdot C(13, 1)}{C(52, 5)} \approx 0.00358$

23 $\dfrac{C(13, 5) \cdot 4}{C(52, 5)} \approx 0.00198$ **25** $\dfrac{4}{6}$

27 $(0.674)^4 \approx 0.2064$

29 **(a)** 0.45 **(b)** 0.10 **(c)** 0.70 **(d)** 0.95

31 **(a)** $\dfrac{C(20, 5) \cdot C(40, 0)}{C(60, 5)} \approx 0.0028$

(b) $1 - \dfrac{C(30, 0) \cdot C(30, 5)}{C(60, 5)} \approx 0.9739$

(c) $\dfrac{C(10, 0) \cdot C(50, 5)}{C(60, 5)} + \dfrac{C(10, 1) \cdot C(50, 4)}{C(60, 5)} \approx 0.8096$

33 **(a)** $\dfrac{C(8, 8)}{2^8} \approx 0.00391$ **(b)** $\dfrac{C(8, 7)}{2^8} = 0.03125$

(c) $\dfrac{C(8, 6)}{2^8} = 0.109375$

(d) $\dfrac{C(8, 6) + C(8, 7) + C(8, 8)}{2^8} \approx 0.14453$

35 $1 - \dfrac{C(48, 5)}{C(52, 5)} \approx 0.34116$

37 (a) Un resultado representativo es (nueve de bastos, 3); 312

(b) 20; 292; $\frac{20}{312}$ (c) No; sí; $\frac{72}{312}; \frac{156}{312}; \frac{36}{312}; \frac{192}{312}$

(d) Sí; no; 0; $\frac{92}{312}$

39 $1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$ 41 (a) $\frac{1}{32}$ (b) $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

43 (a) $\frac{C(4, 4)}{4!} = \frac{1}{24}$ (b) $\frac{C(4, 2)}{4!} = \frac{1}{4}$

45 (a) 0 (b) $\frac{1}{9}$

47 (a) $\frac{304\,366}{442\,398} \approx 0.688$ (b) $\frac{344\,391}{442\,398} \approx 0.778$

49 12.5% 51 (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{C(4, 2)}{2^4} = \frac{6}{16}$

53 $\frac{2}{25{,}827{,}165}$ (alrededor de 1 probabilidad en 13 millones)

55 $\frac{1970}{39\,800} \approx 0.0495$

57 (a) $\frac{8}{36}$ (b) $\frac{1}{36}$ (c) $\frac{244}{495} \approx 0.4929$ 59 183

61 10 63 (a) 0.9639 (b) 0.95 65 (b) 0.76

67 \$0.99 69 \$0.20

CAPÍTULO 10 EJERCICIOS DE REPASO

1 $5, -2, -1, -\frac{20}{29}; -\frac{7}{19}$

2 0.9, −1.01, 0.999, −1.0001; 0.999 999 9

3 $2, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}; \frac{65}{64}$ 4 $\frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{8}{105}; \frac{8}{45}$

5 $10, \frac{11}{10}, \frac{21}{11}, \frac{32}{21}, \frac{53}{32}$ 6 2, 2, 2, 2, 2

7 $9, 3, \sqrt{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[8]{3}$ 8 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$

9 75 10 $-\frac{37}{10}$ 11 940 12 −10 13 $204x^2$

14 $\frac{101}{2}\pi - 101\sqrt{2}$ 15 $\sum_{n=1}^{5} 3n$ 16 $\sum_{n=1}^{6} 2^{3-n}$

17 $\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{n(n+1)}$ 18 $\sum_{n=1}^{98} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

19 $\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{3n-1}$ 20 $\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{5n-1}$

21 $\sum_{n=1}^{5} (-1)^{n+1}(105 - 5n)$ 22 $\sum_{n=1}^{7} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

23 $\sum_{n=0}^{25} a_n x^{4n}$ 24 $\sum_{n=0}^{20} a_n x^{3n}$ 25 $1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k}$

26 $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ 27 14, 33

28 $-5 - 8\sqrt{3}; -5 - 35\sqrt{3}$ 29 52 30 −31; 50

31 12 32 20, 14, 8, 2, −4, −10 33 64

34 −0.00003 35 1562.5 o −1562.5 36 $4\sqrt{2}$

37 $-\frac{12\,800}{2187}$ 38 259, 9583 39 17; 3

40 $\frac{1}{81}; \frac{211}{1296}$ 41 570 42 32.5 43 2041

44 −506 45 $\frac{5}{7}$ 46 $\frac{6268}{999}$

47 (1) P_1 es verdadera, porque $3(1) - 1 = \frac{1[3(1) + 1]}{2} = 2.$

(2) Suponga que P_k es verdadera:

$$2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1) = \frac{k(3k + 1)}{2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1) + 3(k + 1) - 1 &= \frac{k(3k + 1)}{2} + 3(k + 1) - 1 \\ &= \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(3k + 4)}{2} \\ &= \frac{(k + 1)[3(k + 1) + 1]}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

48 (1) P_1 es verdadera, porque

$$[2(1)]^2 = \frac{[2(1)][2(1) + 1][1 + 1]}{3} = 4.$$

(2) Suponga que P_k es verdadera:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2k)^2 = \frac{(2k)(2k + 1)(k + 1)}{3}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2k)^2 + [2(k + 1)]^2 &= \frac{(2k)(2k + 1)(k + 1)}{3} + [2(k + 1)]^2 \\ &= (k + 1)\left(\frac{4k^2 + 2k}{3} + \frac{12(k + 1)}{3}\right) \\ &= \frac{(k + 1)(4k^2 + 14k + 12)}{3} \\ &= \frac{2(k + 1)(2k + 3)(k + 2)}{3}. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

49 (1) P_1 es verdadera, porque

$$\frac{1}{[2(1) - 1][2(1) + 1]} = \frac{1}{2(1) + 1} = \frac{1}{3}.$$

(2) Suponga que P_k es verdadera:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k - 1)(2k + 1)} = \frac{k}{2k + 1}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k - 1)(2k + 1)} \\ &\quad + \frac{1}{(2k + 1)(2k + 3)} = \frac{k}{2k + 1} + \frac{1}{(2k + 1)(2k + 3)} \\ &\quad = \frac{k(2k + 3) + 1}{(2k + 1)(2k + 3)} \\ &\quad = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k + 1)(2k + 3)} \\ &\quad = \frac{(2k + 1)(k + 1)}{(2k + 1)(2k + 3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{k+1}{2(k+1)+1}.$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

50 (1) P_1 es verdadera, porque

$$1(1+1) = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3} = 2.$$

(2) Suponga que P_k es verdadera:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) &+ (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

51 (1) Para $n = 1$, $n^3 + 2n = 3$ y 3 es un factor de 3.

(2) Suponga que 3 es un factor de $k^3 + 2k$. El $(k+1)$-ésimo término es

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 5k + 3 \\ &= (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3) \\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1). \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción, 3 es un factor de $k^3 + 2k$ y 3 es un factor de $3(k^2 + k + 1)$, de modo que 3 es un factor del $(k+1)$-ésimo término. Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

52 (1) P_5 es verdadera, porque $5^2 + 3 < 2^5$.

(2) Suponga que P_k es verdadera: $k^2 + 3 < 2^k$. Por tanto,

$$\begin{aligned} (k+1)^2 + 3 &= k^2 + 2k + 4 \\ &= (k^2 + 3) + (k+1) \\ &< 2^k + (k+1) \\ &< 2^k + 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

53 (1) P_4 es verdadera, porque $2^4 \le 4!$.

(2) Suponga que P_k es verdadera: $2^k \le k!$. Por tanto, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \le 2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)!$. Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

54 (1) P_{10} es verdadera, porque $10^{10} \le 10^{10}$.

(2) Suponga que P_k es verdadera: $10^k \le k^k$. Por tanto,

$$10^{k+1} = 10 \cdot 10^k \le 10 \cdot k^k < (k+1) \cdot k^k < (k+1) \cdot (k+1)^k = (k+1)^{k+1}.$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

55 $x^{12} - 18x^{10}y + 135x^8y^2 - 540x^6y^3 + 1215x^4y^4 - 1458x^2y^5 + 729y^6$

56 $16x^4 + 32x^3y^3 + 24x^2y^6 + 8xy^9 + y^{12}$

57 $x^8 + 40x^7 + 760x^6$ **58** $-\frac{63}{16}y^{12}c^{10}$

59 $21{,}504x^{10}y^2$ **60** 52 500 000

61 **(a)** $d = 1 - \frac{1}{2}a_1$ **(b)** En ft: $1\frac{1}{4}, 2, 2\frac{3}{4}, 3\frac{1}{2}$

62 24 ft **63** $\frac{2}{1-f}$ **64** $P(10, 10) = 3\,628\,800$

65 **(a)** $P(52, 13) \approx 3.954 \times 10^{21}$
(b) $P(13, 5) \cdot P(13, 3) \cdot P(13, 3) \cdot P(13, 2) \approx 7.094 \times 10^{13}$

66 **(a)** $P(6, 4) = 360$ **(b)** $6^4 = 1296$

67 **(a)** $C(12, 8) = 495$ **(b)** $C(9, 5) = 126$

68 $\frac{17!}{6!\,5!\,4!\,2!} = 85\,765\,680$ **69** 5 a 8; $\frac{8}{13}$

70 **(a)** $\frac{2}{4}$ **(b)** $\frac{2}{8}$

71 **(a)** $\frac{P(26, 4) \cdot 2}{P(52, 4)} \approx 0.1104$ **(b)** $\frac{26^2 \cdot 25^2}{P(52, 4)} \approx 0.0650$

72 **(a)** $\frac{1}{1000}$ **(b)** $\frac{10}{1000}$ **(c)** $\frac{50}{1000}$

73 $\frac{C(4, 1)}{2^4} = \frac{4}{16}$; 1 a 3

74 **(a)** $\frac{C(6, 4) + C(6, 5) + C(6, 6)}{2^6} = \frac{22}{64}$
(b) $1 - \frac{22}{64} = \frac{42}{64}$

75 **(a)** $\frac{1}{312}$ **(b)** $\frac{57}{312}$ **76** 0.44 **77** $\frac{8}{36}$

78 71 **79** 5.8125 **80** $\frac{1}{221}$

CAPÍTULO 10 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 $a_n = 2n + \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(a-10)$
(La respuesta no es única.)

2 $\ge$; $j = 94$

3 **(a)** $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$
(b) Use inducción matemática.

4 **(a)** $2n^4 + 4n^3 + 2n^2$
(b) Use inducción matemática.

5 Examine el número de dígitos en el exponente del valor en notación científica.

6 El $(k+1)$-ésimo coeficiente $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ de la expansión de $(a+b)^n$, es decir $\binom{n}{k}$, es igual al número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos.

7 4.61 **8** \$5.33

9 Cantidades en centavos:

\$237.37	\$215.63	\$195.89	\$177.95	\$161.65
\$146.85	\$133.40	\$121.18	\$110.08	\$100.00

Cantidades realistas en billetes de \$10 dólares:

\$240.00	\$220.00	\$200.00	\$180.00	\$160.00
\$140.00	\$130.00	\$120.00	\$110.00	\$100.00

10 Hay 11 capas finales.

11 **(a)** $\frac{1}{146\,107\,962}$ **(b)** $\frac{3\,991\,302}{146\,107\,962}$ (alrededor de 1 en 36.61)
(c) $\frac{28\,800\,030}{146\,107\,962} \approx 0.20$ **(d)** \$117 307 932

12 0.43 **13** $0^0 = 1$ **14** La suma es igual a π.

15 **(a)** $\tan 5x = \dfrac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x}$

(b) $\cos 5x = 1\cos^5 x - 10\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + 5\cos x \operatorname{sen}^4 x$; $\operatorname{sen} 5x = 5\cos^4 x \operatorname{sen} x - 10\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + 1\operatorname{sen}^5 x$

EXAMEN DE CAPITULO 10

1 $6\frac{3}{8}$ **2** $-10, -46$ **3** 48 **4** $18j - 63$

5 $a_n = -7n + 32$ **6** 5173

7 $\sum_{n=1}^{2315} (11n - 5)$; 29 476 895 **8** 6110, 7003, 7896

9 2.87 y 3.33 pulgadas **10** $a_n = 36\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

11 -8192 **12** 1230 **13** 1328.125 **14** $\frac{146}{99}$

15 100

16 $a_n = (1.08)^{n-1}$; después de 14 años de crecer 8%, cualquier cantidad invertida daría una ganancia aproximada de 2.94 veces la cantidad original.

17 (1) P_1 es verdadera, porque $6(1) - 4 = 2$ y $3(1)^2 - 1 = 2$.

(2) Suponga que P_k es verdadera:

$2 + 8 + 14 + \cdots + (6k - 4) = 3k^2 - k$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 2 + 8 + 14 + \cdots + (6k - 4) + [6(k + 1) - 4] &= 3k^2 - k + [6(k + 1) - 4] \\ &= 3k^2 - k + 6k + 2 \\ &= 3k^2 + 6k + 3 - (k + 1) \\ &= 3(k^2 + 2k + 1) - (k + 1) \\ &= 3(k + 1)^2 - (k + 1) \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es verdadera y la demostración está completa.

18 $8x^3 - 60x^2y^2 + 150xy^4 - 125y^6$ **19** $-274\,176x^{-3}$

20 $x^{48} - 36x^{42}$ **21** $P(150, 50)$ es 50! veces $C(150, 50)$.

22 700 millones **23** 65 000 **24** 4.3×10^{22}

25 256 **26** $13! \times 39! \approx 1.27 \times 10^{56}$ **27** 0.3483

28 $C(5000, 5) \approx 2.6 \times 10^{16}$ **29** 11.7% **30** $\frac{32}{52}$

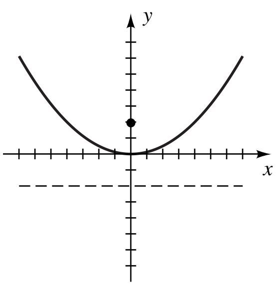
31 3 a 8 **32** 1.70 a 1 **33** $\frac{625}{1296}$ **34** 13

35 $0.1125

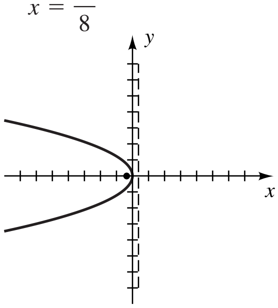
CAPÍTULO 11

EJERCICIOS 11.1

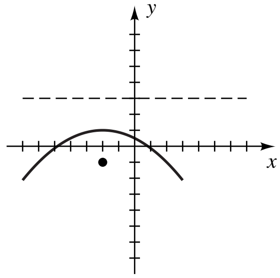
1 $V(0, 0)$; $F(0, 2)$; $y = -2$



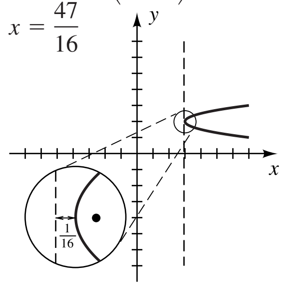
3 $V(0, 0)$; $F\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$; $x = \frac{3}{8}$



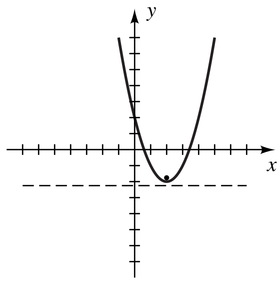
5 $V(-2, 1)$; $F(-2, -1)$; $y = 3$



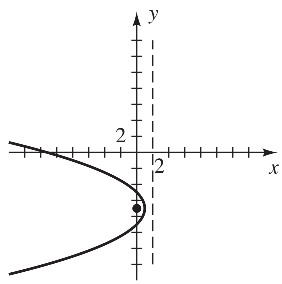
7 $V(3, 2)$; $F\left(\frac{49}{16}, 2\right)$; $x = \frac{47}{16}$



9 $V(2, -2)$; $F\left(2, -\frac{7}{4}\right)$; $y = -\frac{9}{4}$



11 $V(1, -7)$; $F(0, -7)$; $x = 2$



13 $y^2 = 20(x - 1)$ **15** $(x + 2)^2 = -16(y - 3)$

17 $(x - 3)^2 = 6\left(y - \frac{1}{2}\right)$ **19** $(y + 3)^2 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$

21 $y^2 = 8x$ **23** $(x - 6)^2 = 12(y - 1)$

25 $(y + 5)^2 = 4(x - 3)$ **27** $(x + 2)^2 = -8(y - 3)$

29 $y^2 = -12(x + 1)$ **31** $(x - 1)^2 = 8(y + 2)$

33 $3x^2 = -4y$ **35** $(y - 5)^2 = 2(x + 3)$

37 $x^2 = 16(y - 1)$ **39** $(y - 3)^2 = -8(x + 4)$

41 $y = -\sqrt{x + 3} - 1$ **43** $x = \sqrt{y - 4} - 1$

45 $y = \sqrt{x + 2} + 5$ **47** $x = -\sqrt{y + 1} + 2$

49 Mitad superior de $(y + 2)^2 = x - 6$

51 Mitad izquierda de $(x + 3)^2 = y + 7$

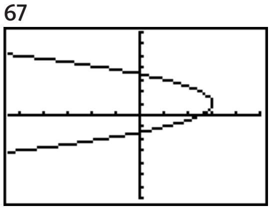
53 $y = -x^2 + 2x + 5$ **55** $x = y^2 - 3y + 1$

57 4 in. **59** $\frac{9}{16}$ ft del centro del paraboloide

61 $2\sqrt{480} \approx 43.82$ in.

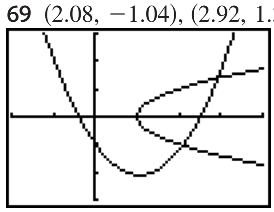
63 **(a)** $p = \dfrac{r^2}{4h}$ **(b)** $10\sqrt{2}$ ft **65** 57 000 ft²

67



$[-11, 10, 2]$ por $[-7, 7]$

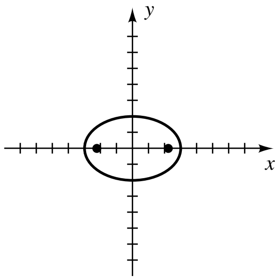
69 (2.08, −1.04), (2.92, 1.38)



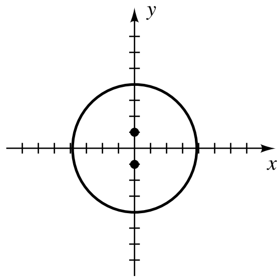
$[-2, 4]$ por $[-3, 3]$

EJERCICIOS 11.2

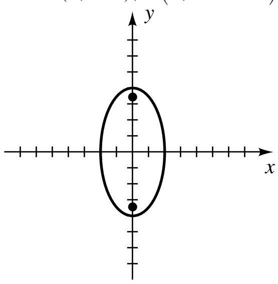
1 $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{5}, 0)$



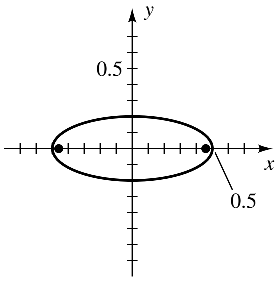
3 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 1)$



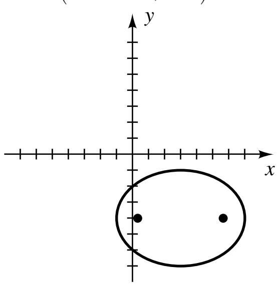
5 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{3})$



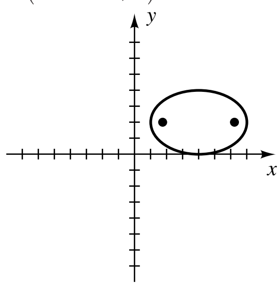
7 $V\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$; $F\left(\pm\frac{1}{10}\sqrt{21}, 0\right)$



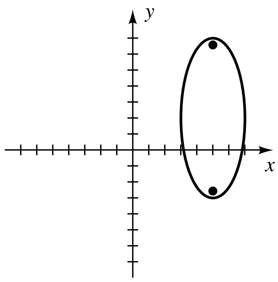
9 $V(3 \pm 4, -4)$; $F(3 \pm \sqrt{7}, -4)$



11 $V(4 \pm 3, 2)$; $F(4 \pm \sqrt{5}, 2)$



13 $V(5, 2 \pm 5)$; $F(5, 2 \pm \sqrt{21})$



15 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ **17** $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

19 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$ **21** $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

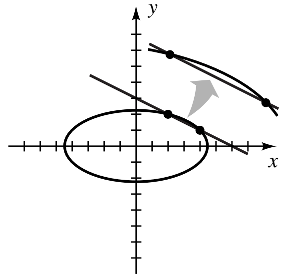
23 $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ **25** $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

27 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$ **29** $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$

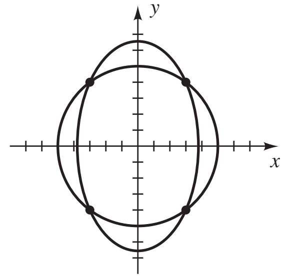
31 $\frac{x^2}{13} + \frac{4y^2}{39} = 1$ **33** $\frac{x^2}{4} + 9y^2 = 1$

35 $\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{25} = 1$

37 (2, 2), (4, 1)

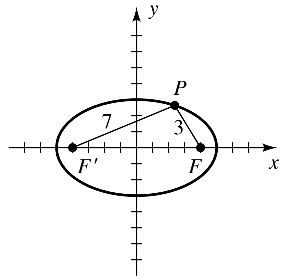


39 4 puntos: $(\pm 3, \pm 4)$



41 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **43** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{289} = 1$

45 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$



47 $x = -\frac{6}{5}\sqrt{25 - y^2}$ **49** $y = \sqrt{\frac{17 - x^2}{3}}$

51 Mitad superior de $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{121} = 1$

53 Mitad izquierda de $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

55 Mitad derecha de $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

57 Mitad inferior de $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{49} = 1$

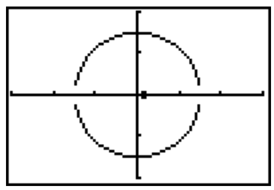
59 $\sqrt{84} \approx 9.2$ ft **61** 94 581 000; 91 419 000

63 **(a)** $d = h - \sqrt{h^2 - \frac{1}{4}k^2}$; $d' = h + \sqrt{h^2 - \frac{1}{4}k^2}$

(b) 16 cm; 2 cm desde V

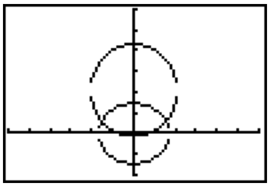
65 5 ft

67



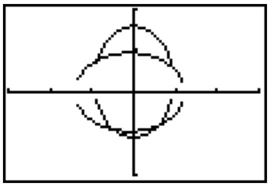
$[-300, 300, 100]$ por $[-200, 200, 100]$

69 $(\pm 1.540, 0.618)$



$[-6, 6]$ por $[-2, 6]$

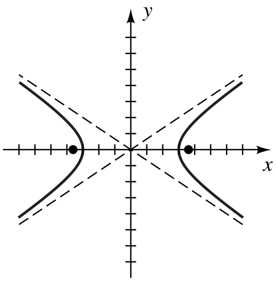
71 $(-0.88, 0.76)$, $(-0.48, -0.91)$, $(0.58, -0.81)$, $(0.92, 0.59)$



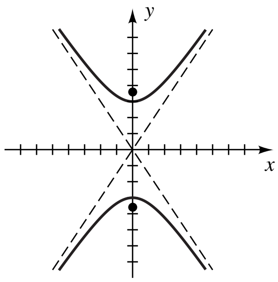
$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

EJERCICIOS 11.3

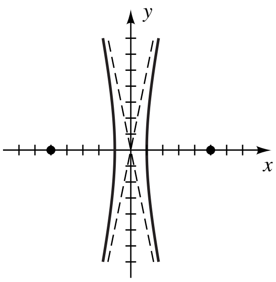
1 $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{13}, 0)$; $y = \pm\frac{2}{3}x$



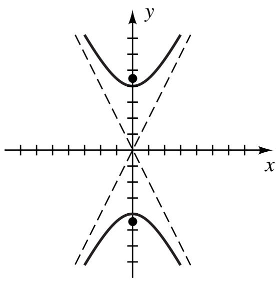
3 $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{13})$; $y = \pm\frac{3}{2}x$



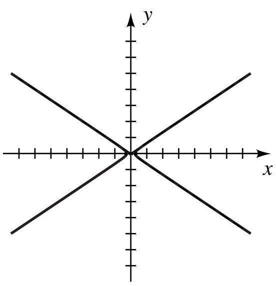
5 $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm 5, 0)$; $y = \pm\sqrt{24}x$



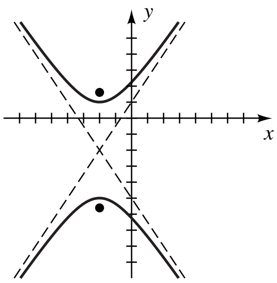
7 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{5})$; $y = \pm 2x$



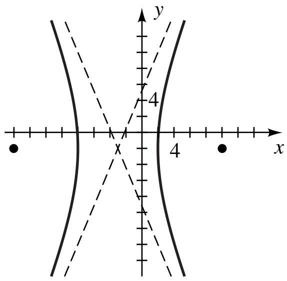
9 $V\left(\pm\frac{1}{4}, 0\right)$; $F\left(\pm\frac{1}{12}\sqrt{13}, 0\right)$; $y = \pm\frac{2}{3}x$



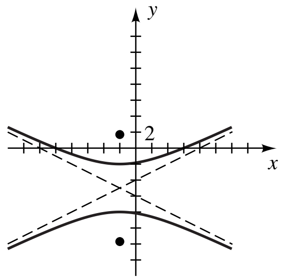
11 $V(-2, -2 \pm 3)$; $F(-2, -2 \pm \sqrt{13})$; $(y + 2) = \pm\frac{3}{2}(x + 2)$



13 $V(-3 \pm 5, -2)$; $F(-3 \pm 13, -2)$; $(y + 2) = \pm\frac{12}{5}(x + 3)$



15 $V(-2, -5 \pm 3)$; $F(-2, -5 \pm 3\sqrt{5})$; $(y + 5) = \pm\frac{1}{2}(x + 2)$



17 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **19** $(y + 3)^2 - \frac{(x + 2)^2}{3} = 1$

21 $y^2 - \frac{x^2}{15} = 1$ **23** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **25** $\frac{y^2}{21} - \frac{x^2}{4} = 1$

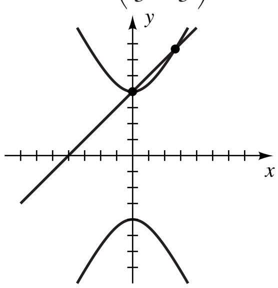
27 $\frac{x^2}{16} - \frac{3y^2}{4} = 1$ **29** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ **31** $\frac{y^2}{10} - \frac{x^2}{90} = 1$

33 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$ **35** $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{49} = 1$

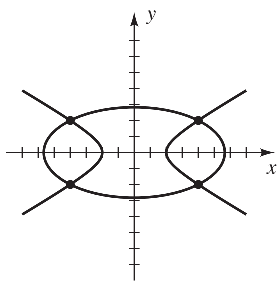
37 Parábola con eje horizontal **39** Hipérbola

41 Circunferencia **43** Elipse **45** Parábola con eje vertical

47 $(0, 4)$, $\left(\frac{8}{3}, \frac{20}{3}\right)$

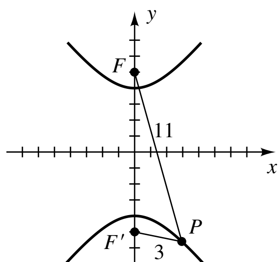


49 4 puntos: $(\pm 4, \pm 2)$



51 $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ **53** $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

55 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$



57 $y = -\frac{5}{6}\sqrt{x^2 + 36}$ **59** $x = -\frac{1}{2}\sqrt{y^2 + 16}$

61 $x = \frac{9}{2}\sqrt{y^2 - 4}$ **63** $y = 2\sqrt{x^2 - 9}$

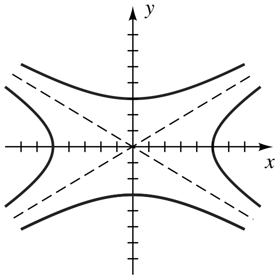
65 Rama derecha de $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

67 Rama superior de $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{49} = 1$

69 Mitades inferiores de las ramas de $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{81} = 1$

71 Mitades izquierdas de las ramas de $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

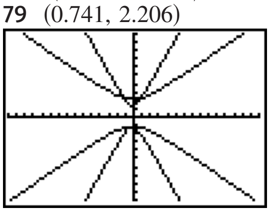
73 Las gráficas tienen las mismas asíntotas.



75 60.97 metros

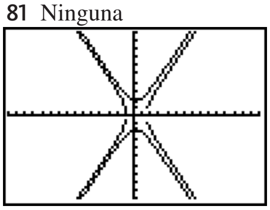
77 Si se introduce un sistema de coordenadas semejante al del ejemplo 6, entonces las coordenadas del barco son $\left(\frac{80}{3}\sqrt{34},\ 100\right) \approx (155.5,\ 100)$.

79 (0.741, 2.206)



[−15, 15] por [−10, 10]

81 Ninguna

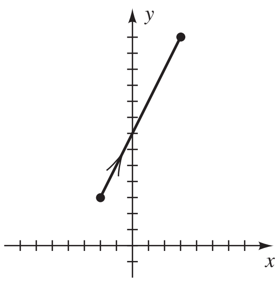


[−15, 15] por [−10, 10]

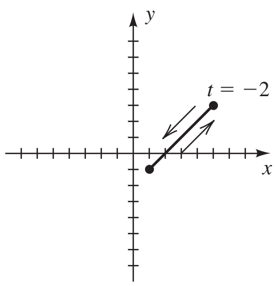
83 **(a)** $(6.63 \times 10^7,\ 0)$ **(b)** $v > 103\,600$ m/s

EJERCICIOS 11.4

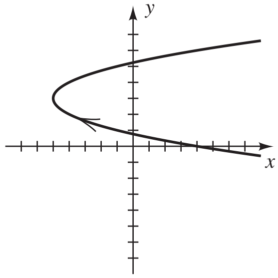
1 $y = 2x + 7$



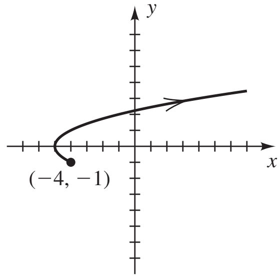
3 $y = x - 2$



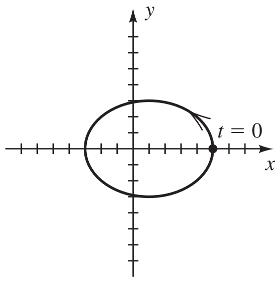
5 $(y - 3)^2 = x + 5$



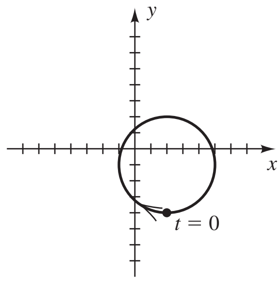
7 $x = y^2 - 5$



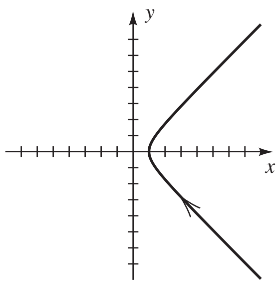
9 $\dfrac{(x - 1)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$



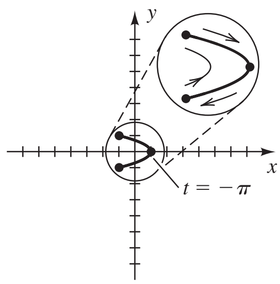
11 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$



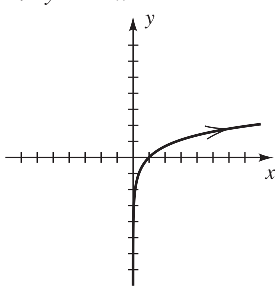
13 $x^2 - y^2 = 1$



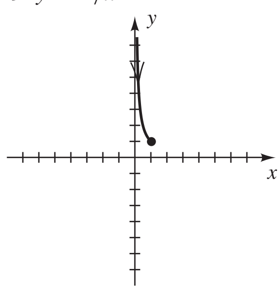
15 $x = 1 - 2y^2$



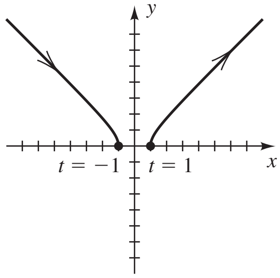
17 $y = \ln x$



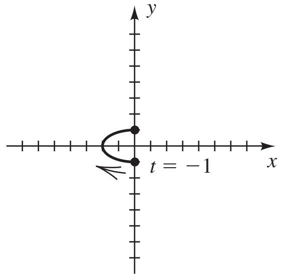
19 $y = 1/x$



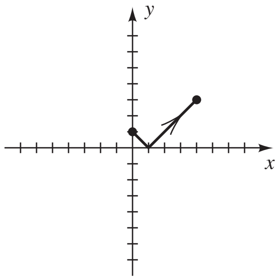
21 $y = \sqrt{x^2 - 1}$



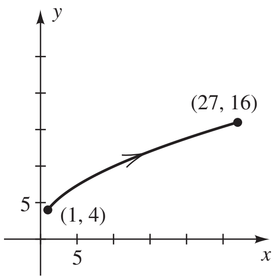
23 $x = -2\sqrt{1 - y^2}$



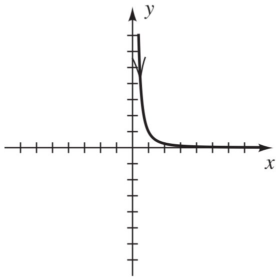
25 $y = |x - 1|$



27 $y = (x^{1/3} + 1)^2$



29 $y = 1/x^2$

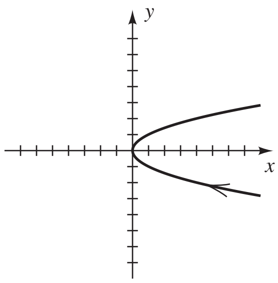


31 **(a)** La gráfica es una circunferencia con centro $(3, -2)$ y radio 2. Su orientación es en el sentido de giro de las manecillas de un reloj, y arranca y termina en el punto $(3, 0)$.

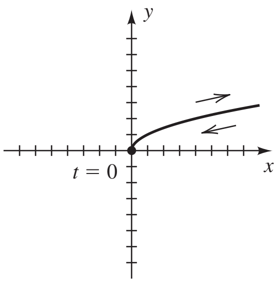
(b) La orientación cambia al sentido contrario.

(c) El punto de arranque y terminación cambia a $(3, -4)$.

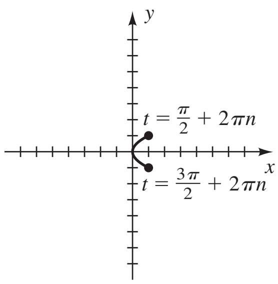
33 C_1



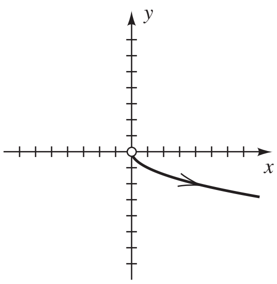
C_2



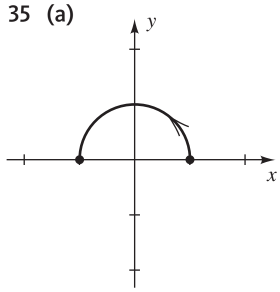
C_3



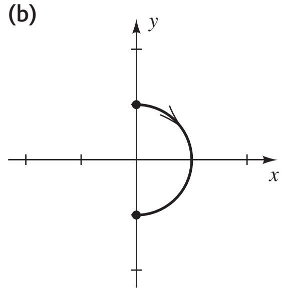
C_4



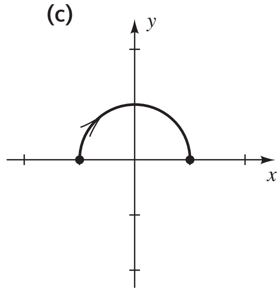
35 **(a)**



(b)



(c)



39 Las respuestas no son únicas.

(a) (1) $x = t,\quad y = t^2;\quad t \in \mathbb{R}$

(2) $x = \tan t,\quad y = \tan^2 t;\quad -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$

(3) $x = t^3,\quad y = t^6;\quad t \in \mathbb{R}$

(b) (1) $x = e^t,\quad y = e^{2t};\quad t \in \mathbb{R}$ (sólo da $x > 0$)

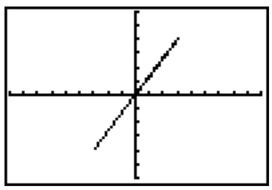
(2) $x = \operatorname{sen} t,\quad y = \operatorname{sen}^2 t;\quad t \in \mathbb{R}$ (sólo da $-1 \le x \le 1$)

(3) $x = \tan^{-1} t,\quad y = (\tan^{-1} t)^2;\quad t \in \mathbb{R}$ $\left(\text{sólo da } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

41 $3200\sqrt{3}$; 2704 **43** 15 488; 3872

45 **(a)** La figura es una elipse con centro $(0, 0)$ y ejes de longitud $2a$ y $2b$.

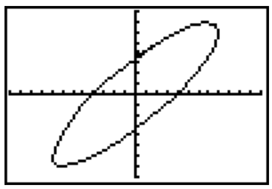
47 **(a)**



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

(b) 0°

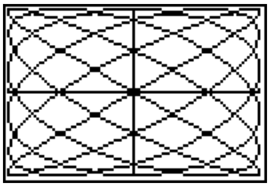
49 **(a)**



$[-120, 120, 10]$ por $[-80, 80, 10]$

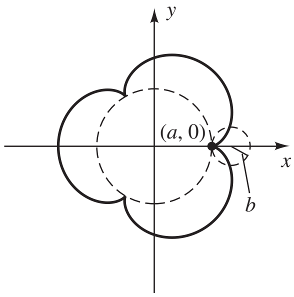
(b) 30°

51

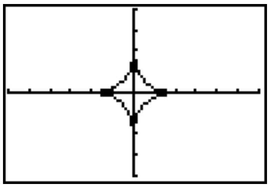


$[-1, 1]$ por $[-1, 1]$

55 $x = 4b \cos t - b \cos 4t$,
$y = 4b \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} 4t$

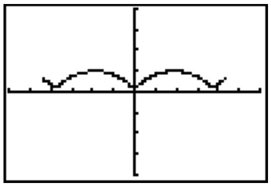


57



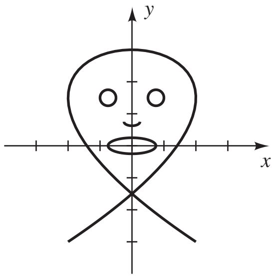
$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

59

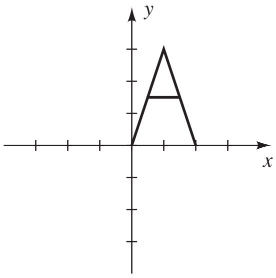


$[-30, 30, 5]$ por $[-20, 20, 5]$

61 Una máscara con una boca, nariz y ojos



63 La letra A



EJERCICIOS 11.5

1 (a), (c), (e)

3 **(a)** $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

5 **(a)** $\left(-4, -4\sqrt{3}\right)$ **(b)** $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

7 $\left(\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$ **9** **(a)** $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ **(b)** $\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$

11 **(a)** $\left(14, \frac{5\pi}{3}\right)$ **(b)** $\left(5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

13 $r = -3 \sec \theta$ **15** $r = -4 \csc \theta$ **17** $r = 4$

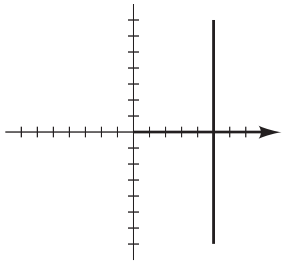
19 $r = 6 \cot \theta \csc \theta$ **21** $r = 5 \tan \theta \sec \theta$

23 $r = \dfrac{3}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta}$ **25** $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

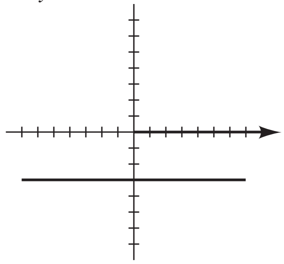
27 $r^2 = -4 \sec 2\theta$ **29** $r^2 = -6 \csc 2\theta$ **31** $r = 2 \cos \theta$

33 $r = -6 \operatorname{sen} \theta$ **35** $r = 6 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta$

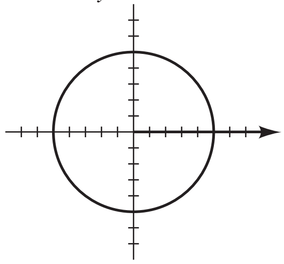
37 $x = 5$



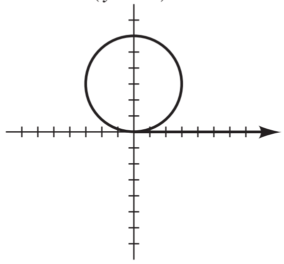
39 $y = -3$



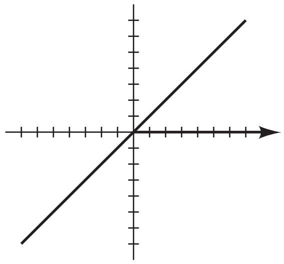
41 $x^2 + y^2 = 25$



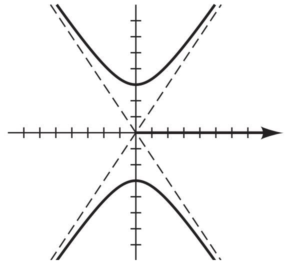
43 $x^2 + (y - 3)^2 = 9$



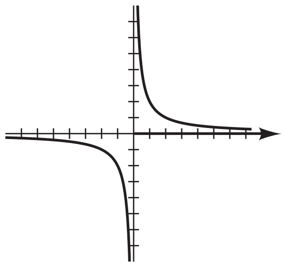
45 $y = x$



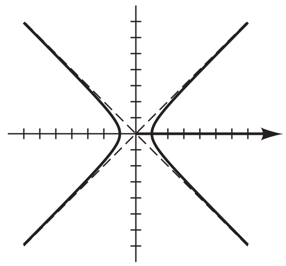
47 $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$



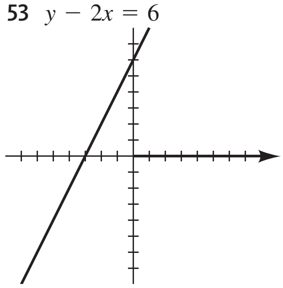
49 $xy = 2$



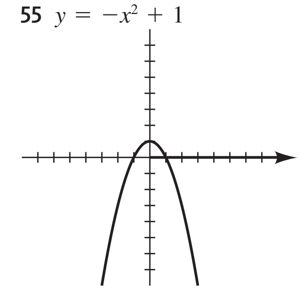
51 $x^2 - y^2 = 1$



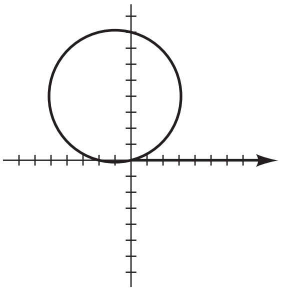
53 $y - 2x = 6$



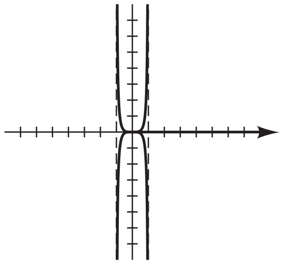
55 $y = -x^2 + 1$



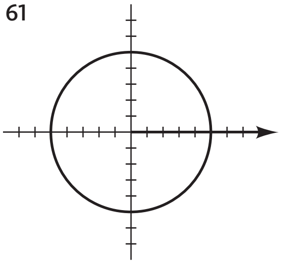
57 $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 17$



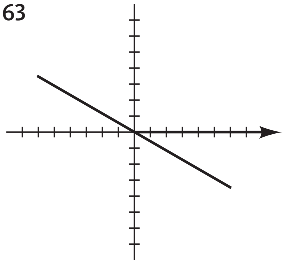
59 $y^2 = \dfrac{x^4}{1 - x^2}$



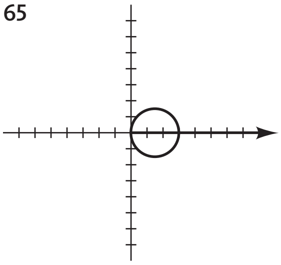
61



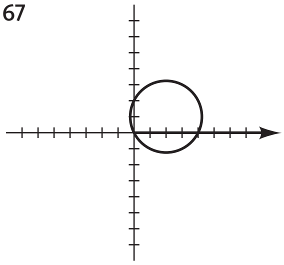
63



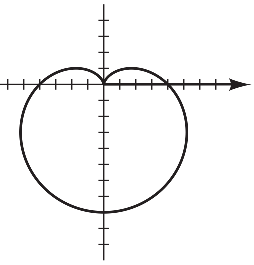
65



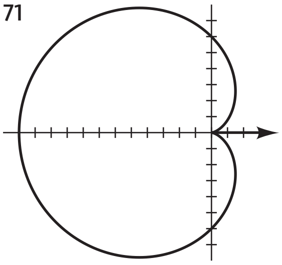
67



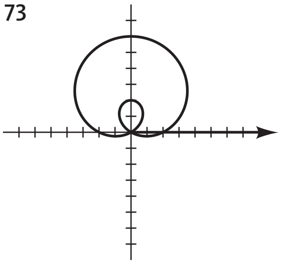
69



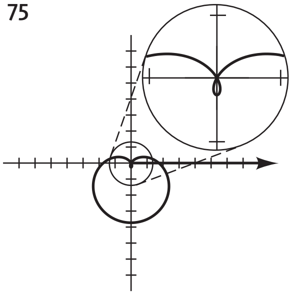
71



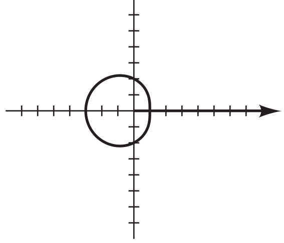
73



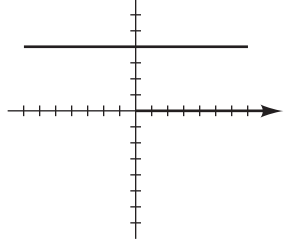
75



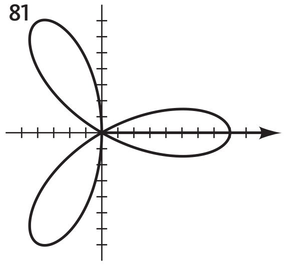
77



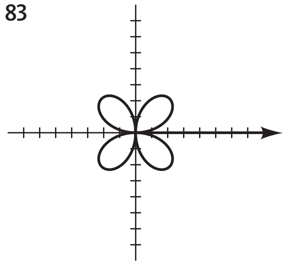
79



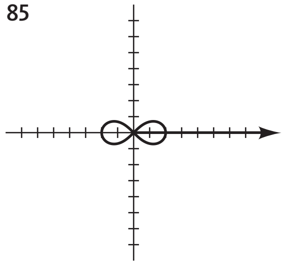
81



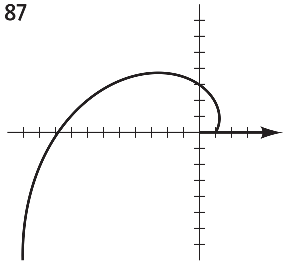
83



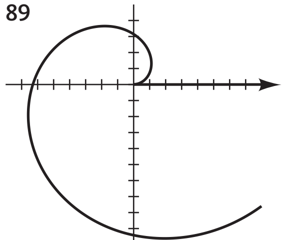
85



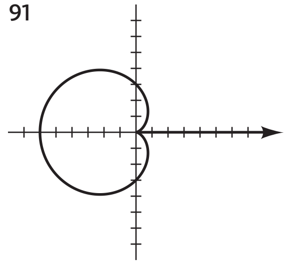
87



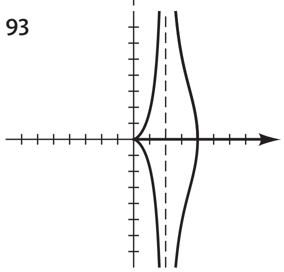
89



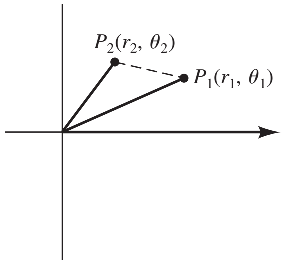
91



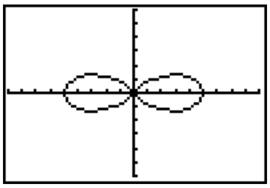
93



95 Sean $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ puntos en el plano $r\theta$. Sean $a = r_1$, $b = r_2$, $c = d(P_1, P_2)$, y $\gamma = \theta_2 - \theta_1$. Sustituyendo en la ley de los cosenos, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, nos da la fórmula.



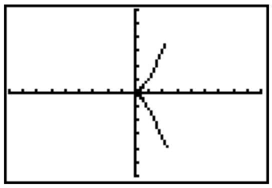
97 **(a)**



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

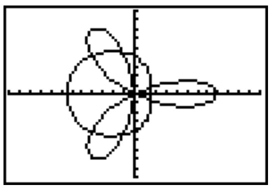
(b) Máx: dirección este-oeste; mín: dirección norte-sur

99 Simétrica con respecto al eje polar



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

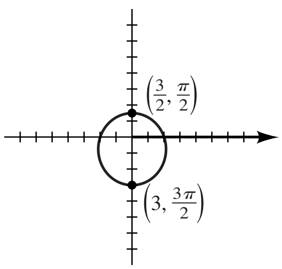
101 Las coordenadas polares aproximadas son $(1.75, \pm 0.45)$, $(4.49, \pm 1.77)$, y $(5.76, \pm 2.35)$.



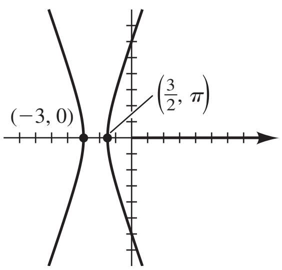
$[-12, 12]$ por $[-9, 9]$

EJERCICIOS 11.6

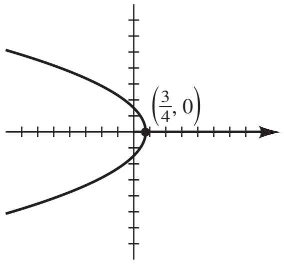
1 $\frac{1}{3}$, elipse



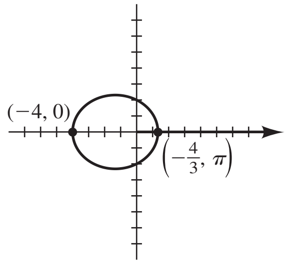
3 3, hipérbola



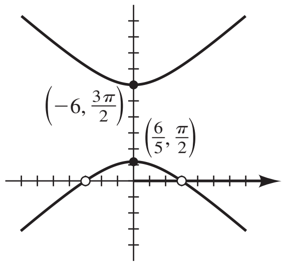
5 1, parábola



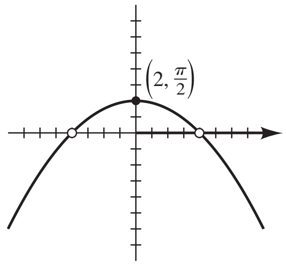
7 $\frac{1}{2}$, elipse



9 $\frac{3}{2}$, hipérbola



11 1, parábola



13 $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$

15 $8x^2 - y^2 + 36x + 36 = 0$

17 $4y^2 + 12x - 9 = 0$ **19** $3x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0$

21 $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0$; $x \neq \pm 3$

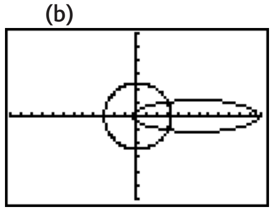
23 $x^2 + 8y - 16 = 0$; $x \neq \pm 4$ **25** $r = \dfrac{2}{3 + \cos \theta}$

27 $r = \dfrac{12}{3 - 4 \cos \theta}$ **29** $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta}$

31 $r = \dfrac{8}{5 + 2 \operatorname{sen} \theta}$ **33** $r = \dfrac{8}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

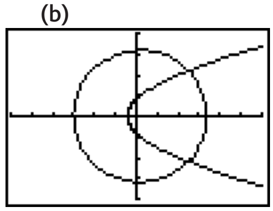
35 **(a)** $\dfrac{3}{4}$ **(b)** $r = \dfrac{7}{4 - 3 \operatorname{sen} \theta}$

39 **(a)** Elíptica
(b)



$[-36, -36, 3]$ por $[-24, 24, 3]$

41 **(a)** Hiperbólica
(b)

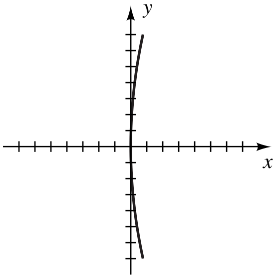


$[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

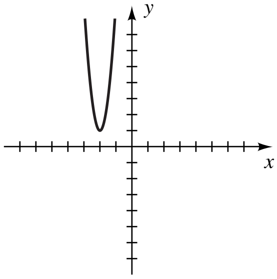
43 $e = \dfrac{r_{af} - r_{per}}{r_{af} + r_{per}}$, $a = \dfrac{r_{af} + r_{per}}{2}$

CAPÍTULO 11 EJERCICIOS DE REPASO

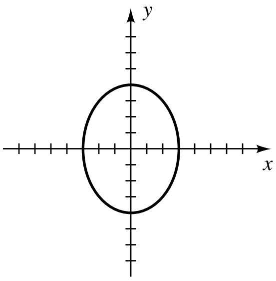
1 $V(0,\ 0);\ F(16,\ 0)$



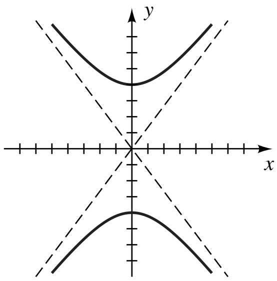
2 $V(-2,\ 1);\ F\left(-2,\ \frac{33}{32}\right)$



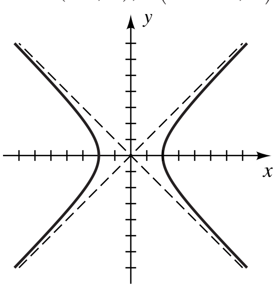
3 $V(0,\ \pm 4);\ F\left(0,\ \pm\sqrt{7}\right)$



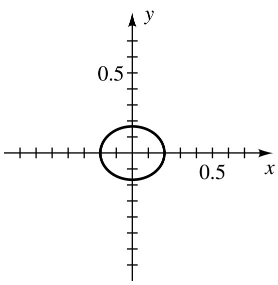
4 $V(0,\ \pm 4);\ F(0,\ \pm 5)$



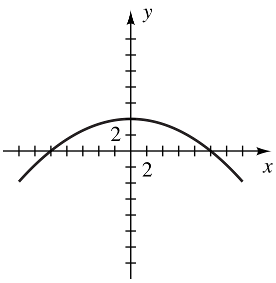
5 $V(\pm 2,\ 0);\ F\left(\pm 2\sqrt{2},\ 0\right)$



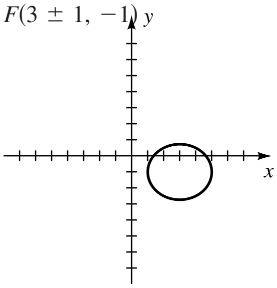
6 $V\left(\pm\frac{1}{5},\ 0\right);$
$F\left(\pm\frac{1}{30}\sqrt{11},\ 0\right)$



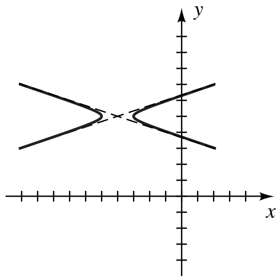
7 $V(0,\ 4);\ F\left(0,\ -\frac{9}{4}\right)$



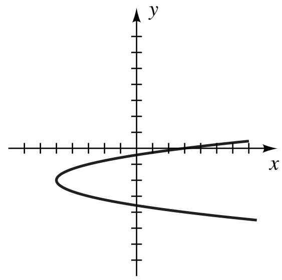
8 $V(3 \pm 2,\ -1);$
$F(3 \pm 1,\ -1)$



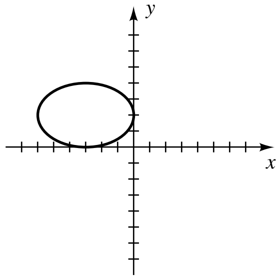
9 $V(-4 \pm 1,\ 5);$
$F\left(-4 \pm \frac{1}{3}\sqrt{10},\ 5\right)$



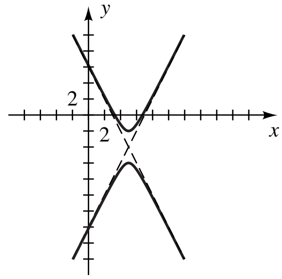
10 $V(-5,\ -2);$
$F\left(-\frac{39}{8},\ -2\right)$



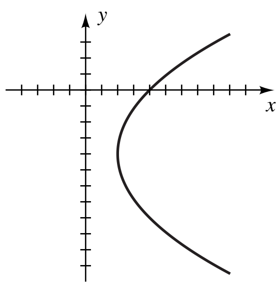
11 $V(-3 \pm 3,\ 2);$
$F\left(-3 \pm \sqrt{5},\ 2\right)$



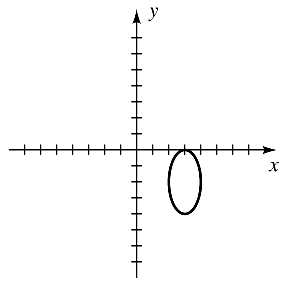
12 $V(5,\ -4 \pm 2);$
$F\left(5,\ -4 \pm \sqrt{5}\right)$



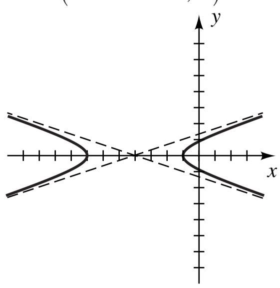
13 $V(2,\ -4);\ F(4,\ -4)$



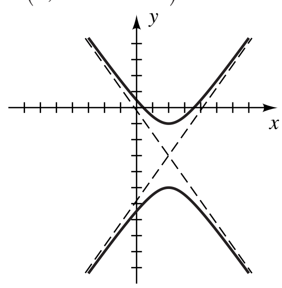
14 $V(3,\ -2 \pm 2);$
$F\left(3,\ -2 \pm \sqrt{3}\right)$



15 $V(-4 \pm 3,\ 0);$
$F\left(-4 \pm \sqrt{10},\ 0\right)$



16 $V(2,\ -3 \pm 2);$
$F\left(2,\ -3 \pm \sqrt{6}\right)$



17 $y = 2(x + 7)^2 - 18$ **18** $y = -3(x + 4)^2 + 147$

19 $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{9} = 1$ **20** $y^2 = -16x$ **21** $x^2 = -40y$

22 $x = 5y^2$ **23** $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$ **24** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$

25 $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{\frac{4}{9}} = 1$ **26** $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **27** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{45} = 1$

28 $\dfrac{x^2}{256} + \dfrac{y^2}{112} = 1$ **29** $x = 2 + 2\sqrt{y + 3}$

30 $y = -3 - \frac{1}{2}\sqrt{x - 5}$ **31** $x = -\frac{5}{8}\sqrt{64 - y^2}$

32 $y = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$ **33** $x = \frac{2}{3}\sqrt{y^2 + 16}$

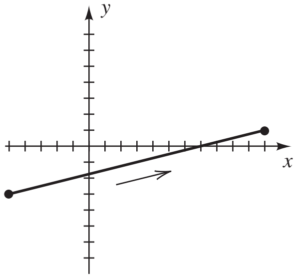
34 $y = -\frac{2}{5}\sqrt{100 + x^2}$ **35** **(a)** $-\frac{7}{2}$ **(b)** Hipérbola

36 $A = \dfrac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$ **37** $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

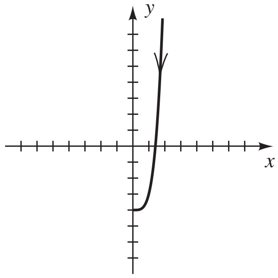
38 $2\sqrt{2}$ rad/s ≈ 0.45 rev/s

40 $x = \sqrt{9 + 4y^2}$

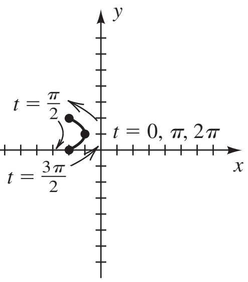
41 $x = 4y + 7$



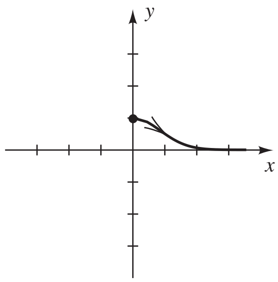
42 $y = x^4 - 4$



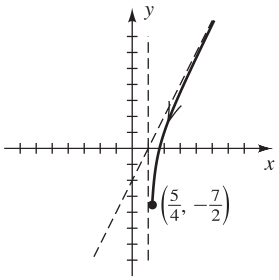
43 $(y - 1)^2 = -(x + 1)$



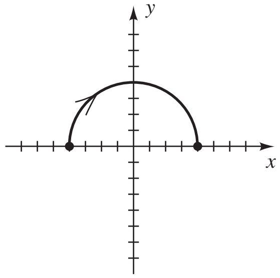
44 $y = 2^{-x^2}$



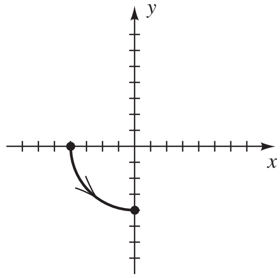
45 $y = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$



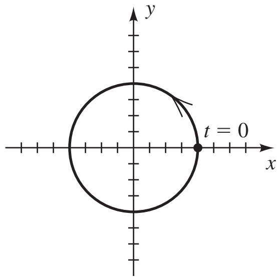
46 C_1



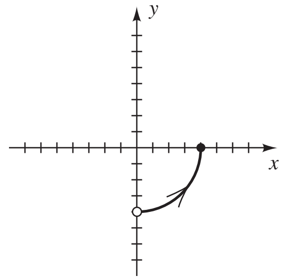
C_2



C_3



C_4



47 $20{,}480\sqrt{3}$; 9216 **48** $\left(-2, \dfrac{5\pi}{4}\right), \left(2, \dfrac{9\pi}{4}\right)$

49 $\left(\dfrac{5}{2}\sqrt{2}, -\dfrac{5}{2}\sqrt{2}\right)$ **50** $\left(4, \dfrac{11\pi}{6}\right)$

51 $r = 4 \cot\theta \csc\theta$ **52** $r = 3\cos\theta - 4\,\mathrm{sen}\,\theta$

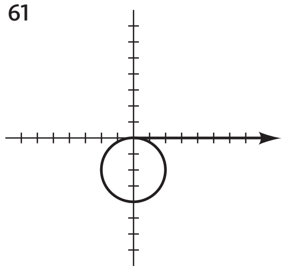
53 $r(2\cos\theta - 3\,\mathrm{sen}\,\theta) = 8$ **54** $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

55 $x^3 + xy^2 = y$ **56** $x^2 + y^2 = 2x + 3y$

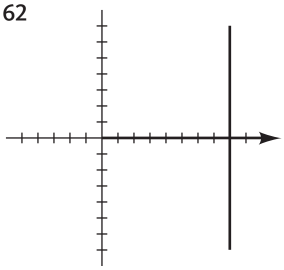
57 $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$ **58** $y = \left(\tan\sqrt{3}\right)x$

59 $8x^2 + 9y^2 + 10x - 25 = 0$ **60** $y^2 = 6 + x$

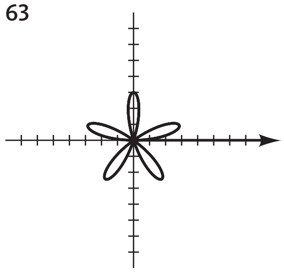
61



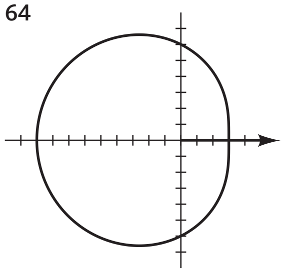
62



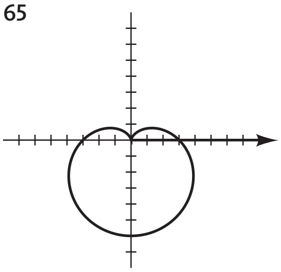
63



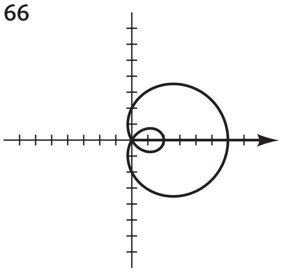
64



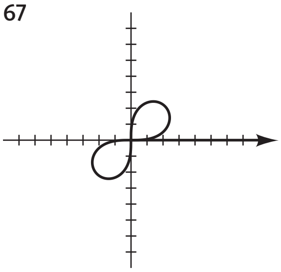
65



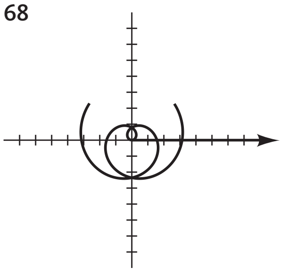
66



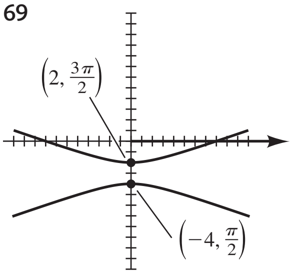
67



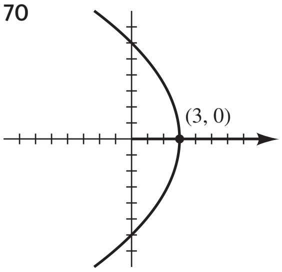
68



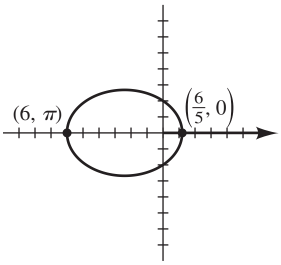
69



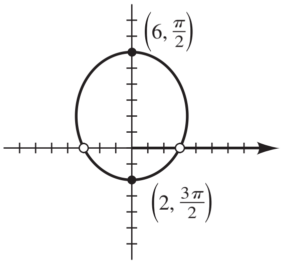
70



71 $\frac{2}{3}$, elipse



72 $\frac{1}{2}$, elipse



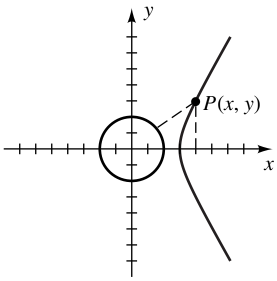
CAPÍTULO 11 EJERCICIOS DE ANÁLISIS

1 $w = 4|p|$

2 La circunferencia pasa por ambos focos y los cuatro vértices del rectángulo auxiliar.

5 $\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1, x \geq 3,$

o $x = 2 + \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$



6 $d = \frac{1}{4\sqrt{a^2 + b^2}}$ 7 43.12°

9 $y = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{2}}$

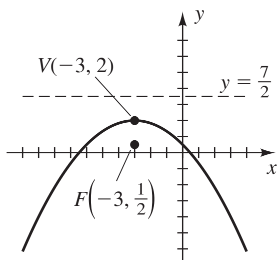
10 La gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ girada un ángulo α en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, mientras que la gráfica de $r = f(\theta + \alpha)$ está girada en el sentido de las manecillas.

11 $(180/n)°$

12 $y = 2 \pm \sqrt{4 - x^2}, y = \pm\sqrt{4 - (x-2)^2}$

EXAMEN DE CAPÍTULO 11

1

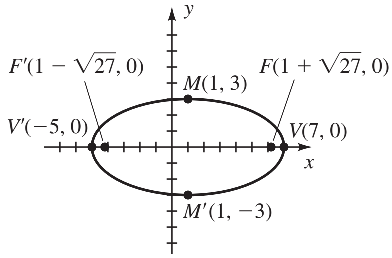


2 $(y + 1)^2 = -\frac{4}{5}(x - 5)$ 3 $(x + 2)^2 = 4(y - 1)$

4 $y = -\sqrt{x + 2} + 4$ 5 $x = y^2 - 2y + 5$

6 $\frac{100}{7}$ in. del centro del paraboloide

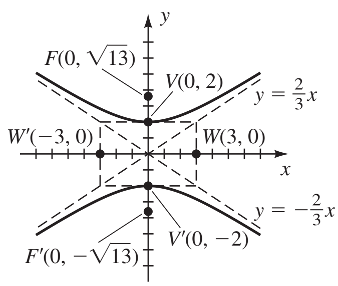
7



8 $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{72} = 1$ 9 $\frac{\sqrt{33}}{7}$ 10 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$

11 $x = -2\sqrt{16 - y^2}$ 12 11.0 ft

13

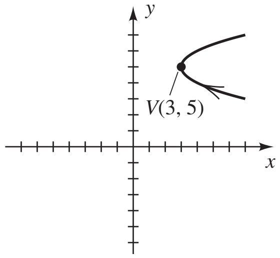


14 $y = \pm\frac{\sqrt{65}}{4}x$ 15 $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{9} = 1$

16 $x = -\frac{11}{7}\sqrt{49 + y^2}$

17 $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; esta es una elipse con centro (3, 0), eje menor horizontal de longitud 2(2) = 4 y eje mayor vertical de longitud 2(5) = 10. Como t varía de 0 a 2π, (x, y) traza la elipse a partir de (5, 0) hacia la izquierda regresando a (5, 0).

18



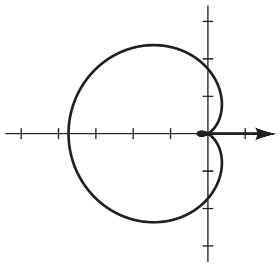
19 $x = t, y = -\sqrt{t^2 + 4}$; t en $\mathbb{R}$

20 C es la parte de la circunferencia con centro (4, −1) y radio 3 que tiene orientación en sentido de las manecillas del reloj, comenzando en (4, 2) y terminando en (7, −1).

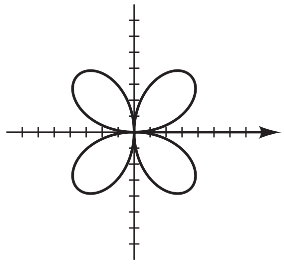
21 $5440\sqrt{3}$ ft **22** $\left(-4, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ **23** $r^2 = 7 \sec 2\theta$

24 $x^2 + (y-2)^2 = 4$

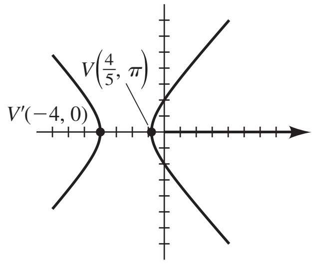
25



26



27 $\dfrac{3}{2}$; hipérbola



28 $16y^2 = 20x^2 + 96x + 64$

29 $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

Índice

D

E

G

H

I

R

S

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FÓRMULAS DE LOS PRODUCTOS NOTABLES

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

FÓRMULAS DE FACTORIZACIONES NOTABLES

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

EXPONENTES Y RADICALES

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$
$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$(ab)^n = a^n b^n \qquad a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + y^n,$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

DESIGUALDADES

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$

VALOR ABSOLUTO ($d > 0$)

$|x| < d$ si y sólo si

$$-d < x < d$$

$|x| > d$ si y sólo si

$$x > d \quad \text{o} \quad x < -d$$

MEDIAS

Media aritmética A de n números

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Media geométrica G de n números

$$G = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}, \; a_k > 0$$

SUCESIONES

n-ésimo término de una sucesión aritmética con primer término a_1 y diferencia constante d

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Suma S_n de los primeros n términos de una sucesión aritmética

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

o

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

n-ésimo término de una sucesión geométrica con primer término a_1 y razón común r

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Suma S_n de los primeros n términos de una sucesión geométrica

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

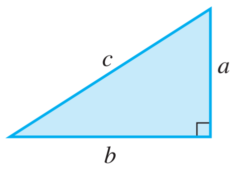
$y = \log_a x$ significa $a^y = x$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^r = r \log_a x$$
$$a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a a^x = x$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log x = \log_{10} x$$
$$\ln x = \log_e x$$
$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

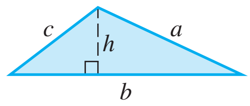
área A **perímetro** P **circunferencia** C **volumen** V **área de surperficie curva** S **altitud** h **radio** r

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



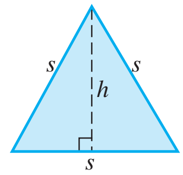
Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



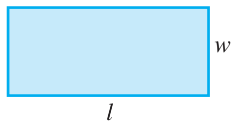
$A = \frac{1}{2}bh \qquad P = a + b + c$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



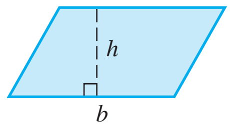
$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s \qquad A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

RECTÁNGULO



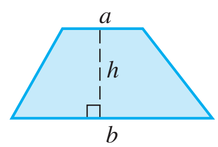
$A = lw \qquad P = 2l + 2w$

PARALELOGRAMO



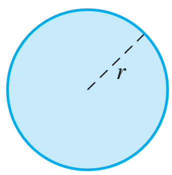
$A = bh$

TRAPECIO



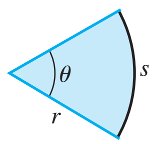
$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

CÍRCULO



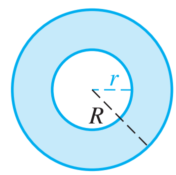
$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

SECTOR CIRCULAR



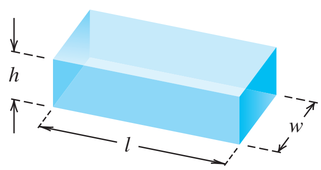
$A = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad s = r\theta$

ANILLO CIRCULAR



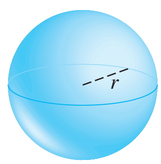
$A = \pi(R^2 - r^2)$

PARALELEPÍPEDO



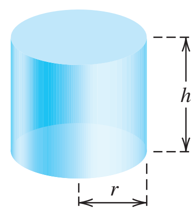
$V = lwh \qquad S = 2(hl + lw + hw)$

ESFERA



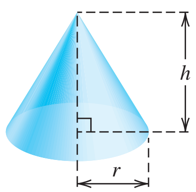
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$

CILINDRO RECTO



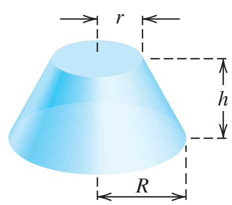
$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi rh$

CONO RECTO



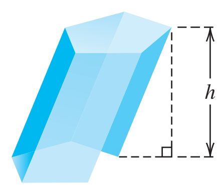
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

CONO TRUNCADO



$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$

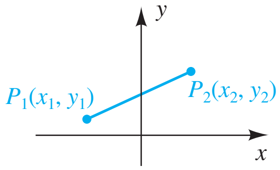
PRISMA



$V = Bh$ con B el área de la base

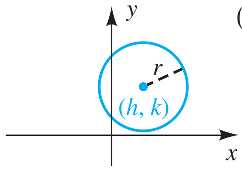
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



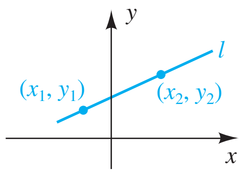
ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



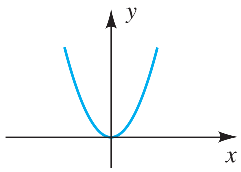
PENDIENTE *m* DE UNA RECTA

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

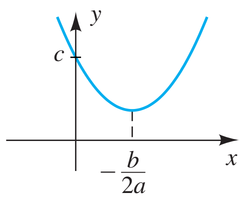


GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

$y = ax^2, a > 0$

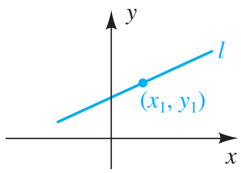


$y = ax^2 + bx + c, a > 0$



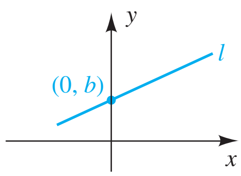
FORMA PUNTO-PENDIENTE DE UNA RECTA

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



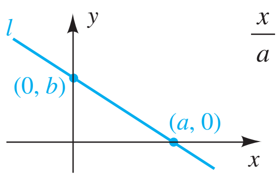
FORMA PENDIENTE-INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

$$y = mx + b$$



FORMA DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$



CONSTANTES

$\pi \approx 3.14159$

$e \approx 2.71828$

CONVERSIONES

1 centímetro ≈ 0.3937 pulgada

1 metro ≈ 3.2808 pies

1 kilómetro ≈ 0.6214 milla

1 gramo ≈ 0.0353 onza

1 kilogramo ≈ 2.2046 libras

1 litro ≈ 0.2642 galón

1 mililitro ≈ 0.0381 onza fluida

1 joule ≈ 0.7376 pies-libra

1 newton ≈ 0.2248 libra

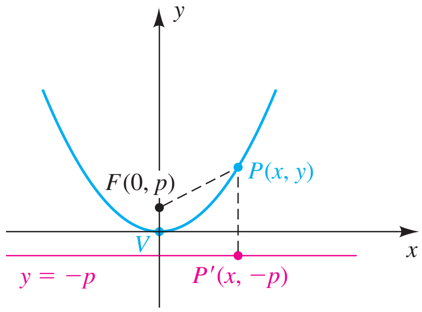
1 lumen ≈ 0.0015 watt

1 acre = 43,560 pies cuadrados

SECCIONES CÓNICAS

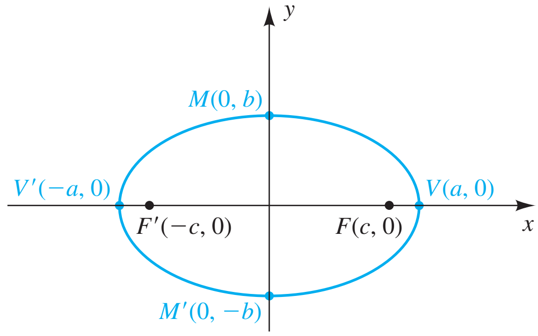
PARÁBOLA

$$x^2 = 4py$$



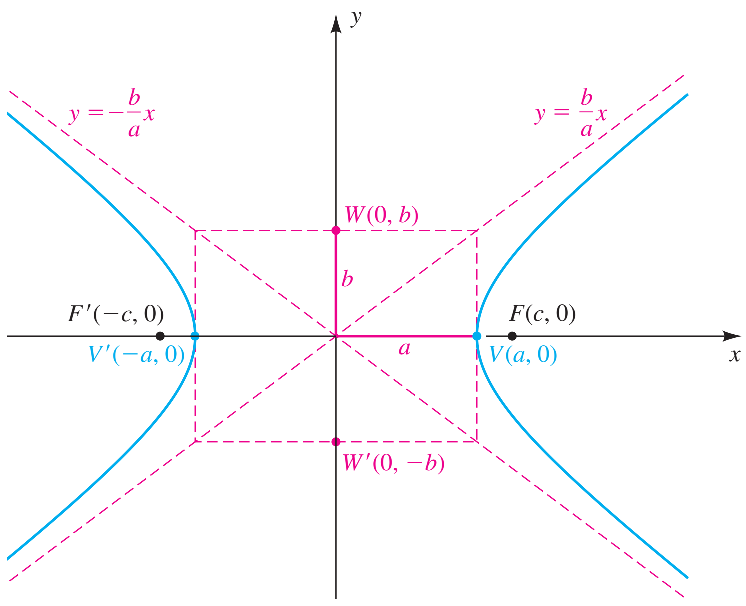
ELIPSE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad a^2 = b^2 + c^2$$



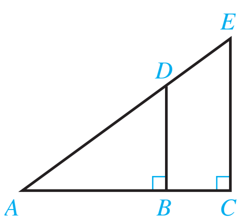
HIPÉRBOLA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad c^2 = a^2 + b^2$$



GEOMETRÍA PLANA

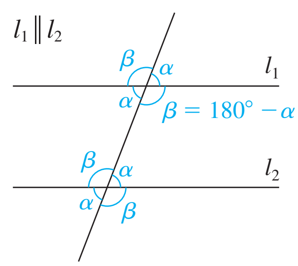
TRIÁNGULOS SEMEJANTES



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

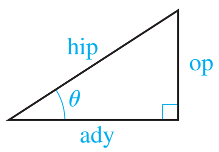
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS CONGRUENTES



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

DE ÁNGULOS AGUDOS

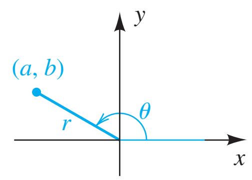


$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}}$ $\qquad \csc\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}}$ $\qquad \sec\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}}$ $\qquad \cot\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}$

DE ÁNGULOS ARBITRARIOS

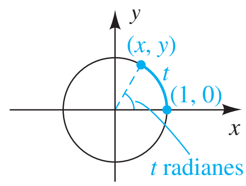


$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{r}$ $\qquad \csc\theta = \dfrac{r}{b}$

$\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ $\qquad \sec\theta = \dfrac{r}{a}$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ $\qquad \cot\theta = \dfrac{a}{b}$

DE NÚMEROS REALES

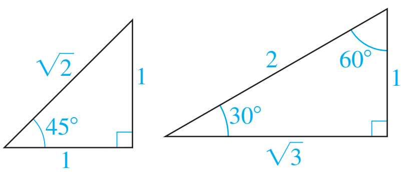


$\operatorname{sen} t = y$ $\qquad \csc t = \dfrac{1}{y}$

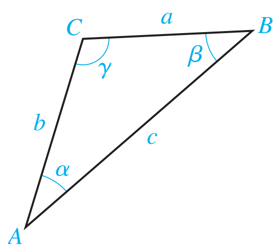
$\cos t = x$ $\qquad \sec t = \dfrac{1}{x}$

$\tan t = \dfrac{y}{x}$ $\qquad \cot t = \dfrac{x}{y}$

TRIÁNGULOS RECTOS ESPECIALES



TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO



ÁREA

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen}\beta$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\gamma$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde $s = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$ *(Fórmula de Heron)*

LEY DE LOS COSENOS

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

LEY DE LOS SENOS

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

VALORES ESPECIALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

θ (grados)	θ (radianes)	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	0	1	0	—	1	—
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0	—	1

ALFABETO GRIEGO

Letra	Nombre	Letra	Nombre
A α	alfa	N ν	nu
B β	beta	Ξ ξ	xi
Γ γ	gamma	O o	ómicron
Δ δ	delta	Π π	pi
E ϵ	épsilon	P ρ	rho
Z ζ	zeta	Σ σ	sigma
H η	eta	T τ	tau
Θ θ	theta	Υ υ	upsilon
I ι	iota	Φ ϕ (φ)	phi
K κ	kappa	X χ	chi
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
M μ	mu	Ω ω	omega

TRIGONOMETRÍA

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

FÓRMULAS PARA NEGATIVOS

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\tan(-t) = -\tan t$$

$$\cot(-t) = -\cot t$$

$$\sec(-t) = \sec t$$

$$\csc(-t) = -\csc t$$

FÓRMULAS DE COFUNCIÓN

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

FÓRMULAS DE DOBLE ÁNGULO

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$$

$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$$

$$= 2\cos^2 u - 1$$

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$$

FÓRMULAS DE LA ADICIÓN

$$\operatorname{sen}(u + y) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

IDENTIDADES DE SEMIÁNGULOS

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

FÓRMULAS DE PRODUCTO A SUMA

$$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

FÓRMULAS DE LA RESTA

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

FÓRMULAS DE SEMIÁNGULOS

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

FÓRMULAS DE SUMA A PRODUCTO

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2\operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right)\cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2\cos\left(\frac{u + v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\left(\frac{u + v}{2}\right)\cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u - \cos v = -2\operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

La última edición de Swokowski y Cole, *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, conserva los elementos que lo han hecho tan popular entre los instructores y estudiantes por igual: exposición clara, un diseño atractivo y ordenado y ricas series de ejercicios de aplicación. Los excelentes problemas, probados a lo largo del tiempo, han sido ampliamente elogiados por su consistencia y su grado apropiado de dificultad para los estudiantes de precálculo. El libro también incluye algunos temas más difíciles, como la Regla de los signos de Descartes y los Teoremas de límites, que han sido eliminados de otros textos o relegados a un apéndice. La décimo tercera edición cuenta con referencias actualizadas sobre tópicos y datos, y sigue siendo apoyada por recursos tecnológicos extraordinarios. Matemáticamente profundo, este libro efectivamente prepara a los estudiantes de otros cursos en matemáticas.



Características:

Nuevas pruebas al final de cada capítulo proporcionan una fuente adicional de preguntas de examen y una buena práctica para los estudiantes. Los nuevos elementos incluyen preguntas directas sobre la base de ejercicios de las secciones, así como cuestiones que requieren los estudiantes para estirar un poco su forma de pensar y ampliar su uso de los conceptos básicos.

- La notación de flecha se introduce antes (sección 2.2) y es revisada con más frecuencia en esta edición, reforzando el contenido de precálculo para preparar más eficazmente a los estudiantes para temas de cálculo.
- Aproximadamente el 20% de los ejercicios son nuevos o revisados,incluidos muchos que ofrecen datos actualizados reales y nuevas aplicaciones.
- Nuevos ejemplos ilustran numerosos temas: encontrar la inversa de una función racional (sección 4.1, con el método de control presentado en una nota marginal), predicen una cantidad por medio de la fórmula de decaimiento (sección 4.3), ¿cómo demostrar que una ecuación no es un identidad (artículo 6.1), el uso de la fórmula de la resta para el coseno para encontrar un valor exacto cuando se da un valor trigonométrico exacto y el signo de otra función trigonométrica (sección 6.3), y cómo encontrar los valores de ángulo doble de otras funciones trigonométricas, dado que la tangente de un ángulo es una constante (sección 6.4).
- Otros nuevos ejemplos: resolver una ecuación polinomial utilizando el teorema de las *n* raíces (sección 7.6), sustituir a la ayuda en la solución de un sistema de ecuaciones (sección 8.2); encontrar términos de una secuencia que se define de forma recursiva en términos de dos términos anteriores (sección 9.1); dados dos términos de una progresión aritmética, encontrar uno nuevo con una nueva fórmula (artículo 9.2); dados dos términos de una progresión geométrica, encontrar uno nuevo con una nueva fórmula (sección 9.3), y las probabilidades de una escalera real (sección 9.8).

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607481779-9
ISBN-10: 607481779-0

9 786074 817799